

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

درسنامه پاسخ	سوال	
۳۴	۵	■ درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۴۴	۹	■ درس دوم: جبر مجموعه‌ها

فصل دوم: احتمال

۵۲	۱۳	■ درس اول: مبانی احتمال
۵۶	۱۵	■ درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس
۵۹	۱۷	■ درس سوم: احتمال شرطی
۶۵	۲۰	■ درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

فصل سوم: آمار توصیفی

۶۷	۲۲	■ درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
۷۰	۲۴	■ درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۷۳	۲۶	■ درس سوم: معیارهای پراکندگی

فصل چهارم: آمار استنباطی

۷۶	۲۹	■ درس اول: گردآوری داده‌ها
۷۸	۳۱	■ درس دوم: برآورد

ضمیمه: امتحانات نهایی

۹۳	۸۳	■ امتحان شماره (۱): نوبت اول (میان سال)
۹۴	۸۴	■ امتحان شماره (۲): نوبت اول (میان سال)
۹۵	۸۵	■ امتحان شماره (۳): نوبت دوم (پایان سال)
۹۶	۸۶	■ امتحان شماره (۴): نوبت دوم (پایان سال)
۹۷	۸۸	■ امتحان شماره (۵): نوبت دوم (پایان سال)
۹۸	۸۹	■ امتحان شماره (۶): نوبت دوم (پایان سال)
۹۹	۹۰	■ امتحان شماره (۷): نوبت دوم (پایان سال) خرداد ۱۴۰۳

احتمال

فصل ۲

صفحه ۳۶ تا ۴۳ کتاب درسی

مبانی احتمال

درس ۱

درس نامه ارا در صفحه ۵۲ ببینید.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های داده شده را مشخص کنید.

۳۰۸- اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $P(A) < P(B)$ است.

۳۰۹- برای دو پیشامد ناسازگار A و B داریم: $P(A-B) = P(A)$.

۳۱۰- A و B دو پیشامد ناسازگارند اگر و تنها اگر $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ باشد.

۳۱۱- فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه و یک تاس، ۸ حالت دارد.

جاهای خالی را با عبارات درست، کامل کنید.

۳۱۲- به هر عضو از فضای نمونه، یک می‌گویند.

۳۱۳- شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم را علم می‌گویند.

۳۱۴- بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم را علم می‌گویند.

۳۱۵- مجموعه تمام نتایج ممکن در هر آزمایش تصادفی را می‌گویند.

۳۱۶- اگر رخ دادن هم‌زمان دو پیشامد با هم محال باشد، آن دو پیشامد را می‌گویند و در این صورت $A \cap B = \emptyset$ است.

(برگرفته از متن کتاب درسی)

کدامیک از سؤالات زیر مربوط به علم آمار و کدامیک مربوط به علم احتمال است؟

۳۱۷- درآمد کارکنان وزارت نفت چه قدر است؟

۳۱۸- می‌دانیم ۱۸ تا ۲۰ سیب یک جعبه سالم است. چندتا سیب از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که حداقل یک سیب خراب برداشته‌ایم؟

۳۱۹- چه تعداد از دانش‌آموزان سال یازدهم ریاضی مدرسه شما به آمار و احتمال علاقه دارند؟

۳۲۰- ۹۰ نفر از ۱۰۵ نفر دانش‌آموز پایه یازدهم به درس آمار و احتمال علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، چه قدر ممکن است کم‌تر از ۱۵ نفر از آن‌ها به آمار و احتمال علاقه‌مند باشند؟

۳۲۱- ۹۷ درصد از افراد جامعه تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر ۱۰ نفر از آن‌ها را انتخاب کنیم، چه قدر ممکن است یک نفر از آن‌ها تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؟

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

در هر قسمت تعیین کنید پیشامدهای داده شده سازگارند یا ناسازگار.

۳۲۲- دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌شود:

A: متولد ماه تیر باشد. B: متولد فصل پاییز باشد.

۳۲۳- عدد انتخاب شده (طبیعی):

A: مضرب ۳ است. B: اول است.

۳۲۴- فردا:

A: خورشید در آسمان دیده شود. B: باران ببارد.

۳۲۵- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنید:

A: هر سه بار مشابه بیاید. B: زوج بار «رو» بیاید.

