نشرالگو

موج ۲۰

مرحله‌ای و جامع

ویژهٔ آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضیات گسسته دوازدهم

نصیر کریمی جونی

- امتحان‌های درس به درس
- امتحان‌های نیم‌سال اول و دوم
- مرورنامهٔ شب امتحان
- امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی
- امتحان‌های نهایی اخیر
- پاسخ‌های تشریحی + کلید تصحیح

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خداقوت جانانه به شما دانش‌آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمرهٔ مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعهٔ آن، کسب نمرهٔ ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ درس‌نامه‌ای کارراه‌بینداز دارد که مطابق فصل‌ها و درس‌های کتاب دسته‌بندی شده است. در هر درس مفاهیم اصلی و قضایای مهم گفته شده است.

۲ آزمون‌محور است، تا برای هر آزمون در سطح مدرسه و امتحان نهایی آمادگی لازم را کسب کنید.

۳ پاسخنامهٔ آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعهٔ دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴ همهٔ مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سطحی مناسب است. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمرهٔ مناسبی کسب کنند.

علاوه بر درس‌نامه، این کتاب دارای ۲۵ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۷	هر درس ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول و فصل دوم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۳	فصل دوم (درس دوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی ریاضیات گسسته است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

نصیر کریمی جونی

فهرست مطالب

آزمون ۱

موضوع آزمون: فصل اول - درس اول

صفحهٔ پاسخ: ۵۰

امتحان نهایی: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۶۰ دقیقه**

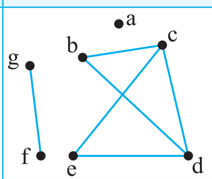
ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.** **الف)** اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است. **ب)** برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است. **پ)** مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است. **ت)** حاصل‌جمع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.** **الف)** اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$، آن‌گاه .... **ب)** اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، آن‌گاه تابع $f+g$ در $x=a$ .... است. **پ)** حاصل‌ضرب هر عدد گویای .... در هر عدد گنگ عددی گنگ است.	۱
۳	**گزینهٔ درست را انتخاب کنید.** **الف) اگر $a, b\in\mathbb{R}$، کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست است؟** ۱) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ ۲) $a<b \Leftrightarrow a^۳<b^۳$ ۳) $a<b \Leftrightarrow (a-b)^۲\geq ۰$ ۴) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۳$ **ب) اگر $S=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۱\}$ و A مجموعهٔ همهٔ اعداد $n\in S$ باشد که $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج است، آن‌گاه A چند عضو دارد؟** ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶	۰/۵
۴	**ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.**	۱
۵	**گزارهٔ درست را ثابت کنید و برای گزارهٔ نادرست مثال نقض ارائه دهید.** **الف)** اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. **ب)** میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است.	۱/۷۵
۶	**اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha+\beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha+۲\beta$ گنگ است.**	۱/۵
۷	**ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.**	۱/۲۵
۸	**گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:** «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$»	۱/۲۵
۹	**آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$.**	۰/۷۵
	موفق باشید. جمع نمره	۱۰

آزمون ۵

موضوع آزمون: نیمسال اول (۱)

صفحات پاسخ: ۵۲ تا ۵۳

امتحان نهایی: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

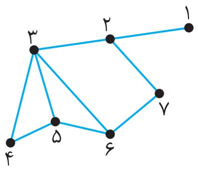
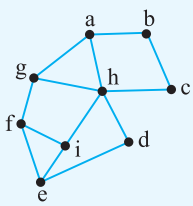
ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.** **الف)** اگر $a\|b$، آن‌گاه $[a,b]=\|b\|$. (دی ۹۸ و دی ۹۹) **ب)** معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)\|m$. (دی ۹۸ و دی ۹۹) **پ)** در هر گراف G از مرتبهٔ p، داریم $\Delta(G)+\delta(G)=p-۱$. **ت)** هر گراف ۲-منتظم همبند است.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.** **الف)** در یک گراف k-منتظم، ماکزیمم درجهٔ رأس برابر با .... است. (خرداد ۹۹) **ب)** m عددی صحیح است. حاصل $(۲m, ۶m^۳)$ برابر با .... است. (خرداد ۱۴۰۰) **پ)** گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (خرداد ۱۴۰۱) **ت)** اگر $a\|b$ و $b\|a$، آن‌گاه	۱
۳	**اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.** (خارج خرداد ۹۸)	۱/۲۵
۴	**ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.** (شهریور ۱۴۰۰)	۱
۵	**به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر** $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$. (دی ۹۸)	۱
۶	**اگر** $n\in\mathbb{N}$، $n\|۹k+۷$ و $n\|۷k+۶$، **ثابت کنید** $n=۱$ **یا** $n=۵$. (خرداد ۹۹)	۱
۷	**اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ را بر ۸ بیابید.** (دی ۹۷)	۱/۵
۸	**اگر** $a\|c$، **آن‌گاه حاصل** $([c,۱],(a,[a,b]))$ **را به‌دست آورید.**	۱
۹	**بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۳n+۴$ و $۷n+۹$ را بیابید.**	۱/۵
۱۰	**اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ را بر ۱۷ محاسبه کنید.** (شهریور ۹۹ و دی ۹۹ با تغییر)	۱/۲۵
۱۱	**باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۹+۲۷^۷$ را بر ۱۳ بیابید.** (شهریور ۹۸)	۱/۵
۱۲	**معادلهٔ هم‌نهشتی $۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.** (خرداد ۹۹)	۱/۲۵
۱۳	**دانش‌آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است (پاسخ هر سؤال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد). این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟** (شهریور ۱۴۰۱)	۱/۷۵
۱۴	**گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید.** **الف)** دوری به طول ۴ بنویسید. **ب)** دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید. **پ)** $N_G[d]$ را با اعضا مشخص کنید. **ت)** آیا G همبند است؟ 	۱/۲۵
۱۵	**ثابت کنید که تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.** (خرداد ۹۹ و دی ۹۷)	۱
۱۶	**گراف G، ۶ رأسی ۳-منتظم است.** (خرداد ۹۹) **الف)** اندازهٔ گراف G را بیابید. **ب)** نمودار گراف G را رسم کنید.	۰/۷۵
۱۷	**گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف مرتبهٔ گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.** (دی ۹۷)	۱
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

آزمون ۱۲

موضوع آزمون: نیمسال دوم (۱)

