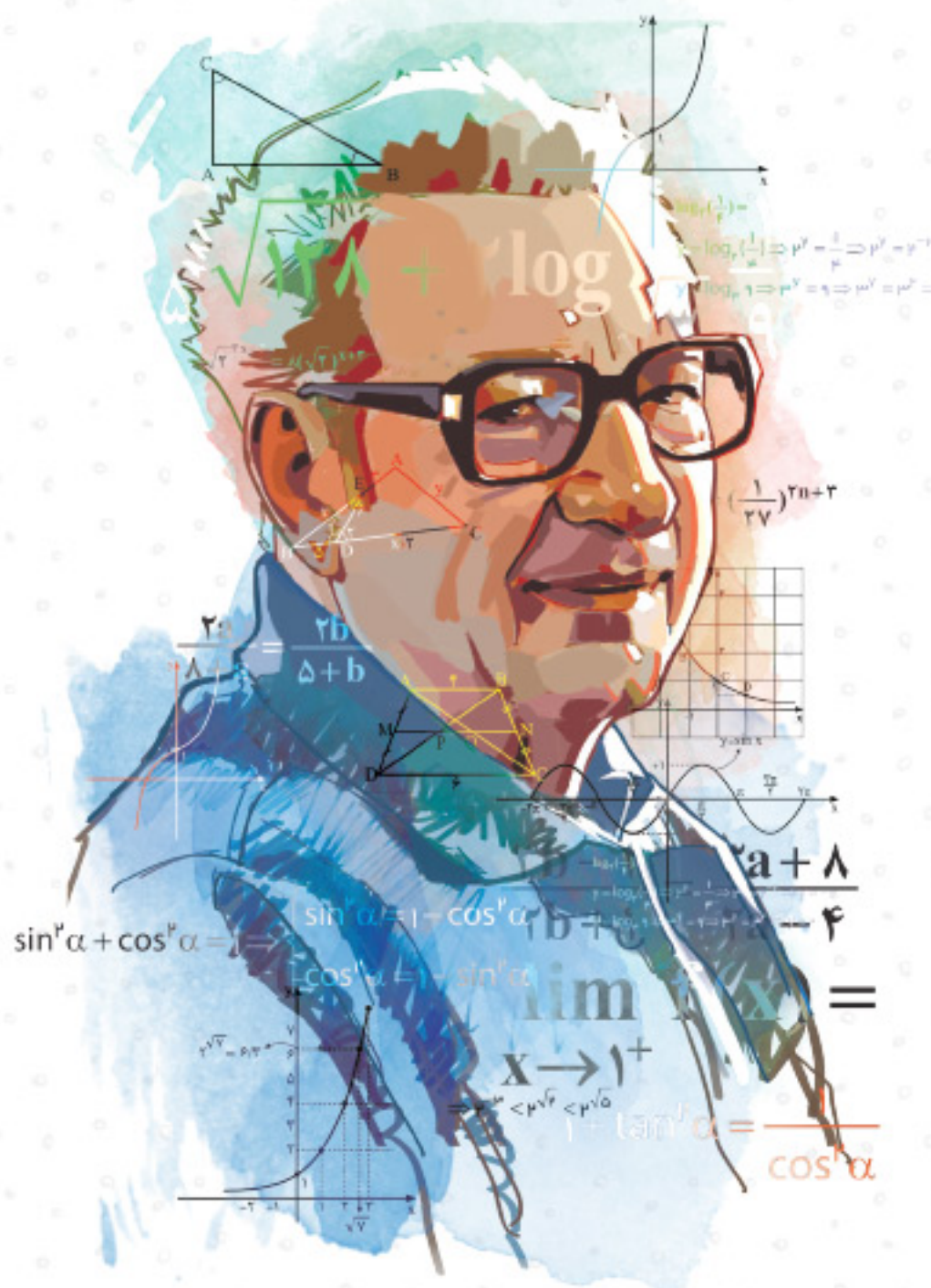




تقدیم به استاد پرویز شهریاری

پرویز شهریاری (۲ آذر ۱۳۰۵، کرمان - ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، تهران) ریاضی‌دان و از چهره‌های ماندگار در زمینه دانش و آموزش ایران است.

دوران کودکی شهریاری دوران سختی از نظر معیشتی بود. او تا سال سوم دبیرستان را در دبیرستان ایرانشهر در شهر کرمان گذراند و وارد دانش‌سرای مقدماتی کرمان شد. در خرداد ۱۳۲۳ دانش‌آموخته شد و برای ادامه تحصیل به تهران آمد. در تهران در سال ۱۳۳۲ در رشته ریاضی در دانشکده علوم دانشگاه تهران دانش‌آموخته شد. پس از آن یک سال در شیراز آموزگار بود. در ۱۳۳۳ به تهران بازگشت و به فعالیت‌های درخشان علمی و آموزشی خود ادامه داد. استاد پرویز شهریاری سرانجام در ۸۶ سالگی و در روز جمعه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ به علت مشکل تنفسی در بیمارستان جم تهران زندگی را بدرود گفت.

فعالیت‌ها: انتشار نشریاتی چون اندیشه‌ما، هومن و چیستا، آشتی با ریاضیات (بعدها: آشنایی با ریاضیات) و سردبیری مجله دانشمند. تأسیس دبیرستان‌های خوارزمی، مرجان و مدرسه عالی اراک. تألیف کتاب‌های ریاضی و هم‌زمان با آن تألیف و ترجمه صدها کتاب در تاریخ و آموزش ریاضیات. انتشار ماهنامه «اندیشه‌ما»
تهیه یک دوره کتاب درسی ریاضی دوره اول دبیرستان. راه‌اندازی اولین کلاس کنکور در ایران با نام گروه فرهنگی خوارزمی. تأسیس و ثبت بنیاد فرهنگی پرویز شهریاری

فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

این فصل به دو بخش متفاوت تقسیم میشه! اولیش، مجموعه‌های متناهی، نامتناهی و متمم یک مجموعه‌اس.

توی این بخش یاد می‌گیری عضوهای چه مجموعه‌هایی رو بشمری تموم میشن و کدوم‌ها تموم نمیشن. همین‌طور یاد می‌گیری مجموعه مرجع چیه و اعضای که متعلق به یه مجموعه نیستن کجا قرار می‌گیرن.

دومیش الگو و دنباله‌اس.

توی این بخش یواش‌یواش یاد می‌گیری چطوری پدیده‌های نظم‌پذیر رو توی قالب ریاضی بیاری و رفتارشون رو پیش‌بینی کنی. آخرش هم با چند تا دنباله مهم آشنا میشی.





یادآوری: در سال‌های گذشته با مجموعه‌های مهمی از اعداد مانند اعداد طبیعی و ... آشنا شدید که به طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد: $\mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



نکته ۱: مجموعه اعداد طبیعی، زیرمجموعه اعداد حسابی و مجموعه اعداد حسابی، خود، زیرمجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد صحیح، زیرمجموعه اعداد گویا است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

نکته ۲: مجموعه اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی هستند.

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

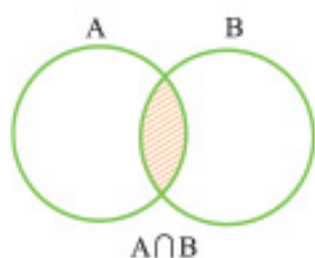
در نمودار زیر، همه مجموعه‌های گفته شده در نکته، نشان داده شده و رابطه بین آن‌ها مشخص شده است:



اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)	
اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$)	اعداد گویا ($\mathbb{Q}$)
π	$\frac{3}{7}, -\frac{2}{3}, 0.(\overline{31})$
$\sqrt{2}$	اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$): -2
$\sqrt{7}$	اعداد حسابی ($\mathbb{W}$): -9
	اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$): $-15, 5, 1, 3, 12$
	-3

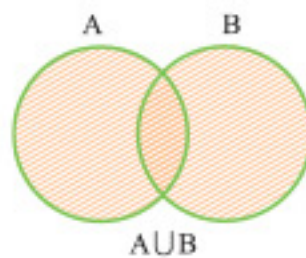
مهم: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است.

