

تا همین یکی دو سال قبل، مرسوم بود که تو مقدمه کتاب‌های ریاضی انسانی درباره لزوم توجه دانش‌آموزای انسانی به درس ریاضی صحبت کنیم. رغبت دانش‌آموزا به این درس زیاد نبود. حق هم داشتن خب! روحیه اغلب دانش‌آموزای انسانی، با دودوتا چهارتا‌های ریاضی‌وار جور در نمی‌اومد. حتی بعضی افراد - که نمی‌خواستن نامشون فاش بشه! - می‌گفتن بعضی از بچه‌های انسانی کلاً درس ریاضی رو بی‌خیال می‌شن و توی کنکور، تست ریاضی رو «شتر دیدی ندیدی» طور، می‌پیچونن.

اما تو این چندتا کنکور اخیر ورق کاملاً برگشته. اولاً سطح دانش‌آموزای انسانی سال‌به‌سال داره بالا می‌ره و رقابت بینشون سخت‌تر و پیچیده‌تر می‌شه، واسه همین دیگه از کنار هیچ درسی نمی‌شه ساده رد شد. ثانیاً درس ریاضی توی کنکور این‌قدر سخت شده که درصد خوب ازش گرفتن و جواب‌دادن حتی به یه دونه از تست‌هاش، می‌تونه توی تراز کنکورتون اثر زیادی داشته باشه. بنابراین، ریاضی این سال‌ها، دیگه ریاضی اون قدیم ندیما نیست که بشه براش وقت نداشت، بی‌خیالش شد، باهاش قهر بود، بهش «اوکی، بای!» گفت، آنفالو و ریمووش کرد و ...

کتاب‌های جمع‌بندی خیلی‌سبز، همون‌طور که از اسمشون مشخصه، برای مرور و تسلط نهایی در دوران جمع‌بندی نوشته شدن. نوشتن کتاب جمع‌بندی برای ریاضی، کار سختی بود. از یه طرف تستای ریاضی تو کنکورای اخیر این‌قدر سخت شدن که اگه می‌خواستیم همه‌چیز رو عمقی و مفصل توضیح بدیم، باید ۵۰۰ صفحه کتاب می‌نوشتیم و شما هم ۹ ماه فقط برای جمع‌بندی وقت می‌داشتید! از طرف دیگه، هیچ مطلب مهم کنکوری‌ای هم نباید از قلم می‌افتاد و مرور دقیقی از مطالب براتون انجام می‌شد. برای انجام‌دادن این کار سخت، دست‌اندرکاران این کتاب خیلی زحمت کشیدن، جلسات متعددی برگزار شد بینمون، کلی ایده‌پردازی کردیم، کلی نوشتیم و خط زدیم، گاهی حتی رو یک صفحه کتاب ساعت‌ها بحث می‌کردیم. سختی نوشتن این کتاب، اگر از اون کتاب ۵۰۰ صفحه‌ایه بیشتر نشده باشه، کم‌تر هم نبوده! خلاصه که فلفل نبین چه ریزه!

از مؤلف‌های عزیز کتاب تشکر می‌کنم که اصل این زحمت روی دوش اونا بود. هم ما خیلی اذیتشون کردیم و هم خودشون خیلی وقت و انرژی گذاشتن پای کار.

از ویراستارهای عزیزمون که تلاش کردن کتاب با کم‌ترین خطا آماده بشه ممنونم.

از سرکار خانم آرانی تشکر می‌کنم که مرحله‌به‌مرحله جلو رفتن کار رو پیگیری کردن.

و از دوستان عزیزمون در واحد تولید سپاس‌گزارم که برای آماده‌سازی کتاب حسابی تو زحمت افتادن.

۷	یادآوری	فصل صفر
۱۰	معادله درجه دوم	فصل اول
۲۳	تابع	فصل دوم
۴۶	آمار	فصل سوم
۶۴	شمارش و احتمال	فصل چهارم
۸۵	دنباله	فصل پنجم
۹۹	توان و توابع نمایی	فصل ششم
۱۰۹	منطق و گزاره‌ها	فصل هفتم
۱۱۸		پاسخ‌نامه تشریحی
۱۷۱		پاسخ‌نامه کلیدی

تقدیم به

همسر عزیزم، سنگ صبوری که دنیای مرا زیبا کرد.

حسینخانی

پدر و مادر عزیزم که تمام من هستند.

شعبانی

دنباله

فصل ۵

پیش‌نیازهای این فصل: معادله

مهم‌ترین مبحث این فصل: رابطه بازگشتی - جمله عمومی دنباله حسابی و هندسی - واسطه‌های حسابی و هندسی - مجموع جملات

فصل‌های منطبق با کتاب درسی: دوم و سوم دوازدهم

تعداد تست در گنگورو ۳ تست



۱ الگو و دنباله

در ابتدا به تعریفی که در دوره اول دبیرستان با آن آشنا شدید، اشاره می‌کنیم.

الگو شکل یا اعدادی که با قانون مشخص پشت سر هم قرار گرفته‌اند را الگو می‌نامیم.

توجه به رابطه (یا همون قانون مشخص) در الگوها که جمله n ام الگو را مشخص می‌کند، جمله عمومی الگو می‌گوییم و آن را با نماد a_n ، b_n و ... نمایش می‌دهیم.

مثلاً شکل زیر را با هم ببینیم:

این توپ‌ها بیانگر یک الگو هستند که جملات این الگو به شکل زیر است:

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
تعداد توپ	۱ $2-1$	۳ $4-1$	۵ $6-1$	۷ $8-1$	...



با توجه به این جدول می‌توانیم حدس بزنیم که جمله عمومی این الگو به صورت $a_n = 2n - 1$ است. یعنی تعداد توپ‌ها در هر مرحله یک واحد کم‌تر از دو برابر شماره آن مرحله است.

حالا تعریف دنباله را با هم ببینیم.

دنباله به اعدادی که پشت سر هم قرار گرفته‌اند، دنباله می‌گوییم.

معمولاً جملات یک دنباله را به صورت a_1 ، a_2 ، a_3 و ... نشان می‌دهیم و منظور از a_1 همان جمله اول، a_2 جمله دوم و ... است.

نکته یک دنباله، تابعی است که دامنه آن اعداد طبیعی (همون شماره جمله) و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

توجه در اینجا هم جمله n ام دنباله (جمله عمومی یا ضابطه دنباله) را با a_n نشان داده و برای به دست آوردن جملات دنباله، در جمله عمومی آن به جای n (شماره جمله)، اعداد طبیعی را قرار می‌دهیم.

مثلاً در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = 3n^2 - 1$:

برای به دست آوردن جمله سوم باید به جای n عدد ۳ را قرار دهیم:

$$a_3 = 3(3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$$

$$269 - 269 \text{ اگر } a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = 2n, \text{ و } c_n = 1 - (-1)^{n+1} \text{ باشد، حاصل } a_7 - b_3 + c_{7k} \text{ کدام است؟ } (k \in \mathbb{N})$$

$$\frac{5}{4} (4)$$

$$\frac{1}{9} (3)$$

$$-\frac{1}{9} (2)$$

$$-\frac{15}{4} (1)$$

جملات a_7 ، b_3 و c_{7k} را با توجه به دنباله داده شده به دست بیار.

حاصل خواسته شده را محاسبه کن.

دنباله‌ها انواع مختلفی دارند که در این جا به بررسی چند نوع خاص از آن‌ها می‌پردازیم:

رابطه بازگشتی رابطه‌ای که در آن هر جمله دنباله (یعنی a_n) برحسب جمله یا جملات قبلی دنباله (یعنی a_{n-1} , a_{n-2} و ...) نوشته شود، رابطه بازگشتی می‌نامیم.

مثلاً در دنباله $a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، چهار جمله اول به صورت زیر است:

$$\begin{cases} n=2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 3 \\ n=3 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 7 \\ n=4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = 15 \end{cases}$$

دنباله دوضابطه‌ای دنباله‌ای که تعدادی از جملات آن از یک ضابطه و بقیه جملات آن از ضابطه‌ای دیگر به دست می‌آیند را دنباله دوضابطه‌ای می‌نامیم.

مثلاً در دنباله $a_n = \begin{cases} 2n^2 + 3 & \text{فرد } n \\ 3n - 1 & \text{زوج } n \end{cases}$

✓ جمله سوم (پهون ۳ فوره) از ضابطه بالایی به دست می‌آید. $a_3 = 2(3)^2 + 3 = 2(9) + 3 = 21$ (۳ فرد است).

✓ و جمله ششم (به دلیل زوج بودن عدد ۶) از ضابطه پایینی به دست می‌آید: $a_6 = 3(6) - 1 = 18 - 1 = 17$ (۶ زوج است).

دنباله مثلثی دنباله‌ای که جمله اول آن یک است و جملات دیگر آن از مجموع جمله قبلی و شماره آن جمله به دست می‌آیند را دنباله مثلثی می‌نامیم. ویژگی‌ها و نمایش‌های مختلف دنباله مثلثی را در جدول زیر با هم می‌بینیم:

جملات	شکل	جدول	رابطه بازگشتی	جمله عمومی												
۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...		<table><tr><td>شماره مرحله</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>...</td><td>n</td></tr><tr><td>a_n</td><td>۱</td><td>۱+۲</td><td>۱+۲+۳</td><td>...</td><td>۱+۲+۳+...+n</td></tr></table>	شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n	a_n	۱	۱+۲	۱+۲+۳	...	۱+۲+۳+...+n	$a_{n+1}=a_n+(n+1)$ ($a_1=1$)	$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$
شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n											
a_n	۱	۱+۲	۱+۲+۳	...	۱+۲+۳+...+n											

دنباله مربعی دنباله‌ای که هر جمله آن برابر مربع شماره آن جمله است را دنباله مربعی می‌گوییم. ویژگی‌ها و نمایش‌های مختلف دنباله مربعی را در جدول زیر با هم می‌بینیم:

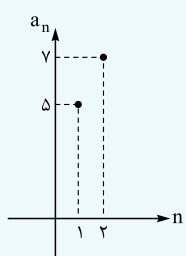
جملات	شکل	جدول	رابطه بازگشتی	جمله عمومی												
۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...		<table><tr><td>شماره مرحله</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>...</td><td>n</td></tr><tr><td>a_n</td><td>۱×۱</td><td>۲×۲</td><td>۳×۳</td><td>...</td><td>n×n</td></tr></table>	شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n	a_n	۱×۱	۲×۲	۳×۳	...	n×n	$a_{n+1}=a_n+(۲n+۱)$ ($a_1=۱$)	$a_n = n^۲$
شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n											
a_n	۱×۱	۲×۲	۳×۳	...	n×n											

دنباله فیبوناچی دنباله‌ای بازگشتی است که دو جمله اول آن برابر یک است و جملات دیگر آن برابر مجموع دو جمله قبلی می‌باشد.

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ → جملات ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

نکته مجموع n جمله ابتدایی دنباله فیبوناچی به صورت مقابل است:

$S_n = 2a_n + a_{n-1} - 1$



نمودار دنباله هر دنباله تابعی است که در ازای هر ورودی یک خروجی به ما می‌دهد، مثلاً همان‌طور که می‌دانیم $a_n = 2n + 3$ یک جمله عمومی دنباله است که به ازای $n = 1$ ، می‌توانیم جمله اول و به ازای $n = 2$ می‌توانیم جمله دوم آن را به دست بیاوریم و ...؛ بنابراین می‌توانیم آن را بر روی نمودار نشان دهیم.

نقطه مدنظر را به صورت $(1, a_1)$ یا $(1, 5)$ نمایش می‌دهیم که مؤلفه اول، مقدار n جای‌گذاری شده و مؤلفه دوم خروجی جمله مدنظر می‌باشد. $a_1 = 2(1) + 3 = 5$

نکته برای رسم نمودارهای دنباله‌ها، هر جمله که به صورت (n, a_n) است را فقط با یک نقطه روی نمودار نشان می‌دهیم.

(انسانی خارج ۹۹)

۲۷۰- جمله هشتم از دنباله اعداد با رابطه $a_1 = a_2 = 3$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n$ کدام است؟

۲۳ (۱)	۱۹ (۲)	۱۷ (۳)	۱۳ (۴)
جملات دنباله را به ترتیب بنویس تا به جمله هشتم برسی.	به ترتیب مقادیر ۱، ۲، ... را به جای n جای گذاری کن.	در دنباله های بازگشتی هر جمله را به کمک جمله قبلی به دست بیار.	

۲۷۱- در دنباله a_n با رابطه بازگشتی $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ و $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ نسبت جمله هفتم به جمله پنجم کدام است؟

۲/۵ (۱)	۳/۲ (۲)	۴/۶ (۳)	۳/۴ (۴)
جمله هفتم و پنجم خواسته شده را یافته و نسبت آن ها را پیدا کن.	رابطه بازگشتی داده شده را به کمک جمله های قبلی بنویس.	مقادیر n را در رابطه داده شده جای گذاری کن.	

(انسانی ۱۴۰۰)

۲۷۲- جمله چهاردهم دنباله بازگشتی $1 + a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ با فرض $a_{16} = \frac{1597}{987}$ کدام است؟

۲۳۳ (۱)	۳۷۷ (۲)	۳۷۷ (۳)	۶۱۰ (۴)
به ترتیب جمله پانزدهم و پس از آن جمله شانزدهم را به دست بیار.	با داشتن جمله شانزدهم به کمک رابطه بازگشتی جملات پانزدهم و چهاردهم را به دست بیار.	رابطه بازگشتی را بازنویسی کن و a_n را بر حسب a_{n+1} به دست بیار.	رابطه بازگشتی را بازنویسی کن و a_n را بر حسب a_{n+1} به دست بیار.