صفحات پاسخ: ۵۹ تا ۶۰

امتحان نهایی: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** **الف)** تعداد توابع غیریک‌به‌یک از مجموعهٔ $A=\{a, b, c\}$ به خودش برابر ۲۱ است. **ب)** در گراف C_5 هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، احاطه‌گر مینیمم است.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.** **الف)** اصل لانه کبوتری در واقع قضیه‌ای است که با .... ثابت می‌شود. **ب)** با رقم‌های ۳، ۹، ۹، ۳ و ۹ تعداد .... کد پنج‌رقمی می‌توان نوشت.	۰/۵
۳	**عدد احاطه‌گری گراف کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟** ۱) K_7 ۲) C_6 ۳) P_5 ۴) P_7	۰/۵
۴	**در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است:** (دی ۹۹) **الف)** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. **ب)** عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید. 	۲
۵	**در گراف شکل روبه‌رو یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.** (خرداد ۱۴۰۰) 	۱
۶	**ابتدا گراف P_9 را رسم کنید. سپس یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.** (خرداد ۱۴۰۱)	۱
۷	**می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟** (دی ۱۴۰۱)	۱
۸	**معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_1>2$ و $x_3>3$ باشند؟** (دی ۹۸)	۱
۹	**برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4!\times 7!$ باشد.** (شهریور ۱۴۰۱)	۱
۱۰	**هشت نفر به چند روش می‌توانند در سه اتاق، سه‌نفره، چهارنفره و یک‌نفره قرار بگیرند؟** (شهریور ۹۹)	۰/۷۵
۱۱	**قرار است چهار مدرس T_1، T_2، T_3 و T_4 در چهار جلسهٔ متوالی در چهار کلاس C_1، C_2، C_3 و C_4 به‌گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.** (شهریور ۹۸)	۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱۲	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $\begin{matrix} ۱ \to ۳ \\ ۲ \to ۲ \\ ۳ \to ۴ \\ ۴ \to ۱ \end{matrix}$ مربع لاتین B را به‌دست آورید. $A = \begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$ (خرداد ۱۴۰۱) ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۲
۱۳	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(۱ \le n \le ۳۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟ (دی ۱۴۰۰)	۱/۵
۱۴	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند، مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند. (خرداد ۱۴۰۰)	۱/۷۵
۱۵	در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $۱ \le n \le ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟ (خرداد ۹۹)	۱
۱۶	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. (دی ۱۴۰۰)	۱
۱۷	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آن‌ها فاصله‌شان کمتر از ۱ است؟ (شهریور ۱۴۰۱)	۱/۲۵
۱۸	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟ (خرداد ۱۴۰۰)	۰/۷۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

مرورنامه

فصل اول درس اول: استدلال ریاضی

در برخورد با هر مسئلهٔ ریاضی الگوریتم زیر را بررسی می‌کنیم.

- استدلال
  - اثبات (در صورت درستی حکم)
    - مستقیم
      - استدلال استنتاجی $p \Rightarrow q$
      - اثبات بازگشتی $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p_n$
      - اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها $(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$
    - غیرمستقیم (برهان خلف) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
  - مثال نقض (در صورت نادرستی حکم)

- **مثال نقض:** به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی درست نیست، مثال نقض می‌گوییم.
- **استدلال استنتاجی:** به نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی گفته می‌شود.
- **گزاره‌های هم‌ارز (معادل):** دو حکم را هم‌ارز یا معادل می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت.

فصل اول درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است - یا a، b را می‌شمارد (عاد می‌کند) یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است - هرگاه عددی صحیح مانند q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$. اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم $a \nmid b$.

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

- **ویژگی ۱:** اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه عدد a هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد، یعنی $a|b \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z} : a|mb$
- **ویژگی ۲:** اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد، یعنی $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : b=aq_1 \quad (1)$$

$$b|c \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : c=bq_2 \xrightarrow{(1)} c=(aq_1)q_2 = a(q_1q_2) \xrightarrow{q_1q_2=q} c=aq \Rightarrow a|c$$

- **ویژگی ۳:** اگر عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد، یعنی $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : c=aq_2 \end{cases} \Rightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q} \Rightarrow a|b \pm c$$

• **ویژگی ۴:** اگر $a|b$ و $b\neq 0$، آن‌گاه $|a|\leq|b|$.

اثبات: چون $a|b$، پس عددی صحیح مانند q وجود دارد به‌طوری که $b=aq$ و چون $b\neq 0$، پس $q\neq 0$ و چون $q\in\mathbb{Z}$، پس $|q|\geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$1\leq|q|\xrightarrow{|a|\geq 0}|a|\times 1\leq|a||q|\Rightarrow|a|\leq|aq|\Rightarrow|a|\leq|b|$$

نتیجه اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a=\pm b$.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b\xrightarrow{(4)}|a|\leq|b| \\ b|a\xrightarrow{(4)}|b|\leq|a| \end{cases}\Rightarrow|a|=|b|\Rightarrow a=\pm b$$

• **عدد اول:** هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P=\{2,3,5,7,11,\dots\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف عدد طبیعی d را ب.م.م. دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر این دو شرط برقرار باشند، آن‌گاه $(a,b)=d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0: m|a, m|b\Rightarrow m\leq d$

تعریف عدد طبیعی c را ک.م.م. دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر این دو شرط برقرار باشند، آن‌گاه $[a,b]=c$.

الف) $a|c, b|c$

ب) $\forall m>0: a|m, b|m\Rightarrow c\leq m$

توجه با توجه به تعاریف ب.م.م. و ک.م.م. داریم

۱) $a|b\Rightarrow(a,b)=|a|$

۲) $a|b\Rightarrow[a,b]=|b|$

قضیه **تقسیم**

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آن‌گاه اعداد صحیح یکتایی مانند q و r یافت می‌شوند به‌طوری که $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

فصل اول

درس سوم

هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

تعریف برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم a با b هم‌نهشت است به سنج یا پیمانهٔ m و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m به زبان ریاضی عبارت است از

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\quad\forall m\in\mathbb{N}: a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow m|a-b$$

قرارداد

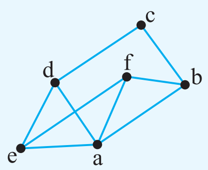
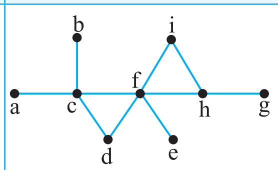
مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r است، یعنی $\{x\in\mathbb{Z}|x=mk+r\}$ کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و آن را با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

