نشر الگو

موج ۲۰

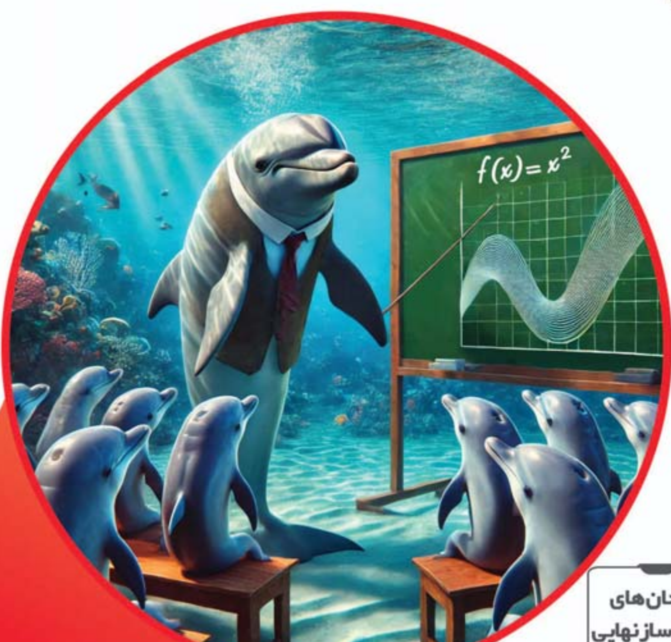
مرحله‌ای و جامع

ویژهٔ آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضی دوازدهم

(تجربی)

شیدا شاداب



امتحان‌های درس به درس

امتحان‌های نیم‌سال اول و دوم

امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی

امتحان‌های نهایی اخیر

پاسخ‌های تشریحی

کلید تصحیح امتحان‌های نهایی

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خداقوت جانانه به شـما دانش‌آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سـال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسـیر، یکی از اهداف مهم شـما کسـب نمرهٔ مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعهٔ آن، کسب نمرهٔ ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ آزمون‌محور است، بدین صورت که فقط با آزمون‌های مختلف و بدون درس‌نامه مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۲ پاسخنامهٔ آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعهٔ دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۳ همهٔ مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۴ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سـطحی مناسـب اسـت. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشـتن خود اسـتفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسـته‌اند به مطالب کتاب درسـی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمرهٔ مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۳۲ آزمون، شـامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای اسـت. آزمون‌های درس به درس ۱۰ نمره‌ای هسـتند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۱۵	هر درس ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول، فصل دوم، فصل سوم و فصل چهارم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۲	فصل چهارم (درس‌های دوم و سوم)، فصل پنجم، فصل ششم و فصل هفتم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی ریاضی ۳ است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

شیدا شاداب

فهرست مطالب

آزمون‌های مرحله‌ای و جامع

آزمون ۱: فصل اول – درس اول ۲

آزمون ۲: فصل اول – درس دوم ۳

آزمون ۳: فصل اول – درس سوم ۴

آزمون ۴: فصل دوم – درس اول ۵

آزمون ۵: فصل دوم – درس دوم ۶

آزمون ۶: فصل سوم – درس اول ۷

آزمون ۷: فصل سوم – درس دوم ۸

آزمون ۸: فصل چهارم – درس اول ۱۰

آزمون ۹: نیم‌سال اول (۱) ۱۲

آزمون ۱۰: نیم‌سال اول (۲) ۱۴

آزمون ۱۱: نیم‌سال اول (۳) ۱۶

آزمون ۱۲: نیم‌سال اول (۴) ۱۸

آزمون ۱۳: فصل چهارم – درس دوم ۲۰

آزمون ۱۴: فصل چهارم – درس سوم ۲۱

آزمون ۱۵: فصل پنجم – درس اول ۲۲

آزمون ۱۶: فصل پنجم – درس دوم ۲۳

آزمون ۱۷: فصل ششم – درس اول ۲۴

آزمون ۱۸: فصل ششم – درس دوم ۲۵

آزمون ۱۹: فصل هفتم ۲۶

آزمون ۲۰: نیم‌سال دوم (۱) ۲۷

آزمون ۲۱: نیم‌سال دوم (۲) ۲۹

آزمون ۲۲: جامع (۱) – شبیه‌ساز نهایی ۳۱

آزمون ۲۳: جامع (۲) – شبیه‌ساز نهایی ۳۳

آزمون ۲۴: جامع (۳) – شبیه‌ساز نهایی ۳۵

آزمون ۲۵: جامع (۴) – شبیه‌ساز نهایی ۳۷

آزمون ۲۶: جامع (۵) – شبیه‌ساز نهایی ۳۹

آزمون ۲۷: جامع (۶) – نهایی خرداد ۱۴۰۲ .... ۴۱

آزمون ۲۸: جامع (۷) – نهایی شهریور ۱۴۰۲ .... ۴۳

آزمون ۲۹: جامع (۸) – نهایی دی ۱۴۰۲ .... ۴۵

آزمون ۳۰: جامع (۹) – نهایی خرداد ۱۴۰۳ .... ۴۷

آزمون ۳۱: جامع (۱۰) – نهایی شهریور ۱۴۰۳ .... ۴۹

آزمون ۳۲: جامع (۱۱) – نهایی دی ۱۴۰۳ .... ۵۱

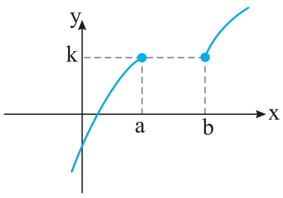
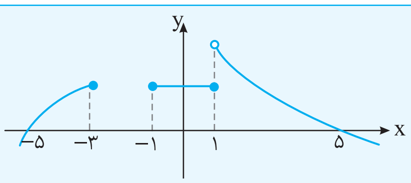
پاسخ‌های تشریحی ۵۴