اشتراک دو مجموعه



اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو هر دو مجموعه A و B باشند. اشتراک دو مجموعه را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهند.

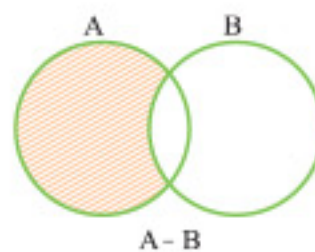
اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن، عضو مجموعه A یا مجموعه B یا عضو هر دوی آن‌ها باشند. اجتماع دو مجموعه را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهند.

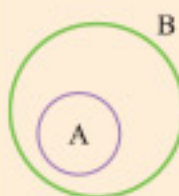
نکته: دو مجموعه A و B را جدا از هم گوئیم، هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد.

تفاضل دو مجموعه



مجموعه $A - B$ ، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

نکته: با توجه به نمودار مقابل، اگر $A \subseteq B$ باشد، نتایج زیر به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} A \subseteq B &\rightarrow A \cup B = B \\ A \subseteq B &\rightarrow A \cap B = A \\ A \subseteq B &\rightarrow A - B = \emptyset \end{aligned}$$

همین طور اگر هر یک از سه نتیجه برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم $A \subseteq B$.



۴۸. اگر A مجموعه شمارنده‌های مثبت عدد ۲۴ و B مجموعه مضارب مثبت عدد ۳ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- (الف) $A \cup B$ دارای ۸ عضو است. (ب) $A \cap B$ دارای ۴ عضو است. (پ) $A - B$ متناهی است. (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۹. کدام گزینه وجود ندارد؟

- (۱) مجموعه متناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد. (۲) دو مجموعه نامتناهی A و B که $A - B$ تک‌عضوی باشد. (۳) مجموعه نامتناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد. (۴) دو مجموعه نامتناهی که اشتراک آن‌ها نامتناهی باشد.

۵۰. کدام مجموعه زیر، متناهی است؟

- (۱) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ (۲) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ (۴) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۱. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- (۱) مجموعه مضرب‌های مثبت عدد ۳ (۲) مجموعه اعداد فرد و مضرب ۵

(۳) مجموعه اعداد اول فرد

(۴) مجموعه همه انسان‌ها از آغاز خلقت تاکنون

۵۲. اگر A یک زیرمجموعه متناهی و B یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه اعداد صحیح باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است. (۲) $B - A$ مجموعه‌ای نامتناهی است. (۳) $A - B'$ مجموعه‌ای متناهی است. (۴) $A' - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۵۳. مجموعه B متناهی و مجموعه‌های A و C نامتناهی‌اند. کدام یک از گزینه‌های زیر، حتماً نامتناهی است؟

- (۱) $A - (C - B)$ (۲) $B \cup (A - C)$ (۳) $A - (B - C)$ (۴) $(B \cap C) - A$

۵۴. اگر مجموعه A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، هریک از مجموعه‌های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$ به ترتیب از راست به چپ، از نظر متناهی بودن یا نبودن چگونه‌اند؟

- (۱) متناهی - متناهی (۲) نامتناهی - متناهی (۳) متناهی - نامتناهی (۴) نامتناهی - نامتناهی

۵۵. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه کدام مجموعه یقیناً مجموعه‌ای متناهی است؟

- (۱) $(B - A) \cap (A \cup B)$ (۲) $(A \cap B) \cup (A - B)$ (۳) $(A \cup B) \cap (A - B)$ (۴) $(B - A) \cup (A - B)$

متمم یک مجموعه

درس ۲

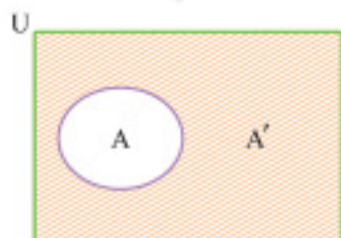
مجموعه مرجع



در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم؛ به عبارت دیگر A' شامل عضوایی از U است که در A نیستند.



مثال: اگر $A' = \{1, 2, 4\}$ و $B' = \{2, 3\}$ باشد و مجموعه مرجع، اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

- (۱) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۳) $\{4, 5, 6, \dots\}$ (۴) $\{5, 6, 7, \dots\}$

پاسخ

گزینه «۲» از آن جایی که $A' = \{1, 2, 4\}$ است، با توجه به مرجع بودن $\mathbb{N}$ داریم:

$$A = \{3, 5, 6, \dots\}, B = \{1, 4, 5, \dots\}$$

$$A \cap B = \{3, 5, 6, \dots\} \cap \{1, 4, 5, 6, \dots\} = \{5, 6, \dots\}$$

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4\}$$

و همین‌طور $(A \cap B)'$ برابر می‌شود با:





مثال: در مرحله پانزدهم از الگوی زیر، تعداد دایره‌های رنگی کدام است؟



مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

۷, ۱۱, ۱۵, ...

پاسخ گزینه «۴» اگر دایره‌های رنگی را بشماریم، می‌توان به اعداد مقابل دست یافت:

یعنی در هر مرحله، ۴ واحد به تعداد آن‌ها اضافه می‌شود؛ بنابراین برای رسیدن به پانزدهمین مرحله، ۱۴ بار عدد ۴ به عدد اول یعنی ۷ اضافه می‌گردد.

$$7 + (14 \times 4) = 7 + 56 = 63$$

- ۵۱ (۱)
- ۵۹ (۲)
- ۵۵ (۳)
- ۶۳ (۴)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۹۲. با توجه به الگوی زیر، در چندمین مرحله تعداد نقاط ۸۲ تا می‌شود؟



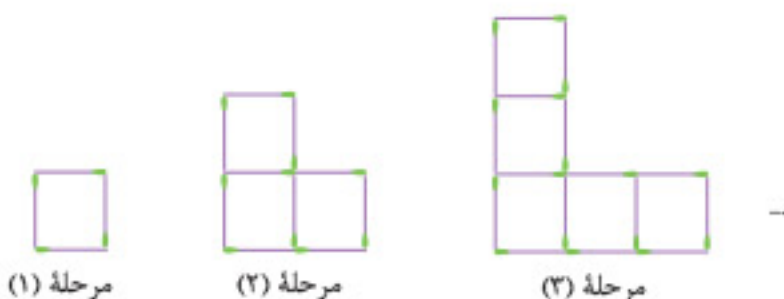
مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

- ۲۵ (۱)
- ۲۶ (۲)
- ۲۷ (۳)
- ۲۸ (۴)

۹۳. تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله دهم الگوی مقابل کدام است؟



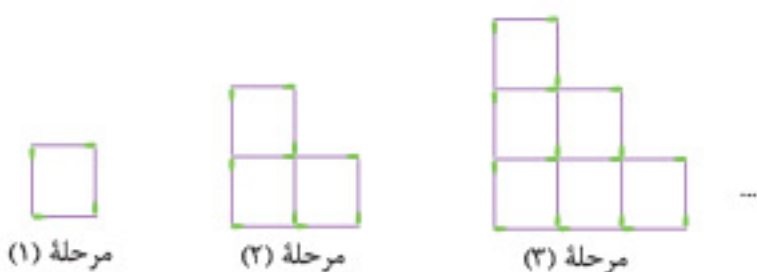
مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

- ۵۸ (۱)
- ۶۴ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۷۶ (۴)

۹۴. با تعدادی چوب‌کبریت مطابق الگوی زیر، اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده‌شده در مرحله هفتم کدام است؟



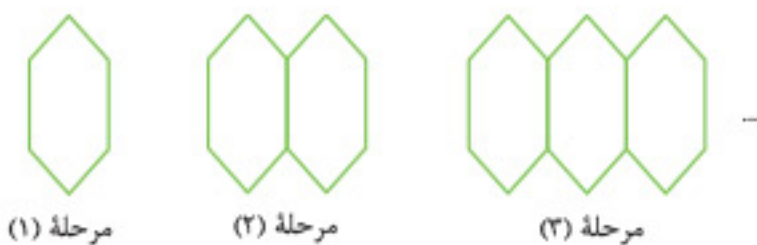
مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

- ۵۳ (۱)
- ۵۴ (۲)
- ۶۹ (۳)
- ۷۰ (۴)

۹۵. با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله دهم کدام است؟



مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

- ۵۰ (۱)
- ۵۱ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۶۱ (۴)

۹۶. با توجه به الگوی زیر، تعداد نقاط در مرحله دهم کدام است؟



مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

- ۱۲۱ (۲)
- ۱۴۴ (۴)

- ۱۰۰ (۱)
- ۸۱ (۳)

الگوهای مهم

الگوی خطی



به‌طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

در این الگوها، اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر هریب n است؛ مثلاً اختلاف دو جمله متوالی از دنباله $a_n = 3n - 1$ برابر ۳ است.