۳۲۶- تاسی را پی‌درپی پرتاب می‌کنید:

A: برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید. B: تا پرتاب سوم، دو بار ۶ بیاید.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ یک فضای نمونه باشد، آن گاه:

۳۲۷- S چند پیشامد دارد؟ ۳۲۸- S چند برآمد دارد؟

۳۲۹- چند پیشامد از S ، شامل ۲ است و ۷ و ۸ را ندارد؟

۳۳۰- چند پیشامد از S شامل ۲ است، ۷ را ندارد و از بین ۵ و ۹ حداقل یکی را دارد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

■ احمد و بهمن با هم سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند:

۳۳۱- فضای نمونه‌ای این بازی چیست؟

۳۳۳- در چه تعداد از برآمدها، بازی مساوی می شود؟

۳۳۵- پیشامدی را بنویسید که در آن بهمن برنده بازی باشد.

۳۳۶- در دو مرتبه بازی، با چه احتمالی هر دو بار، بهمن برنده بازی است؟

۳۳۷- اگر دو مرتبه بازی کنند، پیشامدی را بنویسید که در آن بار اول احمد و بار دوم بهمن برنده شود.

۳۳۸- یک راننده تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند. البته ممکن است با کم تر از ۴ مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز

(مشابه مثال کتاب درسی)

همین اتفاق می افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت مهم باشد، چیست؟

■ هر دانش آموز یک مدرسه، از نظر پایه (دهم، یازدهم، دوازدهم)، رشته (ریاضی، تجربی، انسانی)، کلاس «الف»، «ب»، «ج»، سطح درسی (قوی، متوسط، ضعیف) بررسی می شود.

(مشابه مثال کتاب درسی)

۳۳۹- فضای نمونه برای تعیین وضعیت یک دانش آموز، چند عضو دارد؟

۳۴۰- فضای نمونه را به صورت ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید.

۳۴۱- فرض کنید یک دانش آموز پایه یازدهم انتخاب شده است. چند پیشامد از فضای نمونه رخ داده است؟

۳۴۲- فرض کنید دانش آموز انتخابی، پایه یازدهم بوده و از نظر سطح درسی قوی است. چند پیشامد از فضای نمونه رخ داده است؟

۳۴۳- اگر یک دانش آموز به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی دانش آموز کلاس «الف» از یازدهم ریاضی است؟

■ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. فرض کنید آن ها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مهم باشد:

۳۴۴- فضای نمونه را توصیف کنید.

۳۴۵- اگر اعضا کاملاً تصادفی وارد سالن شوند، با چه احتمالی اولین کسی که وارد می شود بلندقدترین است؟

۳۴۶- احتمال این که بلندقدترین فرد در جایگاه نهم وارد شود، چه قدر است؟

۳۴۷- احتمال این که اولین نفر، بلندترین و آخرین نفر، کوتاه ترین باشد، چه قدر است؟

۳۴۸- با چه احتمالی افراد به ترتیب قد وارد می شوند؟

■ اگر به این افراد شماره های ۱ تا ۱۴ (به ترتیب قد) اختصاص دهیم و این ۱۴ نفر وارد سالن شوند، با چه احتمالی:

۳۴۹- افراد با شماره های ۱ تا ۳ در سه جایگاه اول، به ترتیب وارد می شوند؟

۳۵۰- افراد با شماره های زوج به دنبال هم و افراد با شماره های فرد به دنبال هم وارد سالن می شوند؟

۳۵۱- فرد ۱ قبل از فرد ۵ وارد شود؟

۳۵۲- فرد ۵ بلافاصله بعد از فرد ۱ وارد شود؟

■ برای دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه S ثابت کنید:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad ۳۵۳$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad ۳۵۴$$

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \quad ۳۵۵$$

$$P(A' \cup B) - P(A \cap B) = 1 - P(A) \quad ۳۵۶$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad ۳۵۷$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) \quad ۳۵۸$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad ۳۵۹$$

■ اگر A ، B و C سه پیشامد دوبه دو ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad ۳۶۰$$

■ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ، اگر $B \subseteq A$ باشد، ثابت کنید:

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \quad ۳۶۲$$

$$P(B) \leq P(A) \quad ۳۶۳$$

(برگرفته از قضایای کتاب درسی)

(نهایی)

(نهایی)

(نهایی)

(نهایی)

(مشابه قضیه کتاب درسی)

(مشابه قضیه کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی) (نهایی)

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

پاسخ: الف) نادرست. به ازای $x = -3$ عبارت تعریف نمی‌شود.