(انسانی خارج ۱۴۰۲)

۲۷۳- جمله ششم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+1} = a_n - \frac{n}{2} + 2a_{n-1}$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

-۳ (۱)	۳ (۲)	-۱ (۳)	۱ (۴)
همین مراحل را تا رسیدن به جمله ششم ادامه بده.	به ترتیب مقادیر $n = 4, n = 5, \dots$ را جای گذاری کن.	در دنباله های بازگشتی هر جمله را به کمک جمله قبلی به دست بیار.	

(انسانی خارج ۱۴۰۲)

۲۷۴- مقدار $a_7 = \frac{17}{12}$ از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_1}{a_n})$ ، تقریبی از $\sqrt{k}$ است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_1 = k$ باشد، مقدار k کدام است؟

۲ (۱)	۳ (۲)	۵ (۳)	۷ (۴)
با حل معادله درجه دوم به دست آمده، مقدار k را به دست بیار.	با جای گذاری $a_7 = \frac{17}{12}$ یک معادله بر حسب k به دست بیار.	به ترتیب $n = 1$ و $n = 2$ را در رابطه بازگشتی جای گذاری کن.	

(انسانی ۱۴۰۱)

۲۷۵- جمله ۴۰۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{1+a_n} & \text{فرد } n \end{cases}$ کدام است؟

۲ (۱)	۱ (۲)	$\frac{1}{2}$ (۳)	صفر (۴)
جمله ۴۰۰ام را به دست بیار.	جمله عمومی دنباله را حدس بزن.	چند جمله ابتدایی دنباله را بنویس.	

۲۷۶- دو جمله متوالی دنباله $a_n = \begin{cases} 100 - \frac{1}{2}n^2 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{15}n & \text{فرد } n \end{cases}$ برابر هستند. اگر مقدار این دو جمله متوالی، برابر مقدار صحیح k باشد، مقدار $a_{16} - k$ کدام است؟

(انسانی خارج ۱۴۰۱)

۲۶ (۱)	۲۸ (۲)	۳۰ (۳)	۳۲ (۴)
حاصل خواسته شده را به دست بیار.	به کمک فرض مسئله (برابری دو جمله متوالی) مقدار k را به دست بیار.	مقادیر ۱۴ و ۱۵ را جای گذاری کن.	با توجه به صحیح بودن جملات از ضابطه پایین می فهمیم $n = 15$ است.

۲۷۷- در دنباله اعداد $1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$ جمله دهم کدام است؟

۳۷ (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۶ (۴)

مقدار جمله دهم را به دست می آوریم.	جمله عمومی دنباله را می نویسیم.	اگر از هر جمله یک واحد کم کنیم، دنباله های شبیه به مثلثی داریم.	دنباله داده شده را با دنباله های معروف مقایسه کن.
------------------------------------	---------------------------------	---	---

۲۷۸- در الگوی مقابل، تعداد دایره ها در شکل نهم کدام است؟

۱۱۷ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۳ (۳) ۱۲۵ (۴)



تعداد دایره ها در شکل نهم را به دست بیاور.	جمله عمومی نهایی را مشخص کن.	جمله عمومی مربوط به هر قسمت را تعیین کن.	شکل های موجود در هر مرحله را به دو قسمت مربعی و مثلثی تقسیم کن.
--	------------------------------	--	---

(انسانی خارج ۹۸)

۲۷۹- در دنباله فیبوناچی $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ جمله یازدهم کدام است؟

۸۹ (۱) ۹۲ (۲) ۹۴ (۳) ۹۶ (۴)

جملات مختلف دنباله را بنویس تا به جمله یازدهم برسی.	مقادیر ۱، ۲ و ... را به ترتیب به جای n جای گذاری کن.
---	--

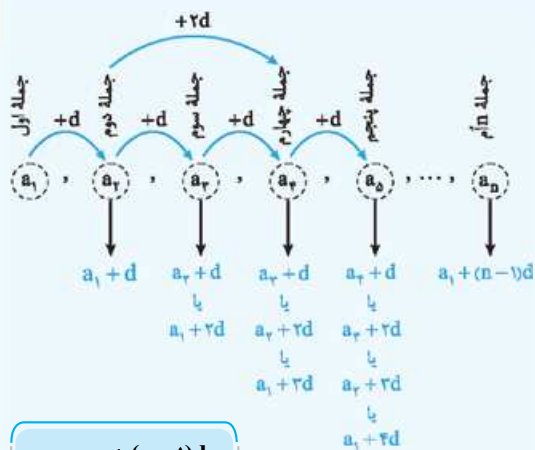
۳ دنباله حسابی

دنباله ای که هر جمله آن (به جز جمله اول) از مجموع جمله قبلی و عددی ثابت به دست می آید را دنباله حسابی می گوئیم.

این عدد ثابت را اختلاف مشترک (یا قدرنسبت) می گوئیم و با d نمایش می دهیم.

جملات مختلف در یک دنباله حسابی (با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d)

در شکل روبه رو آمده است:



جمله عمومی دنباله حسابی به صورت مقابل است:

نکته جمله عمومی دنباله حسابی درجه اول است، بنابراین ضابطه جمله عمومی دنباله حسابی را می توانیم به صورت $a_n = An + B$ بنویسیم که در آن ضریب n برابر قدرنسبت دنباله است.

مثلاً در دنباله $a_n = 3n - 5$ ، قدرنسبت دنباله برابر ۳ است.

مثال فرض کنید می خواهیم بررسی کنیم در دنباله حسابی با جمله اول ۶۳ و قدرنسبت (۴-) چند جمله مثبت داریم:

گام اول: ابتدا جمله عمومی دنباله را می نویسیم:

گام دوم: جمله عمومی به دست آمده را بزرگ تر از صفر قرار می دهیم تا حدود n به دست آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 63 - 4n + 4 \Rightarrow a_n = 67 - 4n$$

$$67 - 4n > 0 \Rightarrow 4n < 67 \Rightarrow n < \frac{67}{4} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, \dots, 16$$

توجه داشته باشید که مقادیر قابل قبول برای n اعداد طبیعی کوچک تر از $16/75$ است.

گام سوم: تعداد جملات را می شماریم:

$$\frac{16-1}{1} + 1 = 16$$

توجه در دنباله حسابی اگر $d > 0$ دنباله افزایشی است. اگر $d < 0$ دنباله کاهشی است.

مثلاً دنباله $7, 11, 15, 19, \dots$ افزایشی و دنباله $17, 11, 5, -1, \dots$ کاهشی است.

$$a_n = a_{n-1} + d$$

رابطه بازگشتی مربوط به دنباله حسابی به صورت مقابل است:

این رابطه بازگشتی به این معنی است که هر جمله به علاوه قدرنسبت دنباله حسابی، جمله بعدی را به ما می‌دهد.

مثلاً رابطه بازگشتی دنباله $5, 8, 11, 14, \dots$ به شکل $a_{n+1} = a_n + 3$ است.

سؤالات مربوط به دنباله حسابی را می‌توان در چند تیپ، دسته‌بندی کرد:

تیپ ۱: تشخیص دنباله از روی دو جمله دلخواه اگر a_n و a_m دو جمله دلخواه از دنباله‌ای حسابی باشند:

گام اول: به کمک رابطه $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم.

گام دوم: مقدار d را در رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ جای‌گذاری کرده و a_1 را به دست می‌آوریم.

گام سوم: خواسته مسئله را محاسبه می‌کنیم.

مثلاً اگر ۱۲ و ۶ جملات ششم و سوم یک دنباله حسابی باشند:

$$\checkmark d = \frac{a_6 - a_3}{6 - 3} = \frac{12 - 6}{3} = 2$$

$$\checkmark a_6 = a_1 + 5d \xrightarrow{d=2} 12 = a_1 + 5(2) \Rightarrow a_1 = 2$$

تیپ ۲: شرط تشکیل دنباله حسابی (واسطه حسابی) فرض کنید a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه جمله

وسط، میانگین دو جمله دیگر است؛ یعنی:

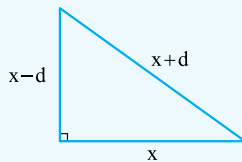
توجه شرط تشکیل دنباله حسابی برای هر سه جمله دلخواه از دنباله که فاصله یکسانی با هم دارند، نیز بیان می‌شود.

مثلاً در یک دنباله حسابی، جمله هفتم واسطه حسابی جملات چهارم و دهم است:

نکته در حل مسائلی که سه جمله متوالی یک دنباله حسابی خواسته شده است، آن‌ها را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

مثلاً فرض کنید اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ داده‌اند و می‌خواهیم

مقدار x را پیدا کنیم:



برای حل، ضلع متوسط را برابر x در نظر می‌گیریم و بقیه اضلاع را مطابق با ضلع متوسط مشخص می‌کنیم:

☒ ضلع متوسط x

☒ ضلع کوچک‌تر $x-d = x-2$

☒ ضلع بزرگ‌تر (وتر) $x+d = x+2$

حالا رابطه فیثاغورس را برای این مثلث می‌نویسیم:

$$(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \times \text{ (طول نمی‌تونه صفر باشه.)} \\ x = 8 \checkmark \end{cases}$$

تیپ ۳: درج m واسطه حسابی اگر بخواهیم بین a و b ، m عدد را طوری قرار دهیم که همه این اعداد (یعنی a, b و m تای وسط)

تشکیل دنباله حسابی بدهند، داریم:

$$\begin{matrix} & \text{تا } m \\ a, & \dots, & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله آخر } (a_{m+2}) & & \text{جمله اول } (a_1) \end{matrix} \Rightarrow d = \frac{a_{m+2} - a_1}{(m+2) - 1} = \frac{b-a}{m+1}$$

مثلاً اگر بین -12 و 52 سه واسطه حسابی درج کنیم، قدرنسبت برابر است با:

تیپ ۴: جملات مشترک دو دنباله حسابی برای پیدا کردن جملات مشترک به شکل زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: جملات هر دو دنباله را می‌نویسیم تا اولین جمله مشترک آن‌ها را پیدا کنیم.

گام دوم: ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله اولیه، قدرنسبت دنباله جدید می‌شود.

گام سوم: جمله عمومی جملات مشترک را به دست می‌آوریم.

مثلاً می‌خواهیم جملات مشترک دو دنباله $2, 6, 10, \dots$ و $5, 8, 11, \dots$ را تعیین کنیم:

$$\textcircled{1} 2, 6, 10, 14, \dots : d = 4$$

$$\textcircled{2} d = [4, 3] = 12$$

$$5, 8, 11, 14, \dots : d = 3$$

$$\textcircled{3} a_n = 14 + (n-1)12 = 12n + 2 \Rightarrow \text{جملات مشترک: } 14, 26, 38, \dots$$

۲۸۰- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد نقطه‌ها در شکل پانزدهم و سیزدهم کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۱۸
(۴) ۱۲

اختلاف جملات پانزدهم و سیزدهم را به دست می‌آوریم. جمله عمومی دنباله، یک دنباله حسابی است، آن را به دست می‌آوریم. تعداد شکل‌ها در چند مرحله ابتدایی را بنویس سپس جمله عمومی دنباله را حدس بزن.

۲۸۱- اگر جمله اول و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جمله دهم این دنباله کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۱)

- (۱) ۲۱
(۲) ۲۲
(۳) ۲۳
(۴) ۲۴

جمله دهم را به دست می‌آوریم. جمله عمومی دنباله را می‌نویسیم. به کمک جمله عمومی، اختلاف مشترک دنباله را به دست می‌آوریم.

۲۸۲- در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم، پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است. جمله هفتم کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

- (۱) ۲۲
(۲) ۲۴
(۳) ۲۵
(۴) ۲۹

جمله هفتم را به دست بیار. مجموع آن‌ها را برابر ۷۵ قرار بده و ساده کن. جمله عمومی جملات a_3 ، a_5 و a_{13} را در یک دنباله حسابی دلخواه به دست بیار.

۲۸۳- در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و بیست و هشتم از جمله پنجم، ۶۱ واحد بیشتر است. جمله بیست و ششم این دنباله کدام است؟ (انسانی نوبت اول ۱۴۰۳)

- (۱) ۷۶
(۲) ۶۱
(۳) ۵۵
(۴) ۴۳

ساده‌سازی کن و حاصل خواسته شده را به دست بیار. به کمک جمله عمومی دنباله حسابی حاصل هر جمله را بنویس. فرض مسئله را به زبان ریاضی بنویس.

۲۸۴- در دنباله حسابی $208, 204, 200, \dots$ کدام جمله برابر صفر است؟

- (۱) ۵۲
(۲) ۵۳
(۳) ۵۴
(۴) ۵۱

شماره جمله را به دست بیار. جمله عمومی را مشخص کرده و برابر صفر قرار بده. دنباله حسابی نزولی است، پس جمله اول و قدرنسبت را مشخص کن.

۲۸۵- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۱۰ و مجموع جملات هشتم و نهم برابر ۱۱۰ است. جمله ششم کدام است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۵
(۳) ۴۰
(۴) ۳۰

سپس جمله ششم را به راحتی به دست بیار. با داشتن جمله اول و مجموع جملات هشتم و نهم قدرنسبت را به دست بیار.

۲۸۶- واسطه حسابی بین جملات چهارم و هفتم دنباله $8, 14, 20, \dots$ کدام است؟

- (۱) ۳۵
(۲) ۳۰
(۳) ۲۵
(۴) ۴۰

واسطه حسابی بین جملات داده شده را بنویس. سپس جملات چهارم و هفتم را به دست بیار. با استفاده از جملات داده شده قدرنسبت را به دست بیار.

۲۸۷- بین اعداد ۱۶ و ۶۴، چند واسطه حسابی بنویسیم تا جمله هشتم این دنباله برابر ۴۴ شود؟ ($a_1 = 16$)

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۳
(۴) ۱۱

تعداد واسطه‌ها به دست آمده. با استفاده از قدرنسبت به دست آمده و فرمول واسطه‌ها، مقدار مجهول مشخص می‌شود. قدرنسبت را با استفاده از این دو جمله به دست بیار. جملات $a_1 = 16$ و $a_8 = 44$ مشخص است.