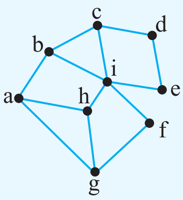
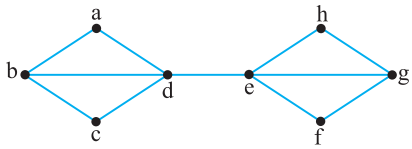
آزمون ۱۵

موضوع آزمون: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی

صفحات پاسخ: ۶۳ تا ۶۴

امتحان نهایی: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.** **الف)** دو گزارهٔ «نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.» و «فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.» هم‌ارز هستند. **ب)** اگر a، b و c عددهایی صحیح باشند و $ab\|c$، آن‌گاه $a\|c$ و $b\|c$. **پ)** اگر $\delta(G)=0$، آن‌گاه همواره گراف G ناهمبند است. **ت)** اگر D یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G باشد و $D\subseteq D'$، آن‌گاه D' نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G است.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.** **الف)** در تقسیم عدد -143 بر ۱۷، باقی‌مانده .... و خارج قسمت .... است. **ب)** در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، برای رأس دلخواه $v\in G$، حاصل $\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)$ برابر .... است. **پ)** مجموع درایه‌های هر مربع لاتین 5×5 برابر .... است.	۱
۳	**با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.**	۱
۴	**ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $a^2+ab+b^2\geq 0$.**	۱
۵	**ثابت کنید اگر $a\|b$ و $b\neq 0$، آن‌گاه $\|a\|\leq\|b\|$.**	۱
۶	**اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۷ برابر ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2a+3$ بر ۱۴ را به‌دست آورید.**	۱
۷	**معادلهٔ سیالهٔ خطی $5x+11y=36$ را حل کنید و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.**	۱
۸	**تعداد یال‌های یک گراف ۵-منتظم از مرتبهٔ ۲۰ چقدر از تعداد یال‌های یک گراف کامل مرتبهٔ ۹ بیشتر است؟**	۱
۹	**گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.** **الف)** یک دور به طول ۶ در این گراف بنویسید. **ب)** $N_G(a)$ را مشخص کنید. 	۰/۵
۱۰	**با توجه به گراف روبه‌رو، به سؤالات زیر پاسخ دهید.** **الف)** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی بنویسید. **ب)** عدد احاطه‌گری گراف را با راه‌حل کامل مشخص کنید. 	۲/۲۵

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	**گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید.** **الف)** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی بنویسید. **ب)** با افزودن کدام یال، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد. 	۱
۱۲	**الف) گراف شکل زیر چند γ-مجموعه دارد؟ همهٔ γ-مجموعه‌های آن را بنویسید.** **ب) برای این گراف، دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم با تعداد عضوهای نابرابر مشخص کنید.** 	۱/۵
۱۳	۹ نفر برای صعود به قلهٔ دنا به چند روش می‌توانند به گروه‌های ۲، ۳ و ۴ نفری تقسیم شوند؟	۰/۷۵
۱۴	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ با شرط $x_۲>۳$ و $x_۱\geq ۲$ را به‌دست آورید؟	۱/۵
۱۵	۳ برادر می‌خواهند با ۳ نوع موتورسیکلت متمایز در ۳ پیست موتورسواری متفاوت در ۳ روز آخر هفته مسابقه دهند به‌طوری که هر برادر با هر موتورسیکلت در هر پیست یک بار مسابقه داده باشد و نیز هر موتورسیکلت در هر پیست دقیقاً یک بار استفاده شده باشد. به کمک مربع لاتین برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.	۱/۵
۱۶	چند بارکُد کالا با شماره‌های پنج‌رقمی می‌توان ساخت که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شوند؟	۱/۷۵
۱۷	۱۰ نقطهٔ داخل مربعی به ضلع واحد مفروض‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ حداقل دو نقطه از این ۱۰ نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ است.	۱/۲۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) درست. (۰/۲۵) بنابر فرض $k=n(n+1)$ که در آن $n\in\mathbb{N}$، پس

$4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

که مربع کامل ست.

ب) نادرست. (۰/۲۵) قرار دهید $n=4$. در این صورت $2^4-1=15$ عددی اول نیست.

پ) درست. (۰/۲۵) اگر $n=2k+1$ و $m=2k'+1$ که $k,k'\in\mathbb{Z}$ دو عدد فرد باشند، آن‌گاه $m+n=2k+1+2k'+1=2(k+k'+1)=2k''$ که عددی زوج است.

ت) نادرست. (۰/۲۵) برای دو عدد گنگ $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ داریم $(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$ که عددی گویا است.

۲ الف) $a=0$ یا $b=0$ (۰/۵) ب) ناپیوسته (۰/۲۵) پ) ناصفر (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ (۲) (۰/۲۵) - چون هر دو تابع $y=x^3$ و $y=\sqrt[3]{x}$ اکیداً صعودی‌اند، پس $a<b$ اگر و تنها اگر $a^3<b^3$. برای گزینه‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

گزینهٔ (۱): $a=-2, b=1\Rightarrow a<b, a^2=4>1=b^2$

گزینهٔ (۳): $a=b=1\Rightarrow (a-b)^2=0, a\not<b$

گزینهٔ (۴): $a=-2, b=1\Rightarrow a<b, a^2=4>1=b^3$

ب) گزینهٔ (۳) (۰/۲۵) - ابتدا توجه کنید که $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. بنابراین $n\in A$ اگر و تنها اگر $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد. اکنون با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن برای n، مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$n=1\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$ فرد $\Rightarrow 1\notin A$

$n=2\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{2\times 3}{2}=3$ فرد $\Rightarrow 2\notin A$

$n=3\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{3\times 4}{2}=6$ زوج $\Rightarrow 3\in A$

$n=4\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{4\times 5}{2}=10$ زوج $\Rightarrow 4\in A$

$n=5\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{5\times 6}{2}=15$ فرد $\Rightarrow 5\notin A$

$n=6\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{6\times 7}{2}=21$ فرد $\Rightarrow 6\notin A$

$n=7\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{7\times 8}{2}=28$ زوج $\Rightarrow 7\in A$

$n=8\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{8\times 9}{2}=36$ زوج $\Rightarrow 8\in A$

$n=9\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{9\times 10}{2}=45$ فرد $\Rightarrow 9\notin A$

$n=10\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{10\times 11}{2}=55$ فرد $\Rightarrow 10\notin A$

$n=11\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{11\times 12}{2}=66$ زوج $\Rightarrow 11\in A$

بنابراین $A=\{3,4,7,8,11\}$، یعنی A پنج‌عضوی است.