ب) هیچ کدام طبیعی نیست؛ پس:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

گزاره سور نادرست است.

نقیض گزاره‌های سوری

برای نقیض کردن گزاره‌های سوری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

مثال ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 + n + 41 \notin p$

ب) $\forall x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} \leq -2$

پاسخ: الف) درست - نقیض: $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + n + 41 \in p$

ب) درست - نقیض: $\exists x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} < -2$

پاسخ سوالات

۱. نادرست - اگر گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد، آن‌گاه ترکیب فصلی

آن‌ها صحیح بوده اما ترکیب عطفی آن‌ها صحیح نیست.

۲. درست - اگر تالی درست باشد، آن‌گاه در صورت درست بودن مقدم، عبارت

$T \Rightarrow T$ درست بوده و در صورت نادرست بودن مقدم، گزاره شرطی به انتفای

مقدم درست است.

۳. نادرست - گزاره سور عمومی زمانی ارزش درست دارد که حتی یک مثال

نقض برای آن پیدا نشود.

۴. درست - اگر $p \vee q$ نادرست باشد یعنی هم گزاره p و هم گزاره q نادرست

بوده‌اند. پس ترکیب‌های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ ، هر دو به انتفای مقدم

درست هستند.

۵. درست - مانند قسمت قبل، p و q هر دو نادرست بوده و ترکیب دوشروطی

$F \Leftrightarrow F$ دارای ارزش درست است.

۶. خود گزاره

یادآوری به زبان ریاضی می‌نویسیم: $\sim (\sim p) \equiv p$

۷. هر دو درست

یادآوری به زبان ریاضی: $p \wedge q \equiv T \Leftrightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \end{cases}$

۸. هر دو نادرست

به زبان ریاضی: $p \vee q \equiv F \Leftrightarrow \begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases}$

۹. p درست و q نادرست

به زبان ریاضی: $(p \Rightarrow q) \equiv F \Leftrightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases}$

۱۰. ارزش دو گزاره یکسان باشد

به زبان ریاضی: $p \Leftrightarrow q \equiv T \Leftrightarrow p \equiv q$

قوانین جذب $\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$

۹ $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۱۰ قانون ادخال فاصل $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

۱۱ قانون حذف عاطف $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

و نقیض گزاره‌های مرکب، یعنی:

قوانین دمورگان $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$

۱۴ $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۱۵ $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

مثال با استفاده از جدول ارزشی گزاره‌ها قانون ۱۰ و ۱۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د	د	د
			$\equiv T$			$\uparrow$	$\equiv$	$\uparrow$

سورها

۱) سور عمومی

اگر بخواهیم یک ویژگی را به کل اعضای

جامعه نسبت دهیم، از سور عمومی استفاده می‌کنیم. برای این کار از نماد

« $\forall$ » استفاده می‌کنیم.

مثلاً عبارت «به ازای جميع مقادیر x ، $x^2 + 1 > 0$ است» را با زبان ریاضی

به این صورت می‌نویسیم:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > 0$$

۲) سور وجودی

اگر بخواهیم درباره خاصیتی حرف بزنیم که

درباره تمام اعضای جامعه درست نبوده و فقط درباره بعضی از آن‌ها درست

است، از سور وجودی استفاده کرده و آن را با نماد « $\exists$ » نشان می‌دهیم.

(بخوانید «بعضی» یا «وجود دارد».)

مثلاً عبارت «عدد اولی وجود دارد که زوج باشد» را با زبان ریاضی به این

صورت می‌نویسیم:

$$\exists x \in p; x = 2k$$

(p مجموعه اعداد اول است.)

نکته

سور عمومی زمانی درست است که حتی یک مثال نقض هم برای

عبارت پیدا نشود و سور وجودی زمانی درست است که حداقل یک عضو در

گزاره مورد نظر صدق کند.

مثال ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$

ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

اتحاد چاق و لاغر، بر $(4 + 49)$ و $(49^2 + 4^2 - 4 \times 49)$ بخش پذیر است.

پادآوری تجزیه عبارت $a^3 \pm b^3$ به صورت $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ است.

۲۴. نادرست است؛ مثلاً به ازای $a = 0$ و $b = 1$ طرف چپ $-1 = (-1)^3$ و طرف راست ۱ می شود و تساوی برقرار نیست.