مثال: جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$ است. جمله هفدهم آن کدام است؟

۶/۸ (۴)

۵/۲ (۳)

۲/۶ (۲)

۱/۲ (۱)

پاسخ گزینه «۲»

$$a_{17} = \frac{3(17)+1}{(17)+3} = \frac{52}{20} = 2/6$$

دنباله بازگشتی

دنباله‌ای را که هر جمله آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی‌اش پیدا شود، دنباله بازگشتی می‌نامند. مشهورترین دنباله بازگشتی، دنباله فیبوناچی است که در آن دو جمله اول دنباله، یک هستند و از جمله سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می‌آید؛ یعنی:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

همچنین می‌توان فرمول آن را به صورت مقابل نوشت:

مثال: اگر جملات یک دنباله به صورت $a_{n+1} = 2a_n$ نوشته شود، در صورتی که $a_1 = 3$ باشد، چندمین جمله برابر ۱۹۲ می‌شود؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ گزینه «۳» این دنباله از جمله اول برابر ۳ شروع می‌شود و هر جمله، ۲ برابر جمله قبلی است. جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$$

همان‌طور که می‌بینید، جمله هفتم این دنباله برابر ۱۹۲ است.

مطالعه آزاد:



دنباله فیبوناچی: این اعداد به نام لئوناردو فیبوناچی ریاضی‌دان ایتالیایی نام‌گذاری شده است. وی نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است که بیشتر فعالیت‌هایش از آثار ریاضی‌دان‌های مسلمان به خصوص خوارزمی، کرجی و ابوکامل تأثیر پذیرفته است. در دوران حیات فیبوناچی مسابقات ریاضی در اروپا مرسوم بود. در یکی از همین مسابقات که در سال ۱۲۲۵ در شهر پیزا توسط امپراتور فردریک دوم برگزار شده بود، مسئله زیر مطرح شد:

«فرض کنیم خرگوش‌هایی وجود دارند که هر جفت (یک نر و ماده) از آن‌ها به سن یک ماهگی رسیده باشند. به ازای هر ماه که از زندگی‌شان سپری شود یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند. حال اگر فرض کنیم این خرگوش‌ها هرگز نمی‌میرند و در آغاز یک جفت از این نوع خرگوش در اختیار داشته باشیم که به تازگی متولد شده‌اند، حساب کنید پس از n ماه چند جفت از این نوع خرگوش خواهیم داشت.» اگر تعداد خرگوش‌ها را در ماه‌های اول، دوم و ... حساب کنیم، به دنباله فیبوناچی می‌رسیم. فیبوناچی با حل این مسئله و معرفی این دنباله به جهان که خواص شگفت‌انگیزی دارد، تأثیر زیادی بر ریاضی و حتی سایر علوم گذاشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱, -۸, ۲۷, -۶۴, ...

۱۲۷. جمله عمومی دنباله مقابل کدام است؟

 n^2 (۴) $(-1)^{n+1} n^2$ (۳) $(-1)^n n^2$ (۲) $-n^2$ (۱)۱۲۸. جمله چندم دنباله $a_n = 3n - 3$ با جمله هفتم دنباله $b_n = \frac{7n-1}{n+1}$ برابر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۲۹. حاصل ضرب ده جمله اول دنباله با جمله عمومی $t_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟ $-\frac{1}{11}$ (۴) $\frac{1}{11}$ (۳) $-\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۱)

• **روش دوم:** چون تعداد جملات درج شده فرد است، بنابراین جمله وسطی آن‌ها، همان جمله وسط دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{22}{3}$ است؛ بنابراین فقط کافی است میانگین این دو عدد را بیابیم.

$$x = \frac{\frac{22}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{24}{6} = \frac{4}{1} = 4$$

به همین راحتی!

💡 **نکته:** در هر دنباله حسابی، مجموع جملات متساوی الفاصله از طرفین با هم برابر هستند. اگر تعداد جملات فرد باشد، این مجموع‌ها دو برابر جمله وسطی هستند؛ برای نمونه به دنباله ۹ جمله‌ای زیر توجه کنید:

۱	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵	۲۹	۳۳
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
			$13 + 21 = 34$					
		$9 + 25 = 34$						
	$5 + 29 = 34$							
				$1 + 33 = 34$				

مجموع جملات متساوی الفاصله از طرفین مثلاً مجموع جمله‌های اول از راست و چپ یا مجموع جمله‌های دوم از راست و چپ و ... عدد ثابت ۳۴ می‌باشد که دو برابر جمله وسط یعنی ۱۷ است. این رابطه را به زبان ریاضی به صورت زیر بیان می‌کنند.

در دنباله حسابی اگر مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جمله دیگر برابر باشند، مجموع زوج جمله‌ها با هم برابرند؛ یعنی به شرط $m + n = p + q$ داریم:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

$$t_m + t_n = 2t_k$$

اگر مجموع اندیس‌های $m + n$ یا $p + q$ دو برابر اندیس k باشد، می‌توان نوشت:

$$t_1 + t_9 = t_2 + t_8 = 2t_5$$

در مثال مطرح شده داریم:

🍲 **مثال:** در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و یازدهم دنباله به ترتیب $2x - 3$ ، $3x + 6$ و $6x + 1$ هستند. حاصل جمع جملات پنجم و نهم دنباله کدام است؟

پاسخ گزینه «۲» از آن جایی که $3 + 11 = 2(7)$ ، بنابراین:

$$t_3 + t_{11} = 2t_7$$

$$(2x - 3) + (6x + 1) = 2(3x + 6) \Rightarrow 8x - 2 = 6x + 12 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین جملات سوم، هفتم و یازدهم به ترتیب ۱۱، ۲۷ و ۴۳ هستند.

از طرفی با توجه به این که $5 + 9 = 3 + 11$ ، بنابراین:

$$t_5 + t_9 = t_3 + t_{11}$$

$$\Rightarrow t_5 + t_9 = 11 + 43 \Rightarrow t_5 + t_9 = 54$$

💡 **نکته:** ۱ اگر به جملات یک دنباله حسابی، مقدار ثابت k واحد اضافه کنیم، دنباله حسابی جدیدی با همان قدرنسبت و جمله اول $t_1 + k$ تشکیل می‌گردد.

۲ اگر جملات یک دنباله حسابی در مقدار ثابت k (با شرط $k \neq 0$) ضرب شوند، دنباله حسابی جدیدی با قدرنسبت kd و جمله اول ka_1 تشکیل می‌شود.