۴ $n=2k$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n^2-5n+7=4k^2-10k+6+1$ (۰/۲۵)

$=2(2k^2-5k+3)+1$ (۰/۲۵) $=2q+1$ (۰/۲۵)

۵ الف) درست. (۰/۲۵) اگر $n=2k+1$ عددی فرد باشد که $k\in\mathbb{Z}$. آن‌گاه

$(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1$ (۰/۲۵) $-1=4k(k+1)$ (۰/۲۵)

$=4\times 2q$ (۰/۲۵) $=8q$

توجه کنید که چون از بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$، یکی زوج و دیگری فرد است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها عددی زوج خواهد بود.

ب) نادرست. (۰/۲۵) عددهای ۱، ۳، ۴، ۷ و ۱۰ (۰/۲۵) را در نظر بگیرید. در این صورت

$\bar{x}=\frac{1+3+4+7+10}{5}=5$ (۰/۲۵)

که همان عدد وسط نیست.

۶ اگر $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس عددی گویاست. (۰/۲۵) از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. (۰/۲۵) در نتیجه $\beta=(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)\in\mathbb{Q}$. (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسئله، β گنگ است. (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

۷ فرض کنید $a,b\ge 0$. در این صورت

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$ (۰/۵)

چون مربع هر عدد حقیقی عددی نامنفی است، پس نامساوی آخر همواره برقرار است. (۰/۲۵)

۸ $x^2+y^2+1\ge xy+x+y$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)\ge 0$ (۰/۵)

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\ge 0$ (۰/۲۵)

چون مربع هر عدد حقیقی عددی نامنفی است و مجموع سه عدد نامنفی نیز عددی نامنفی است، پس نامساوی آخر همواره برقرار است. (۰/۲۵)

۹ بله وجود دارند. (۰/۲۵) برای مثال قرار دهید $x=0$ و $y=-2$. (۰/۲۵) در این صورت

$x^2+y^2=0^2+(-2)^2=4=(0+(-2))^2=(x+y)^2$ (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف) درست. (۰/۲۵) زیرا

$$(n,n+1)=\begin{cases}d|n\\ d|n+1\end{cases}\Rightarrow d|(n+1)-n\Rightarrow d|1\xrightarrow{d>0}d=1$$

ب) نادرست. (۰/۲۵) برای مثال $3|0$ و $|3|>|0|$

پ) درست. (۰/۲۵)

$$\begin{cases}a|b\Rightarrow a^m|b^m\\ m\le n\Rightarrow b^m|b^n\end{cases}\Rightarrow a^m|b^n$$

ت) نادرست. (۰/۲۵) برای مثال $2|3+5=8$ ولی $2\nmid 3$ و $2\nmid 5$.

۹ ابتدا توجه کنید که $(۷,۴)=۱$. پس معادله جواب دارد.

$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴\times۵+۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۷x\overset{۴}{\equiv}۲۱$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow[\div ۷]{(۷,۴)=۱} x\overset{۴}{\equiv}۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۴k+۳$ (۰/۲۵)

۱۰ الف) چون $(۶,۷)=۱|۱۸۵$ ، پس معادله جواب دارد. (۰/۲۵)

ب) $۶x\overset{۷}{\equiv}۱۸۵$ (۰/۲۵) $=۲۳\times۷+۲۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۶x\overset{۷}{\equiv}۲۴$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[\div۶]{(۶,۷)=۱}$

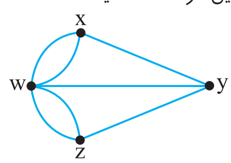
$x\overset{۷}{\equiv}۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۷k+۴$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}}$

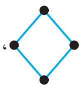
$۶(۷k+۴)+۷y=۱۸۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۴۲k+۲۴+۷y=۱۸۵$

$۷y=-۴۲k+۱۶۱\Rightarrow y=-۶k+۲۳$ (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۴)

۱ الف) نادرست. (۰/۲۵) گراف حاصل از مدلسازی پل کونیگسبرگ در شکل زیر رسم شده است. چون بین دو رأس w و x و نیز بین دو رأس w و z دو یال وجود دارد، پس این گراف ساده نیست.



ب) نادرست. (۰/۲۵) برای مثال گراف  ، ۴ رأس زوج دارد. پ) درست (۰/۲۵)

ت) نادرست. (۰/۲۵) به جای «همسایگی بسته» باید گفته شود «همسایگی باز» تا گزاره درست شود. در حقیقت، در هر گراف ساده، تعداد عضوهای مجموعهٔ همسایگی باز یک رأس برابر درجهٔ آن رأس است.

۲ الف) طوقه ب) $\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$ (۰/۲۵) پ) همبند (۰/۲۵)

ت) مجاور (۰/۲۵)

۳ الف) $\frac{n(n-1)}{۲}$ (۰/۲۵) ب) دور (۰/۲۵)

۴ گراف ساده‌ای را در نظر بگیرید که رأس‌های آن افراد حاضر در اتاق باشند و این رأس‌ها را با $v_1,\dots,v_۷$ نشان دهید. فرض کنید دو رأس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر افراد متناظر به آن‌ها با یکدیگر دست داده باشند. (۰/۲۵) در این صورت

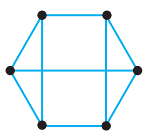
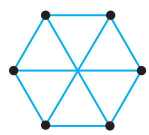
$\sum_{i=1}^{۷}\deg(v_i)=۲q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۶\times۲+\deg(v_۷)=۲q$ (۰/۲۵)

$\deg(v_۷)=۲q-۱۲=۲k$ (۰/۲۵)

در نتیجه درجهٔ رأس هفتم عددی زوج است، یعنی نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد. (۰/۲۵)

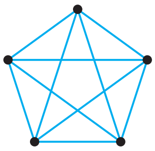
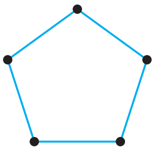
۵ $q=۲p-۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{۳p}{۲}=۲p-۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p=۶$ (۰/۲۵)

به یکی از دو گراف زیر (۰/۵) نمره داده شود.

 یا 

۶ $\deg_G(v)+\deg_{\bar G}(v)=p-1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۹+۱۲=p-۱$ (۰/۲۵)

$p=۲۲$ (۰/۲۵)

۷ الف)  (۰/۵) ب)  (۰/۵)

توجه کنید که در گراف k-منتظم از مرتبهٔ ۵ داریم $۵k=۲q$. بنابراین k باید عددی زوج باشد. چون گراف غیرتهی است، پس $k=۲$ یا $k=۴$.