پادآوری اتحاد مکعب دوجمله ای به صورت زیر است:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

۲۵. نادرست است؛ مثلاً ۱۱ عددی فرد و بزرگتر از ۵ است و به صورت جمع دو عدد اول نوشته نمی شود.

پادآوری اگر عددی فرد و بزرگتر از ۵، در تقسیم بر ۶ باقی مانده ۵ داشته باشد، هرگز به صورت جمع دو عدد اول نوشته نمی شود.

$$\leq$$

پادآوری اعداد بین 0° و 1° هر چه به توان بیشتری برسند، کوچک تر می شوند.

$$\pm \sqrt{a}$$

پادآوری تعریف ریشه دوم a این بود که اگر $x^2 = a$ باشد، برای x ، دو جواب $\pm \sqrt{a}$ داریم.

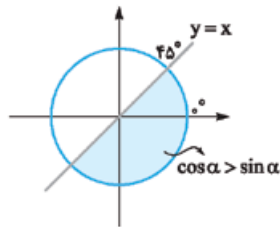
$$\leq$$

پادآوری هر عبارت دارای توان زوج یا قدرمطلق، همواره مثبت یا صفر است و قرینه آن همواره منفی یا صفر می شود.

۲۹. $(1, 1)$ یا هر نقطه دیگر با مختصات (k, k^2)

$$<$$

پادآوری اگر در دایره مثلثاتی، زاویه زیر نیمساز ناحیه اول و سوم $(y = x)$ قرار داشته باشد، $\sin \alpha < \cos \alpha$ است.



۳۱. نباشد.

۳۲. نیست، چون گزاره «عدد ۴ مربع کامل نباشد» نادرست است؛ پس گزاره اول هم باید نادرست باشد.

پادآوری p اگر و تنها اگر q وقتی درست است که p و q هم ارزش باشند.

$$2^4 = 16$$

۳۳.

پادآوری جدول ارزشی برای n گزاره، 2^n سطر دارد.

۳۴. تکلیف دوتا از ۴ گزاره معلوم شده و فقط باید ارزش q و s را در نظر بگیریم که $4 = 2^2$ حالت دارند.

۳۵. در جدول ارزشی ۴ گزاره $2^4 = 16$ سطر داریم که در هر سطر ۴ گزاره، در کل $4 \times 16 = 64$ حرف دیده می شود که نصف آن ها «د» است؛ پس $\frac{64}{2} = 32$ تا «د» می بینیم.

۳۶. دوتا از گزاره ها را انتخاب می کنیم که $\left(\frac{4}{2}\right) = 6$ حالت دارد، سپس آن دو گزاره را «د» و دوتای دیگر را «ن» می گیریم.

۳۷. باید ۲ یا ۳ یا ۴ تا از گزاره ها نادرست باشند؛ یعنی به تعداد $\left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{4}\right)$ حالت داریم که می شود $1 + 4 + 6$ ؛ یعنی ۱۱ حالت.

۱۱. جدول ارزشی ۴ گزاره دارای $2^4 = 16$ حالت است که در ۸ حالت s و r هم ارزند.

به زبان ریاضی: دو گزاره هم ارز s و r دو حالت دارند (هر دو «د» یا هر دو «ن») و دو گزاره دیگر $4 \times 2 = 8$ حالت دارند؛ پس در کل طبق اصل ضرب $8 \times 2 = 16$ حالت داریم:

r	s	p	q
د	د	د	د
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن

۱۲. گزاره نما **۱۳.** انتفای مقدم

پادآوری گزاره $p \Rightarrow q$ اگر p نادرست باشد، همواره درست است. (به این موضوع «انتفای مقدم» می گوئیم).

۱۴. درست، درست

پادآوری گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که فرض، درست و حکم، نادرست باشد؛ بنابراین هر گزاره شرطی با حکم درست، درست است: $F \Rightarrow p \equiv T$ و با فرض نادرست هم همواره درست است: $p \Rightarrow T \equiv T$.

۱۵. نادرست، درست

پادآوری $p \sim p$ همواره نادرست بوده و $p \vee \sim p$ همواره درست است.

۱۶. p

۱۷. گزاره نما برای تمام مقادیر x درست باشد.

پادآوری گزاره نمای $\forall x; P(x)$ وقتی درست است که $P(x)$ برای تمام مقادیر ممکن x درست باشد.

۱۸. حداقل به ازای یک مقدار x ، درست باشد.