🍲 **مثال:** یک دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 5 - 7n$ مفروض است. اگر به جمله اول و قدرنسبت، هر کدام سه واحد اضافه کنیم تا دنباله جدیدی به دست آید، جمله پنجم دنباله جدید کدام است؟

پاسخ گزینه «۲» جملات جدید را با t_n نمایش می‌دهیم. از آن جایی که جمله اول دنباله قدیم $(a_1 = 5 - 7)$ برابر -2 و قدرنسبت دنباله قدیم هم -7 یعنی ضریب n در فرمول $a_n = 5 - 7n$ است، جمله اول دنباله جدید $t_1 = -2 + 3 = 1$ و قدرنسبت آن $d = -7 + 3 = -4$ می‌شود، پس:

$$t_5 = t_1 + (5 - 1)d = 1 + 4(-4) = 1 - 16 = -15$$



(تجربی دی ۱۴۰۱)

۲۰۰. بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A = \{m^2 + n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}, 8^{-\frac{1}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{1}{2}n} > \frac{1}{128}\}$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴)

(ریاضی ۹۶)

۲۰۱. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد، مجموعه $(A_8 - A_7) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۲۰۲. اشتراک دو بازه $[-3, a]$ و $(b, 2]$ برابر $(-2, 2)$ است. حاصل $(-3, a) - (b, 2]$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (صفر) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۲۰۳. ۳۰۰ نفر در روز اول از یک بازارچه خیریه بازدید کردند. ۱۵۰ نفر تابلوی نقاشی، ۱۲۰ نفر گل و ۱۱۰ نفر گلدان خریدند. ۴۰ نفر گل و گلدان، ۵۰ نفر گل و تابلوی نقاشی، ۳۰ نفر گلدان و تابلوی نقاشی و ۱۰ نفر هر سه مورد را خریدند. چند نفر دقیقاً یکی از موارد تابلو، گلدان و گل را خریده‌اند؟

- ۱۷۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

۲۰۴. زوایای داخلی یک پنج‌ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر اندازه بزرگ‌ترین زاویه 120° باشد، حاصل جمع زاویه کوچک‌تر با زاویه وسط کدام است؟

- ۲۰۴ (۱) 202° (۲) 200° (۳) 198° (۴)

۲۰۵. دنباله‌های حسابی $\begin{cases} A: 1, 5, 9, \dots \\ B: 3, 10, 17, \dots \end{cases}$ چند عدد سه‌رقمی مشترک دارند؟

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴)

۲۰۶. اگر در یک دنباله حسابی غیرصفر، جمله نهم برابر صفر باشد، جملات اول، پنجم و n ام این دنباله حسابی تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. در این صورت n کدام است؟

- ۷ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴)

۲۰۷. بین جمله‌های چهارم و پنجم، از سه جمله a_7, a_4, a_8 یک دنباله هندسی صعودی چهار عدد به‌گونه‌ای درج کرده‌ایم که هفت عدد حاصل، تشکیل دنباله حسابی بدهند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴)

۲۰۸. جمله دوم، دو برابر جمله چهارم و جمله ششم از یک دنباله هندسی صعودی، سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- $q = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (۱) $q = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ (۲) $q = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ (۳) $q = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ (۴)

۲۰۹. دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن، عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۱)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۱۰. m و n دو عدد صحیح و $A = [2n - 1, m - 3]$ و $B = [2n + 1, m - 4]$ است. اگر تعداد اعداد صحیح در بازه $A - B$ برابر با تعداد اعداد صحیح در بازه $A \cap B$ باشد، چند عدد صحیح در بازه $[m - 6, 2n + 7]$ قرار دارد؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۱۱. اگر هر دو رابطه $3 \in [x - 1, 7 - x]$ و $x \in [-1, 1 - 4x]$ درست باشد، x چند عدد صحیح از بازه $[-2, 10]$ نمی‌تواند باشد؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۲۱۲. مجموع سه عدد که تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، برابر یک است. اگر واسطه حسابی دو عدد اول و آخر از واسطه هندسی آن‌ها $\frac{1}{5}$ بیشتر باشد، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ (همه جملات دنباله مثبت هستند.)

- $\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $3 \pm \sqrt{3}$ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴)

۲۱۳. بین دو عدد $6m-3$ و $20m+8$ تعداد ۱۰ واسطه حسابی قرار می‌دهیم. اگر نسبت هفتمین واسطه بر سومین واسطه برابر $\frac{14}{9}$ باشد، کدام گزینه در مورد m درست است؟ ($20m+8$ عدد آخر است.)

- (۱) مضرب ۳ (۲) مضرب ۵ (۳) عدد اول (۴) مربع کامل

۲۱۴. دنباله $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ تعریف شده است. اگر $\frac{1}{3} = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1}$ حاصل $m+n$ کدام است؟ ($m < n$)

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۲۱۵. اگر $((A \cap B') \cup [(A-B) \cup (B-A)])' = A$ ، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

- (۱) $A \cup B = \emptyset$ (۲) $U = A \cup B$ (۳) $A \cap B = \emptyset$ (۴) $U = A \cap B$

۲۱۶. اعداد صحیح فرد بزرگ‌تر از -3 طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است. تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو دسته هفتم کدام است؟

$\{-1\}, \{1, 3\}, \{5, 7, 9\}, \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27\}, \dots$

- (۱) ۴۷۸ (۲) ۴۸۰ (۳) ۴۸۲ (۴) ۴۸۴

آزمون پایانی فصل اول



۱. اگر $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} \leq x < 2^n\}$ باشد، در این صورت $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{4}, 1) \cup [2, 16)$ (۲) $[\frac{1}{4}, 1) \cup [2, 16)$
(۳) $[\frac{1}{4}, 1) \cup (2, 16)$ (۴) $[\frac{1}{4}, 1] \cup (2, 16)$

۲. اگر $A = \{a, \{a\}\}$ باشد، آن‌گاه کدام نادرست است؟

- (۱) $a \in A$ (۲) $\{a\} \subseteq A$ (۳) $\{a\} \in A$ (۴) $a \subseteq A$

۳. اگر $A, B \subseteq U$ و $A \cap B = B$ باشد، حاصل $[(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cup A']$ کدام است؟

- (۱) B (۲) A (۳) A' (۴) U

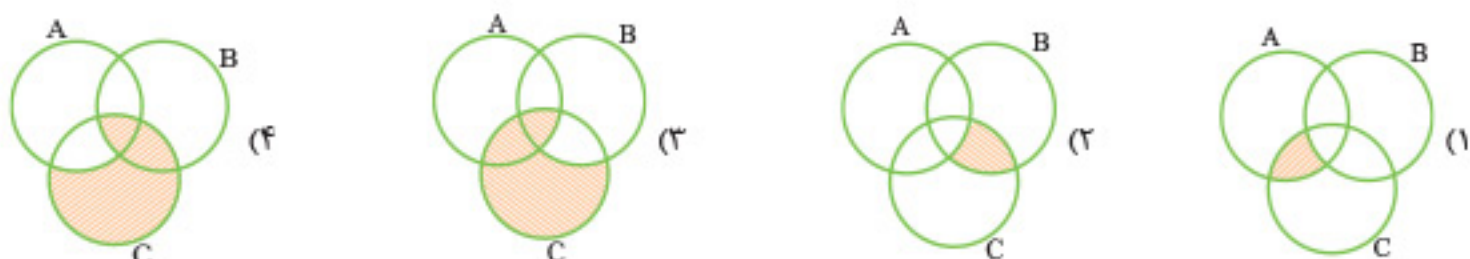
۴. کدام مجموعه نامتناهی است؟

- (۱) مجموعه همه الکترون‌های منظومه شمسی (۲) مجموعه درختان روی کره زمین
(۳) مجموعه اعداد گنگ در بازه $[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}]$ (۴) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان

۵. اگر $A \cap B$ نامتناهی و $A \cap C$ متناهی باشد، آن‌گاه لزوماً کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) $A \cap C'$ (۲) $B \cap C'$ (۳) C' (۴) $C \cap A'$

۶. نمودار $C - (A' \cup B)$ به کدام صورت است؟

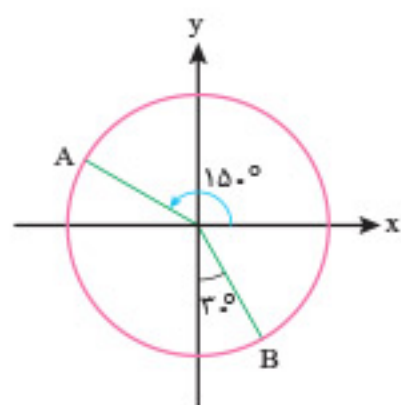


۷. در کلاسی ۳۰ نفر، ۷ نفر در درس ریاضی و ۴ نفر در درس فیزیک مردود شده‌اند. اگر ۱ نفر در هر دو درس مردود شده باشد، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