۸ الف) $a-b-g-c$ (۰/۲۵) ب) $b-c-d-g-b$ (۰/۲۵)

پ) $\deg_G(b)+\deg_{\bar G}(b)=p-1\Rightarrow ۳+\deg_{\bar G}(b)=۷-۱$ (۰/۲۵)

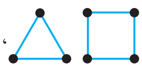
$\deg_{\bar G}(b)=۶-۳=۳$ (۰/۲۵)

ت) خیر، (۰/۲۵) زیرا دارای رأس ایزولهٔ f است و هیچ مسیری از f به سایر رأس‌ها وجود ندارد. (۰/۲۵) ث) $N_{\bar G}[g]=\{g,e,f,a\}$. (۰/۵) توجه کنید که $N_{\bar G}[g]$ متشکل از g و رأس‌هایی از گراف است که در G با g مجاور نیستند.

۹ الف) گرافی از مرتبهٔ n (۰/۲۵) را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی (۰/۲۵) و برابر با عدد k، $(۰\le k<n)$ باشد، (۰/۲۵) گراف k-منتظم مرتبهٔ n می‌نامند.

ب) خیر، (۰/۲۵) $\sum_{i=1}^{۵}\deg(v_i)=۲q\Rightarrow ۵\times۳=۲q$ تناقض (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۵)

۱ الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) – شکل درست شرط لازم و کافی برای وجود جواب $(a,m)|b$ است. در حقیقت معادلهٔ همنهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,b)|m$. پ) نادرست (۰/۲۵) – برای مثال در گراف  ، یعنی $K_۲$ داریم $\Delta(G)=\delta(G)=۱$ و $p=۲$. بنابراین $\Delta(G)+\delta(G)=p$. ت) نادرست (۰/۲۵) – برای مثال گراف  ، ۲-منتظم از مرتبهٔ ۷ و ناهمبند است.

۲ الف) k. (۰/۲۵) در گراف k-منتظم، همهٔ رأس‌ها از درجهٔ k هستند. بنابراین $\Delta=\delta=k$. ب) $۲|m$. (۰/۲۵) توجه کنید که

$۲m|۶m^۳\Rightarrow(۲m,۶m^۳)=|۲m|=۲|m|$

پ) همبند (۰/۲۵) ت) $a=\pm b$ (۰/۲۵)

۳ چون ab فرد است، پس a و b هر دو فردند. (۰/۲۵) بنابراین $a=۲k+۱$ و $b=۲k'+۱$ که $k,k'\in\mathbb{Z}$ (۰/۲۵) و در نتیجه

$a^۲+b^۲=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱$ (۰/۲۵)

$=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k+۲k'^۲+۲k'+۱}_{q})$ (۰/۲۵) $=۲q$ (۰/۲۵)

پس $a^۲+b^۲$ زوج است.

۴ فرض کنید r یک عدد گویا و x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $r+x$ عددی گنگ است. به خلف فرض کنید $r+x$ گویا است. (۰/۲۵) می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است، پس $(r+x)-r\in\mathbb{Q}$ ، (۰/۲۵) یعنی $x\in\mathbb{Q}$. (۰/۲۵) این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

۵

$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \xleftrightarrow{a>۰} a^{۲}+۱\geq ۲a$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow a^{۲}-۲a+۱\geq ۰$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (a-۱)^{۲}\geq ۰$ (۰/۲۵)

رابطهٔ اخیر همواره برقرار است، پس با برگشت‌پذیری روابط حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

۶

$\begin{cases} n|۹k+۷ \xrightarrow{\times(-۷)} n|-۶۳k-۴۹ \\ n|۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} n|۶۳k+۵۴ \end{cases}$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{+} n|-۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴$ (۰/۲۵)

$n|۵$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۱$ یا $n=۵$ (۰/۲۵)

۷ a عددی فرد است، بنابراین $a+۲$ عددی فرد است و چون $b|a+۲$، پس b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۵) می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به‌علاوهٔ ۱ است. (۰/۲۵) بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a^{۲}=۸m+۱$ و $b^{۲}=۸n+۱$ که در آن‌ها $m,n\in\mathbb{N}$.

$a^{۲}+b^{۲}+۳=(۸m+۱)+(۸n+۱)+۳$ (۰/۲۵) $=۸(m+n)+۵$ (۰/۲۵)

چون $۰\leq ۵<۸$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{۲}+b^{۲}+۳$ بر ۸ برابر ۵ است. (۰/۲۵)

۸ $[c,۱]=|c|$ (۰/۲۵)، $a|[a,b]\Rightarrow (a,[a,b])=|a|$ (۰/۲۵)

از طرف دیگر، چون $a|c$، پس $|a|\,\big|\,|c|$. (۰/۲۵)

$([c,۱],(a,[a,b]))=(|c|,|a|)=|a|$ (۰/۲۵)

۹ فرض کنید $(۷n+۹,۳n+۴)=d$. (۰/۲۵) در این صورت

$\begin{cases} d|۷n+۹ \\ d|۳n+۴ \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow d|۷(۳n+۴)-۳(۷n+۹)$ (۰/۵)

$d|۲۱n+۲۸-۲۱n-۲۷\Rightarrow d|۱$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{d>۰} d=۱$ (۰/۲۵)

۱۰

$\begin{cases} m=۱۷q+۵\ (q\in\mathbb{Z}) \\ n=۱۷q'+۳\ (q'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ (۰/۵) $\Rightarrow ۲m-۵n=۱۷(۲q-۵q')-۵$ (۰/۲۵)

$۲m-۵n=۱۷(۲q-۵q'-۱)+۱۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=۱۲$ (۰/۲۵)

۱۱

$۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱$ (۰/۵) $\Rightarrow ۲۷^{۷}\overset{۱۳}{\equiv}۱^{۷}=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲۷^{۷}+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۱+۱۹=۲۰$ (۰/۲۵)

$۲۷^{۷}+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۷$ (۰/۲۵)

چون $۰\leq ۷<۱۳$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۷^{۲}+۹$ بر ۱۳ برابر ۷ است. (۰/۲۵)

۱۲

$۲\overset{۱۱}{\equiv}۳۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۵x\overset{۱۱}{\equiv}۳۵$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(۵,۱۱)=۱\ (۰/۲۵)} x\overset{۱۱}{\equiv}۷$ (۰/۲۵)

$x=۱۱k+۷,\quad k\in\mathbb{Z}$ (۰/۲۵)

۱۳ فرض کنید این دانش‌آموز به x سؤال ۵ امتیازی و y سؤال ۳ امتیازی پاسخ داده است که در آن $x,y\in\mathbb{W}$. در این صورت

$۵x+۳y=۴۲\Rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲\overset{۳}{\equiv}۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x\overset{۳}{\equiv}۰\Rightarrow x=۳k,\ k\in\mathbb{Z}$ (۰/۲۵)

$۵(۳k)+۳y=۴۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۱۵k+۳y=۴۲\Rightarrow ۳y=-۱۵k+۴۲$

$y=-۵k+۱۴,\ k\in\mathbb{Z}$ (۰/۲۵)

$\begin{cases} x=۰ \\ y=۱۴ \end{cases}$ (۰/۲۵)، $\begin{cases} x=۳ \\ y=۹ \end{cases}$ (۰/۲۵)، $\begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$ (۰/۲۵)،

۱۴ الف) $b-c-e-d-b$ (۰/۲۵) ب) $b-c-e-d$ (۰/۲۵) و $b-d-e-c$ (۰/۲۵) پ) $N_G[d]=\{b,c,e,d\}$ (۰/۲۵) ت) خیر (۰/۲۵)

چون رأس a در آن ایزوله است.