۲۸۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a_7 = 5a_4 + 3a_4$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می تواند باشد؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

جملات a_7 و a_4 را در دنباله حسابی دلخواه به دست بیار.

در رابطه داده شده جای گذاری کرده و معادله ای بر حسب d و a به دست بیار.

با اعمال تغییر متغیر $x = \frac{a}{d}$ معادله را بازنویسی کن، x را به دست بیار.

حاصل خواسته شده به راحتی مشخص می شود.



۴ مجموع جملات دنباله حسابی

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را با S_n نشان می دهیم و برای محاسبه آن می توانیم از یکی از دو فرمول زیر استفاده کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad (\text{فرمول اول})$$

الف اگر تعداد جملات (n) ، جمله اول (a_1) و اختلاف مشترک (d) معلوم بود:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad (\text{فرمول دوم})$$

ب اگر تعداد جملات (n) ، جمله اول (a_1) و جمله آخر (a_n) معلوم بود:

مثال در دنباله حسابی $a_n = 3n - 7$ ، مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با:

$$a_n = 3n - 7 \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 3 - 7 = -4 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2(-4) + (20-1)3] = 10 \times 49 = 490$$

۲۸۹- در یک دنباله حسابی، اختلاف مشترک $5/0-$ و مجموع دوازده جمله اول برابر ۹ است. جمله اول این دنباله کدام است؟ (انسانی خارج ۱۴۰۱)

$\frac{7}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{7}{2}$ (۱)

رابطه S_{12} را به کمک فرمول مجموع جملات بنویس.

با جای گذاری d ، مقدار a_1 را به دست می آوریم.

۲۹۰- مجموع n جمله اول یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

۱۸ (۴)

$\frac{49}{3}$ (۳)

$\frac{29}{3}$ (۲)

۹ (۱)

S_6 و S_{18} را با توجه به رابطه داده شده به دست بیار.

تفاضل این دو، برابر حاصل خواسته شده است.

۲۹۱- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم، نصف جمله سوم است، مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

فرض مسئله را بنویس و ساده کن تا رابطه ای بین a_1 و d به دست بیاد.

رابطه به دست آمده را در فرمول S_n جای گذاری کن.

$S_n = 0$ را حل کرده و n را به دست بیار.

۲۹۲- در یک دنباله حسابی، مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن ۱۰ است، جمله اول این دنباله کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

رابطه مربوط به a_6 و S_{12} را بنویس.

یک دستگاه دو معادله دو مجهول بساز.

با حل دستگاه a و d را به دست بیار.

۲۹۳- در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله، کدام است؟

۱۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

a_1 و a_{15} را به کمک رابطه داده شده به دست بیار.

به کمک فرمول، $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، S_{15} را حساب کن.

(انسانی خارج ۹۸)

۲۹۴- مجموع ۳۵ عدد طبیعی بخش پذیر بر ۳ که بزرگ ترین آن ها ۱۵۰ باشد، کدام است؟

۳۴۲۰ (۱) ۳۴۶۵ (۲) ۳۴۷۵ (۳) ۳۵۰۰ (۴)

مجموع ۳۵ جمله یعنی S_{35} را محاسبه کن.	a_1 و d را تعیین کن.	چند عدد اولیه دنباله را بنویس.
---	--------------------------	--------------------------------

۲۹۵- اعداد $1, x, y, \frac{5}{p}, \dots$ ، چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند، مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۵۷ (۱) ۶۲/۵ (۲) ۶۷/۵ (۳) ۶۸ (۴)

S_{15} را به کمک فرمول محاسبه کن.	به کمک جمله عمومی و داشتن جملات، مقدار d را به دست بیاور.	شماره جملات معلوم را مشخص کن.
-------------------------------------	---	-------------------------------

۲۹۶- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول می باشد؟

$\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

نسبت خواسته شده را به دست بیاور.	با ساده کردن آن رابطه ای بین a و d به دست میاد.	فرض مسئله را به کمک آن ها بازنویسی کن.	S_5 و S_{10} را به دست بیاور.
----------------------------------	---	--	-----------------------------------

۲۹۷- در یک دنباله حسابی با جمله اول a اگر یک واحد به قدر نسبت (اختلاف مشترک) جملات افزوده شود، آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

۱۶۰ (۱) ۱۷۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۹۰ (۴)

تفاضل آن ها را به دست بیاور.	S_{20} را در حالت جدید بنویس.	تغییرات گفته شده را اعمال کن.	S_{20} را در حالت اولیه بنویس.
------------------------------	---------------------------------	-------------------------------	----------------------------------

(انسانی ۹۹)

۲۹۸- در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی کدام است؟

۱/۵ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴)

با حل دستگاه، a و d مشخص می شود.	رابطه a_n را نوشته و رابطه ای بین a و d را به دست بیاور.	رابطه S_n را بنویس و رابطه ای بین a و d را به دست بیاور.
--------------------------------------	--	--

(انسانی ۱۴۰۰)

۲۹۹- مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم دنباله ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

-۱۳/۶ (۱) -۱۴/۸ (۲) -۱۵/۶ (۳) -۱۶/۸ (۴)

جمله یازدهم را به دست بیاور.	با حل دستگاه، a و d را بنویس.	رابطه $\frac{a_{15}}{a_6}$ را نوشته و رابطه ای بین a و d بنویس.	رابطه S_{10} را بنویس و رابطه ای بین a و d بنویس.
------------------------------	-----------------------------------	---	---

۳۰۰- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است، جمله اول کدام است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

با حل دستگاه، جمله اول را به دست بیاور.	مجموع جملات را برای هر دنباله جدید بنویس.	جمله اول و قدرنسبت هر کدام را تعیین کن.	جملات ردیف فرد و ردیف زوج را به عنوان دو دنباله جدید در نظر بگیر.
---	---	---	---

۳۰۱- مجموع پنج جمله اول از یک دنباله حسابی افزایشی، برابر ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگ تر، سه برابر مجموع دو جمله کوچک تر است. اختلاف مشترک دنباله کدام است؟

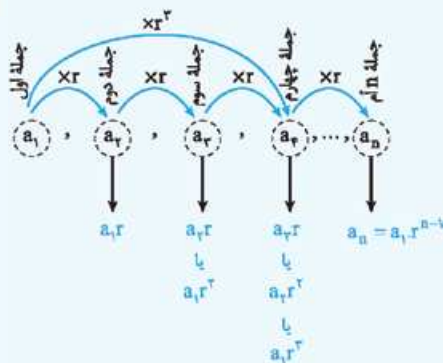
۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

با کمک حل دستگاه، a و d را محاسبه کن.	سپس رابطه بین مجموع ها را نوشته و رابطه ای بین a و d بنویس.	جمله وسط را به دست بیاور و رابطه بین آن ها را بنویس.	مجموع پنج جمله دنباله حسابی برابر جمله وسط در تعداد جملات است.
---	---	--	--

۳۰۲- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود، در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟
(انسانی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۶ (۱)	۸ (۲)	۹ (۳)	۱۰ (۴)
بررسی کن با نصف تعداد کل صندلی‌ها	تعداد صندلی‌های هر ردیف را	تعداد صندلی‌ها را نصف کن.	تعداد صندلی‌های هر ردیف را در حالت اول پشت سر هم بنویس.
چند ردیف می‌توان ساخت! (از فرمول S_n کمک بگیر).	دنباله این جملات و ویژگی‌های آن را مشخص کن. (جمله اول و قدرنسبت)	مجموع جملات (مجموع تعداد صندلی‌ها) را مشخص کن.	دنباله این جملات و ویژگی‌های آن را مشخص کن. (جمله اول و قدرنسبت)

دنباله هندسی



✓ دنباله‌ای که هر جمله آن (به جز جمله اول) از حاصل ضرب جمله قبلی در عددی ثابت به دست می‌آید.

✓ این عدد ثابت را نسبت مشترک (یا قدرنسبت) می‌گوییم و با r نمایش می‌دهیم.

✓ جملات مختلف در یک دنباله هندسی (با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r) شکل مقابل آمده است:

در هر دنباله هندسی، قدرنسبت از تقسیم دو جمله متوالی به دست می‌آید:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

✓ جمله عمومی دنباله هندسی به صورت مقابل است:

مثلاً در دنباله هندسی $4, 6, 9, \dots$:

۱ جمله اول برابر $a_1 = 4$ است.

۲ قدرنسبت دنباله برابر است با:

پس جمله عمومی دنباله هندسی برابر است با:

رابطه بازگشتی مربوط به دنباله هندسی به صورت مقابل است:

مثلاً رابطه بازگشتی دنباله $2, 6, 18, \dots$ برابر $a_n = 3 \times a_{n-1}$ است.

✓ در جدول زیر حالت‌های مختلف دنباله هندسی از لحاظ صعودی (افزایش) یا نزولی (کاهش) بودن را با هم می‌بینیم:

وضعیت دنباله هندسی	قدرنسبت (r)	جمله اول (a_1)
صعودی	$r > 1$	$a_1 > 0$
نزولی	$0 < r < 1$	$a_1 > 0$
صعودی	$r > 1$	$a_1 < 0$
نزولی	$0 < r < 1$	$a_1 < 0$
نه صعودی و نه نزولی	$r < 0$	$a_1 \neq 0$

$$-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$$

مثلاً دنباله هندسی که $a_1 = -2$ و $r = \frac{1}{3}$ باشد، صعودی است:

سؤالات مربوط به دنباله هندسی را می‌توان در چند تیپ، دسته‌بندی کرد:

تیپ ۱: تشخیص دنباله از روی دو جمله دلخواه اگر a_m و a_n دو جمله دلخواه از دنباله‌ای هندسی باشند:

گام اول: به کمک رابطه $r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$ نسبت مشترک را به دست می‌آوریم.

گام دوم: مقدار r را در رابطه $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ جای گذاری کرده و a_1 را به دست می‌آوریم.

گام سوم: خواسته مسئله را محاسبه می‌کنیم.

مثلاً اگر جملات چهارم و هفتم دنباله‌ای هندسی به ترتیب برابر ۱۰ و ۸۰ باشند، آن گاه:

$$r^{7-4} = \frac{a_7}{a_4} \Rightarrow r^3 = \frac{80}{10} = 8 \Rightarrow r = 2$$

نسبت مشترک:

$$a_4 = 10 \Rightarrow a_1 r^3 = 10 \Rightarrow a_1 (2)^3 = 10 \Rightarrow 8a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{8}$$

جمله اول:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{10}{8} (2)^{n-1}$$

جمله عمومی:

تیپ ۲: شرط تشکیل دنباله هندسی (واسطه هندسی) فرض کنید a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه

جمله وسط به توان ۲، برابر حاصل ضرب دو جمله دیگر است؛ یعنی:

توجه شرط تشکیل دنباله هندسی برای هر سه جمله دلخواه از دنباله که فاصله یکسانی با هم دارند نیز بیان می‌شود.

مثلاً در یک دنباله هندسی، جمله پنجم، واسطه هندسی جملات دوم و هشتم است:

نکته در حل مسائلی که سه جمله متوالی یک دنباله هندسی خواسته شده، آن‌ها را به صورت a, ar, ar^2 و $\frac{a}{r}$ در نظر می‌گیریم.

مثلاً فرض کنیم حاصل ضرب سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۶۴ و مجموع آن‌ها برابر ۲۰ باشد.

$$\frac{a}{r}, a, ar \xrightarrow{\text{۶۴ حاصل ضرب}} \frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

پس جملات این دنباله به شکل $\frac{4}{r}, 4, 4r$ بوده که با توجه به این که مجموع آن‌ها ۲۰ است، داریم:

$$\frac{4}{r} + 4 + 4r = 20 \Rightarrow \frac{4 + 4r + 4r^2}{r} = 20 \Rightarrow r^2 + r + 1 = 5r \Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

تیپ ۳: درج واسطه هندسی اگر بخواهیم بین a و b عدد m را طوری قرار دهیم که همه این اعداد (یعنی a, b و m تای وسط) تشکیل دنباله هندسی دهند، داریم:

$$a, \dots, b \Rightarrow \frac{b}{a} = r^{m+1}$$

جمله آخر (a_{m+2}) جمله اول (a_1)

مثلاً اگر بخواهیم بین $\frac{1}{2}$ و ۱۶ چهار جمله قرار دهیم که تشکیل دنباله‌ای هندسی دهند، داریم:

$$\frac{1}{2}, \dots, \dots, \dots, 16 \Rightarrow \frac{a_6}{a_1} = r^5 \Rightarrow \frac{16}{\frac{1}{2}} = r^5 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

۳۰۳- جمله نهم یک دنباله هندسی، ۵ برابر جمله ششم است. نسبت جمله دهم بر جمله چهارم آن کدام است؟

۱۲۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۵ (۲)

۵ (۱)

نسبت دو جمله را پیدا کن و قدرنسبت را به دست بیاور.

بعد از پیدا کردن قدرنسبت به سراغ خواسته سؤال بروید.

با جای گذاری قدرنسبت به دست آمده به جواب می‌رسید.

۳۰۴- در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چه قدر از جمله هفتم بیشتر است؟

(انسانی ۱۴۰۱)

۱۲۹۶ (۴)

۱۰۵۶ (۳)

۹۷۲ (۲)

۸۹۱ (۱)

نسبت جمله هشتم به جمله چهارم را بنویس.

قدرنسبت را از این رابطه به دست بیاور.

به کمک مقدار a_3 ، جملات پنجم و هفتم را به دست بیاور.

اختلاف هر دو جمله خواسته شده را محاسبه کن.