آزمون ۱

موضوع آزمون: فصل اول - درس اول

صفحات پاسخ: ۵۴ تا ۵۵

امتحان نهایی: **ریاضی ۳**	رشته: **علوم تجربی**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۷۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.** **الف)** در بازهٔ $(۱,۲)$، نمودار تابع $y=x^{۳}$ .... از نمودار تابع $y=x^{۲}$ قرار دارد. (بالاتر - پایین‌تر) **ب)** تابع $y=x^{۳}+۱$ در دامنهٔ تعریف خود .... است. (صعودی - نزولی) **پ)** توابع اکیداً یکنوا، حتماً یکنوا .... (نیستند - هستند) **ت)** تابع $y=x^{۲}\|x\|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است. **ث)** تابع $y=۲x^{۲}+۴x-۱$ در بازهٔ $[-۲,۵]$ .... است. (یکنوا - غیریکنوا)	۱/۲۵
۲	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**  **الف)** تابع $y=۲x^{۵}-۴x^{۳}+\sqrt{۷}x^{۲}$ یک تابع چندجمله‌ای نیست. **ب)** تابع f در شکل مقابل اکیداً صعودی است. **پ)** بی‌شمار تابع وجود دارند که هم صعودی و هم نزولی هستند. **ت)** تابع $y=\frac{۱}{x}$ در دامنه‌اش اکیداً یکنوا است.	۱
۳	**تابع f در شکل مقابل در چه بازه‌هایی نزولی، در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی ثابت است؟** 	۱/۲۵
۴	**نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت است.** **الف)** $y=x+\|x+۱\|$ **ب)** $y=\begin{cases} -x-۳ & x<-۳ \\ ۲ & -۳\leq x<۳ \\ ۲x-۱ & x\geq ۳ \end{cases}$	۱/۷۵
۵	**نمودار تابع $f(x)=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$ را روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و مشخص کنید تابع روی کدام بازه‌ها اکیداً نزولی و روی کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است.**	۱/۵
۶	**الف)** تابع نمایی $f(x)=(۳k+۱)^{x}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k را مشخص کنید. **ب)** تابع $f(x)=۲x^{۲}-۱۰x$ روی بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a را بیابید. **پ)** تابع لگاریتمی $f(x)=-\log_{۲}(x+۱)-۱$ روی بازهٔ $(a,+\infty)$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a را بیابید.	۱/۵
۷	**نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=-(x-۱)^{۳}-۱$ را قطع می‌کند؟ (نمودار هر دو تابع را رسم کنید.)**	۰/۷۵
۸	**الف)** تابعی مانند f با دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مثال بزنید که $f(۲)=۳$ و تابع روی بازهٔ $[۰,۲]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد. **ب)** نمودار تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را رسم کنید که در هریک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، اما روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی نباشد.	۱
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۱۰

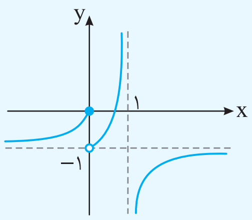
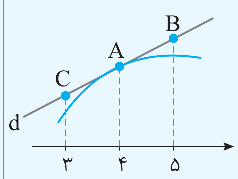
آزمون ۹

موضوع آزمون: نیمسال اول (۱)

صفحات پاسخ: ۶۵ تا ۶۸

امتحان نهایی: **ریاضی ۳**	رشته: **علوم تجربی**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** تابع $y=۲x(۱-۳x^{۲})+۱$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. (دی ۱۴۰۱) **ب)** تابع تانژانت در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ تابعی صعودی است. (دی ۱۴۰۲) **پ)** هر همسایگی نقطهٔ $x=۰$ شامل عددی منفی است.	۰/۷۵
۲	**جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** **الف)** نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطهٔ .... روی نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است. (دی ۱۴۰۱) **ب)** مقدار عددی $\cos ۲۲/۵^{\circ}$ برابر .... است. **پ)** فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$. در این صورت اگر $L<۰$ و تابع $y=g(x)$ در همسایگی محذوفی از a .... باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$. (دی ۹۹) **ت)** اگر $f'(۴)=۲$ و $f(۴)=-۱$، خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۴$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض .... قطع می‌کند. (خرداد ۹۸)	۱
۳	**الف) نمودار تابع $f(x)=x-\|x\|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای نزولی یا ثابت است.** **ب) نمودار تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.**	۱/۵
۴	**الف) به کمک نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع $y=-۲f(-x)+۳$ را رسم کنید.** **ب) اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر $[-۱,۳]$ و برد آن $[۰,۲]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ را بیابید.** (دی ۱۴۰۱)	۱/۲۵
۵	**اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$، تابع gof و دامنهٔ آن را بیابید.** (خرداد ۹۸)	۱/۵
۶	**الـف) با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۲$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورده و ضابطه، دامنه و برد تابع وارون آن را مشخص کنید.** (خرداد ۱۴۰۰) **ب) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، مقدار $(fog)^{-۱}(۵)$ را بیابید.** (شهریور ۹۸)	۲/۲۵

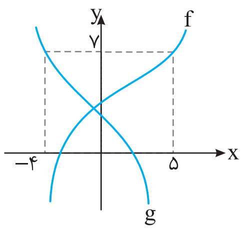
ردیف	سؤالات	نمره
۷	اگر در یک تابع مثلثاتی دورهٔ تناوب 4π، مقدار ماکزیمم -1 و مقدار مینیمم -7 باشد، تابع سینوسی آن را بنویسید. (خرداد ۹۹)	۱
۸	الف) اگر انتهای کمان α در ربع دوم باشد و $\sin\alpha=\frac{3}{4}$، حاصل $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$ را به دست آورید. ب) نمودار تابع $f(x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}$ را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید.	۱/۷۵
۹	الف) نمودار تابع $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\pi)$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟ ب) جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x=\cos 2x$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۰	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-3}{1+\cos x}$ ب) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4-(2-\frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}$	۲/۷۵
۱۱	الف) با توجه به نمودار داده شده، حاصل حدهای خواسته شده را مشخص کنید. ۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$  ب) اگر $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-3}{x^2+ax+b}=-\infty$، مقدار a و b را به‌دست آورید.	۱/۷۵
۱۲	الف) معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ را در نقطهٔ $A(1,2)$ واقع بر آن بنویسید. ب) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و ۱) مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود. ۲) مشتق آن در $x=2$ عددی مثبت باشد. ۳) مشتق آن در تمام نقاط منفی باشد.	۱/۷۵
۱۳	برای تابع f در شـکل مقابل داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$. با توجه به شـکل، مختصات نقاط A، B و C را به دست آورید. (دی ۹۷) 	۱
	موفق و سربلند باشید — جمع نمره	۲۰