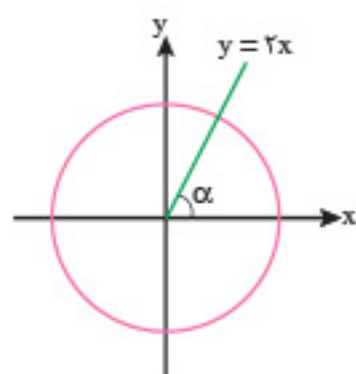
۸. تعداد اعداد طبیعی سه‌رقمی که مضرب ۳ باشند اما مضرب ۷ نباشند، کدام است؟

- (۱) ۱۸۲ (۲) ۱۸۳ (۳) ۲۵۷ (۴) ۲۵۸



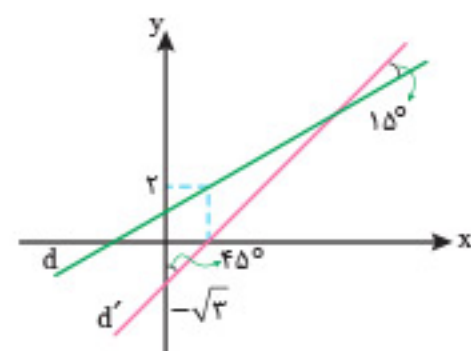
۲۷۶. در دایره مثلثاتی مقابل، شیب خط AB کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $-\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
(۴) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$



۲۷۷. با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $-\sqrt{3}$



۲۷۸. با توجه به شکل مقابل، عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

۲۷۹. خطی با معادله $(2k+3)x - (5-k)y - 78 = 0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 135° می‌سازد. مجموع مقادیر k، عرض از مبدأ و شیب در این خط کدام است؟

- (۱) -۱۵
(۲) -۱۲
(۳) ۸
(۴) ۱۱

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

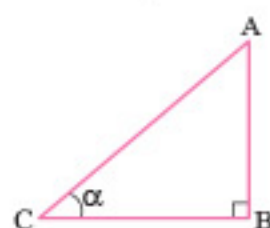
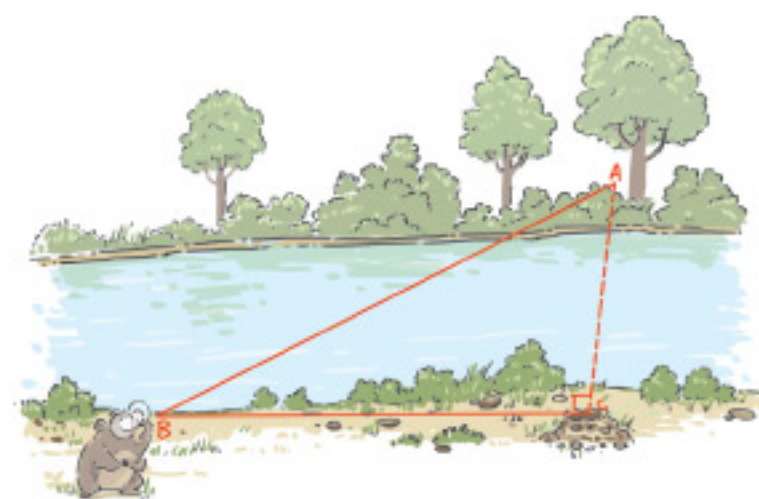
درس ۳

در این بخش می‌خواهیم روابطی را که بین نسبت‌های مثلثاتی وجود دارد بررسی کنیم.
اولین و مهم‌ترین رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی، رابطه زیر است:

اگر زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

اگر مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید:



$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{AB}{AC} \\ \cos \alpha = \frac{BC}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

سه درس اول این فصل مربوط می‌شه به رادیکال و ریشه! با ریشه‌های دوم و سوم قبلاً آشنا شدی، امسال یاد می‌گیری که ریشه n ام یه عدد چیه! متوجه میشی که چه اعدادی ریشه n ام دارن و کدوما ندارن! رابطه بین رادیکال‌ها برات دوره و تکمیل میشه.

درس چهارم هم اتحادها رو برات تکمیل می‌کنه. به اتحادهای قبلی، اتحادهای مکعب مجموع و تفاضل دو جمله و چاق‌ولاغر اضافه میشه. بعدش با تجزیه و گویا کردن مخرج کسرها رادیکالی آشنا میشی. روی هم رفته فصل کاربردی و مهمیه. به خصوص درس چهارمش که تقریباً همه جای ریاضی بهش نیاز پیدا می‌کنی!



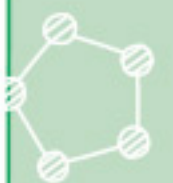


سؤالات امتحانی شبه نهایی - نوبت دوم			اردیبهشت ۱۴۰۳
درس: ریاضی ۱ (دهم)	رشته: ریاضی و فیزیک - علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ: ۱۴۰۳/۰۲/۰۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱	در هر یک از عبارتهای زیر، پاسخ صحیح را از بین پاسخهای داخل پرانتز انتخاب کنید و در پاسخنامه بنویسید. الف) مجموعه تهی، یک مجموعه است. (نامتناهی - متناهی) ب) جمله ششم الگوی ...، ۵، ۸، ۱۳، ۲۰ برابر است. (۳۶ - ۴۰) پ) واسطه هندسی بین دو عدد ۸ و ۱۸ برابر است. (۱۲ - ۱۳) ت) اگر $\sin \theta$ مثبت و $\cos \theta$ منفی باشد، زاویه θ در ربع دایره مثلثاتی قرار دارد. (دوم - چهارم) ث) اگر a و b دو عدد مثبت باشند، تساوی همواره درست است. ($\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ - $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$)	۱/۲۵
۲	در هر مورد، جای خالی را با یک کلمه یا عدد مناسب، کامل کنید. الف) طول بازه $(-۳, ۷)$ برابر است. ب) نمایش $\sqrt{(-۷)^2}$ را به صورت عدد صحیح می توان نوشت. پ) کسر $\frac{\sin ۳۸^\circ}{\cos ۳۸^\circ}$ برابر $\cot (\dots^\circ)$ است. ت) اگر α زاویه ای باشد که یک خط، با جهت مثبت محور افقی می سازد، آنگاه شیب خط برابر است. ث) برای عدد صفر، فاکتوریل به صورت $0! = \dots$ تعریف می شود.	۱/۲۵
۳	دنباله حسابی روبه رو را در نظر بگیرید. جمله پانزدهم این دنباله را به کمک جمله عمومی، به دست آورید.	۱
۴	در یک کلاس ۳۷ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه آموزشی و ۲۵ نفر عضو گروه فرهنگی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو گروه آموزشی و هم عضو گروه فرهنگی هستند.	۱
۵	مطابق شکل مقابل، یک بالن توسط دو طناب AB و AC، به زمین بسته شده است. اگر طول طناب AB برابر ۳۶ متر باشد، با توجه به شکل، ابتدا ارتفاع بالن را تعیین و سپس طول طناب AC را محاسبه کنید. ($\sin ۶۵^\circ \approx ۰.۹$)	۱/۵
۶	با فرض بامعنی بودن عبارت مقابل، حاصل آن را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۷	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.	۱
۸	مخرج کسر روبه رو را گویا کنید.	۱
۹	کسر $\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{x^2 - 4y^2}$ را تا حد امکان ساده کنید.	۱
۱۰	به کمک تشکیل معادله و حل آن، مسئله زیر را حل کنید. یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۲۰ سانتی متر، درون یک قاب با مساحت ۶۰۰ سانتی متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.	۱/۵
۱۱	نامعادله مقابل را به روش تعیین علامت حل کنید.	۱
۱۲	نمودار سهمی به معادله $y = 6x - x^2$ را رسم کنید.	۱
۱۳	الف) تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند، ولی همانی نباشد. ب) نمودار تابع f یک خط راست موازی محور x ها است و $f(5) = 4$. اگر نمودار تابع g نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، آنگاه حاصل $2f(9) - g(8)$ را محاسبه کنید. (دلیل خود را به طور کامل بنویسید)	۱/۲۵