۳۰۵- جمله اول و نسبت مشترک یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۱۴۵۸ و $\frac{1}{4}$ است. اگر جمله n ام این دنباله برابر ۲ باشد، n کدام است؟

(انسانی نوبت اول ۱۴۰۳)

۷ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

جمله عمومی دنباله هندسی داده شده را تشکیل بده.

جمله a_n را برابر ۲ قرار بده.

مقدار n را به دست بیاور.

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

حاصل خواسته شده را محاسبه کن.	Z و Y را پیدا کن.	با نوشتن جملات دنباله، قدرنسبت دنباله را بنویس.	مقدار X را به دست بیار.	رابطه مربوط به واسطه هندسی را برای $X-1, X, X+2$ بنویس.
-------------------------------	-----------------------	---	---------------------------	---

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

Z و Y را به دست بیار.	با نوشتن جملات دنباله، قدرنسبت دنباله را پیدا کن.	مقدار X را به دست بیار.	رابطه مربوط به واسطه هندسی را برای $X-\frac{3}{4}, X, 4X$ بنویس.
---------------------------	---	---------------------------	--

$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

به کمک a_1 و r مقدار e را به دست بیار.	مشخص می کنیم e چندمین جمله دنباله است.	به کمک جمله اول و جمله پنجم قدرنسبت دنباله را به دست بیار.
--	--	--

مسائل توصیفی

مسائل توصیفی مربوط به دنباله های هندسی در سه تیپ مختلف مطرح می شوند:

تیپ ۱: نیمه عمر به مدت زمانی که بعد از آن، مقدار یک ماده (یا عنصر) نصف می شود، نیمه عمر می گویند و آن را با $t_{\frac{1}{2}}$ نمایش می دهند. مسائل نیمه عمر را به دو روش می توان حل کرد:

روش اول فلش گذاری:

$$\frac{\text{زمان داده شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}} = \text{تعداد نیمه عمر}$$

۱ با توجه به زمان داده شده در مسئله تعداد نیمه های عمر را به دست می آوریم.

۲ هر فلش بیانگر یک نیمه عمر است. به تعداد نیمه های عمر، فلش گذاری کرده و در هر مرحله مقدار ماده را نصف می کنیم.

روش دوم فرمول: اگر n برابر تعداد نیمه های عمر سپری شده باشد، آن گاه مقدار باقی مانده ماده در n مین نیمه عمر از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \text{مقدار اولیه ماده} = \text{مقدار باقی مانده}$$

مثال اگر مقدار اولیه یک دارو 40 میلی گرم باشد و با گذشت هر 2 ساعت، مقدار آن در بدن نصف شود، برای محاسبه مقدار باقی مانده دارو در بدن بعد از گذشت 6 ساعت می نویسیم:

۱ تعداد نیمه عمر: $n = \frac{6}{2} = 3$

۲ مقدار نهایی دارو: $40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 40 \times \frac{1}{8} = 5$

یا به روش فلش گذاری داریم:



تیپ ۲: درصد افزایش و کاهش اگر در مسئله k درصد افزایش داشته باشیم، اختلاف مشترک دنباله از رابطه زیر به دست می آید:

$$r = \frac{100 + k}{100}$$

$$r = \frac{100 - k}{100}$$

اگر در مسئله k درصد کاهش داشته باشیم، اختلاف مشترک دنباله از رابطه روبه رو به دست می آید:

$$r = \frac{100 + 10}{100} = 1.1$$

مثال اگر به علت تورم سالانه 10 درصد بر قیمت کالایی اضافه شود:

۱ قدرنسبت:

۲ قیمت کالا در سال پنجم: اگر قیمت کالا در سال اول را a_1 در نظر بگیریم، آن گاه:

$$a_5 = a_1 \times \left(\frac{1}{1}\right)^4 \Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = \left(\frac{1}{1}\right)^4 = \left(\frac{(1/1)^2}{1/21}\right)^2 = 1/4641$$

یعنی در سال پنجم قیمت کالا $1/4641$ برابر شده است.

۳۰۹- وزن یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم است. پس از ورود به جو زمین در هر دقیقه ۲۰٪ از وزن آن به خاطر تماس با جو زمین از بین می‌رود. پس از گذشت ۳ دقیقه از ورود به جو زمین چه قدر از وزن شهاب سنگ باقی می‌ماند؟

۷۶۸۰ (۱) ۷۳۲۰ (۲) ۷۲۶۸ (۳) ۷۷۳۲ (۴)

جمله چهارم دنباله را محاسبه می‌کنیم!!

جمله عمومی مربوط به دنباله را می‌نویسیم.

نسبت مشترک دنباله را به دست می‌آوریم.

۳۱۰- مدیر یک کارگاه به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرده است که دستمزد روز اولش ۱۰۰۰ تومان باشد و تا پایان هفته هر روز ۲۰ درصد به دستمزد روز قبل وی اضافه شود. دستمزد این کارگر در روز پنجم چه قدر است؟

۱۹۸۶/۳ (۱) ۲۰۱۶/۴ (۲) ۲۰۷۳/۶ (۳) ۲۱۰۴/۸ (۴)

جمله پنجم دنباله را محاسبه کن!!

جمله عمومی مربوط به دنباله را بنویس.

نسبت مشترک دنباله را به دست بیار.

۷ مجموعه جملات دنباله هندسی

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r را با S_n نشان می‌دهیم و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, (r \neq 1)$$

مثلاً مجموعه شش جمله اول دنباله هندسی $32, 16, 8, \dots$ برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 32 \\ r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{32(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}} = \frac{32 \times (\frac{63}{64})}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{\frac{1}{2}} = 126$$

۳۱۱- در یک دنباله هندسی، با قدرنسبت $\sqrt{2}$ ، مجموع هشت جمله اول، چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

۱۷ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۱۵ (۴)

نسبت آن‌ها را محاسبه کن.

مجموع هشت جمله اول و چهار جمله اول را به دست بیار.

۳۱۲- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

۸۱ (۱) $81\frac{7}{8}$ (۲) $82\frac{3}{8}$ (۳) $83\frac{1}{8}$ (۴)

حاصل S_6 را محاسبه کن.

به کمک جملات داده شده قدرنسبت را به دست بیار.

۳۱۳- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، مجموع این هشت عدد کدام است؟

۳۰ (۱) $30(\sqrt{2}+1)$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(\sqrt{2}+1)$ (۴) $36(\sqrt{2}+1)$

مخرج حاصل به دست آمده را گویا کن.

با داشتن a و r ، مقدار S_8 را به دست بیار.

قدرنسبت دنباله را به دست بیار.

شماره جمله مربوط به $16\sqrt{2}$ را بنویس.

۳۱۴- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۱۶ (۴)

حاصل خواسته شده را محاسبه کن.

نسبت این دو را نوشته و مقدار r را به دست بیار.

رابطه S_6 و S_9 را بنویس.

۳۱۵- در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{1}{4}$

حاصل خواسته شده را به دست بیار. نسبت آن ها را بنویس و q^2 را به دست بیار. S_4 و S_8 را بنویس.

۳۱۶- جمله های دوم و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جمله اول دنباله کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

- (۱) $\frac{63}{5}$ (۲) $\frac{63}{75}$ (۳) $\frac{64}{5}$ (۴) $\frac{67}{75}$

S_8 را محاسبه کن. با جای گذاری قدرنسبت در یکی از جملات، به کمک جملات داده شده قدرنسبت a_1 را به دست بیار. را به دست بیار.

۳۱۷- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح طوری قرار می دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد کدام است؟ (انسانی ۹۸)

- (۱) ۱۴۵۶ (۲) ۱۴۶۸ (۳) ۱۵۴۶ (۴) ۱۶۵۴

با داشتن a_1 و r ، مقدار S_6 را به دست بیار. قدرنسبت دنباله را به دست بیار. شماره جمله مربوط به ۹۷۲ را بنویس.

۳۱۸- در یک دنباله هندسی، جمله اول ۲۲۴ با قدرنسبت (نسبت مشترک) $\frac{1}{4}$ و جمله n ام آن ۷ می باشد. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد، کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

- (۱) ۳۶۹ (۲) ۴۲۰ (۳) ۴۴۱ (۴) ۴۵۸

حاصل S_n را به دست بیار. از رابطه $a_n = 7$ ، مقدار n را به دست بیار.

مجموع جملات مختلف دنباله هندسی

نکته اگر مجموع $2n$ و n جمله اول از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، نسبت مشترک (r) از رابطه مقابل به دست می آید:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + r^n$$

نکته در یک دنباله هندسی، نسبت مجموع n جمله دوم به n جمله اول برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع } n \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = r^n$$

مثال اگر در یک دنباله هندسی افزایشی مجموع ۸ جمله اول ۱۳۶ و مجموع ۴ جمله اول ۸ باشد، آن گاه با فرض $n = 4$ می توانیم قدرنسبت دنباله را به دست آوریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + r^n \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 1 + r^4 \Rightarrow 1 + r^4 = \frac{136}{8} = 17 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

چون دنباله ما افزایشی است؛ پس $r = 2$ قابل قبول است.

۳۱۹- در یک دنباله هندسی مجموع ده جمله اول، $(4\sqrt{2} + 1)$ برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این دنباله مجموع ۲۰ جمله دوم، چند برابر مجموع ۲۰ جمله اول است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۲۰۴۸

به کمک رابطه $\frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = r^n$ نسبت خواسته شده را تعیین کن. به کمک رابطه $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + r^n$ قدرنسبت دنباله را تعیین کن.

در کنکورهای اخیر، سؤال‌های این دو معادله حضور ثابت داشته‌اند! در این سؤالات:

گام اول: به کمک جمله عمومی فرض مسئله را بیان می‌کنیم.

گام دوم: جملات دنباله اول را در دنباله دوم و اطلاعات آن جای گذاری می‌کنیم.

نکته هرگاه جملات a_m, a_n, a_p از یک دنباله حسابی، به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$r = \frac{p-n}{n-m}, (p > n > m)$$

مثلاً اگر جملات سوم، هفتم و یازدهم یک دنباله حسابی جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، آن‌گاه:

$$r = \frac{11-7}{7-3} = \frac{4}{4} = 1$$

۳۲۰- جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آن‌ها برابر ۲۱ است. اگر $x+6, y+4, z+2$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $\left[\frac{xy}{z}\right]$ کدام است؟

(انسانی خارج ۱۴۰۲) ۳ (۱) ۴ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۳ (۱)	۴ (۲)	۱۱ (۳)	۱۲ (۴)
مجموع آن‌ها را برابر ۲۱	جملات دنباله هندسی را بر حسب y و d (اختلاف مشترک حسابی) بنویس.	رابطه مربوط به واسطه هندسی را نوشته، d را محاسبه کن.	حاصل خواسته شده را به دست بیاور.
x و z را محاسبه کرده و حاصل خواسته شده را به دست بیاور.	رابطه مربوط به واسطه هندسی را نوشته، d را محاسبه کن.	جملات دنباله هندسی را بر حسب y و d (اختلاف مشترک حسابی) بنویس.	مجموع آن‌ها را برابر ۲۱ قرار بده و y را به دست بیاور.
x و z را در دنباله حسابی بر حسب y بنویس.			

۳۲۱- اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نایبر $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z}\right]$ کدام است؟

(انسانی ۱۴۰۲) ۳ (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴)

۳ (۱)	۵ (۲)	۹ (۳)	۲۵ (۴)
حاصل خواسته شده را به دست بیاور.	رابطه واسطه حسابی را نوشته، r را محاسبه کن.	جملات دنباله حسابی را بر حسب x و r به دست بیاور.	z و y را بر حسب x در دنباله هندسی بنویس.

۳۲۲- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی کدام است؟ (جملات دنباله ثابت نیستند.)

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۳ (۱)	۵ (۲)	۹ (۳)	۲۵ (۴)
با تقسیم دو جمله متوالی قدرنسبت را محاسبه کن.	جملات دنباله را بر حسب d بنویس.	رابطه بین a_1 و d را به دست بیاور.	رابطه مربوط به واسطه هندسی را برای آن‌ها بنویس.

۳۲۳- با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

(۱) $\frac{32}{7}$ (۲) $\frac{64}{7}$ (۳) $\frac{24}{5}$ (۴) $\frac{48}{5}$

۳ (۱)	۵ (۲)	۹ (۳)	۲۵ (۴)
با ساده کردن این رابطه مقدار a را به دست بیاور.	رابطه مربوط به مجموع جملات که در سؤال آمده را بنویس.	به کمک فرض، جملات دنباله حسابی را بساز.	سه جمله متوالی دنباله هندسی دلخواه را بر حسب a و r بنویس.

۳۲۴- جمله پنجم یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک (قدرنسبت) ناصفر، واسطه هندسی بین جملات سوم و نهم آن دنباله است. اگر جمله پنجم دنباله ۷ باشد، جمله صد و یکم دنباله کدام است؟

(انسانی خارج ۱۴۰۰)

(۱) ۲۰۰ (۲) ۱۷۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۲۵

۳ (۱)	۵ (۲)	۹ (۳)	۲۵ (۴)
جمله صد و یکم را محاسبه کن.	مقدار a را در رابطه جمله پنجم قرار داده و d را محاسبه کن.	مقدار a را از این رابطه به دست بیاور.	جملات سوم، پنجم و نهم رابطه حسابی دلخواه را بنویس.

$$n(A') = \binom{2}{1} \binom{2}{2} \binom{2}{2} = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 دو یکی از دختر پسر والدین

حالت دوم: والدین هر دو در مسافرت باشند:

در این حالت باید سه نفر از بین فرزندان انتخاب کنیم که دوتا پسر و یکی دختر

$$n(A'_2) = \binom{2}{2} \binom{2}{2} \binom{3}{1} = 1 \times 1 \times 3 = 3$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 دو والدین دختر پسر

حالت سوم: والدین در مسافرت نباشند! (قبول داری که اینم نامطلوبه!)