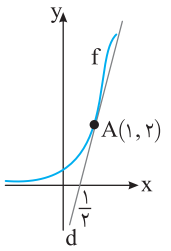
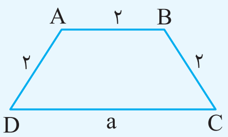
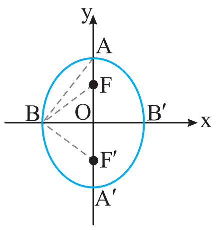
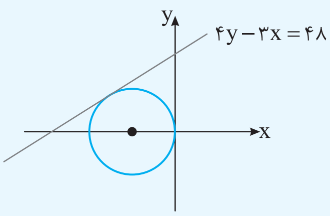
آزمون ۲۶

موضوع آزمون: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی

صفحات پاسخ: ۹۶ تا ۹۸

امتحان نهایی: **ریاضی ۳**	رشته: **علوم تجربی**	**تألیفی**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** بیشترین مقدار تابع $y=\sin ۲x$ همان جاهایی به دست می‌آید که بیشترین مقدار تابع $y=\sin x$ به دست می‌آید. **ب)** اگر نمودار تابع در نقطهٔ $x=a$ مماس قائم داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نیست. **پ)** اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، تابع f روی بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ اکیداً صعودی است.	۰/۷۵
۲	**جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.** **الف)** مقدار $۲\cos^۲ ۷۵^\circ -۱$ برابر با .... است. **ب)** اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲-۳}{x^m-۵}=+\infty$ ، مقدار m برابر با .... است. (m عددی طبیعی است.) **پ)** اگر طول‌های قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی به ترتیب ۷ و ۵ باشند، فاصلهٔ کانونی این بیضی برابر با .... است.	۰/۷۵
۳	**نمودار تابع** $y=\lvert\sqrt{۲x}-۱\rvert$ **را رسم کنید.**	۰/۷۵
۴	**الف) در شکل مقابل مقدار** $(f^{-۱}og)(-۴)$ **را به دست آورید.** **ب) اگر** $f(x)=۱-۲x$ **و** $g(x)=\sqrt{x+۱}$ **، مقدار** $(f^{-۱}og)'(۳)$ **چند است؟**  	۱/۷۵
۵	**اگر دورهٔ تناوب تابع** $f(x)=۲\sin(bx)+c$ **برابر** ۶π **و بیشترین مقدار آن برابر** -۳ **باشد:** **الف)** مقادیر $\lvert b\rvert$ و c را به دست آورید. **ب)** کمترین مقدار تابع f را به دست آورید.	۰/۷۵
۶	**الف) مقدار** $\cos^۴ \frac{۵\pi}{۸}-\sin^۴ \frac{۵\pi}{۸}$ **را به دست آورید.** **ب) معادلهٔ** $۱+۲\sin x=۲\sin ۲x+۲\cos x$ **را حل کنید.**	۲
۷	**حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [ ] علامت جزء صحیح است.)** **الف)** $\lim\limits_{x\to۱} \frac{۲-x-x^۳}{(x-۱)^۳}$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sin x-[\sin x]}{x}$ **پ)** $\lim\limits_{x\to۲} \frac{x-۲}{\sqrt{x-۱}-۱}$ **ت)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-۴x^۴+۳x^۲-۱}{۵x^۴-۶x+۱}$	۲/۷۵

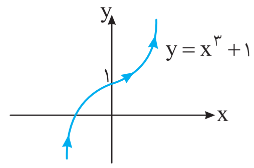
ردیف	سؤالات	نمره
۸	در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $A(1,2)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x)=x^2-xf(x)$ ، مقدار $g'(1)$ را به دست آورید. 	۱
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\sqrt{2}x^2-x+\frac{1}{x}-4$ ب) $g(x)=(\sqrt{x}-x)^2$ پ) $h(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$	۱/۷۵
۱۰	فرض کنید $f(x)=x^3-ax^2$. حدود a را طوری تعیین کنید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=2$ از آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[-2,1]$ کمتر باشد.	۱
۱۱	عددهای a و b را طوری پیدا کنید که نقطهٔ $(1,4)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^3+bx^2+2x+4$ باشد.	۱/۲۵
۱۲	اگر تابع $f(x)=\frac{a}{3}x^3-(a+2)x^2-x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a را به دست آورید.	۱
۱۳	در شکل مقابل ABCD ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است. مقدار a را طوری تعیین کنید که مساحت این ذوزنقه بیشترین مقدار ممکن باشد. 	۱/۲۵
۱۴	در شکل مقابل نقطه‌های $F(0,3)$ و $F'(0,-3)$ کانون‌های بیضی هستند. اگر محیط مثلث FBF' برابر ۱۶ باشد، مساحت مثلث ABF' را به دست آورید. 	۱
۱۵	در شکل مقابل مرکز دایره روی محور x است و دایره در مبدأ مختصات بر محور y مماس است. اگر خط $4y-3x=48$ بر دایره مماس باشد، معادلهٔ دایره را بنویسید. 	۱
۱۶	در یک کشور ٪۴۵ جمعیت مرد و ٪۵۵ جمعیت زن هستند. احتمال اینکه کسی در این کشور بالای ۷۰ سال سن داشته باشد، در میان مردان ٪۴ و در میان زنان ٪۶ است. اگر فردی به تصادف از جمعیت این کشور انتخاب شود، احتمال اینکه بالای ۷۰ سال سن داشته باشد چقدر است؟	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید — جمع نمره	۲۰

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) بالاتر. دقت کنید که در بازهٔ $(۱,۲)$ مقادیر تابع $y=x^۳$ بیشتر از مقادیر تابع $y=x^۲$ است. بنابراین در این بازه نمودار تابع $y=x^۳$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد.

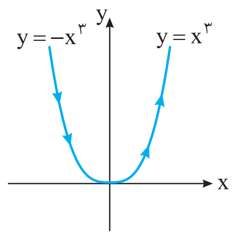
x	۱/۲۵	۱/۵
$y=x^۳$	۱/۹۵	۳/۳۷
$y=x^۲$	۱/۵۶	۲/۲۵

ب) صعودی. به نمودار تابع دقت کنید.

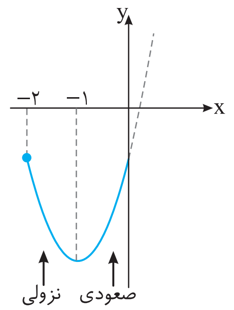


پ) هستند (با توجه به تعریف یکنوایی و یکنوای اکید).