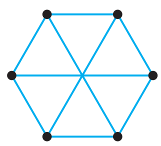
۱۵ فرض کنید G یک گراف، A مجموعهٔ همهٔ رئوس فرد گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم

$\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in A}\deg(v)+\sum_{v\in B}\deg(v)$ (۰/۲۵)

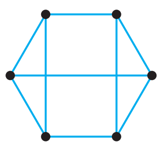
از طرف می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است، یعنی $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=۲q$. (۰/۲۵) همچنین $\sum_{v\in B}\deg(v)=۲k$ نیز عددی زوج است. (۰/۲۵) پس تفاضل آن‌ها، یعنی $\sum_{v\in A}\deg(v)=۲q-۲k$ نیز عددی زوج است. (۰/۲۵) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد حاصل زوج و تعدادی فرد عدد فرد حاصل فرد تولید می‌کنند. بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد.

۱۶ الف) $۳\times ۶=۲q\Rightarrow q=۹$ (۰/۵)

ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (۰/۲۵)



یا



۱۷

$q(K_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲}=۳۶$ (۰/۲۵)

$p(p-۱)=۷۲=۹\times ۸\Rightarrow p=۹$ (۰/۲۵)

$\Delta(G)=p-۱=۸$ (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۶)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) - برای مثال $-۳<۲, (-۳)^{۲}=۹\not< ۴=۲^{۲}$

ب) نادرست (۰/۲۵) - برای مثال قرار دهید $x=۹$ و $y=۱۶$، در این صورت

$\sqrt{x+y}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\neq ۷=\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) درست (۰/۲۵) - گراف فرد منتظم مرتبهٔ فرد قابل رسم نیست.

ت) نادرست (۰/۲۵) - برای مثال، اگر گراف G رأس ایزوله داشته باشد، آن‌گاه $\delta(G)=۰$.

۲ الف) $\binom{۸}{۲}=۲۸$ (۰/۲۵)

ب) دو برابر (۰/۲۵)

پ) -۹ (۰/۲۵) - ۸ (۰/۲۵) $-۱۲۷=۱۵\times(-۹)+۸\Rightarrow q=-۹, r=۸$

۳ برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: اگر $a=۰$، آن‌گاه حکم برقرار است. (۰/۲۵)

حالت دوم: اگر $a\neq ۰$، آن‌گاه $a^{-۱}$ (وارون a) یک عدد حقیقی است. (۰/۲۵)

با ضرب دو طرف رابطهٔ $ab=۰$ در $a^{-۱}$ داریم

$ab=۰\Rightarrow a^{-۱}(ab)=a^{-۱}\times ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (a^{-۱}a)b=۰\Rightarrow ۱\times b=۰$

$b=۰$ (۰/۲۵)

در نتیجه در هر دو حالت حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۱۳ تعریف کنید

$$A=\{n\in S|n=۵k\,,k\in\mathbb{Z}\}\Rightarrow|A|=[\frac{۴۰۰}{۵}]=۸۰$$ (۰/۲۵)

$$B=\{n\in S|n=۷k\,,k\in\mathbb{Z}\}\Rightarrow|B|=[\frac{۴۰۰}{۷}]=۵۷$$ (۰/۲۵)

در این صورت مجموعهٔ اعدادی که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیرند، برابر است با $A'\cap B'$. اکنون می‌توان نوشت

$$A\cap B=\{n\in S|n=۳۵k\,,k\in\mathbb{Z}\}\Rightarrow|A\cap B|=[\frac{۴۰۰}{۳۵}]=۱۱$$ (۰/۲۵)

$$|A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|$$ (۰/۲۵)

$$=۴۰۰-(۸۰+۵۷-۱۱)$$ (۰/۲۵) $=۲۷۴$ (۰/۲۵)

۱۴ تعریف کنید

$$A=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۴k,k\in\mathbb{Z}\}$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow|A|=[\frac{۲۰۰}{۴}]=۵۰$ (۰/۲۵)

$$B=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۷k,k\in\mathbb{Z}\}$$ (۰/۲۵)

در این صورت مجموعهٔ اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیستند، برابر است با $A\cap B'$ یا $A-B$. اکنون می‌توان نوشت

$$A\cap B=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۲۸k,k\in\mathbb{Z}\}\Rightarrow|A\cap B|=[\frac{۲۰۰}{۲۸}]=۷$$ (۰/۲۵)

$$|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|$$ (۰/۲۵) $=۵۰-۷=۴۳$ (۰/۲۵)

۱۵

$n=۳۲\times۳۱=۹۹۲=$ تعداد لانه‌ها (۰/۲۵) ، $k+۱=۳\Rightarrow k=۲$ (۰/۲۵)

حال بنابر تعمیم اصل لانهٔ کبوتری (۰/۲۵) داریم

$۲\times۹۹۲+۱=۱۹۸۵=$ تعداد کبوترها (۰/۲۵)

۱۶ ثابت شده است که در هر گراف ساده، حداقل ۲ رأس درجهٔ یکسان دارند. (۰/۲۵) حال گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان این کلاس باشند و دو رأس به یکدیگر وصل باشند اگر و تنها اگر دو دانش‌آموز نظیر آن رأس‌ها با هم دوست باشند. (۰/۵) حال بنابر ویژگی گفته شده از گراف‌ها، در این گراف حداقل دو رأس با درجهٔ یکسان وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش‌آموز تعداد دوست‌های یکسان دارند. (۰/۲۵)

پاسخ تشریحی آزمون (۱۵)