در این حالت باید ۵ نفر از بین فرزندان انتخاب کنیم که دوتا پسر و سه تا

$$n(A'_3) = \binom{2}{2} \binom{3}{3} = 1 \times 1 = 1$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 دو دختر پسر

در نتیجه طبق اصل جمع تعداد حالات نامطلوب مسئله برابر

$$n(A') = 6 + 3 + 1 = 10 \quad \text{است و داریم:} \quad P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{10}{21}$$

در نتیجه طبق احتمال متمم، احتمال آن که دو پسر با هم به مسافرت نروند

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

برابر است با:

۲۶۳ گزیده ۴ فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر انتخاب سه فرزند از

بین ۵ فرزند این خانواده است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S) = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

حالا به جای این که احتمال آن که دوقلوها با هم به مهمانی نروند (که خیلی طول

می‌کشد)، احتمال متمم آن را به دست می‌آوریم. «دوقلوها با هم به مهمانی بروند: A' »

اگر دوقلوها با هم به مهمانی بروند با توجه به این که تا ۳ از فرزندان می‌خواهند به

مهمانی بروند، باید یکی از این سه فرزند دیگر (به جز دوقلوها) انتخاب کنیم:

$$n(A') = \binom{3}{1} = 3 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{3}{10} = 0.3$$

پس طبق احتمال متمم، احتمال آن که دوقلوها با هم به مهمانی نروند، برابر

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.3 = 0.7$$

است با:

۲۶۴ گزیده ۱ فضای نمونه‌ای مربوط به ماه‌های تولد این چهار نفر

$$n(S) = 12^4$$

برابر است با:

حالا، چهار جایگاه برای این ۴ نفر در نظر می‌گیریم. برای نفر اول ۱۲ حالت،

برای نفر بعدی ۱۱ حالت و ... داریم. (ماه‌های تولد یکسان نیست). در نتیجه

$$n(A) = 12 \times 11 \times 10 \times 9$$

تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12 \times 12} = \frac{55}{96}$$

پس:

۲۶۵ گزیده ۳ فضای نمونه‌ای مربوط به ماه‌های تولد این چهار نفر

$$n(S) = 12^5$$

برابر است با:

برای نفر اول ۱۲ حالت مختلف داریم. حالا با توجه به این که می‌خواهیم ماه

تولد همگی یکسان باشد برای سایر افراد یک حالت داریم (ماه تولد آن‌ها با

نفر اول یکسان است) در نتیجه حالات مطلوب مسئله برابر است با:

$$n(A) = 12 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

پس:

۲۶۶ گزیده ۴ فضای نمونه‌ای مربوط به روزهای تولد این سه نفر در

$$n(S) = 7^3$$

هفته برابر است با:

ابتدا حالاتی که هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده‌اند را محاسبه

$$n(A') = 7 \times 6 \times 5$$

می‌کنیم. (نامطلوب مسئله)

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

پس طبق احتمال متمم داریم:

۲۶۷ گزیده ۳ اولاً می‌دانیم چون A و B دو پیشامد ناسازگار

هستند؛ پس $P(A \cap B) = 0$ است.

از طرفی با توجه به جدول گفته‌شده، حاصل عبارت خواسته‌شده را کمی

ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) + P(B' \cap A) &= P(B \cap A') + P(A \cap B') \\ &= (P(B) - P(B \cap A)) + (P(A) - P(A \cap B)) \\ &= (0/3 - 0) + (0/4 - 0) = 0/3 + 0/4 = 0/7 \end{aligned}$$

۲۶۸ گزیده ۲ احتمال آن که در خانواده‌ای چهارفرزندی ۲ دختر

داشته باشیم برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$$

احتمال آن که در خانواده‌ای چهارفرزندی یک پسر داشته باشیم برابر است با:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{4}{16}$$

با توجه به این که این دو پیشامد ناسازگار هستند (یکم فکر کن) تا به یک پسر،

دوتا دختر آفری چی پس)، پس $A \cap B = \emptyset$ است و $P(A \cap B) = 0$ است.

اجتماع

در نتیجه احتمال آن که دو فرزند دختر یا یک پسر در این خانواده باشد

برابر است با:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{6}{16} + \frac{4}{16} - 0 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

۲۶۹ گزیده ۱ با جای‌گذاری $n = 3$ ، $n = 4k$ و n به ترتیب در

جملات عمومی a_n ، b_n و c_n داریم:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$b_n = 2n \xrightarrow{n=3} b_3 = 2(3) = 6$$

عددی فرد است.

$$c_n = 1 - (-1)^{n+1} \xrightarrow{n=4k} c_{4k} = 1 - (-1)^{4k+1} = 1 - (-1) = 2$$

$$a_2 - b_3 + c_{4k} = \frac{1}{4} - 6 + 2 = \frac{1}{4} - 4 = \frac{-15}{4}$$

در نتیجه داریم:

تک در رابطه با توان‌های مختلف -1 می‌دانیم:

$$(-1)^{2k} = 1 \quad (-1)^{2k+1} = -1$$

۲۷۰ گزیده ۳ با مقداردهی به n در دنباله بازگشتی

جملات مختلف دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$n=1: a_1 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$n=2: a_2 = a_1 + a_1 - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$$

$$n=3: a_3 = a_2 + a_2 - 3 = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$n=4: a_4 = a_3 + a_3 - 4 = 1 + 1 - 4 = -2$$

۲۷۵ نکته

چند جمله ابتدایی دنباله را می نویسیم:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1+a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1+a_3} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{فرد } n \\ \frac{1}{2} & \text{زوج } n \end{cases}$$

پس ضابطه دنباله به صورت

چهارصدم (که شماره آن زوج است) برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۷۶ نکته

در دو عدد متوالی (شماره جملات) حتماً یکی زوج و یکی فرد است، یعنی برای داشتن دو جمله متوالی باید شماره یکی از آن‌ها زوج (ضابطه بالا) و شماره دیگری فرد باشد. (ضابطه پایین)

از طرف دیگر طبق فرض مسئله مقدار این دو جمله عددی صحیح است؛ پس حاصل $\frac{2}{15}n$ برای n های فرد باید صحیح باشد؛ یعنی n مضرب ۱۵ است.

حالا از $n=15$ شروع می کنیم. برای آن که دو جمله متوالی داشته باشیم $n=15$ را به عنوان شماره فرد و $n=16, 14$ را به عنوان شماره زوج جای گذاری می کنیم.

$$a_n = \begin{cases} 100 - \frac{1}{2}n^2 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{15}n & \text{فرد } n \end{cases} \xrightarrow{n=14} a_{14} = 100 - \frac{1}{2}(14)^2 = 2$$

$$\xrightarrow{n=15} a_{15} = \frac{2}{15}(15) = 2 \xrightarrow{n=16} a_{16} = 100 - \frac{1}{2}(16)^2 = -28$$

در نتیجه جملات چهاردهم و پانزدهم، با هم برابر است؛ پس مقدار $k=2$ است و داریم:

۲۷۷ نکته

می دانیم جملات دنباله مثلثی به صورت $1, 3, 6, 10, \dots$ می باشد. حالا اگر از جملات این دنباله یک واحد کم کنیم، جملات آن به صورت زیر خواهد بود:

جمله دوم دنباله مثلثی

$$a_n: 1, 2, 4, 7, 11, \dots \Rightarrow a_n - 1: 0, 1, 3, 6, 10, \dots$$

جمله اول دنباله مثلثی

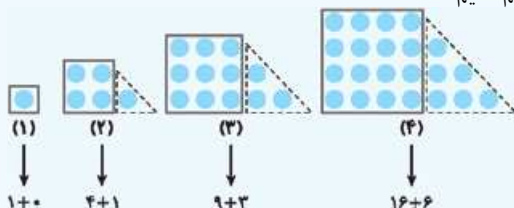
همان طور که می بینیم جمله n ام در دنباله جدید برابر جمله $(n-1)$ ام در دنباله مثلثی است.

در نتیجه باید به جای n در جمله عمومی دنباله مثلثی (یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$) مقدار $n-1$ را قرار دهیم، در نتیجه داریم:

$$a_n - 1 = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

پس جمله دهم این دنباله برابر است با: $a_{10} = \frac{10 \times 9}{2} + 1 = 45 + 1 = 46$

می توانیم شکل های داده شده را به صورت زیر، به دو دنباله تقسیم کنیم:



می بینید که یک دنباله مربعی داریم و یک دنباله مثلثی؛ پس دنباله مربوط به تعداد دایره ها برابر مجموع دو دنباله مربعی و مثلثی است:

$$n^2 \Rightarrow 1, 4, 9, 16, \dots$$

$$n=5: a_5 = a_4 + a_5 - 5 = 10 + 8 - 5 = 13$$

$$n=6: a_6 = a_5 + a_6 - 6 = 13 + 10 - 6 = 17$$

در نتیجه جمله هشتم دنباله برابر ۱۷ است.

۲۷۱ نکته با توجه به مشخص بودن مقدار جملات اول تا سوم در صورت سؤال، با مقارنه به n در رابطه بازگشتی داده شده، ابتدا مقادیر جملات هفتم و پنجم را یافته و سپس نسبت آن ها را به دست می آوریم:

$$\text{رابطه عمومی: } a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$n=1 \Rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$n=2 \Rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow a_5 = 2 + 2 + 6 = 10$$

$$n=3 \Rightarrow a_6 = a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow a_6 = 2 + 6 + 10 = 18$$

$$n=4 \Rightarrow a_7 = a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow a_7 = 6 + 10 + 18 = 34$$

$$\frac{a_7}{a_5} = \frac{34}{10} = 3.4 \quad \text{بنابراین نسبت جمله هفتم به پنجم برابر است با:}$$

۲۷۲ نکته ابتدا رابطه بازگشتی داده شده را بازنویسی می کنیم:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \Rightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

حالا به جای n در رابطه بازگشتی داده شده مقادیر ۱۵، ۱۴ را جای گذاری می کنیم:

$$n=15 \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{a_{16} - 1} = \frac{1}{\frac{1597}{987} - 1} = \frac{1}{\frac{610}{987}} = \frac{987}{610}$$

$$n=14 \Rightarrow a_{14} = \frac{1}{a_{15} - 1} = \frac{1}{\frac{987}{610} - 1} = \frac{1}{\frac{377}{610}} = \frac{610}{377}$$

۲۷۳ نکته با جای گذاری مقادیر مختلف n در دنباله

$$a_{n-1} = a_n - \left[\frac{n}{2}\right] + 2a_n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = a_4 + 2a_4 \Rightarrow -a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = -1$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 2a_5 \Rightarrow -a_5 = a_4 \Rightarrow a_5 = 1$$

$$n=6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 2a_6 \Rightarrow a_6 = -1 + 2 = 1$$

$$n=7 \Rightarrow a_7 = a_6 + 2a_7 \Rightarrow a_7 = 1 + 2 = 3$$

بنابراین جمله ششم که به ازای $n=7$ به دست می آید برابر ۳ است.

۲۷۴ نکته ۱ با جای گذاری $n=2$ و $n=1$ در رابطه بازگشتی

داده شده داریم:

$$\begin{aligned} n=2 & \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{a_1}{2} \right) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{k}{2} \right) \\ n=1 & \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{a_1}{2} \right) = \frac{1}{2} (k+1) \end{aligned}$$

حالا با جای گذاری مقدار a_2 در رابطه اول داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (k+1) + \left(\frac{k}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} k + \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} k + \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{k(k+1) + 4k}{4}$$

$$\Rightarrow 3k^2 + 15k = 14k + 14$$

حالا با حل معادله $3k^2 + k - 14 = 0$ مقدار k را به دست می آوریم:

$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-14) = 169$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2(3)} = \begin{cases} \frac{-1-13}{6} = \frac{-14}{6} \times \\ \frac{-1+13}{6} = \frac{12}{6} = 2 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 0, 1, 3, 6, \dots \Rightarrow \text{دنباله مثلثی}$$

در نتیجه تعداد دایره‌ها در مرحله n از رابطه $a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$ دست می‌آید و تعداد دایره‌ها در شکل نهم برابر است با:

$$a_9 = 9^2 + \frac{9 \times 8}{2} = 81 + 36 = 117$$

توجه در دنباله مثلثی، جملات از یک شروع می‌شود و جمله عمومی آن

به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ است، اما در این مسئله با توجه به این که از صفر شروع می‌شود جمله n برابر جمله $(n-1)$ ام دنباله مثلثی است. (یه کم فکر کن!)