ت) صفر. با توجه به تعریف قدرمطلق، ضابطهٔ تابع به‌صورت
$$y=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$
و نمودار آن به‌صورت زیر است. از روی نمودار واضح است که تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$ نزولی (اکیداً نزولی) است. بنابراین بیشترین مقدار a در این بازه برابر صفر است.



ث) غیریکنوا. توجه کنید که طول رأس این سهمی برابر است با $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲\times۲}=-۱$. به نمودار تابع توجه کنید. مشاهده می‌کنید تابع روی بازهٔ $[-۲,۵]$ غیریکنواست.

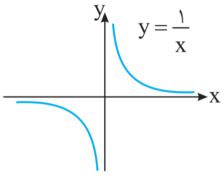


۲ الف) نادرست. تابع مورد نظر تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ است.

ب) نادرست. توجه کنید که $a<b$ اما $f(a)=f(b)=k$ و این با تعریف تابع اکیداً صعودی در تناقض است.

پ) درست. تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است و بی‌نهایت تابع ثابت وجود دارد.

ت) نادرست. به نمودار تابع توجه کنید.



۳ با توجه به نمودار

صعودی: $(-\infty,-۳],[-۱,۱]$ نزولی: $[-۱,۱],(۱,+\infty)$ ثابت: $[-۱,۱]$

۴ الف)

$$y=x+|x+۱|=\begin{cases} x+(x+۱) & x+۱\geq۰\\ x+(-(x+۱)) & x+۱<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x+۱ & x\geq-۱\\ -۱ & x<-۱\end{cases}$$

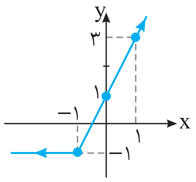
x	-۱	۰
y	-۱	۱

تابع ثابت

اکیداً صعودی: $[-۱,+\infty)$

ثابت: $(-\infty,-۱]$

اکیداً نزولی: -



ب)

$$y=\begin{cases} -x-۳ & x<-۳\\ ۲ & -۳\leq x<۳\\ ۲x-۱ & x\geq۳\end{cases}$$

x	-۳	-۵
y	۰	۲

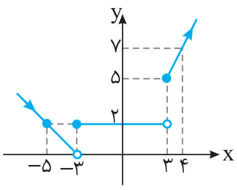
تابع ثابت

x	۳	۴
y	۵	۷

اکیداً صعودی: $[۳,+\infty)$

ثابت: $[-۳,۳)$

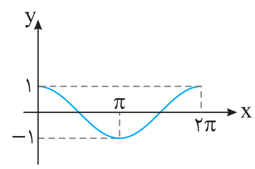
اکیداً نزولی: $(-\infty,-۳)$



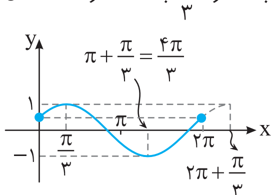
۵ توجه کنید که

$$f(x)=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=\cos(-x+\frac{\pi}{۳})=\cos(-(x-\frac{\pi}{۳}))=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$$

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$، کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست انتقال دهیم.



$y=\cos x$



$y=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$

دقت کنید آن قسمتی از نمودار را که خارج از بازهٔ $[۰,۲\pi]$ است، حذف می‌کنیم.

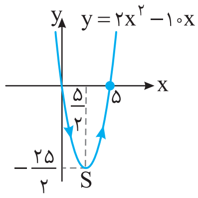
بنابراین رفتار تابع در بازه‌های مختلف به‌صورت زیر است:

اکیداً صعودی: $[۰,\frac{\pi}{۳}]$ و $[\frac{۴\pi}{۳},۲\pi]$

اکیداً نزولی: $[\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$

۶ الف) توجه کنید که تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>۱$ اکیداً صعودی است. بنابراین $۳k+۱>۱\Rightarrow ۳k>۰\Rightarrow k>۰$

ب) نمودار تابع به‌صورت زیر است.



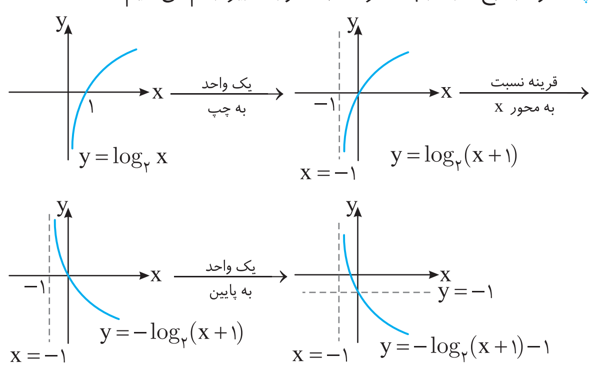
x	۰	$\frac{۵}{۲}$	۵
y	۰	$-\frac{۲۵}{۲}$	۰

با توجه به نمودار واضح است که تابع f در بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲}]$ اکیداً نزولی است.

بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

توجه کنید که اگر $f(x)=ax^۲+bx+c$ و $a>۰$، آن‌گاه تابع f در بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ یا هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ یا هر زیرمجموعه از آن اکیداً صعودی است.

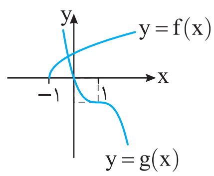
پ) نمودار تابع f را در چند مرحله به صورت زیر رسم می‌کنیم.



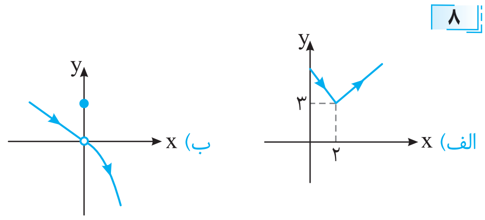
با توجه به نمودار واضح است که تابع در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

بنابراین کمترین مقدار a برابر -۱ است.

۷ برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم. برای رسم نمودار تابع g، نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا $y=(x-۱)^۳$ به‌دست آید، سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-(x-۱)^۳$ به‌دست آید. در نهایت نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-(x-۱)^۳-۱$ به‌دست آید. با توجه به نمودارها، دو تابع یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند.



۸



پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف) $[-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$. باید $۲x\in[-۳,۱)$، پس $-۳\le ۲x<۱$، یعنی $x\in[-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$.