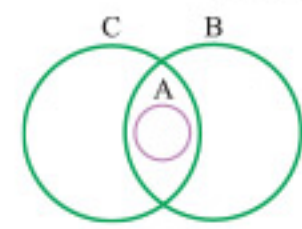
سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۴۸۷	۲	۵۲۹	۳	۵۷۱	۱	۶۱۳	۳	۶۵۵	۲	۶۹۷	۱
۴۸۸	۳	۵۳۰	۳	۵۷۲	۲	۶۱۴	۴	۶۵۶	۲	۶۹۸	۴
۴۸۹	۱	۵۳۱	۴	۵۷۳	۲	۶۱۵	۲	۶۵۷	۲	۶۹۹	۲
۴۹۰	۴	۵۳۲	۳	۵۷۴	۲	۶۱۶	۳	۶۵۸	۲	۷۰۰	۱
۴۹۱	۳	۵۳۳	۱	۵۷۵	۴	۶۱۷	۱	۶۵۹	۱	۷۰۱	۱
۴۹۲	۲	۵۳۴	۱	۵۷۶	۳	۶۱۸	۱	۶۶۰	۲	۷۰۲	۱
۴۹۳	۴	۵۳۵	۴	۵۷۷	۲	۶۱۹	۴	۶۶۱	۴	۷۰۳	۱
۴۹۴	۱	۵۳۶	۲	۵۷۸	۱	۶۲۰	۳	۶۶۲	۴	۷۰۴	۲
۴۹۵	۲	۵۳۷	۲	۵۷۹	۳	۶۲۱	۲	۶۶۳	۱	۷۰۵	۴
۴۹۶	۴	۵۳۸	۴	۵۸۰	۲	۶۲۲	۱	۶۶۴	۱	۷۰۶	۴
۴۹۷	۱	۵۳۹	۲	۵۸۱	۲	۶۲۳	۲	۶۶۵	۲	۷۰۷	۴
۴۹۸	۲	۵۴۰	۳	۵۸۲	۲	۶۲۴	۳	۶۶۶	۱	۷۰۸	۲
۴۹۹	۱	۵۴۱	۲	۵۸۳	۱	۶۲۵	۲	۶۶۷	۲	۷۰۹	۲
۵۰۰	۲	۵۴۲	۳	۵۸۴	۲	۶۲۶	۱	۶۶۸	۱	۷۱۰	۲
۵۰۱	۳	۵۴۳	۳	۵۸۵	۴	۶۲۷	۱	۶۶۹	۳	۷۱۱	۴
۵۰۲	۴	۵۴۴	۱	۵۸۶	۴	۶۲۸	۲	۶۷۰	۳	۷۱۲	۲
۵۰۳	۴	۵۴۵	۳	۵۸۷	۲	۶۲۹	۳	۶۷۱	۴	۷۱۳	۴
۵۰۴	۳	۵۴۶	۴	۵۸۸	۴	۶۳۰	۲	۶۷۲	۳	۷۱۴	۲
۵۰۵	۳	۵۴۷	۴	۵۸۹	۳	۶۳۱	۱	۶۷۳	۴	۷۱۵	۱
۵۰۶	۲	۵۴۸	۱	۵۹۰	۲	۶۳۲	۴	۶۷۴	۳	۷۱۶	۱
۵۰۷	۳	۵۴۹	۳	۵۹۱	۴	۶۳۳	۱	۶۷۵	۴	۷۱۷	۴
۵۰۸	۳	۵۵۰	۲	۵۹۲	۴	۶۳۴	۲	۶۷۶	۱	۷۱۸	۲
۵۰۹	۳	۵۵۱	۲	۵۹۳	۴	۶۳۵	۴	۶۷۷	۱	۷۱۹	۴
۵۱۰	۲	۵۵۲	۱	۵۹۴	۱	۶۳۶	۴	۶۷۸	۴	۷۲۰	۲
۵۱۱	۳	۵۵۳	۳	۵۹۵	۴	۶۳۷	۲	۶۷۹	۲	۷۲۱	۲
۵۱۲	۲	۵۵۴	۲	۵۹۶	۳	۶۳۸	۱	۶۸۰	۴	۷۲۲	۱
۵۱۳	۴	۵۵۵	۴	۵۹۷	۲	۶۳۹	۲	۶۸۱	۱	۷۲۳	۴
۵۱۴	۴	۵۵۶	۳	۵۹۸	۴	۶۴۰	۱	۶۸۲	۱	۷۲۴	۲
۵۱۵	۴	۵۵۷	۳	۵۹۹	۱	۶۴۱	۴	۶۸۳	۴	۷۲۵	۱
۵۱۶	۲	۵۵۸	۴	۶۰۰	۳	۶۴۲	۱	۶۸۴	۲	۷۲۶	۴
۵۱۷	۲	۵۵۹	۴	۶۰۱	۳	۶۴۳	۴	۶۸۵	۴	۷۲۷	۱
۵۱۸	۱	۵۶۰	۱	۶۰۲	۲	۶۴۴	۱	۶۸۶	۳	۷۲۸	۴
۵۱۹	۲	۵۶۱	۱	۶۰۳	۲	۶۴۵	۱	۶۸۷	۴	۷۲۹	۴
۵۲۰	۳	۵۶۲	۴	۶۰۴	۳	۶۴۶	۴	۶۸۸	۳	۷۳۰	۲
۵۲۱	۱	۵۶۳	۲	۶۰۵	۳	۶۴۷	۴	۶۸۹	۴	۷۳۱	۱
۵۲۲	۳	۵۶۴	۱	۶۰۶	۱	۶۴۸	۲	۶۹۰	۱	۷۳۲	۲
۵۲۳	۴	۵۶۵	۱	۶۰۷	۴	۶۴۹	۳	۶۹۱	۴	۷۳۳	۱
۵۲۴	۳	۵۶۶	۲	۶۰۸	۴	۶۵۰	۱	۶۹۲	۲	۷۳۴	۴
۵۲۵	۲	۵۶۷	۳	۶۰۹	۱	۶۵۱	۲	۶۹۳	۱	۷۳۵	۲
۵۲۶	۲	۵۶۸	۱	۶۱۰	۴	۶۵۲	۲	۶۹۴	۱	۷۳۶	۴
۵۲۷	۲	۵۶۹	۴	۶۱۱	۲	۶۵۳	۴	۶۹۵	۲	۷۳۷	۴
۵۲۸	۳	۵۷۰	۱	۶۱۲	۴	۶۵۴	۲	۶۹۶	۴	۷۳۸	۴

سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۹۹۱	۱	۱۰۳۳	۱	۱۰۷۵	۳	۱۱۱۷	۳	۱۱۵۹	۲	۱۲۰۱	۱
۹۹۲	۴	۱۰۳۴	۱	۱۰۷۶	۲	۱۱۱۸	۱	۱۱۶۰	۳	۱۲۰۲	۴
۹۹۳	۲	۱۰۳۵	۲	۱۰۷۷	۲	۱۱۱۹	۳	۱۱۶۱	۳	۱۲۰۳	۴
۹۹۴	۳	۱۰۳۶	۱	۱۰۷۸	۲	۱۱۲۰	۲	۱۱۶۲	۴	۱۲۰۴	۱
۹۹۵	۲	۱۰۳۷	۳	۱۰۷۹	۳	۱۱۲۱	۴	۱۱۶۳	۴	۱۲۰۵	۲
۹۹۶	۲	۱۰۳۸	۴	۱۰۸۰	۴	۱۱۲۲	۲	۱۱۶۴	۲	۱۲۰۶	۴
۹۹۷	۱	۱۰۳۹	۲	۱۰۸۱	۲	۱۱۲۳	۲	۱۱۶۵	۲	۱۲۰۷	۴
۹۹۸	۲	۱۰۴۰	۳	۱۰۸۲	۲	۱۱۲۴	۱	۱۱۶۶	۴	۱۲۰۸	۴
۹۹۹	۲	۱۰۴۱	۱	۱۰۸۳	۳	۱۱۲۵	۳	۱۱۶۷	۳	۱۲۰۹	۱
۱۰۰۰	۱	۱۰۴۲	۳	۱۰۸۴	۱	۱۱۲۶	۱	۱۱۶۸	۲	۱۲۱۰	۴
۱۰۰۱	۳	۱۰۴۳	۱	۱۰۸۵	۴	۱۱۲۷	۴	۱۱۶۹	۴	۱۲۱۱	۲
۱۰۰۲	۱	۱۰۴۴	۲	۱۰۸۶	۴	۱۱۲۸	۱	۱۱۷۰	۱	۱۲۱۲	۱
۱۰۰۳	۲	۱۰۴۵	۴	۱۰۸۷	۳	۱۱۲۹	۳	۱۱۷۱	۱	۱۲۱۳	۴
۱۰۰۴	۱	۱۰۴۶	۴	۱۰۸۸	۲	۱۱۳۰	۴	۱۱۷۲	۳	۱۲۱۴	۲
۱۰۰۵	۲	۱۰۴۷	۲	۱۰۸۹	۴	۱۱۳۱	۴	۱۱۷۳	۴	۱۲۱۵	۲
۱۰۰۶	۲	۱۰۴۸	۳	۱۰۹۰	۴	۱۱۳۲	۴	۱۱۷۴	۳	۱۲۱۶	۴
۱۰۰۷	۱	۱۰۴۹	۴	۱۰۹۱	۲	۱۱۳۳	۳	۱۱۷۵	۲	۱۲۱۷	۱
۱۰۰۸	۴	۱۰۵۰	۳	۱۰۹۲	۲	۱۱۳۴	۲	۱۱۷۶	۱	۱۲۱۸	۲
۱۰۰۹	۴	۱۰۵۱	۳	۱۰۹۳	۳	۱۱۳۵	۱	۱۱۷۷	۴	۱۲۱۹	۴
۱۰۱۰	۳	۱۰۵۲	۴	۱۰۹۴	۳	۱۱۳۶	۲	۱۱۷۸	۲	۱۲۲۰	۴
۱۰۱۱	۳	۱۰۵۳	۳	۱۰۹۵	۲	۱۱۳۷	۲	۱۱۷۹	۴	۱۲۲۱	۱
۱۰۱۲	۳	۱۰۵۴	۴	۱۰۹۶	۲	۱۱۳۸	۳	۱۱۸۰	۱	۱۲۲۲	۱
۱۰۱۳	۱	۱۰۵۵	۱	۱۰۹۷	۲	۱۱۳۹	۲	۱۱۸۱	۱	۱۲۲۳	۱
۱۰۱۴	۴	۱۰۵۶	۲	۱۰۹۸	۲	۱۱۴۰	۲	۱۱۸۲	۳	۱۲۲۴	۴
۱۰۱۵	۴	۱۰۵۷	۳	۱۰۹۹	۲	۱۱۴۱	۱	۱۱۸۳	۴	۱۲۲۵	۴
۱۰۱۶	۲	۱۰۵۸	۳	۱۱۰۰	۱	۱۱۴۲	۲	۱۱۸۴	۲	۱۲۲۶	۲
۱۰۱۷	۴	۱۰۵۹	۳	۱۱۰۱	۲	۱۱۴۳	۲	۱۱۸۵	۳	۱۲۲۷	۴
۱۰۱۸	۲	۱۰۶۰	۲	۱۱۰۲	۱	۱۱۴۴	۱	۱۱۸۶	۳	۱۲۲۸	۲
۱۰۱۹	۱	۱۰۶۱	۱	۱۱۰۳	۲	۱۱۴۵	۲	۱۱۸۷	۲	۱۲۲۹	۴
۱۰۲۰	۴	۱۰۶۲	۴	۱۱۰۴	۱	۱۱۴۶	۲	۱۱۸۸	۱	۱۲۳۰	۴
۱۰۲۱	۴	۱۰۶۳	۴	۱۱۰۵	۳	۱۱۴۷	۴	۱۱۸۹	۳	۱۲۳۱	۴
۱۰۲۲	۲	۱۰۶۴	۲	۱۱۰۶	۳	۱۱۴۸	۳	۱۱۹۰	۳	۱۲۳۲	۴
۱۰۲۳	۳	۱۰۶۵	۳	۱۱۰۷	۳	۱۱۴۹	۱	۱۱۹۱	۴	۱۲۳۳	۲
۱۰۲۴	۲	۱۰۶۶	۳	۱۱۰۸	۱	۱۱۵۰	۳	۱۱۹۲	۲	۱۲۳۴	۲
۱۰۲۵	۳	۱۰۶۷	۱	۱۱۰۹	۳	۱۱۵۱	۳	۱۱۹۳	۱	۱۲۳۵	۱
۱۰۲۶	۱	۱۰۶۸	۴	۱۱۱۰	۱	۱۱۵۲	۳	۱۱۹۴	۲	۱۲۳۶	۴
۱۰۲۷	۳	۱۰۶۹	۲	۱۱۱۱	۴	۱۱۵۳	۴	۱۱۹۵	۱	۱۲۳۷	۲
۱۰۲۸	۴	۱۰۷۰	۲	۱۱۱۲	۲	۱۱۵۴	۳	۱۱۹۶	۱	۱۲۳۸	۲
۱۰۲۹	۲	۱۰۷۱	۳	۱۱۱۳	۳	۱۱۵۵	۲	۱۱۹۷	۳	۱۲۳۹	۱
۱۰۳۰	۴	۱۰۷۲	۳	۱۱۱۴	۱	۱۱۵۶	۴	۱۱۹۸	۴	۱۲۴۰	۴
۱۰۳۱	۴	۱۰۷۳	۱	۱۱۱۵	۳	۱۱۵۷	۳	۱۱۹۹	۳	۱۲۴۱	۴
۱۰۳۲	۲	۱۰۷۴	۴	۱۱۱۶	۱	۱۱۵۸	۴	۱۲۰۰	۴	۱۲۴۲	۴

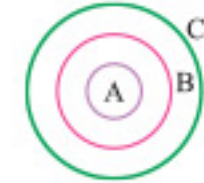
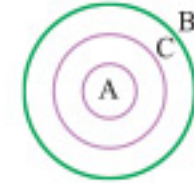


۱۶. گزینه ۴ چون $A - B = \emptyset$ پس $A \subseteq B$ است و چون $A - C = \emptyset$ پس $A \subseteq C$ است، یعنی A همزمان، زیرمجموعه B و C است. این اتفاق در ۴ حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

• حالت اول: $A = B = C$ باشد. • حالت دوم: A در قسمت اشتراک B و C باشد.



• حالت سوم: $A \subseteq B \subseteq C$ باشد. • حالت چهارم: $A \subseteq C \subseteq B$ باشد.



در تمام این حالات، تنها گزینه‌ای که همواره صحیح است، گزینه «۴» است، یعنی $B \cap C \neq \emptyset$ است. ۱۷. گزینه ۴

راهنما:

۱ در جبر مجموعه‌ها، معمولاً رابطه‌ها دوطرفه نیستند، یعنی از $A = B$ می‌توان نتیجه گرفت $A \cap C = B \cap C$ ولی برعکس آن می‌تواند برقرار نباشد، یعنی از $A \cap C = B \cap C$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A = B$ است. ۲ از $A = B$ می‌توان نتیجه گرفت $A - C = B - C$ ولی برعکس آن درست نیست، یعنی نمی‌توان از $A - C = B - C$ نتیجه گرفت $A = B$ است. ۳ از $A \subseteq B$ می‌توان نتیجه گرفت $A \cap C \subseteq B \cap C$ ولی برعکس آن درست نیست یعنی نمی‌توان از $A \cap C \subseteq B \cap C$ نتیجه گرفت $A \subseteq B$ است.