۲۷۹ نکته ۱ در دنباله فیبوناچی هر جمله از مجموع دو جمله

قبلی به دست می‌آید، با توجه به این که دو جمله اولیه دنباله برابر ۱ است

از جمله سوم شروع کرده و جملات متوالی دنباله را می‌نویسیم تا به جمله یازدهم برسیم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = 2 + 3 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \Rightarrow a_{11} = 89$$

۲۸۰ نکته ۲ جملات مختلف دنباله (تعداد شکل‌های هر مرحله) را می‌نویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره‌ها	۵	۸	۱۱
		+۳	+۳

همان‌طور که می‌بینیم تعداد شکل‌های هر مرحله از دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت

$d = 3$ و جمله اول $a_1 = 5$ می‌باشد؛ پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

در نتیجه تعداد دایره‌ها در مرحله پانزدهم و سیزدهم برابر است با:

$$a_{15} = 3(15) + 2 = 47$$

$$a_{13} = 3(13) + 2 = 41$$

بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با: $47 - 41 = 6$

۲۸۱ نکته ۱ با توجه به این که $a_1 = 3$ و $a_5 = 11$ است، به کمک

جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_5=11} 11 = 3 + (5-1)d$$

$$\Rightarrow 8 = 4d \Rightarrow d = 2$$

پس جمله عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=3, d=2} a_n = 3 + (n-1)(2) = 2n + 1$$

در نتیجه جمله دهم برابر است با:

$$a_{10} = 2(10) + 1 = 21$$

۲۸۲ نکته ۳ به کمک جمله عمومی دنباله حسابی، رابطه مربوط

به جملات سوم، پنجم و سیزدهم را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ a_{13} &= a_1 + 12d \end{aligned}$$

طبق فرض مسئله مجموع این سه جمله برابر ۷۵ است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_3 + a_5 + a_{13} &= 75 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 12d = 75 \\ \Rightarrow 3a_1 + 18d &= 75 \Rightarrow a_1 + 6d = 25 \end{aligned}$$

حالا با توجه به این که $a_7 = a_1 + 6d$ است؛ داریم:

$$a_1 + 6d = 25 \Rightarrow a_7 = 25$$

۲۸۳ نکته ۲ فرض مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a_3 + a_{18} = a_5 + 61 \Rightarrow a_3 + a_{18} = a_5 + 61$$

حالا به جای جملات دنباله، به کمک جمله عمومی دنباله حسابی

$$(a_n = a_1 + (n-1)d), \text{ مقدار هر جمله را قرار می‌دهیم:}$$

$$\begin{aligned} a_3 + a_{18} &= a_5 + 61 \Rightarrow 2a_1 + 29d = a_1 + 4d + 61 \\ a_1 + 29d &= a_1 + 4d + 61 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 + 25d}_{a_{26}} = 61 \Rightarrow a_{26} = 61$$

(توجه داریم که جمله بیست و ششم دنباله حسابی برابر $a_{26} = a_1 + 25d$ است.)

۲۸۴ نکته ۲ در دنباله حسابی داده شده با جمله اول 208 و

قدرنسبت -4 ، ابتدا جمله n ام این دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_1 = 208, d = -4 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 208 + (n-1)(-4) = 208 - 4n + 4 \Rightarrow a_n = -4n + 212$$

حالا برای آن که ببینیم شماره کدام جمله برابر صفر است، باید جمله عمومی

دنباله را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$a_n = -4n + 212 = 0 \Rightarrow 4n = 212 \Rightarrow n = \frac{212}{4} = 53$$

بنابراین جمله پنجاه و سوم برابر صفر است.

$$a_8 + a_9 = 110 \Rightarrow a_1 + 7d + a_1 + 8d = 110$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 15d = 110 \xrightarrow{a_1=10} 20 + 15d = 110$$

$$\Rightarrow 15d = 90 \Rightarrow d = \frac{90}{15} = 6$$

با توجه به این که قدرنسبت برابر ۶ و جمله اول برابر ۱۰ است، به محاسبه

جمله ششم می‌پردازیم:

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_6 = 10 + 5(6) = 10 + 30 = 40$$

۲۸۶ نکته ۱ با استفاده از دنباله داده شده، جمله اول و قدرنسبت

مشخص است. ابتدا کافی است جملات چهارم و هفتم را یافته، سپس واسطه

حسابی بین آن‌ها را مشخص کنیم:

$$d = 14 - 8 = 6$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 8 + 3(6) = 8 + 18 = 26$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 8 + 6(6) = 8 + 36 = 44$$

حالا باید واسطه حسابی بین جمله چهارم و هفتم بنویسیم و داریم:

$$\text{واسطه حسابی} = \frac{a_4 + a_7}{2} = \frac{26 + 44}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

۲۸۷ نکته ۴ با توجه به صورت سؤال، $a_1 = 16$ و $a_8 = 44$

است. حالا می‌خواهیم ببینیم چند واسطه بین دو عدد گفته شده درج کنیم تا

در شرط داده شده صدق کند، بنابراین ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_8 - a_1}{8 - 1} = \frac{44 - 16}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

حالا تعداد واسطه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1} \Rightarrow 4 = \frac{44 - 16}{m + 1} \Rightarrow 4 = \frac{28}{m + 1}$$

$$\Rightarrow 48 = 4m + 4 \Rightarrow 44 = 4m \Rightarrow m = 11$$

بنابراین ۱۱ واسطه حسابی می‌توانیم درج کنیم.

۲۸۸ نکته ۱ روابط مربوط به جملات اول، دوم و سوم (یعنی a_1 ،

$a_2 = a_1 + d$ و $a_3 = a_1 + 2d$) را در رابطه $6a_3^2 = 5a_2a_4 + 3a_2a_1$ جای گذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} 6(a+d)^2 &= 5(a+2d)a + 3(a+d)a \\ \Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 &= 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad \\ \Rightarrow 2a^2 - 6d^2 + ad &= 0 \end{aligned}$$

حالا اگر فرض کنیم $\frac{a}{d} = x$ است، آن گاه $a = dx$ است و داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2d^2x^2 - 6d^2 + d^2x &= 0 \Rightarrow d^2(2x^2 + x - 6) = 0 \\ \Rightarrow (2x - 3)(x + 2) &= 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -2 \end{aligned}$$

حالا نسبت جمله چهارم به d را به دست آورده و مقادیر x را در آن جای گذاری می کنیم:

$$\frac{a_4}{d} = \frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3 = x + 3: \begin{cases} x = -2: x + 3 = 1 \\ x = \frac{3}{2}: x + 3 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

۲۸۹ نکته ۴ در دنباله های حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک

$d = -\frac{1}{5}$ ، مجموع دوازده جمله اول برابر ۹ است؛ پس طبق فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2}(2a_1 + (11 \times (-\frac{1}{5}))) = 9 \Rightarrow 12a_1 - 3.3 = 9 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{42}{12} \Rightarrow a_1 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

۲۹۰ نکته ۴ مجموع جملات هفتم تا هجدهم برابر است با تفاضل

مجموع هجده جمله اول و شش جمله اول، در نتیجه کافی است S_{18} و S_6 را به کمک رابطه $S_n = \frac{n(n-1)d}{2}$ به دست آورده و از هم کم کنیم:

$$\begin{aligned} a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{18} &= S_{18} - S_6 = \frac{18(18-1)d}{2} - \frac{6(6-1)d}{2} \\ &= 3(18-1)d - (6-1)d = 3(17)d - (5)d = 9d + 9d = 18d \end{aligned}$$

۲۹۱ نکته ۴ طبق فرض مسئله جمله هفتم، نصف جمله سوم است؛

پس با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی $(a_n = a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d) \xrightarrow{\times 2} 2a_1 + 12d \\ &= a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d \end{aligned}$$

حالا طبق فرض مسئله می خواهیم مجموع n جمله متوالی، برابر صفر شود، با جای گذاری رابطه $a_1 = -10d$ در رابطه مجموع جملات دنباله حسابی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} S_n &= 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 0 \\ \xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2}[2(-10d) + (n-1)d] &= 0 \end{aligned}$$

حالا با توجه به این که $n \neq 0$ است (شماره جمله صفر نیست) داریم:

$$\begin{aligned} -20d + (n-1)d &= 0 \Rightarrow (n-1)d = 20d \Rightarrow n-1 = 20 \Rightarrow n = 21 \end{aligned}$$

در نتیجه مجموع ۲۱ جمله اول این دنباله برابر صفر است.

۲۹۲ نکته ۱ دنباله های حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d را

در نظر می گیریم. طبق فرض مسئله $S_{12} = 138$ و $a_6 = 10$ است. روابط مربوط به مجموع جملات $(S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d))$ و جمله عمومی $(a_n = a_1 + (n-1)d)$ را می نویسیم:

$$\begin{aligned} S_{12} = 138 &\Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 \Rightarrow 6(2a_1 + 11d) = 138 \\ \Rightarrow 2a_1 + 11d &= 23 \\ a_6 = 10 &\Rightarrow a_1 + 5d = 10 \end{aligned}$$

حالا با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول زیر مقادیر a و d را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2a_1 + 11d = 23 \\ a_1 + 5d = 10 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 2a_1 + 11d = 23 \\ -2a_1 - 10d = -20 \end{cases} \xrightarrow{(+)} d = 3$$

با جای گذاری $d = 3$ در معادله $a_1 + 5d = 10$ ، مقدار $a_1 = -5$ به دست می آید.

۲۹۳ نکته ۲ با توجه به این که جمله عمومی دنباله به صورت

$a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است، جملات اول و پانزدهم را محاسبه می کنیم:

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2} \\ a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 = \frac{45}{2} - \frac{10}{2} = \frac{35}{2} \end{cases}$$

حال با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، مجموع پانزده جمله اول را به

دست می آوریم: $S_{15} = \frac{15}{2}(-\frac{7}{2} + \frac{35}{2}) = \frac{15}{2} \times \frac{28}{2} = 7 \times 15 = 105$

نکته همیشه با داشتن جمله عمومی دنباله و خواستن مجموع تعدادی از جملات، جملات اول و آخر را با جمله عمومی یافته و سپس مجموع آن ها را با فرمول دوم مجموع جملات پیدا می کنیم.

۲۹۴ نکته ۲ چند عدد اولیه بخش پذیر بر ۳ را می نویسیم:

$$d = -3 \Rightarrow 150, 147, 144, 141, \dots$$

همان طور که می بینیم با دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 150$ و اختلاف مشترک $d = -3$ مواجه هستیم؛ پس مجموع سی و پنج جمله دنباله را مشخص می کنیم:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \\ S_{35} &= \frac{35}{2} \times (2 \times 150 + (35-1)(-3)) = \frac{35}{2} \times (300 - 102) = 35 \times 99 = 3465 \end{aligned}$$

۲۹۵ نکته ۳ در دنباله $1, x, y, \frac{5}{7}, \dots$ جمله اول برابر ۱ و جمله

چهارم برابر $\frac{5}{7}$ است، در نتیجه با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d \\ \xrightarrow{a_1=1, a_4=\frac{5}{7}} \frac{5}{7} &= 1 + 3d \Rightarrow 3d = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7} \Rightarrow d = -\frac{2}{21} \end{aligned}$$

حالا $a_1 = 1$ و $d = -\frac{2}{21}$ را در فرمول $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ جای گذاری کرده و مجموع پانزده جمله اول را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = 15(a_1 + 7d) \Rightarrow S_{15} = 15(1 + \frac{7}{21} \times (-2)) \\ &= 15 \times \frac{9}{3} = 15 \times 3 = 45 \end{aligned}$$

گزینه ۲۹۶

مجموع پنج جمله دوم یعنی $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ برابر $S_9 - S_5$ است. از طرفی طبق فرض مسئله مجموع پنج جمله اول، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_9 - S_5) \xrightarrow{\times 3} 3S_5 = S_9 - S_5 \Rightarrow S_9 = 4S_5$$

حالا با جای گذاری روابط S_5 و S_9 به کمک فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d)$ در این رابطه داریم:

$$\begin{aligned} S_9 &= 4S_5 \Rightarrow \frac{1}{2}(9a_1 + 36d) = 4 \times \frac{1}{2}(5a_1 + 10d) \\ \Rightarrow 5(2a_1 + 6d) &= 10(a_1 + 2d) \Rightarrow 10a_1 + 30d = 10a_1 + 20d \\ \Rightarrow 10a_1 &= 10d \Rightarrow d = a_1 \end{aligned}$$

در نتیجه نسبت جمله دوم به جمله اول در این دنباله برابر است با:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \xrightarrow{d=a_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + a_1}{a_1} = \frac{2a_1}{a_1} = 2$$

گزینه ۲۹۷ در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d مجموع بیست جمله اول برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a + 19d) = 10(2a + 19d) = 20a + 190d$$

حالا اگر یک واحد به اختلاف مشترک دنباله اضافه کنیم، دنباله‌ای حسابی با اختلاف مشترک $d+1$ و جمله اول a داریم که در این حالت مجموع بیست جمله اول برابر است با:

$$\begin{aligned} S'_{20} &= \frac{20}{2}[2a + 19(d+1)] = 10(2a + 19d + 19) \\ &= 20a + 190d + 190 \\ &= S_{20} + 190 \end{aligned}$$

در نتیجه $S'_{20} = S_{20} + 190$ و در حالت دوم مجموع جملات، 190 واحد بیشتر می‌شود.

گزینه ۲۹۸

در دنباله‌ای حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، مجموع نه جمله اول برابر 90 است؛ پس طبق رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ داریم:

$$S_9 = 90 \Rightarrow 90 = \frac{9}{2}(2a + 8d) \Rightarrow 2a + 8d = 20 \Rightarrow a + 4d = 10$$

از طرفی طبق فرض مسئله جمله هفتم برابر 13 است، در نتیجه به کمک جمله عمومی دنباله داریم:

$$a_7 = 13 \Rightarrow 13 = a + 6d$$

حالا با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول زیر، اختلاف مشترک دنباله (d) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a + 4d = 10 \\ a + 6d = 13 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

گزینه ۲۹۹

طبق فرض مسئله مجموع ده جمله اول برابر -26 است. اگر فرض کنیم جمله اول دنباله، a و اختلاف مشترک آن d است، طبق رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ داریم:

$$S_{10} = -26 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a + 9d) = -26 \Rightarrow 10a + 45d = -26$$

از طرفی نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم برابر 6 است؛ پس با توجه به رابطه جمله عمومی دنباله حسابی $(a_n = a + (n-1)d)$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_{15}}{a_6} &= 6 \Rightarrow \frac{a + 14d}{a + d} = 6 \Rightarrow 6a + 30d = a + 14d \\ \Rightarrow 5a + 16d &= 0 \end{aligned}$$

حال با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول زیر، اختلاف مشترک دنباله (d) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 10a + 45d = -26 \\ 5a + 16d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 10a + 45d = -26 \\ -10a - 32d = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 13d = -26 \Rightarrow d = -2$$

با داشتن مقدار $d = -2$ ، ابتدا جمله اول را یافته و سپس به سراغ پیدا کردن

جمله یازدهم می‌رویم: $10a + 45d = -26 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 10a + 45(-2) = -26$

$$\Rightarrow 10a + 45(-2) = -26 \Rightarrow 10a = -26 + 90 = 64 \Rightarrow a = 6\frac{4}{10}$$

جمله یازدهم: $a_{11} = a + 10d$

$$\Rightarrow a_{11} = 6\frac{4}{10} + 10(-2) = 6\frac{4}{10} - 20 = -13\frac{6}{10}$$

گزینه ۳۰۰ طبق فرض مسئله در بیست جمله از دنباله حسابی،

مجموع جملات ردیف فرد، 135 و مجموع جملات ردیف زوج، 150 است. با توجه به این که در بیست جمله اول دنباله، دهتا جمله ردیف فرد و دهتا جمله ردیف زوج است، داریم:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150$$

جملات ردیف فرد $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$ و $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ جملات، دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک $2d$ و جملات ردیف زوج $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ است، این جملات دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_2 و اختلاف مشترک $2d$ است؛ پس داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9(2d))$$

$$= 5(2a_1 + 18d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_2 + 9(2d))$$

$$= 5(2a_2 + 18d) = 150 \Rightarrow 2a_2 + 18d = 30$$

پس باید دستگاه دو معادله - دو مجهول زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_2 + 18d = 30 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2(a_2 - a_1) = 3$$

با توجه به این که $d = a_2 - a_1$ است، $2d = 3$ و در نتیجه $d = \frac{3}{2}$ خواهد بود. حالا $d = \frac{3}{2}$ را در رابطه $2a_1 + 18d = 27$ جای گذاری می‌کنیم:

$$2a_1 + 18(\frac{3}{2}) = 27 \Rightarrow 2a_1 + 27 = 27 \Rightarrow a_1 = 0$$

گزینه ۳۰۱ اگر تعداد فرد جمله متوالی با هم جمع شوند، (مثلاً سه‌تا، پنج‌تا و ...) حاصل، برابر تعداد جملات، ضرب در جمله وسط است.