پادآوری گزاره نمای $\exists x; P(x)$ وقتی درست است که به ازای حداقل یک x گزاره $P(x)$ درست باشد.

۱۹. درست

۲۰. نادرست است؛ مثلاً معادله $x^2 + 1 = 0$ اصلاً ریشه حقیقی ندارد.

پادآوری در حالتی که $\Delta < 0$ باشد، معادله درجه دوم، ریشه حقیقی ندارد. وقتی $\Delta = 0$ باشد، معادله درجه دوم، دو ریشه مساوی دارد.

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

۲۱. نادرست است؛ یک مجموعه ۶ عضوی $2^6 = 64$ زیرمجموعه دارد.

پادآوری یک مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.

۲۲. درست است؛ فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و پیشامد مضرب ۳ به صورت $A = \{3, 6\}$ است و احتمال می شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۳. نادرست است؛ عدد $64 + 7$ را به صورت $4^3 + 4^2 + 4^1$ می نویسیم که با توجه به

۳۲۴. سازگارند. (در زمان‌های مختلف هر دو امکان دارد).

۳۲۵. سازگارند. (۰ بار رو نباید مشترک است).

۳۲۶. ناسازگارند.

۳۲۷. $2^n(S) = 2^9 = 512$ تعداد پیشامد

۳۲۸. $n(S) = 9$ تعداد برآمد

۳۲۹. تعداد پیشامد شامل ۲ و فاقد ۷ و ۸

$2^6 = 64$ = تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 3, 4, 5, 6, 9\}$

۳۳۰. تعداد پیشامد شامل ۲ و فاقد ۷ که از ۵ و ۹ حداقل یکی دارد.

تعداد انتخاب غیرتهی از $\{9, 5\}$ و تعداد زیرمجموعه $\{8, 6, 4, 3, 1\}$

$= 2^5 \times (2^2 - 1) = 32 \times 3 = 96$

۳۳۱. $S = \left\{ \begin{array}{l} (R, R), (P, R), (S, R), \\ (R, P), (P, P), (S, P), \\ (R, S), (P, S), (S, S) \end{array} \right\}$ Rock Paper Scissors

۳۳۲. $n(S) = 3 \times 3 = 9$

۳۳۳. $A = \{(P, P), (R, R), (S, S)\} \Rightarrow n(A) = 3$

۳۳۴. $B = \{(R, S), (S, P), (P, R)\}$ احمد احمد احمد

۳۳۵. ۳ تا برآمد پیروزی احمد را داریم.

۳۳۶. $C = \{(R, S), (S, P), (P, R)\}$ بهمن بهمن بهمن

۳۳۷. احتمال برد بهمن در هر بار $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ است؛ پس در دو بار می‌شود:

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

۳۳۸. دور اول و دوم را در کنار هم به صورت زیر می‌نویسیم:

$\begin{array}{ccccc} \text{احمد} & \text{احمد} & \text{احمد} & \text{بهمن} & \text{بهمن} \\ R & S & P & R & R \\ \text{بار اول} & \text{بار دوم} & & & \end{array}$

در پیشامد این که بار اول احمد و بار دوم بهمن برنده شود، ۹ عضو داریم:

$C = \left\{ \begin{array}{l} (R_1 S_1, S_2 R_2), (P_1 R_1, S_2 R_2), (S_1 P_1, S_2 R_2) \\ (R_1 S_1, R_2 P_2), (P_1 R_1, R_2 P_2), (S_1 P_1, R_2 P_2) \\ (R_1 S_1, P_2 S_2), (P_1 R_1, P_2 S_2), (S_1 P_1, P_2 S_2) \end{array} \right\}$

۳۳۹. در مسیر رفت ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ مسافر دارد $\leftarrow$ ۵ حالت در مسیر

برگشت هم ۵ حالت دارد.

پس فضای نمونه به صورت زوج‌های مرتب (x, y) است، که

$n(S) = 5 \times 5 = 25$ ؛ بنابراین $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$S = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (0, 1), \dots, (0, 5) \\ (1, 0), (1, 1), \dots, (1, 5) \\ \vdots \\ (5, 0), (5, 1), \dots, (5, 5) \end{array} \right\}$

۳۴۰. سطح کلاس رشته پایه $n(S) = 3 \times 3 \times 2 \times 3 = 54$

۳۴۱. در S ، ۵۴ عضو داریم که در پایه یازدهم $1 \times 3 \times 2 \times 3$ ، یعنی ۱۸ تا

آن‌ها هستند. پس 2^{18} پیشامد رخ داده است.