ب) $\frac{۱}{۳}$. توجه کنید که

$$\begin{cases}(fof)(-۱)=f(f(-۱))\\ f(-۱)=\frac{|-۱|}{۱+|-۱|}=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow f(f(-۱))=f(\frac{۱}{۲})=\frac{|\frac{۱}{۲}|}{۱+|\frac{۱}{۲}|}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

پ) $x^۳$.

ت) $(۲,۶)$. برای به‌دست آوردن نمودار تابع $y=۳f(-\frac{x}{۲})$ ابتدا طول نقاط روی نمودار تابع $y=f(x)$ را دو برابر و قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ به‌دست آید. سپس عرض نقاط نمودار حاصل را سه برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(-\frac{x}{۲})$ حاصل شود. بنابراین $(-۱,۲)\to(۲,۶)$

ث) $[۱,۷)$. برای به‌دست آوردن برد تابع $y=-۲f(\frac{x}{۲}+۱)+۳$ هر نقطه در برد تابع f را -۲ برابر می‌کنیم، سپس ۳ واحد به آن اضافه می‌کنیم:

$$(-۲,۱]\xrightarrow{\times(-۲)}[-۲,۴)\xrightarrow{+۳}[۱,۷)$$

۲ الف) نادرست. به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{cases}f(x)=۳x\\ g(x)=۲x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=۳(۲x)=۶x\\ (gof)(x)=g(f(x))=۲(۳x)=۶x\end{cases}$$

$$f(x)\neq g(x)\quad,\quad (fog)(x)=(gof)(x)$$

ب) درست. توجه کنید که $(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۲)=\frac{۱}{۲}$.

پ) نادرست. برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$، باید طول نقاط روی نمودار تابع $y=f(x)$ را دو برابر کنیم. بنابراین نمودار تابع از انبساط افقی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

۳ الف) توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=(\sqrt{۴-۲x})^۲+۲(\sqrt{۴-۲x})-۱$$
$$=۴-۲x+۲\sqrt{۴-۲x}-۱=۲\sqrt{۴-۲x}-۲x+۳$$

ب) توجه کنید که $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم.

$$۴-۲x\ge۰\Rightarrow ۴\ge ۲x\Rightarrow x\le۲\Rightarrow D_f=(-\infty,۲]$$

$$g(x)=x^۲+۲x-۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

بنابراین $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}|x^۲+۲x-۱\le۲\}$

اکنون نامعادلهٔ $x^۲+۲x-۱\le۲$ را حل می‌کنیم:

$$x^۲+۲x-۱\le۲\Rightarrow x^۲+۲x-۳\le۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
$x^۲+۲x-۳$		+	۰	−	۰	+	

$D_{fog}=[-۳,۱]$

۶ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ x=۵ را می‌نویسیم:

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۵)-۰}{x-۵}$$

$$=\lim_{x\to ۵}((x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴))=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

توجه کنید که $f(۵)=(۵-۱)(۵-۲)\cdots(۵-۵)=۰$.

۷ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ x=۱،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-۳}{۳h}=\frac{۱}{۳}\overbrace{\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}}^{f'(۱)}=\frac{۱}{۳}f'(۱)=\frac{۱}{۳}\times۳=۱$$

۸ با توجه به نمودار، $f(۲)=۳$ و

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۵f(x)-۱۵}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۵(f(x)-۳)}{x-۲}=۵\overbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}^{f'(۲)}=۱۰$$

$$۵f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=۲\Rightarrow \text{شیب خط } d=۲$$

معادلهٔ خط d به کمک نقطهٔ (۲,۳) واقع بر آن و شیب ۲ به صورت زیر است:

$$y-۳=۲(x-۲)\Rightarrow y-۳=۲x-۴\Rightarrow y=۲x-۱$$

۹ توجه کنید که

$$f(x)=-x^۲+۶x-۵\Rightarrow f(۲)=-(۲)^۲+۶(۲)-۵=۳$$

بنابراین مختصات نقطهٔ تماس برابر (۲,۳) است. همچنین

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^۲+۶x-۵-۳}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)(x-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(-x+۴)=۲$$

$$\text{شیب خط مماس}=m=۲$$

اکنون دقت کنید خط مماس (خط d) محور x را در نقطهٔ (a,۰) قطع کرده است، شیب این خط را به کمک دو نقطهٔ (۲,۳) و (a,۰) به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$m=\frac{۰-۳}{a-۲}=\frac{-۳}{a-۲}$$

دو شیب به دست آمده با هم برابرند. پس

$$\frac{-۳}{a-۲}=۲\Rightarrow ۲a-۴=-۳\Rightarrow ۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۰ ابتدا توجه کنید که $f(۲)=۳$. همچنین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)(f(x)-۳)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}g(x)\times\frac{(f(x)-f(۲))}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}g(x)\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

$$=۵\times f'(۲)$$

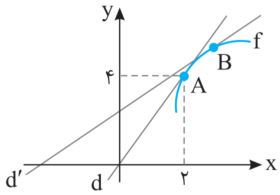
بنابراین عبارت موردنظر ۵ برابر $f'(۲)$ است.

۱۱ الف) حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ برابر $f'(۲)$ است که با شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ x=۲ برابر است. شیب خط مماس را با دو نقطهٔ (۰,۰) و (۲,۴) واقع بر این خط به‌دست می‌آوریم.

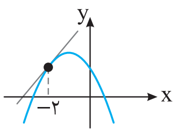
$$\text{شیب خط مماس}=\frac{۰-۴}{۰-۲}=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow f'(۲)=۲$$

ب) مشتق در دو نقطهٔ A و B، به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این دو نقطه است. به شکل زیر توجه کنید (خط d' مماس بر منحنی در نقطهٔ B است.)

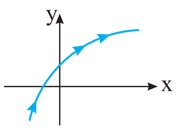
چون زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور x می‌سازد بزرگ‌تر از زاویه‌ای است که خط d' با جهت مثبت محور x می‌سازد، بنابراین $m_A>m_B$. در نتیجه مقدار مشتق در نقطهٔ A بیشتر از مقدار مشتق در نقطهٔ B است.



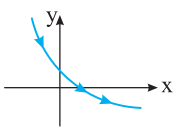
۱۲ الف) شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ x=-۲ مثبت و در نتیجه مشتق تابع در این نقطه نیز مثبت است.