مثلاً: اگر مجموع ۷ جمله متوالی از دنباله‌ای حسابی، برابر ۹۱ باشد آن‌گاه داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 91 \Rightarrow 7a_4 = 91$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{91}{7} = 13$$

مجموع پنج جمله متوالی دنباله حسابی برابر حاصل ضرب تعداد جملات در جمله وسط (یعنی a_3) است؛ با توجه به فرض مسئله این مجموع برابر 60 است؛ پس داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 \Rightarrow 5a_3 = 60$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow a + 2d = 12$$

از طرفی مجموع دو جمله بزرگتر $(a_4 + a_5)$ ، ۳ برابر مجموع دو جمله کوچکتر $(a_1 + a_7)$ است؛ پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_4 + a_5 &= 3(a_1 + a_7) \Rightarrow (a + 3d) + (a + 4d) = 3[a + (a + d)] \\ &\Rightarrow 2a + 7d = 3(2a + d) \\ &\Rightarrow 2a + 7d = 6a + 3d \Rightarrow 4d = 4a \Rightarrow a = d \end{aligned}$$

حالا با جای گذاری $a = d$ در رابطه $a + 2d = 12$ داریم:

$$d + 2d = 12 \Rightarrow 3d = 12 \Rightarrow d = 4$$

متوالی این سالن به صورت مقابل است: $8, 12, 16, \dots$

همان طور که می بینیم، این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی می دهند که در آن $a_1 = 8$ و $d = 4$ است. از طرفی چون سالن دارای ۱۲ ردیف است، تعداد جملات این دنباله برابر ۱۲ است؛ یعنی $n = 12$ ؛ پس مجموع تعداد صندلی ها برابر است با:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ &\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} \left[\frac{2(8)}{16} + \frac{(12-1) \times 4}{44} \right] = 6 \times 60 = 360 \end{aligned}$$

حالا می خواهیم با نصف این تعداد صندلی یعنی 180° صندلی سالن جدیدی بسازیم.

تعداد صندلی های ردیف اول سالن جدید ۴ تا است و نظم آن هم همان نظم قبلی است (۴ تا ۴ تا اضافه می شود)؛ پس تعداد صندلی های آن به صورت مقابل است:

همان طور که می بینید، صندلی های سالن جدید هم تشکیل دنباله ای حسابی می دهند که در آن $a_1 = 4$ و $d = 4$ است. حالا می خواهیم ببینیم با 180° صندلی چند ردیف می توانیم بسازیم یا به عبارت دیگر، مجموع چند جمله اول این دنباله حسابی برابر 180° است:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} \left[\frac{2(4)}{8} + \frac{(n-1)(4)}{4n-4} \right] \\ &= \frac{n}{2}[4n + 4] = \frac{n \times 4 \times (n+1)}{2} = 2 \times n(n+1) \end{aligned}$$

حالا S_n را برابر 180° قرار می دهیم:

$$2n(n+1) = 180^\circ \Rightarrow n(n+1) = 90^\circ = 9 \times 10$$

$n = 9$

ابتدا نسبت داده شده در صورت سؤال را به زبان ریاضی می نویسیم، سپس با استفاده از روابط دنباله هندسی قدرنسبت را پیدا می کنیم:

$$\frac{a_9}{a_6} = 5 \Rightarrow \frac{a_1 r^8}{a_1 r^5} = 5 \Rightarrow r^3 = 5$$

حالا به سراغ نسبت جمله دهم به جمله چهارم می رویم:

$$\frac{a_{10}}{a_4} = \frac{a_1 r^9}{a_1 r^3} = r^6 = (r^3)^2 = (5)^2 = 25$$

توجه دقت کنید که $r^3 = 5$ عددی صحیح در نمی آید، بنابراین سعی می کنیم که از این مقدار به دست آمده به نحوی در ادامه حل سؤال استفاده کنیم.

طبق فرض مسئله جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است؛ پس طبق رابطه $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ می توان نوشت:

$$\frac{a_8}{a_4} = 81 \Rightarrow \frac{a_1 r^7}{a_1 r^3} = 81 \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = \pm 3$$

حالا با توجه به این که جمله سوم دنباله برابر ۱۸- است، مقادیر جملات پنجم و هفتم را به کمک جمله سوم به دست می آوریم:

$$a_5 = a_3 \times r^2 \Rightarrow a_5 = -18 \times 9 = -162$$

$$a_7 = a_3 \times r^4 \Rightarrow a_7 = -18 \times 81 = -1458$$

پس $a_5 - a_7 = -162 - (-1458) = 1296$ است.

می دانیم جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

است. طبق فرض مسئله، $a_1 = 1458$ و $r = \frac{1}{3}$ است؛

$$a_n = 1458 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

پس داریم:

هم چنین طبق فرض مسئله $a_n = 2$ است؛ پس می توان نوشت:

$$1458 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{1458} = \frac{1}{729} \Rightarrow 3^{n-1} = 729$$

از طرفی با توجه به این که $729 = 3^6$ است، داریم:

$$3^{n-1} = 3^6 \Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

در دنباله هندسی $(x, \frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, 2, Z)$ ، شرط تشکیل دنباله هندسی را برای a, b, c می نویسیم:

$$b^2 = ac \Rightarrow x^2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 2$$

حالا با جای گذاری $x = 2$ در دنباله، جملات به صورت $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, Z$ خواهد بود. با توجه به این که نسبت مشترک دنباله برابر تقسیم دو جمله متوالی یعنی

$$r = \frac{2}{1} = 2$$

است. می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{Z} &= 2 \Rightarrow Z = 1 \end{aligned}$$

در دنباله هندسی $(x - \frac{3}{4}, y, \frac{x}{b}, Z, \frac{4}{9}x)$ جملات

a, b, c با فاصله یکسان هستند (جمله اول، جمله سوم و جمله پنجم):

پس شرط تشکیل دنباله هندسی را برای آن ها می نویسیم:

$$\begin{aligned} b^2 &= ac \Rightarrow x^2 = (x - \frac{3}{4}) \times 4 \Rightarrow x^2 = 4x^2 - 6x \\ &\Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \end{aligned}$$

حالا با توجه به این که به ازای $x = 0$ ، دنباله هندسی تشکیل نمی شود،

را برای به دست آوردن Y و Z می نویسیم:

$$\frac{1}{y}, y, \frac{2}{Z}, 1 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{y} \times 2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ Z^2 = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow Z = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$|x| + |y| + |z| = 2 + 1 + 4 = 7$$

در دنباله هندسی $(\frac{4}{3}, a, b, c, \frac{1}{3}, d, e, \dots)$ جمله

اول $a_1 = \frac{4}{3}$ و جمله پنجم $a_5 = \frac{1}{3}$ است؛ پس طبق فرمول جمله عمومی

دنباله هندسی $(a_n = a_1 r^{n-1})$ داریم:

$$a_5 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 r^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} r^4 = \frac{1}{3} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در این دنباله e جمله هفتم است، پس داریم:

$$e = a_7 = a_1 r^6 = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۳۰۹ در هر دقیقه ۲۰ درصد از وزن شهاب سنگ کم می‌شود؛ پس قدرنسبت دنباله مربوط به وزن شهاب سنگ برابر است با:

$$r = \frac{100 - k}{100} = \frac{100 - 20}{100} = \frac{4}{5}$$

پس جمله عمومی مربوط به وزن شهاب سنگ برابر $a_n = 15000 \times (\frac{4}{5})^{n-1}$ است. با توجه به این که می‌خواهیم وزن شهاب سنگ را پس از ۳ دقیقه به دست آوریم باید a_4 را محاسبه کنیم. (دقت کنید که a_1 لحظه ورود به جو در دقیقه صفر است.)

$$a_4 = 15000 \times (\frac{4}{5})^3 = 15000 \times \frac{64}{125} = 15 \times 1000 \times \frac{64}{125} = 15 \times 8 \times 64 = 7680$$

گزینه ۳۱۰ روزانه ۲۰ درصد به دستمزد وی اضافه می‌شود؛ پس قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$r = \frac{100 + k}{100} = \frac{100 + 20}{100} = 1/2$$

پس جمله عمومی مربوط به درآمدهای وی به صورت $a_n = 1000 \times (1/2)^{n-1}$ است؛ پس میزان دستمزد روز پنجم برابر است با:

$$a_5 = a_1 r^4 = 1000 \times (\frac{1}{2})^4 = 1000 \times \frac{1}{16} = 62.5$$

گزینه ۳۱۱ با توجه به خواسته سؤال، به سراغ فرمول مجموع جملات دنباله هندسی می‌رویم:

$$\frac{\text{مجموع هشت جمله اول}}{\text{مجموع چهار جمله اول}} = \frac{S_8}{S_4} = \frac{r^4 - 1}{r^4 - 1} = \frac{(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r^4 - 1} = r^4 + 1$$

$$\xrightarrow{r=\sqrt{2}} (\sqrt{2})^4 + 1 \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 4 + 1 = 5$$

گزینه ۳۱۲ با توجه به این که در دنباله $a_1 = 4, 4, a, 9, b, \dots$ و $a_3 = 9$ است، به کمک جمله عمومی دنباله هندسی می‌توان نوشت:

$$a_3 = a_1 r^2 \xrightarrow{\frac{a_3=9}{a_1=4}} 9 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \pm \frac{3}{2}$$

اما طبق فرض مسئله یک دنباله هندسی صعودی داریم؛ پس $r = \frac{3}{2}$ قابل قبول است و مجموع شش جمله ابتدایی این دنباله برابر است با:

$$S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = 8(\frac{729}{64} - 1) = 8(\frac{665}{64}) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

گزینه ۳۱۳ اگر بین ۲ و $16\sqrt{2}$ شش عدد دیگر قرار دهیم که تشکیل دنباله هندسی بدهند، آن گاه $a_1 = 2$ و $a_8 = 16\sqrt{2}$ است و می‌توان نوشت:

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1 r^7}{a_1} = r^7 = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r^7 = 8\sqrt{2} = (\sqrt{2})^6 \sqrt{2} = (\sqrt{2})^7 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

در نتیجه طبق فرمول مجموع جملات دنباله هندسی، مجموع این هشت جمله برابر است با:

$$S_8 = \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

حالا با گویا کردن مخرج این کسر گزینۀ درست را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

گزینه ۳۱۴ در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و

مجموع شش جمله اول ۱۵۳ است؛ پس:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{153}{136} = \frac{9}{8}$$

حالا با جای گذاری رابطه مربوط به S_6 و S_3 داریم:

$$\begin{cases} S_3 = a_1 \times \frac{1-r^3}{1-r} = 136 \\ S_6 = a_1 \times \frac{1-r^6}{1-r} = 153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = \frac{a_1 \times \frac{1-r^6}{1-r}}{a_1 \times \frac{1-r^3}{1-r}} = \frac{1-r^6}{1-r^3} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+r^3} = \frac{9}{8} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس نسبت جمله اول به جمله پنجم برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 r^4} = \frac{1}{r^4} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$$

گزینه ۳۱۵ طبق فرض مسئله مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ برابر

مجموع چهار جمله اول است؛ پس به کمک فرمول می‌توان نوشت:

$$S_8 = \frac{a_1(1-r^8)}{1-r} \Rightarrow \frac{a_1(1-r^8)}{1-r} = \frac{5}{4} \times \frac{a_1(1-r^4)}{1-r}$$

$$\Rightarrow 1-r^8 = \frac{5}{4}(1-r^4) \Rightarrow (1-r^4)(1+r^4) = \frac{5}{4}(1-r^4)$$

$$\Rightarrow 1+r^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه نسبت جمله هفتم به جمله اول برابر است با:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 r^6}{a_1} = r^6 = (r^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

گزینه ۳۱۶ طبق فرض مسئله $a_4 = 4$ و $a_7 = \frac{1}{4}$ است، با تقسیم آن‌ها بر هم مقدار r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{4} \\ a_4 = a_1 r^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = r^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

با جای گذاری $r = \frac{1}{2}$ در رابطه مربوط به جمله دوم، حاصل a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

حالا حاصل مجموع هشت جمله اولیه دنباله را به کمک رابطه

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

به دست می‌آوریم:

$$S_8 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (1-\frac{255}{256})}{\frac{1}{2}} = \frac{255}{256} = \frac{255}{256}$$

گزینه ۳۱۷ اگر بین ۴ و ۹۷۲، چهار جمله قرار دهیم که تشکیل دنباله هندسی دهند $a_1 = 4$ و $a_6 = 972$ است.