۳۴۲. در S ، دانش‌آموز یازدهم قوی به تعداد $1 \times 3 \times 2 \times 1$ داریم، یعنی ۶ تا؛

پس 2^6 پیشامد رخ داده است.

$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$

پس:

$\underline{\text{مورد}} \quad P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

توجه کنید که اثبات قضایای احتمال برای امتحانات نهایی بسیار مهم است.

تذکره از بین اعداد طبیعی $1, 2, \dots, n$ ، تعداد اعداد بخش‌پذیر بر k از

رابطه $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ قابل محاسبه است.

مثال عددی به تصادف از بین اعداد $1, 2, \dots, 100$ انتخاب می‌کنیم.

با چه احتمالی:

(الف) عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر است؟

(ب) بر ۳ بخش‌پذیر بوده و بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

(پ) نه بر ۳ بخش‌پذیر است و نه بر ۵؟

پاسخ: (الف) پیشامد A را مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و پیشامد

B را مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۵ می‌نامیم.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{15} \right] = \frac{33 + 20 - 6}{100} = \frac{47}{100}$

(ب) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{100}{3} \right] - \left[\frac{100}{15} \right]}{100}$

$= \frac{33 - 6}{100} = \frac{27}{100}$

(پ)

$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{47}{100} = \frac{53}{100}$

پاسخ سوالات

۳۰۸. نادرست - اگر $A = B$ باشد، $A \subseteq B$ هست اما $P(A) < P(B)$

نیست و $P(A) = P(B)$ است.

۳۰۹. درست - اگر A و B ناسازگار باشند، $A \cap B = \emptyset$ است و

$P(A \cap B) = 0$.

$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - 0 = P(A)$

۳۱۰. درست - اگر A و B ناسازگار باشند، $A \cap B = \emptyset$ است و

$P(A \cap B) = 0$.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0} = P(A) + P(B)$

۳۱۱. نادرست - فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس، $2 \times 6 = 12$ حالت دارد.

۳۱۲. برآمد

۳۱۴. احتمال

۳۱۶. ناسازگار - $\emptyset$

۳۱۸. احتمال

۳۲۰. احتمال

۳۲۲. ناسازگارند. (تیر و پاییز اشتراک ندارند).

۳۲۳. سازگارند. (عدد ۳ هم اول و هم مضرب ۳ است).

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad \text{۳۵۸. می‌دانیم:}$$

$$\Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))$$

$$\Rightarrow P((A \cap B)') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$$

$$\Rightarrow P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$$

$$A \cup B = B \cup (A - B) \quad \text{۳۵۹.}$$

$$\xrightarrow{A-B \text{ و } B \text{ جدا از هم هستند.}} P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول } P(A-B)} P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) \quad \text{۳۶۰.}$$

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C)$$

چون $A \cup B$ و C جدا از هم هستند.

$$= P(A) + P(B) + P(C) \quad \text{چون } A \text{ و } B \text{ جدا از هم هستند.}$$

$$\text{داریم: } P(S) = 1 \Rightarrow 1 - P(S) = 0 \Rightarrow P(S') = 0 \quad \text{۳۶۱.}$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$\text{۳۶۲. می‌دانیم } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ و چون } B \subseteq A \text{ است}$$

$$A \cap B = B \quad \text{داریم:}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \quad \text{پس:}$$

$$\text{۳۶۳. با توجه به قسمت قبل و چون } P(A - B) \geq 0 \text{ است داریم:}$$

$$0 \leq P(A) - P(B)$$

$$P(A) \geq P(B) \quad \text{و بنابراین:}$$

$$P(A \cup B) \geq P(A) \quad \text{۳۶۴. می‌دانیم}$$

پس وقتی $P(A) = 1$ است، داریم: $P(A \cup B) = 1$ (بیشتر از ۱ امکان ندارد).