۱ الف) درست (۰/۲۵) - طبق ویژگی عمودمنصف، یک نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار دارد اگر و فقط اگر از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد. ب) درست (۰/۲۵)

$$ab|c\Rightarrow c=abq\Rightarrow\begin{cases}c=a(bq)\Rightarrow a|c\\ c=b(aq)\Rightarrow b|c\end{cases}$$

پ) نادرست (۰/۲۵) - برای مثال گراف $K_۱$ گرافی همبند است و در آن $\delta(G)=۰$. ت) درست (۰/۲۵)

۲ الف) -۹ (۰/۲۵) - ۱۰ (۰/۲۵) - چون $-۱۴۳=۱۷\times(-۹)+۱۰$ و $۰\leq۱۰<۱۷$ ، پس $r=۱۰$ و $q=-۹$. ب) $p-۱$ (۰/۲۵) پ) ۷۵ (۰/۲۵) - در هر سطر هر مربع لاتین ۵×۵ ، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک بار ظاهر می‌شوند. پس مجموع درایه‌های هر سطر برابر است با $۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$. بنابراین مجموع درایه‌های هر مربع لاتین ۵×۵ برابر است با $۵\times۱۵=۷۵$.

۳ به خلف فرض کنید $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد. در این صورت $\frac{۱}{x}$ عددی گویاست. (۰/۲۵) به روشنی $x\neq۰$. می‌دانیم حاصل‌ضرب یک عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی گنگ است. (۰/۲۵) بنابراین باید حاصل $\frac{۱}{x}\times x$ عددی گنگ باشد در حالی که $\frac{۱}{x}\times x=۱\in\mathbb{Q}$ (۰/۲۵) که تناقض است، یعنی فرض خلف باطل است و در نتیجه $\frac{۱}{x}$ عددی گنگ است. (۰/۲۵)

۴

$$a^۲+ab+b^۲\geq۰\Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab+۲b^۲\geq۰$$ (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow(a^۲+۲ab+b^۲)+a^۲+b^۲\geq۰$$ (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow(a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq۰$$ (۰/۲۵)

چون مربع هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است و همهٔ روابط برگشت‌پذیر هستند، پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۵ چون $a|b$ ، پس $q\in\mathbb{Z}$ وجود دارد به‌طوری که $b=aq$ و چون $b\neq۰$ ، پس $q\neq۰$ (۰/۲۵) و در نتیجه $|q|\geq۱$. (۰/۲۵) بنابراین

$$|q|\geq۱\Rightarrow|a||q|\geq|a|$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow|aq|\geq|a|\Rightarrow|b|\geq|a|$ (۰/۲۵)

۶

$$a=۷q+۶\Rightarrow ۲a=۱۴q+۱۲$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲a+۳=۱۴q+۱۵$ (۰/۲۵)

$$۲a+۳=۱۴(q+۱)+۱\Rightarrow ۲a+۳=۱۴q'+۱$$ (۰/۲۵)

چون $۰\leq۱<۱۴$ ، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a+۳$ بر ۱۴ برابر $r=۱$ است. (۰/۲۵)

۷

$$۵x+۱۱y\overset{۵}{\equiv}۳۶\Rightarrow y\overset{۵}{\equiv}۱$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=۵k+۱\,,k\in\mathbb{Z}$ (۰/۲۵)

$$۵x+۱۱(۵k+۱)=۳۶\Rightarrow ۵x=-۵۵k+۲۵$$ (۰/۲۵)

$$x=-۱۱k+۵\,,k\in\mathbb{Z}$$ (۰/۲۵)

۸

$$rp=۲q\Rightarrow ۵\times۲۰=۲q$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow q=۵۰$ (۰/۲۵)

$q(k_۹)=\binom{۹}{۲}=۳۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ اختلاف تعداد یال‌ها $=۵۰-۳۶=۱۴$ (۰/۲۵)

۹ الف) $a-b-c-d-e-f-a$ (۰/۲۵)

ب) $N_G(a)=\{b\,,f\,,e\,,d\}$ (۰/۲۵)

۱۰ الف) $\{a\,,b\,,f\,,g\}$. (۰/۷۵) توجه کنید که با حذف هر عضو این مجموعه، خود آن رأس احاطه نمی‌شود. ب) چون $n=۹$ و $\Delta=۵$ ، پس

$$\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۹}{۵+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۳}{۲}\right\rceil=۲$$ (۰/۵)

از سوی دیگر هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید دست‌کم یک عضو از هریک از مجموعه‌های $\{a\,,b\,,c\}$ ، $\{f\,,e\}$ و $\{g\,,h\}$ داشته باشد. پس این گراف مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی ندارد. (۰/۵) همچنین $\{c\,,f\,,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر این گراف است، پس $\gamma(G)=۳$. (۰/۵)

۱۱ الف) $\{a\,,d\,,f\}$ یا $\{a\,,d\,,i\}$ یا $\{g\,,d\,,i\}$ یا $\{h\,,d\,,i\}$ (یک مورد کافی است). (۰/۵) توجه کنید که در سه مجموعهٔ اول، با حذف هر عضو مجموعه، خود آن رأس احاطه نمی‌شود. اما در مجموعهٔ $\{h,d,i\}$ ، با حذف عضو h رأس a، با حذف عضو d خود این رأس و با حذف عضو i رأس f احاطه نمی‌شود. ب) یال ad یا di یا dg یا dh (یک مورد کافی است). (۰/۵) توجه کنید که با افزودن یال ad یا di مجموعهٔ $\{a,i\}$ ، با افزودن یال dg مجموعهٔ $\{g,i\}$ و با افزودن یال dh مجموعهٔ $\{h,i\}$ احاطه‌گر خواهند بود. پس $\gamma(G)\leq۲$. چون با افزودن هریک از این یال‌ها، رأسی در گراف ایجاد نمی‌شود که با همهٔ رئوس دیگر مجاور باشد، پس $\gamma(G)\neq۱$. در نتیجه $\gamma(G)=۲$.

۱۲ الف) این گراف چهار γ-مجموعه دارد که عبارت‌اند از

$\{b,g\}$ (۰/۲۵) , $\{d,g\}$ (۰/۲۵) , $\{e,b\}$ (۰/۲۵) , $\{e,d\}$ (۰/۲۵)

توجه کنید که چون این گراف رأسی ندارد که با همهٔ رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری آن حداقل برابر ۲ است. بنابراین مجموعه‌های دوعضوی بیان شده γ-مجموعه هستند و $\gamma(G)=2$.