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{972}{4} = 243$$

پس طبق جمله عمومی دنباله هندسی ($a_n = a_1 r^{n-1}$) داریم:

$$a_6 = 972 \Rightarrow a_1 r^5 = 972 \xrightarrow{a_1=4} 4 \times r^5 = 972$$

$$\Rightarrow r^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

حالا مجموع شش جمله اول دنباله هندسی را به کمک رابطه $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ به دست می آوریم:

$$S_6 = \frac{4(1-3^6)}{1-3} = \frac{4(1-729)}{-2} = (-2) \times (-728) = 1456$$

۳۱۸ نکته ۳ طبق فرض مسئله $a_n = 7$ است، با داشتن

$$r = \frac{1}{3} \text{ و } a_1 = 224 \text{ می توان نوشت:}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 7 = 224 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{7}{224} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow n-1=5 \Rightarrow n=6$$

حالا به کمک فرمول $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)}$ مجموع این شش جمله را می نویسیم:

$$(n=6, a_1=224, r=\frac{1}{3})$$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6-1)}{r-1} = \frac{224\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{224 \times \left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = 441$$

۳۱۹ نکته ۳ طبق فرض مسئله مجموع ۱۰ جمله اول $(4\sqrt{2}+1)$ برابر مجموع ۵ جمله اول است؛ پس می توان نوشت:

$$\frac{S_{10}}{S_5} = 1 + 4\sqrt{2} \xrightarrow{\frac{S_{10}-S_5}{S_5} = 1+r^n} 1+r^5 = 1+4\sqrt{2} \Rightarrow r^5 = 4\sqrt{2}$$

حالا نسبت مجموع ۲۰ جمله دوم بر مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با:

مجموع ۲۰ جمله دوم

$$\frac{S_{40}-S_{20}}{S_{20}} = r^{20} = (r^5)^4 = (4\sqrt{2})^4 = 1024$$

۳۲۰ نکته ۱ اگر x, y, z سه جمله متوالی دنباله ای حسابی با اختلاف مشترک d باشند، آن گاه $x = y-d$ و $z = y+d$ خواهد بود؛ از طرفی طبق فرض مسئله مجموع این سه عدد برابر ۲۱ است، پس داریم:

$$x+y+z=21 \Rightarrow y-d+y+y+d=21 \Rightarrow y=7$$

از طرفی جملات $(y-d+6, y+4, y+d+2)$ و $(y-d+6, y+4, y+d+2)$ تشکیل دنباله هندسی می دهند، $y=7$ را در آن ها جای گذاری کرده و جملات را بازنویسی می کنیم:

$$x+6, y+4, z+2 \Rightarrow 7-d+6, 7+4, 7+d+2$$

$$\Rightarrow 13-d, 11, 9+d$$

حالا شرط تشکیل دنباله هندسی را برای آن ها می نویسیم:

$$11^2 = (13-d)(9+d) \Rightarrow 121 = 117 + 13d - 9d - d^2$$

$$\Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow d=2$$

در نتیجه داریم:

$$x = y-d = 5, y=7, z = y+d = 9 \Rightarrow \left[\frac{xy}{z}\right] = \left[\frac{5 \times 7}{9}\right] = 3$$

۳۲۱ نکته ۴ با توجه به این که z, y, x سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند، اگر r نسبت مشترک این دنباله هندسی باشد، می توانیم جملات را به صورت x, xr, xr^2 در نظر بگیریم:

از طرفی طبق فرض مسئله جملات $x, 3y, 5z$ تشکیل دنباله حسابی داده اند، بنابراین می توانیم مقادیر z و y را از فرض دنباله هندسی جای گذاری کرده و شرط تشکیل دنباله حسابی را بنویسیم:

$$x, 3y, 5z \Rightarrow x, 3xr, 5xr^2 \Rightarrow 6xr = x + 5xr^2$$

حالا با توجه به این که دنباله هندسی x, y, z (با x, xr, xr^2) نابرابر هستند، $(x \neq 0)$ می توانیم با ساده کردن x از طرفین این معادله، مقدار r را به دست آوریم:

$$6r = 1 + 5r^2 \Rightarrow 5r^2 - 6r + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \text{ غ ق ق } \\ r=\frac{1}{5} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\left[\frac{x}{z}\right] = \left[\frac{x}{xr^2}\right] = \left[\frac{1}{r^2}\right] = 25$$

۳۲۲ نکته ۴ جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، به صورت $a_2 = a_1 + d$ ، $a_5 = a_1 + 4d$ ، $a_{12} = a_1 + 11d$ است.

حال با توجه به این که این سه مقدار، جملات متوالی دنباله ای هندسی هستند، شرط تشکیل دنباله هندسی را برای آن ها می نویسیم:

$$a_5^2 = a_2 \cdot a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} 5d = 4a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{4}d$$

با جای گذاری این رابطه در جملات دوم و پنجم آن ها را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{a_1 = \frac{5}{4}d} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

در نتیجه $\frac{9}{4}d$ و $\frac{21}{4}d$ دو جمله متوالی دنباله هندسی هستند؛ پس قدرنسبت

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

این دنباله برابر است با:

۳۲۳ نکته ۲ سه جمله متوالی دنباله هندسی را می توانیم به شکل a, ar, ar^2 و $a, \lambda ar, \lambda^2 ar^2$ در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله جملات $4a, \lambda ar, 16ar^2$ جملات متوالی دنباله حسابی هستند؛ بنابراین با استفاده از شرط تشکیل دنباله حسابی، مقدار r را پیدا می کنیم:

$$2(\lambda ar) = 4a + 16ar^2 \Rightarrow 16ar = 4a + 16ar^2$$

$$\xrightarrow{\div 4a} 4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

از طرفی مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع سه جمله حسابی است؛ پس داریم:

$$a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 4a + \lambda ar + 16ar^2$$

$$\Rightarrow a^2(1+r^2+r^4) = 4a(1+2r+4r^2)$$

$$\Rightarrow a^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right) = 4a(1+1+1)$$

حالا با توجه به این که $a \neq 0$ است می توانیم آن را از طرفین ساده کنیم؛ پس داریم:

$$a \times \frac{16+4+1}{16} = 12 \Rightarrow a = \frac{12 \times 16}{21} \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

۳۲۴ نکته ۲ جملات پنجم، سوم و نهم یک دنباله حسابی به شکل $a_5 = a + 4d$ ، $a_3 = a + 2d$ ، $a_9 = a + 8d$ می باشد.

طبق فرض مسئله جمله پنجم، واسطه هندسی جملات سوم و نهم است؛ پس می توان نوشت:

$$a_5^2 = a_3 \cdot a_9 \Rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 8d)$$

$$\Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 10ad + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2ad = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a = 0$$

حالا با توجه به این که جمله پنجم دنباله برابر ۷ است، داریم:

$$a_5 = 7 \Rightarrow a + 4d = 7 \Rightarrow 0 + 4d = 7 \Rightarrow d = \frac{7}{4}$$

در نتیجه جمله صد و یکم دنباله برابر است با:

$$a_{101} = a + 100d = 0 + 100 \times \frac{7}{4} = 175$$

۳۲۵ **گزینه ۲** برای حل، توان‌های منفی مخرج را به صورت و توان‌های منفی صورت را به مخرج می‌بریم تا با توان‌های مثبت سروکار داشته باشیم و کارمان راحت‌تر باشد:

$$\begin{aligned} \frac{(-y)^{-2} \cdot x^3}{(-x^{-2} \cdot y)^{-3} \cdot x^{-2}} &= \frac{(-x^{-2} \cdot y)^3 \cdot x^3 \cdot x^2}{(-y)^2} = \frac{-x^{-6} y^3 \cdot x^5}{y^2} \\ &= \frac{-y^3 \cdot x^5}{x^6 \cdot y^2} = \frac{-y}{x} \end{aligned}$$

۳۲۶ **گزینه ۳** تک‌تک اعداد داده‌شده را به شکل توان‌هایی از ۲ می‌نویسیم:

$$2^{1/76} = 2^{1/100}, 4^{1/12} = (2^2)^{1/100} = 2^{2/100}, 8^{-1/3} = (2^3)^{-1/3} = 2^{-1}$$

در نتیجه حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$2^{1/76} \times 4^{1/12} \times 8^{-1/3} = 2^{1/100} \times 2^{2/100} \times 2^{-1} = 2^{(1/100 + 2/100 - 1)} = 2^{-9/10} = 1$$

۳۲۷ **گزینه ۳** هر یک از عبارت‌ها را ساده می‌کنیم و سپس حاصل عبارت نهایی را پیدا می‌کنیم:

$$(0/04)^2 = (4 \times 10^{-2})^2 = (2^2 \times 10^{-2})^2 = 2^4 \times 10^{-4}$$

$$(625)^{-2} = (5^4)^{-2} = 5^{-8}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = (5^{-1})^{-4} = (5)^4$$

$$(0/008)^3 = (8 \times 10^{-3})^3 = (2^3 \times 10^{-3})^3 = 2^9 \times 10^{-9}$$

بنابراین حاصل عبارت نهایی برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{(0/04)^2 \times (625)^{-2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \times (0/008)^3} &= \frac{2^4 \times 10^{-4} \times 5^{-8}}{5^4 \times 2^9 \times 10^{-9}} = \frac{1}{2^5 \times 10^{-5} \times 5^{12}} \\ &= \frac{1}{2^5 \times (2 \times 5)^{-5} \times 5^{12}} = \frac{1}{2^5 \times 2^{-5} \times 5^{-5} \times 5^{12}} = \frac{1}{5^7} = \left(\frac{1}{5}\right)^7 \end{aligned}$$

۳۲۸ **گزینه ۳** هر یک از عبارت‌ها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\bullet (0/25)^4 = \left(\frac{25}{100}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = (2^{-2})^4 = 2^{-8}$$

$$\bullet \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{2^2}{3}\right)^3 = \frac{2^6}{3^3}$$

$$\bullet 6^4 = (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$$

حالا کافی است مقادیر به‌دست‌آمده را در یکدیگر ضرب کنیم و حاصل را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} (0/25)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times 6^4 &= 2^{-8} \times \frac{2^6}{3^3} \times 2^4 \times 3^4 = 2^{-8+6+4} \times 3^{-3+4} \\ &= 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

۳۲۹ **گزینه ۱** پایه تمام اعداد با هم برابر است؛ پس برای محاسبه حاصل ضرب آن‌ها باید یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را با هم جمع کنیم:

$$\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{3^{16}} \times \dots \times \frac{1}{3^{256}} = 3^{-(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256})}$$

با کمی دقت می‌فهمیم توان‌ها تشکیل دنباله هندسی می‌دهند که جمله آن‌ها $\frac{1}{4}$ و قدر نسبت آن‌ها نیز $\frac{1}{4}$ است؛ بنابراین مجموع آن‌ها را می‌یابیم.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \\ r &= \frac{1}{4} \\ n &= 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_7 = \frac{\frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{4} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{-127}{128}}{-\frac{3}{4}} = \frac{127}{256}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر $\frac{127}{256}$ است.

۳۳۰ **گزینه ۱** با کمی دقت متوجه می‌شویم که در طرفین این تساوی، پایه‌ها فقط می‌توانند توانی از ۲ و ۳ شوند، $9 = 3^2$ و $36 = 3^2 \times 2^2$ و $8 = 2^3$ و $3 = 3^1$ ؛ بنابراین هر یک از اعداد را تا حد امکان ساده کرده و در طرفین تساوی، اعداد توان‌دار با پایه‌های یکسان تشکیل می‌دهیم:

$$9 = 3^2, 36^2 = (2^2 \times 3^2)^2 = 2^4 \times 3^4,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2^2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-6}}{3^{-2}}$$

با جای‌گذاری آن‌ها در معادله داریم:

$$9^{x+4} = (36)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow (3^2)^{x+4} = 2^4 \times 3^4 \times \frac{2^{-6}}{3^{-2}} \Rightarrow 3^{2x+8} = 3^8$$

با توجه به این که پایه‌ها با هم برابرند، توان‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$2x + 8 = 8 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

۳۳۱ **گزینه ۴** ابتدا اعداد داده‌شده در معادله را به شکل توان‌هایی از ۳ می‌نویسیم:

$$81 = 3^4, 9 = 3^2, \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

حالا معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(81)^{-1} \times 9^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^{-4} \times 3^{2x-2} = (-3)^{-x}$$

$$\Rightarrow 3^{2x-6} = (-3)^{-x}$$

حالت اول: اگر x عددی زوج باشد، آن‌گاه 3^{-x} و $(-3)^{-x}$ با هم برابر هستند:

$$3^{2x-6} = 3^{-x} \Rightarrow 2x - 6 = -x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

حالت دوم: اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه $-3^x = (-3)^x$ است و داریم:

$$3^{2x-6} = -3^{-x} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

همواره منفی است. همواره مثبت است.

۳۳۲ **گزینه ۱** هر کدام از صورت و مخرج کسر را جداگانه به صورت

یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

$$\bullet \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{9^{22}} \times \frac{1}{9^{64}} = \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times (3^2)^{22} \times (3^2)^{64}$$

$$= \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{3^{128}} = \frac{15}{3^{140}}$$

$$\bullet \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{4^2} \times \frac{2}{3^8} \times \frac{2}{4^8} = (3 \times 4)^2 \times (3 \times 4)^8 = 12^2 \times 12^8 = 12^{10}$$