بنابراین در فرمول $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ داریم:

$$P(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\text{۳۶۵. فضای نمونه‌ای } n(S) = 1000 \text{ عضو دارد. تعداد مضارب } 3, \text{ مضارب } 5 \text{ و}$$

مضارب مشترک ۳ و ۵ (یعنی مضارب ۱۵) را پیدا می‌کنیم:

$$n(A \cap B) = n(1000 \text{ تا } 15) = \left[\frac{1000}{15} \right] = 66$$

$$P(5 \text{ و } 3 \text{ مضرب}) = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{66}{1000}$$

$$n(A) = n(1000 \text{ تا } 3) = \left[\frac{1000}{3} \right] = 333 \quad \text{۳۶۶.}$$

$$n(B) = n(1000 \text{ تا } 5) = \left[\frac{1000}{5} \right] = 200$$

$$P(5 \text{ یا } 3 \text{ مضرب}) = P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{333 + 200 - 66}{1000} = \frac{467}{1000}$$

$$P(A - B) = P(\text{مضرب } 3 \text{ باشد و مضرب } 5 \text{ نباشد}). \quad \text{۳۶۷.}$$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{333 - 66}{1000} = \frac{267}{1000}$$

$$P(B - A) = P(\text{مضرب } 5 \text{ باشد و مضرب } 3 \text{ نباشد}). \quad \text{۳۶۸.}$$

$$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{200 - 66}{1000} = \frac{134}{1000}$$

$$P(3 \text{ نه بر } 5 \text{ نه بر}) = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) \quad \text{۳۶۹.}$$

$$= 1 - \left(\frac{333 + 200 - 66}{1000} \right) = \frac{533}{1000}$$

$$P = \frac{n(\text{الف و یازدهم ریاضی})}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 3}{3 \times 3 \times 2 \times 3} = \frac{1}{18} \quad \text{۳۴۳.}$$

$$\text{۳۴۴. هر ترتیب ورود این ۱۴ نفر یک عضو } S \text{ است و فضای نمونه‌ای } 14! \text{ عضو دارد.}$$

$$P(\text{نفر اول بلندترین}) = \frac{n(\text{نفر اول بلندترین})}{n(S)} = \frac{1 \times 13!}{14!} = \frac{1}{14} \quad \text{۳۴۵.}$$

$$P(\text{بلندترین نهم باشد}) = \frac{n(\text{بلندترین نهم باشد})}{n(S)} = \frac{1 \times 13!}{14!} = \frac{1}{14} \quad \text{۳۴۶.}$$

$$P(\text{اولی بلندترین و آخری کوتاه‌ترین}) = \frac{n(\text{اولی بلندترین و آخری کوتاه‌ترین})}{n(S)} = \frac{1 \times 1 \times 12!}{14!} = \frac{1}{14 \times 13} \quad \text{۳۴۷.}$$

$$P(\text{به ترتیب قد}) = \frac{n(\text{به ترتیب قد})}{n(S)} = \frac{2}{14!} \quad \text{۳۴۸.}$$

دقت کنید که به ترتیب قد، هم از کوتاه به بلند و هم از بلند به کوتاه است و ۲ حالت دارد.

$$\frac{n(3, 2, 1 \text{ در سه جای اول})}{n(S)} = \frac{1 \times 11!}{14!} = \frac{1}{14 \times 13 \times 12} \quad \text{۳۴۹.}$$

$$\frac{n(\text{زوج‌ها و فردها به دنبال هم})}{n(S)} = \frac{\overbrace{7! \times 7!}^{\text{جابه‌جایی فرد زوج}}}{14!} \quad \text{۳۵۰.}$$

$$P(5 \text{ قبل از } 4) = \frac{1}{2} \quad \text{۳۵۱.}$$

۱ و ۵ نسبت به هم دو حالت هم‌شانس دارند، یا ۱ زودتر وارد می‌شود یا ۵؛ پس احتمال می‌شود $\frac{1}{2}$.

$$P(1 \text{ و } 5 \text{ را به هم چسبانیم و یک نفر در نظر گرفتیم}) = \frac{n(1, 5 \text{ پشت سر هم})}{n(S)} = \frac{13!}{14!} = \frac{1}{14} \quad \text{۳۵۲.}$$

۵ و ۱ را به هم چسبانیم و یک نفر در نظر گرفتیم.

$$P(S) = 1 \xrightarrow{S=A \cup A' \atop A \cap A' = \emptyset} P(S) = P(A) + P(A') = 1 \quad \text{۳۵۳.}$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad \text{۳۵۴.}$$

$$\xrightarrow{A \cap B', A \cap B \text{ جدا از هم هستند.}} P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \quad \text{۳۵۵.}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۳۵۶. طبق فرمول اجتماع:

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

طبق فرمول تفاضل:

$$\Rightarrow P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - (P(B) - P(A \cap B))$$

با جابه‌جایی جملات:

$$\Rightarrow P(A' \cup B) - P(A \cap B) = P(A') = 1 - P(A)$$

۳۵۷.

$$P(A' \cap B') = \overset{\text{دمورگان}}{P((A \cup B)')}$$

$$\overset{\text{متمم}}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

ردیف	امتحان نوبت اول (میان سال اول): آمار و احتمال		رشته: ریاضی و فیزیک		تاریخ امتحان: دی ماه	
	امتحان شماره ۱	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	نمره		
۱	گزاره‌های درست و نادرست را مشخص کنید. الف) گزاره $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است. ب) ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی دارد. پ) مجموعهٔ $\{a, b, c, d, e, f\}$ دارای ۶۴ زیرمجموعه شامل a است. ت) به هر عضو از فضای نمونه، یک پیشامد می‌گویند.			۱		
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $p \wedge q \equiv T$ باشد، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ است. ب) اگر مجموعهٔ توانی یک مجموعه ۶۴ عضو داشته باشد، آن مجموعه دارای زیرمجموعهٔ تک‌عضوی است. پ) اگر $A - B = \emptyset$ باشد، حاصل $B' \cap (A \cup B)$ برابر است. ت) اگر سه سکه را هم‌زمان پرتاب کنیم، با احتمال، هر سه سکه مثل هم می‌آید.			۱		
۳	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید: $[(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)] \equiv p \Rightarrow q$			۱/۵		
۴	ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. با چه احتمالی ارزش گزاره r درست است؟			۱		
۵	ارزش گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کرده سپس نقیض آن‌ها را بنویسید. الف) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ ب) همهٔ اعداد اول فرد هستند.			۱/۵		
۶	اگر چهار عضو به اعضای مجموعه n عضو A اضافه کنیم، ۲۴۰ زیرمجموعه به زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود. مجموعه A چند زیرمجموعهٔ دوعضوی دارد؟			۱		
۷	به روش عضوگیری دلخواه برای مجموعه‌های دلخواه A و B با مرجع U ثابت کنید: $A - B \subseteq A$			۱		
۸	به روش عضوگیری دلخواه برای مجموعه‌های دلخواه A و B با مرجع U ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ باشد، $B' \subseteq A'$ است.			۱		
۹	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B) \cup (A \cap B) = A$			۱		
۱۰	مجموعهٔ $(A \cup B)' \cap (C \cap B')$ را روی نمودار ون نمایش دهید.			۱		
۱۱	در جدول ارزشی ۴ گزاره در چند حالت فقط دو گزاره دارای ارزش درست‌اند؟			۰/۵		
۱۲	اگر $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 0\}$ و $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y^2 \leq 10\}$ باشد: الف) $A \times B$ را نمایش دهید. ب) تعداد اعضای $(A \times B) \cap (B \times A)$ را به دست آورید. پ) $A^2 - A \times B$ چند زیرمجموعه دارد؟			۲		
۱۳	اگر A و B دو مجموعهٔ نتهی بوده و $A \times B = B \times A$ باشد، $A = \{x, y^2, 5\}$ و $B = \{4, -1, z\}$ ، مقدار $ xyz $ را بیابید.			۱		
۱۴	کیسه‌ای حاوی ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز است. به تصادف و با هم ۳ مهره خارج می‌کنیم. با چه احتمالی: الف) مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟ ب) رنگ‌ها متفاوت است؟			۱		
۱۵	به کمک اصول احتمال ثابت کنید: $P(A') = 1 - P(A)$.			۱		
۱۶	اگر $P(A') = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{3}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ باشد، مطلوب است $P(A - B)$.			۱/۵		
۱۷	یک تاس به گونه‌ای طراحی شده است که احتمال روشن شدن هر عدد زوج، دو برابر احتمال روشن شدن هر عدد فرد است. این تاس را پرتاب کردیم. با چه احتمالی عددی اول و زوج ظاهر می‌شود؟			۱		
۱۸	احتمال موفقیت یک عمل روی یک بیمار ۶/۰ است. این عمل روی ۵ بیمار انجام شده است. با چه احتمالی فقط روی ۲ نفر موفقیت‌آمیز بوده است؟			۱		
	جمع نمرات	«موفق باشید»		۲۰		

90