ب) $\{d,f,h\}$ (۰/۲۵) و $\{a,c,f,h\}$ (۰/۲۵). توجه کنید که این دو مجموعه، احاطه‌گر غیرمینیمم هستند چون تعداد عضوهای آن‌ها از ۲ بیشتر است. همچنین، با حذف هر عضو از این مجموعه‌ها، خود آن رأس احاطه نمی‌شود، یعنی این دو مجموعه، احاطه‌گر مینیمال هستند.

۱۳

$$\binom{9}{2}(0/25)\binom{7}{3}(0/25)\binom{4}{4}(0/25)=36\times35\times1=1260$$

۱۴

$$x_1\ge2\Rightarrow y_1=x_1-2\ge0\ (0/25)$$
$$x_2>3\Rightarrow x_2\ge4\Rightarrow y_2=x_2-4\ge0\ (0/25)$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=8\Rightarrow y_1+2+y_2+4+x_3+x_4=8\ (0/25)$$
$$y_1+y_2+x_3+x_4=2\ (0/25)$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{n+k-1}{n}(0/25)$

$$=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}=10\ (0/25)$$

۱۵ با توجه به خواستهٔ پرسش می‌توان نتیجه گرفت هدف یافتن دو مربع لاتین متعامد است، یکی برای موتورسیکلت‌ها و دیگری برای پیست، بنابراین

	برادر ۱	برادر ۲	برادر ۳
۴شنبه	۱	۳	۲
۵شنبه	۳	۲	۱
جمعه	۲	۱	۳

پیست‌ها
(۰/۵)

	برادر ۱	برادر ۲	برادر ۳
۴شنبه	۱	۲	۳
۵شنبه	۳	۱	۲
جمعه	۲	۳	۱

موتورسیکلت‌ها
(۰/۵)

۱۱	۲۳	۳۲
۳۳	۱۲	۲۱
۲۲	۳۱	۱۳

(۰/۵)

۱۶

مجموعهٔ بارکدهایی که رقم ۱ ندارند $=A$

مجموعهٔ بارکدهایی که رقم ۳ ندارند $=B$

مجموعهٔ بارکدهایی که رقم ۷ ندارند $=C$

در این صورت مجموعهٔ بارکدهایی که در آن‌ها ارقام ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند، برابر $A'\cap B'\cap C'$ است. اکنون می‌توان نوشت

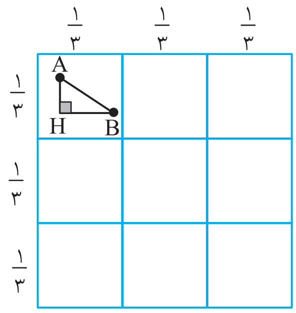
$$|S|=10^5(0/25),\quad |A|=|B|=|C|=9^5(0/25)$$
$$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=8^5(0/25),\quad |A\cap B\cap C|=7^5(0/25)$$
$$|A'\cap B'\cap C'|=|(A\cup B\cup C)'|=|S|-|A\cup B\cup C|(0/25)$$
$$=10^5-(9^5+9^5+9^5-8^5-8^5-8^5+7^5)(0/25)=4350\ (0/25)$$

۱۷ ابتدا مانند شکل مربع را به ۹ مربع کوچک‌تر $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ افراز می‌کنیم. اگر مربع‌های کوچک را لانه‌ها (۰/۲۵) و نقطه‌ها را کبوترها (۰/۲۵) فرض کنیم، آن‌گاه

تعداد کبوترها$=10$ ، تعداد لانه‌ها$=9$

پس بنابر اصل لانهٔ کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که دست‌کم دو کبوتر درون آن قرار دارند، (۰/۲۵) یعنی دست‌کم دو نقطه درون یکی از مربع‌ها هستند (نقاط A و B در شکل). بنابراین

$$AH<\frac{1}{3}\Rightarrow AH^2<\frac{1}{9},\quad BH<\frac{1}{3}\Rightarrow BH^2<\frac{1}{9}\ (0/25)$$
$$AH^2+BH^2<\frac{2}{9}\Rightarrow AB^2<\frac{2}{9}\Rightarrow AB<\frac{\sqrt{2}}{3}\ (0/25)$$



پاسخ تشریحی آزمون (۱۶)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) - بنابر متن کتاب درسی $2^{2^5}+1=641\times6700417$ که عددی اول نیست.

ب) نادرست (۰/۲۵) - به عنوان مثال نقض $3\overset{5}{\equiv}8,\quad 5|10,\quad 3\overset{10}{\not\equiv}8$

پ) نادرست (۰/۲۵) - تعداد رأس‌های زوج هر گراف می‌تواند عددی زوج یا فرد باشد.

۲ الف) گنگ (۰/۲۵) - توجه کنید که

$$2\beta-\alpha=2\beta+2\alpha-3\alpha=2(\beta+\alpha)-3\alpha$$

چون $2(\beta+\alpha)$ عددی گویا و -3α عددی گنگ است، پس مجموع آن‌ها، یعنی $2\beta-\alpha$ عددی گنگ خواهد بود. ب) جهت‌دار (۰/۲۵)

۳ گزینهٔ (۲) - ۷۷ (۰/۲۵) - می‌دانیم $[5]_{12}=\{x\in\mathbb{Z}|x=12k+5,k\in\mathbb{Z}\}$.

پس عددی عضو این مجموعه است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۲ برابر ۵ باشد. در میان گزینه‌ها، فقط عدد ۷۷ این ویژگی را دارد.

۴

$$\frac{a^2}{1+a^4}\le\frac{1}{2}\xleftrightarrow{\times2(1+a^4)}2a^2\le1+a^4\ (0/25)\Leftrightarrow1-2a^2+a^4\ge0\ (0/25)$$
$$\Leftrightarrow(1-a^2)^2\ge0\ (0/25)$$

چون مربع هر عدد حقیقی نامنفی است و همهٔ روابط برگشت‌پذیر هستند، پس حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

۵

$$m\overset{17}{\equiv}3\ (0/25)\Rightarrow m^3\overset{17}{\equiv}27\overset{17}{\equiv}10\ (0/25)\Rightarrow -m^3\overset{17}{\equiv}-10\overset{17}{\equiv}7$$
$$n\overset{17}{\equiv}11\ (0/25)\Rightarrow mn\overset{17}{\equiv}33\overset{17}{\equiv}-1\ (0/25)\Rightarrow 2mn\overset{17}{\equiv}-2$$

بنابراین $2mn-m^3\overset{17}{\equiv}7-2\overset{17}{\equiv}5\ (0/25)$

چون $0\le5<17$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $2mn-m^3$ بر ۱۷ برابر ۵ است.

پس $r=5$ باقی‌ماندهٔ تقسیم است.