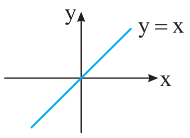
ب) در تمام نقاط، شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی، مثبت است.



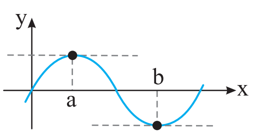
پ) در تمام نقاط، شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی، منفی است.



ت) شیب خط، در تمام نقاط با هم برابر است.



ث) شیب خط مماس در دو نقطهٔ x=a و x=b برابر صفر است. بنابراین مشتق تابع در این دو نقطه برابر صفر است.



پاسخ تشریحی آزمون (۹)

۱ الف) درست. (۰/۲۵) زیرا $y=-۶x^۳+۲x+۱$.

ب) نادرست. (۰/۲۵) زیرا تابع تانژانت فقط در بازه‌هایی به صورت $(k\pi-\frac{\pi}{۲},k\pi+\frac{\pi}{۲})$ که $k\in\mathbb{Z}$، اکیداً صعودی (صعودی) است.

پ) درست. (۰/۲۵)

۲ الف) (-۸,۳). (۰/۲۵) توجه کنید که

$$(-۸,۶)\in f \xrightarrow[\text{عرض نقاط نصف می‌شوند}]{g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)}(-۸,۳)\in g$$

ب) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$. (۰/۲۵) چون $۲۲/۵^\circ$ نصف ۴۵° است، پس:

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱\xrightarrow{\alpha=۲۲/۵^\circ}$$

$$\cos(۲\times۲۲/۵^\circ)=۲\cos^۲ ۲۲/۵^\circ-۱$$

$$۲\cos^۲(۲۲/۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱\Rightarrow\cos ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

پ) مثبت. (۰/۲۵)

ت) ۹- . (۰/۲۵) اگر معادلهٔ این خط $y=ax+b$ باشد، آن‌گاه a (شیب خط) برابر $f'(۴)$ است.

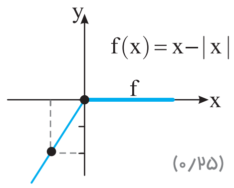
$$y=ax+b \xrightarrow{a=f'(۴)=۲} y=۲x+b \xrightarrow[\text{روی خط}]{(۴,-۱)} b=-۹$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۴$، به‌صورت $y=۲x-۹$ است که محور yها را در نقطهٔ $(۰,-۹)$ قطع می‌کند.

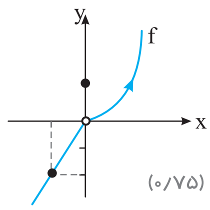
۳ الف) توجه کنید که

$$f(x)=x-|x|=\begin{cases}x-x & x\geq ۰\\ x-(-x) & x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

ثابت (نزولی): $[۰,+\infty)$ (۰/۲۵) اکیداً صعودی: $(-\infty,۰]$ (۰/۲۵)



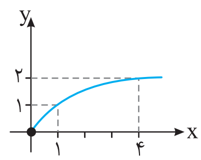
ب)



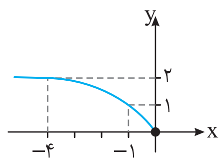
۴ الف)

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به محور yها}]{\text{قرینه نسبت}} y=\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{سپس عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم}]{\text{قرینه نسبت به محور xها}}$$

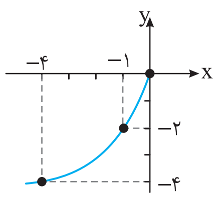
$$y=-۲\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{۳ واحد به سمت بالا}} y=-۲\sqrt{-x}+۳$$



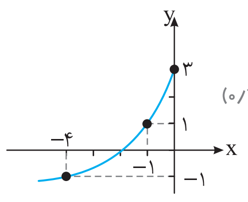
$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{-x}$



$y=-۲\sqrt{-x}$



$y=-۲\sqrt{-x}+۳$

(۰/۷۵)

ب) برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ کافی است دامنهٔ تابع f را ۲ برابر کنیم. پس $D=(-۲,۶]$، (۰/۲۵) اما برد تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ با برد تابع f برابر است، یعنی $R=(۰,۲]$. (۰/۲۵)

۵ ابتدا دامنهٔ تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}D_f: x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳\\ D_g=\{۰,۳,۵\}\end{cases}\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$=\{x\geq ۳\mid \sqrt{x-۳}=۰,\sqrt{x-۳}=۳,\sqrt{x-۳}=۵\}\ \text{(۰/۵)}$$

توجه کنید که

$$\sqrt{x-۳}=۰\Rightarrow x=۳,\quad \sqrt{x-۳}=۳\Rightarrow x-۳=۹\Rightarrow x=۱۲$$

$$\sqrt{x-۳}=۵\Rightarrow x-۳=۲۵\Rightarrow x=۲۸$$

بنابراین $D_{gof}=\{۳,۱۲,۲۸\}$. (۰/۵)

اکنون تابع gof به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۰)=۴$$

$$(gof)(۱۲)=g(f(۱۲))=g(۳)=۲$$

$$(gof)(۲۸)=g(f(۲۸))=g(۵)=۶$$

درنتیجه: $gof=\{(۳,۴),(۱۲,۲),(۲۸,۶)\}$ (۰/۲۵)

۶ الف) توجه کنید که اگر دامنهٔ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ را به $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ یا $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ یا هر زیرمجموعه از هریک از این بازه‌ها محدود کنیم تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر می‌شود. توجه کنید که چون $\frac{-b}{۲a}=۱$، دامنه را به $[۱,+\infty)$ (۰/۲۵) (یا $(-\infty,۱]$) محدود می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-۲x+۲\xrightarrow{\text{وارون}} y=\underbrace{x^۲-۲x+۱}_{(x-۱)^۲}+۱=(x-۱)^۲+۱$$

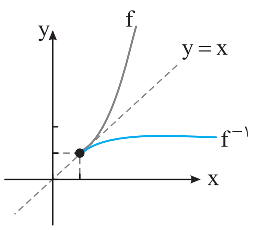
$$\xrightarrow[\text{به‌دست می‌آوریم y}]{\text{x را برحسب}} y-۱=(x-۱)^۲\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$\sqrt{y-۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}\ \text{(۰/۲۵)}\xrightarrow{x\geq ۱}\sqrt{y-۱}=x-۱\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$\sqrt{y-۱}+۱=x\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۱\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[۱,+\infty)\ \text{(۰/۲۵)}$$



ب) اگر $(fog)^{-۱}(۵)=\alpha$، آن‌گاه $(fog)(\alpha)=۵$، توجه کنید که

$$(fog)(\alpha)=f(g(\alpha))=f(\alpha^۳)=\frac{۱}{۸}\alpha^۳-۳$$

$$\frac{۱}{۸}\alpha^۳-۳=۵\ \text{(۰/۲۵)}\Rightarrow\frac{۱}{۸}\alpha^۳=۸\Rightarrow\alpha^۳=۶۴\Rightarrow\alpha=۴\ \text{(۰/۲۵)}$$

پس $(fog)^{-۱}(۵)=۴$.

۷ فرض کنید $y=a\sin(bx)+c$. در این صورت

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$\begin{cases}\max=-۱\\ \min=-۷\end{cases}\xrightarrow[\min=-|a|+c]{\max=|a|+c} c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{-۱-۷}{۲}=-۴\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{-۱+۷}{۲}=۳\Rightarrow a=\pm ۳\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$y=-۳\sin\frac{x}{۲}-۴,\quad y=-۳\sin(-\frac{x}{۲})-۴$$

$$y=۳\sin\frac{x}{۲}-۴,\quad y=۳\sin(-\frac{x}{۲})-۴$$

نوشتن یکی از توابع بالا کافی است. (۰/۲۵)

۸ الف) توجه کنید که

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

ابتدا $\cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \xrightarrow{\sin\alpha=\frac{3}{4}} \cos^2\alpha=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{7}}{4} \xrightarrow[\text{است}\ \cos\alpha<0]{\text{در ربع دوم}} \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(\frac{3}{4})\times(-\frac{\sqrt{7}}{4})=\frac{-3\sqrt{7}}{8}\ \text{(۰/۲۵)}\\ \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2(\frac{9}{16})=-\frac{1}{8}\ \text{(۰/۲۵)}\end{cases}$$

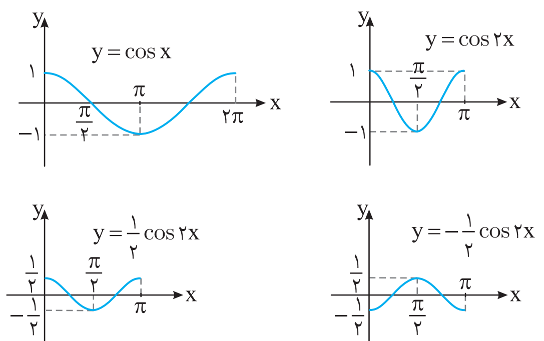
$$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=\frac{-3\sqrt{7}}{8}-(-\frac{1}{8})=\frac{-3\sqrt{7}+1}{8}\ \text{(۰/۲۵)}$$

ب) توجه کنید که $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس:

$$f(x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-\cos 2x}{2}$$

بنابراین ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos 2x$ به دست آید. سپس عرض هر نقطه رو این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ به دست آید. در آخر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ رسم شود. همچنین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$



(۰/۷۵)

۹ الف) اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطهٔ x قطع کند، آن‌گاه $f(x)=0$. پس:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0\ \text{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\sin x=0\Rightarrow x=k\pi} 2x-\frac{\pi}{3}=k\pi\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{(3k+1)\pi}{6}\ \text{(۰/۲۵)}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\pi)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{(3k+1)\pi}{6}<\pi\ \text{(۰/۲۵)}\Rightarrow -3<3k+1<6\Rightarrow -\frac{4}{3}<k<\frac{5}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین به ازای $k=-1$، $k=0$ و $k=1$ سه مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند. (۰/۲۵)

ب) جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos \underbrace{3x}_{x}=\cos \underbrace{2x}_{\alpha}$ به صورت زیر هستند:

$$3x=2k\pi+2x\Rightarrow x=2k\pi\ \text{(۰/۲۵)},\quad 3x=2k\pi-2x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}\ \text{(۰/۲۵)}$$

توجه کنید که جواب‌های به صورت $x=\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند. پس جواب‌های کلی معادله به صورت $x=\frac{2k\pi}{5}$ هستند.

۱۰ الف) توجه کنید که وقتی $x\to\pi$، $1+\cos x$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-3}{1+\cos x}=\frac{\overbrace{\pi^2-3}^{\text{مثبت}}}{0^+}=+\infty\ \text{(۰/۷۵)}$$

ب) حد صورت و مخرج برابر صفر است، پس

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{است.}\ (x-1)]{\text{عامل صفرشونده}}$$

مزدوج

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\ \text{(۰/۲۵)}$$

مزدوج

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{x}+1)}{(x+\sqrt{x})}=\frac{1(\sqrt{1}+1)}{1+\sqrt{1}}=1\ \text{(۰/۲۵)}$$

پ)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4-(2-\frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-(\frac{2x-1}{x})^2}{\frac{1}{x}}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{4x^2-(2x-1)^2}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{x}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-(2x-1))(2x+(2x-1))}{x}\ \text{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{x}\ \text{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x}=4\ \text{(۰/۲۵)}$$

۱۱ الف) توجه کنید که

۱) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$ (۰/۲۵)، ۲) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$ (۰/۲۵)

۳) $\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع $y=f(x)$ در $x=1$ حد ندارد. (۰/۵)

ب) حد صورت برابر -1 است، پس باید حد مخرج برابر صفر و علامت آن در دو طرف $x=2$ مثبت باشد، در نتیجه مخرج به صورت $(x-2)^2$ است.

$$x^2+ax+b=(x-2)^2\ \text{(۰/۲۵)}=x^2-4x+4$$

$a=-4$ (۰/۲۵)، $b=4$ (۰/۲۵)

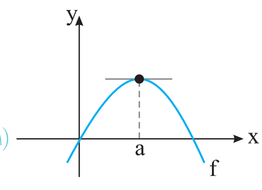
۱۲ الف) معادلهٔ خط مماس: $y-۲=m(x-۱)$

$$m=f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+۱-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}\ (۰/۲۵)$$

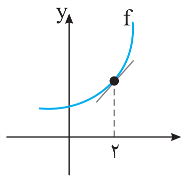
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)}\ (۰/۲۵)=\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲\ (۰/۲۵)$$

معادلهٔ خط: $y-۲=۲(x-۱)\Rightarrow y-۲=۲x-۲\Rightarrow y=۲x$ (۰/۲۵)

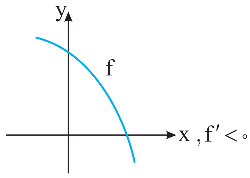
ب)

۱) 

$f'(a)=۰$ (۰/۲۵)

۲) 

$f'(۲)>۰$ (۰/۲۵)

۳) 

$x,\ f'<۰$ (۰/۲۵)

۱۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=۴$ (خط d) برابر است با $f'(۴)$:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow ۱/۵=\frac{y_B-۲۴}{۵-۴}\Rightarrow ۱/۵=\frac{y_B-۲۴}{۱}\ (۰/۲۵)$$

$$۱/۵=y_B-۲۴\Rightarrow y_B=۲۴+۱/۵=۲۵/۵\Rightarrow B(۵,۲۵/۵)\ (۰/۲۵)$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\Rightarrow ۱/۵=\frac{y_C-۲۴}{۳-۴}\Rightarrow ۱/۵=\frac{y_C-۲۴}{-۱}\ (۰/۲۵)$$

$$-۱/۵=y_C-۲۴\Rightarrow y_C=۲۴-۱/۵=۲۲/۵\Rightarrow C(۳,۲۲/۵)\ (۰/۲۵)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱۰)

۱ الف) نادرست. (۰/۲۵) توجه کنید که دو تابع f و g وارون یکدیگرند هرگاه $(fog)(x)=(gof)(x)=x$.

$$(fog)(x)=f(g(x))=-\frac{۲(-\frac{۷}{۲}x-۳)+۷}{۶}=-\frac{-۷x-۶+۷}{۶}$$

$$=-\frac{-۷x+۱}{۶}=\frac{۷}{۶}x-\frac{۱}{۶}$$

ب) نادرست. (۰/۲۵) برد تابع تانژانت برابر $\mathbb{R}$ است.

پ) درست. (۰/۲۵) چندجمله‌ای $f(x)$ بر عبارت $x+۲$ بخش‌پذیر است، هرگاه $f(-۲)=۰$.

$$f(-۲)=۲(-۲)^{۳}+۵(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱۰=۰\Rightarrow f(-۲)=۰$$

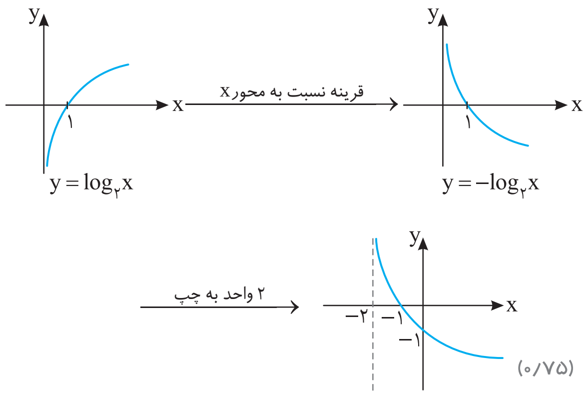
۲ الف) $[۲,۴]$. (۰/۲۵) اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را به اندازهٔ ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۳}$ به‌دست می‌آید (این عمل تأثیری در برد تابع ندارد)، و اگر نمودار به‌دست آمده را ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x+۳}$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که این تغییر روی برد تابع تأثیر دارد و آن را به اندازهٔ ۲ واحد افزایش می‌دهد.

ب) $\frac{۱۷}{۲۵}$. (۰/۲۵) توجه کنید که

$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha=۱-۲(\frac{۲}{۵})^{۲}=۱-\frac{۸}{۲۵}=\frac{۱۷}{۲۵}$$

پ) -۱. (۰/۲۵) اگر $x\to+\infty$ آن‌گاه $\frac{-۱}{۱+x}\to ۰^{-}$، پس $[\frac{-۱}{۱+x}]\to -۱$.

۳

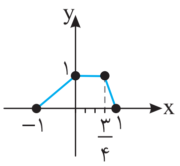


$f(x)=-\log_{۲}(x+۲)$ (۰/۷۵)

با توجه به نمودار تابع f، واضح است که این تابع در تمام دامنهٔ خود یعنی در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ اکیداً نزولی (۰/۵) است.

۴ الف) برای رسم نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$، طول نقاط نمودار تابع f را $\frac{۱}{۴}$ برابر و عرض نقاط را $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌کنیم.

$$\begin{cases}(-۴,۰)\to(-۱,۰)\\(۰,۲)\to(۰,۱)\\(۳,۲)\to(\frac{۳}{۴},۱)\\(۴,۰)\to(۱,۰)\end{cases}$$



(۰/۵)

ب) توجه کنید که

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۱=(x-۱)^{۲}\xrightarrow{\text{۲واحدپایین}}y=(x-۱)^{۲}-۲\ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{یک‌واحد به چپ}}y=(x+۱-۱)^{۲}-۲=x^{۲}-۲\ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه‌نسبت‌به‌محور}x}y=-x^{۲}+۲\ (۰/۲۵)$$

۵ الف) توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=x^{۲}+bx+a,\quad (fog)(x)=x^{۲}+۴x+۱$$

با مقایسهٔ دو عبارت بالا نتیجه می‌گیریم: $b=۴$ (۰/۲۵)، $a=۱$ (۰/۲۵)

ب) ۱) $g(f(۱))\xrightarrow{f(۱)=۲}g(۲)=-۲\Rightarrow(gof)(۱)=-۲$ (۰/۲۵)

توجه کنید که $(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=-۱+۳=۲$، پس

۲) $f((f+g)(۰))=f(۲)=-۵\Rightarrow(fo(f+g))(۰)=-۵$ (۰/۵)

۶ الف) ابتدا $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲-\sqrt{x}\xrightarrow{\text{وارون }f}y=۲-\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به‌دست می‌آوریم}]{x\text{ را برحسب }y}$$

$$y-۲=-\sqrt{x}\ (۰/۲۵)\Rightarrow(y-۲)^{۲}=(-\sqrt{x})^{۲}\ (۰/۲۵)\Rightarrow y^{۲}-۴y+۴=x$$

$$\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای }x\text{ و }y}f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۴\ (۰/۲۵)$$