در این سؤال نمی‌توان از $A \cap C \subseteq A \cap B$ نتیجه گرفت $C \subseteq B$ است. برای بررسی غلط بودن این رابطه کافی است یک مثال بزنیم. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 9\}$ و $C = \{2, 7\}$ باشد. می‌بینید که:
$$\left. \begin{matrix} A \cap C = \{2\} \\ A \cap B = \{1, 2\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cap C \subseteq A \cap B$$
 ولی همان‌طور که می‌بینید $C \subseteq B$ نیست. با همین مثال می‌توان فهمید که فقط گزینه «۴» برقرار است.

۱۸. گزینه ۲ با توجه به موضوع اشاره‌شده در راهنما سؤال قبل می‌توان گفت قسمت «الف» و «پ» درست هستند ولی قسمت‌های «ب» و «ت» درست نیستند، یعنی در مورد $A - B = \emptyset$ نمی‌توان قطعاً گفت $A = B$ است چرا که مثلاً ممکن است $A \subseteq B$ باشد. همین‌طور از این که بخش مشترک A و B با بخش مشترک A و C برابر است نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$ است.

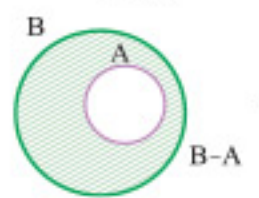
نکته: نمی‌توان از طرفین یک تساوی چیزی را خط زد، یعنی: $A \cap C = A \cap B \nRightarrow C = B$

۱۹. گزینه ۲ اولاً چون $A \subseteq B$ است، پس $A \cap B = A$ و قطعاً $A - B = \emptyset$ است.

حال حاصل $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset \cup (B - A)$ برابر $B - A$ است. یعنی به‌طور کلی می‌توان گفت:

$$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = (B - A) \cup A$$

نمودار $B - A$ را رسم می‌کنیم. اگر به این هاشورها مجموعه A را بیفزاییم، مجموعه B حاصل می‌شود.

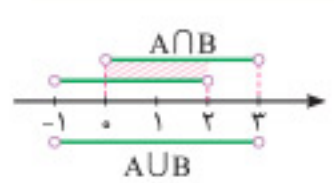


۲۰. گزینه ۱ از آن جایی که اجتماع $B - A$ با A برابر مجموعه A شده است؛ بنابراین $B - A$ باید زیرمجموعه A باشد و این امکان‌پذیر نیست مگر این که B زیرمجموعه A باشد، پس $B - A$ برابر تهی است.

۲۱. گزینه ۱ دقت کنید که $A - B \subseteq A$ است، پس $(A - B) - A = \emptyset$ می‌شود. همین‌طور می‌توان گفت $A \cap B \subseteq A$ است، پس $(A \cap B) - A = \emptyset$ می‌شود؛ بنابراین اجتماع دو مجموعه تهی برابر تهی است.

نکته: همواره اشتراک یا تفاضل یک مجموعه با هر مجموعه دلخواه، زیرمجموعه خودش است، یعنی: $A \cap X \subseteq A$ و $A - X \subseteq A$ (X هر مجموعه دلخواه است.)

۲۲. گزینه ۲ ابتدا اجتماع و اشتراک دو مجموعه را می‌یابیم. برای این کار بهتر است به نمودار محور طول‌ها بپردازیم.



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}, A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$$

حال کافی است اشتراک را از اجتماع کم کنیم:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ یا } 2 \leq x < 3\}$$

۲۳. گزینه ۱ با توجه به تعریف A_n ، مجموعه‌های $A_4, A_5, \dots, A_8$ را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A_4 &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\} & A_5 &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}\} \\ A_6 &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\} & A_7 &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{7} < x < \frac{5}{7}\} \\ A_8 &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\} \end{aligned}$$

برای پیدا کردن اشتراک مجموعه‌های بالا باید از بین نقاط ابتدایی بازه‌ها $(-\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{4})$ بزرگ‌ترین مقدار و از بین نقاط انتهایی بازه‌ها $(\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4})$ کمترین مقدار را انتخاب کرد.

$$A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

۲۴. گزینه ۱ مجموعه $\{-3, -1\}$ تنها شامل دو عضو -3 و -1 است. بنابراین عدد -2 در این مجموعه قرار ندارد.



فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

بازه‌ها

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه و $a < b$ باشد:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز

الگوهای مهم

• **الگوی خطی:** $t_n = an + b$ (اعدادی دلخواه) در این الگوها اختلاف هر دو جمله متوالی ثابت بوده و برابر a است.

• **الگوی مربعی:** $t_n = n^2$



• **الگوی مثلثی:** $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$



این رابطه همان مجموع اعداد از ۱ تا n نیز هست.

• **الگوی درجه ۲:**

$t_n = an^2 + bn + c$ (اعدادی دلخواه و $a \neq 0$)

در این الگوها اختلاف جملات متوالی، خود تشکیل الگوی خطی می‌دهند که اختلاف جملات این الگوی خطی برابر مقدار ثابت $2a$ است.



$$t_n = 4n^2 - 1$$

جملات دنباله درجه ۲: ۳، ۱۵، ۲۵، ۶۳، ۹۹، ...

جملات الگوی خطی: $+12, +20, +28, +36, \dots$
 $2a = +8$ (با $a = +4$)

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله به جز جمله اول با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید.

به این عدد ثابت قدرنسبت می‌گوییم و با d نمایش می‌دهیم.

جمله n ام (جمله عمومی) دنباله حسابی به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

جمله اول

مجموعه‌های اعداد

اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

اعدادی که گویا نباشند $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$: اعداد گنگ

(همه اعداد): $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ اعداد حقیقی

• ارتباط بین مجموعه‌ها

$$\begin{cases} \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

مجموعه تهی: مجموعه بدون عضو است. نماد: $\emptyset$ یا $\{\}$

مجموعه مرجع: همه مجموعه‌ها زیرمجموعه آن هستند. نماد: U یا M

عضو بودن: اگر a عضو مجموعه A باشد، از نماد $a \in A$ و اگر b عضو مجموعه B نباشد، از نماد $b \notin B$ استفاده می‌کنیم.

زیرمجموعه: همه اعضای A عضو مجموعه B باشند، آن‌گاه $A \subseteq B$ است.

زیرمجموعه B است. نماد: $A \subseteq B$

$D \not\subseteq E$ نیست. نماد: $D \not\subseteq E$

• ویژگی‌های زیرمجموعه

۱ هر مجموعه زیرمجموعه خودش است: $A \subseteq A$

۲ مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست: $\emptyset \subseteq A$

۳ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن‌گاه $A \subseteq C$

۴ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آن‌گاه $A = B$

۵ اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد همه زیرمجموعه‌ها برابر 2^n است.

• مجموعه متناهی: مجموعه‌ای با تعداد اعضای قابل شمارش.

• مجموعه نامتناهی: مجموعه‌ای با تعداد اعضای غیرقابل شمارش.

• تعداد عضوهای یک مجموعه: تعداد اعضای مجموعه A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

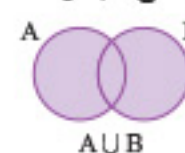
فرمول‌های مهم: A و B دو زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرجع هستند.

۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

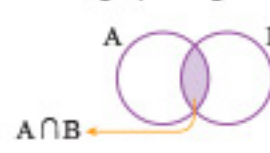
۲ $n(A') = n(U) - n(A)$

جبر مجموعه‌ها

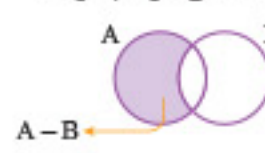
اجتماع مجموعه‌ها:



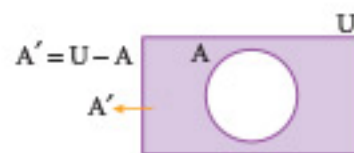
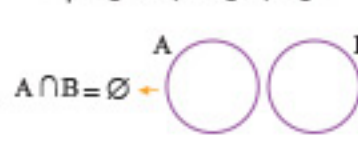
اشتراک مجموعه‌ها:



تفاضل دو مجموعه:



دو مجموعه جدا از هم:



متمم یک مجموعه:

