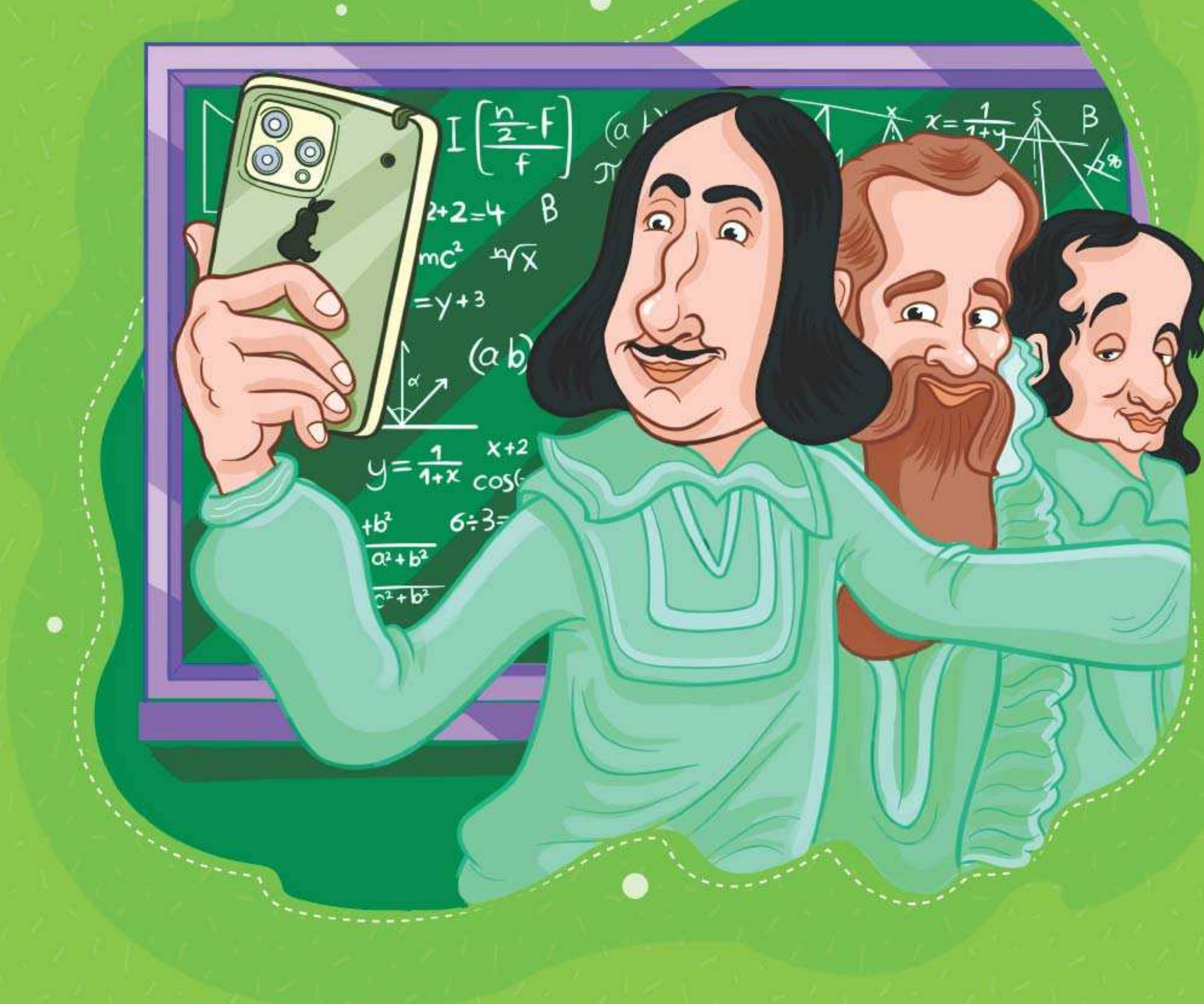
فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

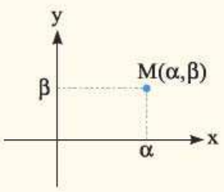
- درس اول: هندسهٔ تحلیلی
- درس دوم: معادلهٔ درجه دوم
- درس سوم: تابع درجه دوم
- درس چهارم: معادلات گویا و گنگ



درس اول: هندسهٔ تحلیلی

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۱ تا ۳

مفاهیم اولیهٔ نقطه



در زمان‌های قدیم، ریاضی‌دانی به نام دکارت در خارج می‌زیست. او دو محور مختلف را بر هم عمود کرد و نتیجهٔ کارش ایجاد یک دستگاه به نام دستگاه مختصات دو بعدی یا همان دستگاه دکارتی شد. در این دستگاه محورهای افقی و عمودی را به ترتیب محور xها و yها می‌نامیم. این را هم بلد باشید که هر نقطه روی این دستگاه به‌صورت $M(\alpha,\beta)$ نمایش داده می‌شود. شکل مقابل را ببینید:

همان‌طور که از روی شکل زیر دیده می‌شود، دستگاه مختصات دارای چهار ناحیه (ربع) است و علامت x و y در هر ناحیه به‌صورت زیر می‌باشد:

مثلاً نقطهٔ $A(2,-3)$ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد. همچنین محل برخورد دو محور، نقطهٔ $O(0,0)$ است که به آن مبدأ مختصات می‌گوییم.

تذکر: هر نقطه روی محورxها مختصاتش به‌صورت $A(x,0)$ و هر نقطه روی محور yها به‌صورت $B(0,y)$ می‌باشد (*قبوله؟*).

تست آموزشی اگر نقاط $A(2\alpha+1,\beta-1)$ و $B(\alpha+2,2\beta)$ به‌ترتیب روی محور xها و yها باشند، نقطهٔ $C(\alpha,-\beta)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ گزینه ۳ نقطهٔ A روی محور xها است، پس y آن صفر و همچنین نقطهٔ B روی محور yها است، در نتیجه x آن صفر می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\beta-1=0 \Rightarrow \beta=1 \quad , \quad \alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-2$$

خلاصه اینکه نقطهٔ $C(\alpha,-\beta)$ به‌صورت $C(-2,-1)$ در می‌آید که به‌وضوح این نقطه در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد.

تست آموزشی نقطهٔ $A(m^2+2m,-m+1)$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد. حدود m کدام است؟

۱) $0<m<1$ ۲) $-2<m<0$ ۳) $m<1$ ۴) $m>-2$

پاسخ گزینه ۲ شرط آنکه یک نقطه در ناحیهٔ دوم باشد این است که طولش منفی و عرضش مثبت باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} m^2+2m<0 \Rightarrow m(m+2)<0 \\ -m+1>0 \Rightarrow m<1 \quad (2) \end{cases} ; \quad \begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\ \hline m^2+2m & & + & | & - & | & + & \end{array} \Rightarrow -2<m<0 \ (1)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از دو محدودهٔ (۱) و (۲)، حدود m به‌صورت $-2<m<0$ به‌دست می‌آید.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴ تا ۲۴

مفاهیم اولیهٔ خط

اقلیدس می‌گفت از هر دو نقطهٔ متمایز فقط یک خط می‌گذرد. معادلهٔ خط یک رابطه بین x و y است. همچنین اگر نقطهٔ A روی خطی قرار داشته باشد، مختصات طول و عرض آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند. برای مثال نقطهٔ $A(2,6)$ روی خط $y=3x$ قرار دارد ولی این نقطه روی خط $y=x+5$ قرار ندارد. ببینید:

$$y=3x \xrightarrow{A(2,6)} 6=3(2) \ ✓ \quad , \quad y=x+5 \xrightarrow{A(2,6)} 6=2+5 \ ✗$$

مثال آموزشی نقطهٔ $A(2,-4)$ روی خط $y=\frac{x}{a}+2a+1$ قرار دارد. a را پیدا کنید.

پاسخ اگر نقطهٔ $A(2,-4)$ بخواهد روی خط $y=\frac{x}{a}+2a+1$ قرار داشته باشد، باید مختصات طول و عرض روی خط صدق کند، پس می‌توان نوشت:

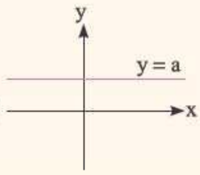
$$y=\frac{x}{a}+2a+1 \xrightarrow{\text{روی خط است } A(2,-4)} -4=\frac{2}{a}+2a+1 \Rightarrow \frac{2}{a}+2a+5=0$$

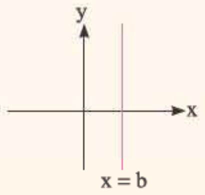
$$\xrightarrow{\times a} 2+2a^2+5a=0 \Rightarrow 2a^2+5a+2=0 \ ; \ \Delta=(5)^2-4(2)(2)=25-16=9 \Rightarrow \begin{cases} a_1=\frac{-5+3}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \\ a_2=\frac{-5-3}{4}=\frac{-8}{4}=-2 \end{cases}$$

هر خط از سه عنصر مهم شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ تشکیل شده است که هر کدام را به‌طور مفصل خدمتتان عرض می‌کنیم:

شیب خط و روش‌های پیدا کردن آن

خط‌هایی که نمودارشان به‌صورت  است، شیب‌شان مثبت و خط‌هایی که نمودارشان به‌صورت  می‌باشد، شیب‌شان منفی است. همچنین دو حالت خاص $y=a$ و $x=b$ را هم بلد باشید:





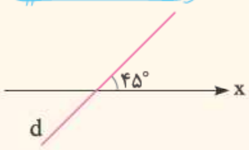
دقت داشته باشید که شیب خط افقی $y=a$ برابر صفر و شیب خط عمودی $x=b$ تعریف نشده (∞) است. *(جانِ من یادتون نره که معادلهٔ خط‌های افقی* $y=$ ◯ *و معادلهٔ خط‌های عمودی* $x=$ ◯ *هستن.)*

شیب خط از یکی از دو حالت زیر به‌دست می‌آید:

حالت اول (به‌کمک دو نقطه): اگر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، شیب خطی که از این دو نقطه می‌گذرد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

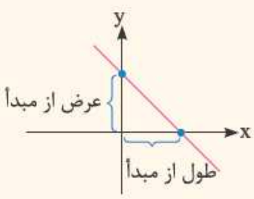
$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حالت دوم (به‌کمک تانژانت زاویهٔ θ): شیب هر خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. برای مثال در شکل مقابل شیب خط d برابر $\tan(45^\circ)=1$ است:



عرض از مبدأ و طول از مبدأ

نقطهٔ برخورد خط با محور yها را عرض از مبدأ و نقطهٔ برخورد آن با محور xها را طول از مبدأ می‌نامیم. برای درک بهتر، شکل مقابل را ببینید:

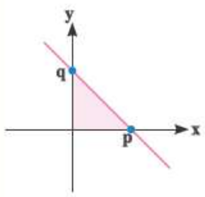


به زبان ساده‌تر اینکه برای پیدا کردن عرض از مبدأ یک خط به‌جای x آن، صفر و برای پیدا کردن طول از مبدأ یک خط به‌جای y آن، صفر قرار می‌دهیم *(قبوله؟)*.

نکته

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط به‌ترتیب p و q باشند، معادلهٔ خط و مساحت مثلث ایجاد شده با محورهای مختصات، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

معادلهٔ خط: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ ، مساحت: $S=\frac{1}{2}|p\times q|$

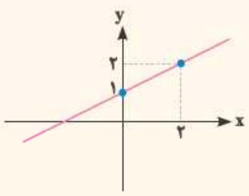


برای مثال معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن ۴ و عرض از مبدأ آن ۳ است به‌صورت $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ می‌باشد.

تذکر: برای کشیدن نمودار هر خط، تنها کافی است که دو نقطه از آن خط را داشته باشیم و آن‌ها را به‌هم وصل کنیم. برای مثال نمودار خط $y=\frac{x}{2}+1$ به‌صورت مقابل رسم می‌شود:

$y=\frac{x}{2}+1$ ؛

x	۰	۲
y	۱	۲



معادلهٔ خط

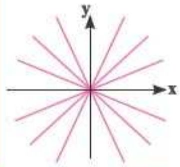
مواد لازم برای نوشتن معادلهٔ هر خط، داشتن شیب و یک نقطه از آن خط است. اگر شیب خط برابر m و مختصات یک نقطه از خط به‌صورت $A(x_1, y_1)$ باشد، معادلهٔ خط از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

نکته

بلد باشید که معادلهٔ خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به‌صورت $y=mx$ می‌باشد. دلیلش هم این است که عرض از مبدأ این خطوط مساوی صفر است.

و در آخر کسی هست که ندونه $y=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم و $y=-x$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است؟



تذکر: برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، آن‌ها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل این دستگاه دو معادله دو مجهول، نقطهٔ تلاقی دو خط را پیدا می‌کنیم.

مثال آموزشی نقطهٔ تلاقی دو خط $2x+y=1$ و $4x+y-5=0$ را به‌دست آورید.

پاسخ برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، دستگاه شامل این دو معادله را تشکیل می‌دهیم و از آن x و y را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{cases}2x+y=1\\4x+y=5\end{cases}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{cases}-2x-\cancel{y}=-1\\4x+\cancel{y}=5\end{cases}\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow y=-3$$

پس نقطهٔ تلاقی این دو خط، نقطهٔ $A(2,-3)$ است.

تست آموزشی اگر نقطهٔ $A(2,-2)$ روی خط $y-ax+4=0$ قرار داشته باشد، مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) -8 ۴) -10

پاسخ گزینه ۱ با توجه به این‌که نقطهٔ $A(2,-2)$ روی خط $y-ax+4=0$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرضش روی این خط صدق می‌کند، یعنی:

$$y-ax+4=0\xrightarrow{\text{روی خط قرار دارد } A(2,-2)}-2-2a+4=0\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$$

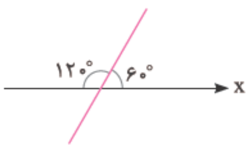
پس معادلهٔ خط به‌صورت $y-x+4=0$ است و همچنین مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\begin{cases}\text{عرض از مبدأ}: x=0\Rightarrow y=-4\\\text{طول از مبدأ}: y=0\Rightarrow x=4\end{cases}\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}+\text{طول از مبدأ}=-4+(4)=0$$

تست آموزشی عرض از مبدأ خطی که با جهت منفی محور xها زاویهٔ 120° می‌سازد و از نقطهٔ $(4,1)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}-1$ ۲) $4\sqrt{3}+1$ ۳) $-4\sqrt{3}+1$ ۴) $-4\sqrt{3}-1$

پاسخ گزینه ۳ وقتی یک خط با جهت منفی محور xها زاویهٔ 120° می‌سازد، زاویه‌اش با جهت مثبت محور xها 60° است و در نتیجه شیب این خط مساوی با $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ می‌باشد. از طرفی با توجه به این‌که این خط از نقطهٔ $(4,1)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:



$$y-1=\sqrt{3}(x-4)$$

در آخر برای پیدا کردن عرض از مبدأ این خط به‌جای x آن صفر می‌گذاریم، پس می‌توان نوشت:

$$x=0: y-1=\sqrt{3}(0-4)\Rightarrow y=-4\sqrt{3}+1$$

تست آموزشی خطی که از نقطهٔ تقاطع دو خط $y=2x+3$ و $2y-x+9=0$ و نقطهٔ $A(1,1)$ می‌گذرد، با محورهای مختصات چه مساحتی ایجاد می‌کند؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ گزینه ۱ اول از همه نقطهٔ تلاقی دو خط داده شده را به کمک حل دستگاه دو معادله دو مجهول پیدا می‌کنیم، ببینید:

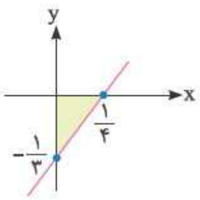
$$\begin{cases}y-2x=3\\2y-x=-9\end{cases}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{cases}-\cancel{2y}+4x=-6\\\cancel{2y}-x=-9\end{cases}\Rightarrow 3x=-15\Rightarrow x=-5\Rightarrow y=-7$$

در واقع نقطهٔ تلاقی این دو خط به‌صورت $B(-5,-7)$ است. حالا با توجه به **این‌که خط موردنظر از نقاط $A(1,1)$ و $B(-5,-7)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر** است:

$$m=\frac{-7-1}{-5-1}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}\text{ ؛ معادلهٔ خط: } y-1=\frac{4}{3}(x-1)\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

حالا برای پیدا کردن مساحتی که این خط با محورهای مختصات می‌سازد، نمودارش را می‌کشیم، ببینید:

$$y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۱}{۳}\ ;\quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & \frac{۱}{۴} \\ \hline y & \frac{-۱}{۳} & ۰ \end{array}$$



در نتیجه مساحت مثلث ایجادشده برابر با $S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$ است.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۲۵ تا ۴۴

فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم

به‌طور کلی معادلهٔ هر خط به یکی از دو حالت $y=mx+h$ یا $ax+by+c=۰$ است که ویژگی‌های هر کدام را به‌طور مفصل بررسی می‌کنیم:

حالت اول $(y=mx+h)$: این فرم، استاندارد نامیده می‌شود. در این حالت m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است. برای پیدا کردن طول از مبدأ y را صفر می‌گذاریم، یعنی $x=\frac{-h}{m}$.

حالت دوم $(ax+by+c=۰)$: این فرم، گسترده نامیده می‌شود. در این حالت، شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{طول از مبدأ}=\frac{-c}{a}\ ,\quad \text{عرض از مبدأ}=\frac{-c}{b}\ ,\quad \text{شیب}=-\frac{a}{b}$$

اصلاً توصیه نمی‌کنیم فرمول‌های گفته‌شده را حفظ کنید. فقط کافی است y را تنها کنید تا شیب و عرض از مبدأ پیدا شوند. همچنین برای طول از مبدأ هم به‌جای y، صفر بگذارید، ببینید:

$$ax+by+c=۰\Rightarrow by=-ax-c\xrightarrow{\div b}y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\Rightarrow\begin{cases}\text{شیب}=\frac{-a}{b}\\ \text{عرض از مبدأ}=\frac{-c}{b}\end{cases}$$

$$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}\xrightarrow{y=۰}\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}=۰\Rightarrow\frac{-a}{\cancel{b}}x=\frac{c}{\cancel{b}}\Rightarrow x=\frac{-c}{a}\ (\text{طول از مبدأ})$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

منظور از وضعیت دو خط نسبت به هم یکی از سه حالت موازی، عمود و منطبق بودن است. قبل از آوردن یک جدول مهم و همهٔ ریزه‌کاری‌های مربوط به وضعیت دو خط، حواستان باشد که وقتی دو خط با هم موازی هستند، شیب‌هایشان برابر و وقتی که دو خط بر هم عمود هستند، شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است.

این هم جدولی که قولش را داده بودیم ...

خطوط	فرم کلی	موازی بودن (غیرمنطبق)	عمود بودن	منطبق بودن
استاندارد	$y=mx+h$ و $y=m'x+h'$	$m=m'$ و $h\neq h'$	$m\times m'=-۱$	$m=m'$ و $h=h'$
گسترده	$ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$aa'+bb'=۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

برای مثال دو خط $۲y+x+۱=۰$ و $۳y-۶x+۵=۰$ بر هم عمودند، دلیلش را هم ببینید:

$$\begin{cases} x+۲y+۱=۰ & (a=۱\,،\,b=۲) \\ -۶x+۳y+۵=۰ & (a'=-۶\,،\,b'=۳) \end{cases} \xrightarrow{aa'+bb'=۰}$$ دو خط داده شده بر هم عمودند.

البته اگر از این سوسول‌بازی‌ها رنج می‌برید، می‌توانید yها را تنها کرده و شیب خطوط را پیدا کنید. مطمئن باشید که شیب‌های به‌دست آمده باید قرینه و معکوس هم باشند (*دله؟*).

مثال آموزشی **به‌ازای چه مقداری از m، دو خط $(m-۳)x-(۲-m)y=۴$ و $y=-x+۲$ موازی هستند؟**

پاسخ شرط آن‌که دو خط داده‌شده موازی باشند این است که شیب‌هایشان برابر باشد. همچنین همگی می‌دانیم شیب خط $y=-x+۲$، مساوی -۱ است، پس باید شیب خط دیگر هم -۱ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(m-۳)x-(۲-m)y-۴=۰ \quad , \quad \text{شیب}=-\frac{m-۳}{-(۲-m)}=\frac{m-۳}{۲-m}$$

برابری شیب‌ها: $\frac{m-۳}{۲-m}=-۱ \Rightarrow \cancel{m}-۳=-۲+\cancel{m}$ ×

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هیچ‌وقت دو خط داده‌شده با هم موازی نمی‌شوند.

تست آموزشی **به‌ازای کدام مقدار a، دو خط $-y+(۲a+۱)x-۲=۰$ و $(a+۱)y=x+۳$ بر هم عمودند؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۲}{۳}$

پاسخ گزینه ۴ شرط آن‌که دو خط در حالت گستردهٔ $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ بر هم عمود باشند این است که $aa'+bb'=۰$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (۲a+۱)x-y-۲=۰ \\ x-(a+۱)y+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow (۲a+۱)(۱)+(-۱)(-(a+۱))=۰ \Rightarrow ۲a+۱+a+۱=۰ \Rightarrow ۳a+۲=۰ \Rightarrow a=\frac{-۲}{۳}$$

البته می‌توانستیم برای حل این تست، yها را تنها کرده و شیب هر یک از خطوط را پیدا کنیم. در آخر چون دو خط داده‌شده باید بر هم عمود باشند، حاصل‌ضربشان -۱ است (*رديفه؟*).

تست آموزشی **معادلهٔ خطی که عمود بر خط $y+۲x+۱=۰$ بوده و عرض از مبدأ آن ۳ برابر عرض از مبدأ این خط است، کدام می‌باشد؟**

۱) $y=-۲x-۳$ ۲) $y=-۲x+۳$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}x+۳$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}x-۳$

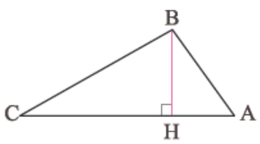
پاسخ گزینه ۴ شیب و عرض از مبدأ خط $y+۲x+۱=۰$ به‌ترتیب -۲ و -۱ است. حالا طبق فرض مسئله به‌دنبال پیدا کردن معادلهٔ خطی هستیم که شیبش $\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأش -۳ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$m=\frac{۱}{۲}\,،\,A(۰,-۳);\quad \text{معادلهٔ خط}: y+۳=\frac{۱}{۲}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۳$$

تست آموزشی **رئوس مثلثی نقاط $A(۳,۰)$، $B(۱,۲)$ و $C(-۲,۴)$ هستند. امتداد ارتفاع BH محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟**

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{-۲}{۵}$ ۳) $\frac{-۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ گزینه ۳ مطابق شکل زیر، چون ارتفاع BH بر ضلع AC عمود است، پس شیبش عکس و قرینهٔ آن می‌باشد، پس اول از همه شیب خط AC را پیدا کرده و سپس از روی آن، شیب BH و در نتیجه معادلهٔ آن را به‌دست می‌آوریم، ببینید:



$$m_{AC}=\frac{۴-۰}{-۲-۳}=-\frac{۴}{۵} \Rightarrow m_{BH}=\frac{۵}{۴}\;;\; \text{معادلهٔ BH}: y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱)$$

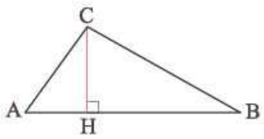
در آخر برای آن‌که ببینیم امتداد ارتفاع BH محور xها را با چه طولی قطع می‌کند، به‌جای y آن صفر می‌گذاریم، پس داریم:

$$y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱) \xrightarrow{y=۰} -۲=\frac{۵}{۴}x-\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۴}x=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow x=\frac{-۳}{۵}$$

تست آموزشی **سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: x+y=۰$، $AC: ۲x-y=۴$ و $BC: -x+۲y=۱$ هستند. معادلهٔ ارتفاع CH کدام است؟**

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=-x-۱$ ۴) $y=\frac{x}{۲}+۱$

پاسخ گزینه ۱ مطابق شکل زیر ارتفاع CH بر خط AB عمود است، پس با توجه به این‌که $m_{AB} = -1$ است، پس $m_{CH} = 1$ می‌باشد. از طرفی نقطهٔ C محل برخورد دو خط AC و BC است، پس با حل دستگاه شامل این دو معادله، مختصات نقطهٔ C هم به‌دست می‌آید، ببینید:



$$\begin{cases}2x-y=4\\-x+2y=1\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}\cancel{2x}-y=4\\\cancel{-2x}+4y=2\end{cases}\Rightarrow 3y=6\Rightarrow y=2\Rightarrow x=3$$

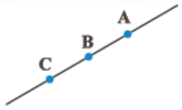
در نتیجه مختصات نقطهٔ C به‌صورت $C(3,2)$ می‌باشد و معادلهٔ ارتفاع CH برابر است با:

$m_{CH}=1$ ، $C(3,2)$ ؛ معادلهٔ CH: $y-2=1(x-3)\Rightarrow y=x-1$

نکته

شرط آن‌که سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط (در یک راستا یا در یک امتداد) باشند، این است که:

$$\boxed{m_{AB}=m_{BC}}$$



تست آموزشی اگر سه نقطهٔ $A(m,4)$ ، $B(1,0)$ و $C(1-m,1)$ در یک امتداد باشند، m کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

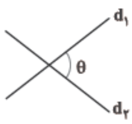
پاسخ گزینه ۱ شرط آن‌که سه نقطهٔ A ، B و C در یک امتداد باشند آن است که $m_{AB}=m_{BC}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}m_{AB}=\dfrac{4-0}{m-1}=\dfrac{4}{m-1}\\[2mm] m_{BC}=\dfrac{1-0}{1-m-1}=\dfrac{1}{-m}\end{cases}\xrightarrow{m_{AB}=m_{BC}}\frac{4}{m-1}=\frac{1}{-m}\Rightarrow -4m=m-1\Rightarrow 5m=1\Rightarrow m=\frac{1}{5}$$

نکته

اگر شیب دو خط d_1 و d_2 به‌ترتیب m_1 و m_2 باشد، تانژانت زاویهٔ بین این دو خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

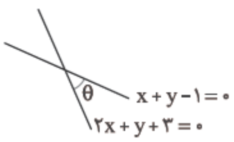
$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$



تست آموزشی تانژانت زاویه‌ای که دو خط $x+y-1=0$ و $2x+y+3=0$ با هم می‌سازند، چند است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده‌شده را محاسبه می‌کنیم و سپس برای پیدا کردن تانژانت زاویه‌ای که این دو خط با هم می‌سازند، سراغ فرمول $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ می‌رویم، ببینید:



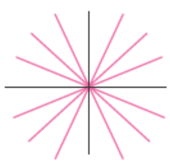
$$x+y-1=0\Rightarrow m_1=-1 \ ,\ 2x+y+3=0\Rightarrow m_2=-2$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-1-(-2)}{1+(-1)(-2)}\right|=\frac{1}{3}$$

نکته

دسته خطوط: وقتی در معادلهٔ یک خط به‌جز x و y یک پارامتر دیگر هم وجود داشته باشد، در اصطلاح به آن دسته خطوط می‌گوییم.

برای مثال $y=mx$ معادلهٔ یک دسته‌خطوط است. ویژگی جالب دسته‌خطوط این است که همگی از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند، ببینید:



همچنین بدانید که برای پیدا کردن این نقطهٔ ثابت، به m دو عدد دلخواه می‌دهیم تا به‌صورت رَندُم دو تا از خط‌ها به‌دست آیند.

حالا دو خط به‌دست آمده را در یک دستگاه معادلات قرار می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ ثابت دسته‌خطوط پیدا شود.

تست آموزشی خطی از دسته‌خطوط $2kx+(k+1)y-1=0$ با خط $y-2x=4$ موازی است. طول از مبدأ این خط کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ گزینه ۲ شیب خط $y=2x+4$ مساوی ۲ است و چون خطی از دسته‌خطوط $2kx+(k+1)y-1=0$ با خط $y=2x+4$ موازی است، پس شیب‌هایشان با هم برابر می‌باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$2kx+(k+1)y-1=0 \text{ ؛ شیب} = \frac{-2k}{k+1} \xrightarrow[y=2x+4]{\text{موازی با خط}} \frac{-2k}{k+1}=2 \Rightarrow -2k=2k+2 \Rightarrow 4k=-2 \Rightarrow k=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه خط موردنظر $2(\frac{-1}{2})x+(\frac{-1}{2}+1)y-1=0$ یا $-x+\frac{1}{2}y-1=0$ می‌باشد که طول از مبدأ آن برابر است با:

$$-x+\frac{1}{2}y-1=0 \xrightarrow{y=0} -x-1=0 \Rightarrow x=-1$$

از اینجا به بعد وارد مباحث اصلی کتاب یازدهم در بخش هندسه تحلیلی می‌شویم. آماده‌اید؟

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴۵ تا ۵۵

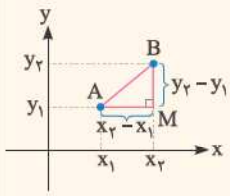
فاصلهٔ دو نقطه

برای پیدا کردن فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

فرمول گفته‌شده، دقیقاً از دل قضیهٔ فیثاغورس آمده است. اثباتش را هم ببینید:

قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB:



$$AB^2=AM^2+BM^2 \Rightarrow AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

برای مثال فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(7,3)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(7-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

علاقه‌مندان به فرمول می‌توانند در حالت‌های خاص زیر، از فرمول‌های گفته‌شده در این نکته استفاده کنند:

نکته

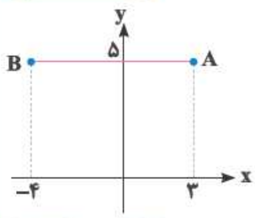
۱) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

۲) فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌عرض $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_1)$ برابر است با: $AB=|x_2-x_1|$

۳) فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌طول $A(x_1,y_1)$ و $B(x_1,y_2)$ برابر است با: $AB=|y_2-y_1|$

برای مثال فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(3,5)$ و $B(-4,5)$ برابر $AB=|-4-3|=7$ است.

این هم شکلش که از روی آن به راحتی دیده می‌شود که فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۷ است.



تست آموزشی اگر نقاط $A(2,4)$، $B(5,0)$ و $C(-2,1)$ رئوس یک مثلث باشند، نوع این مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الساقین ۴) مختلف‌الاضلاع

پاسخ گزینه ۲ به کمک فرمول فاصلهٔ دو نقطه، اندازهٔ اضلاع AB، AC و BC را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$AC=\sqrt{(2-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$BC=\sqrt{(5-(-2))^2+(0-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که اضلاع AB و AC برابر هستند، پس مثلث حتماً متساوی‌الساقین است. از طرفی چون در بین گزینه‌ها هم متساوی‌الساقین و هم قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین وجود دارد باید مطمئن شویم که آیا این مثلث قائم‌الزاویه است یا نه؟ *کسی هست که نرونه اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشه، حتماً قضیهٔ فیثاغورس در آن صدق می‌کنه؟*

$BC=\sqrt{۵۰}\ ,\ AB=۵\ ,\ AC=۵\ ;\ BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}\Rightarrow(\sqrt{۵۰})^{۲}=(۵)^{۲}+(۵)^{۲}\Rightarrow ۵۰=۵۰$ ✓

اضلاع مثلث در قضیهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، در نتیجه این مثلث علاوه بر آن‌که متساوی‌الساقین است، قائم‌الزاویه هم می‌باشد.

حالا نوبت یک تست فوق مهم و متفاوته

تست آموزشی **نقطهٔ A در ناحیهٔ سوم روی خط $y=۳x$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟**

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) -۱۰

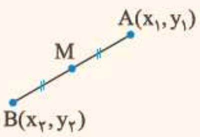
پاسخ گزینه ۲ مختصات هر نقطه روی خط $y=۳x$ به‌صورت $A(\alpha,۳\alpha)$ است. *(آقه y باید ۳ برابر x باشه دیگه.)* از طرفی طبق فرض مسئله $OA=\sqrt{۱۰}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$OA=\sqrt{(\alpha)^{۲}+(۳\alpha)^{۲}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\sqrt{۱۰\alpha^{۲}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow ۱۰\alpha^{۲}=۱۰\Rightarrow\alpha^{۲}=۱\Rightarrow\alpha=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}A(۱,۳)\ \times\\ A(-۱,-۳)\ ✓\end{cases}$$

توجه داشته باشید که نقطهٔ A در ناحیهٔ سوم می‌باشد، پس مختصات طول و عرضش حتماً منفی است. در نهایت مجموع طول و عرض نقطهٔ A برابر $-۱+(-۳)=-۴$ می‌باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۵۶ تا ۷۴

مختصات وسط پاره‌خط



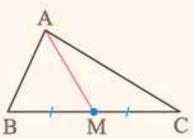
نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو سر پاره‌خط AB هستند. نقطهٔ وسط این پاره‌خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{AB مختصات وسط پاره‌خط}=M\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$$

تذکر: مهم‌ترین کاربرد فرمول مختصات وسط پاره‌خط برای محاسبهٔ میانه و عمودمنصف می‌باشد.

مثال آموزشی **در مثلث ABC با رئوس $A(۲,-۳)$، $B(۰,۴)$ و $C(-۲,۲)$، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC چند واحد است؟**

پاسخ مطابق شکل زیر، برای پیدا کردن اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC، یعنی پاره‌خط AM ابتدا مختصات نقطهٔ M که وسط پاره‌خط BC است را پیدا می‌کنیم، پس داریم:



$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۰-۲}{۲}=-۱\\[2mm] y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۴+۲}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow M(-۱,۳)$$

حالا با داشتن دو نقطهٔ $A(۲,-۳)$ و $M(-۱,۳)$ اندازهٔ پاره‌خط AM را به راحتی پیدا می‌کنیم، ببینید:

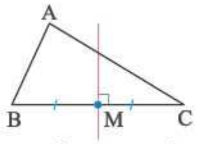
$$AM=\sqrt{(۲-(-۱))^{۲}+(-۳-۳)^{۲}}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

تست آموزشی **در مثلثی با رئوس $A(۲,۱)$، $B(۰,۲)$ و $C(۴,۴)$، معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC کدام است؟**

۱) $y=۲x+۱$ ۲) $y=۲x+۷$ ۳) $y=-۲x+۱$ ۴) $y=-۲x+۷$

پاسخ گزینه ۴ عمودمنصف ضلع BC خطی است که از وسط پاره‌خط BC می‌گذرد و همچنین بر آن عمود می‌باشد، پس اول از همه باید مختصات نقطهٔ وسط ضلع BC و همچنین شیب پاره‌خط BC را به‌دست آوریم، داریم:

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۰+۴}{۲}=۲\\[2mm] y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۲+۴}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow M(۲,۳)\ ,\ m_{BC}=\frac{۴-۲}{۴-۰}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$



همچنین می‌دانیم که شیب عمودمنصف، عکس و قرینهٔ $m_{BC}=\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب عمودمنصف ۲- می‌باشد. در آخر با داشتن نقطهٔ $M(۲،۳)$ و اینکه شیب عمودمنصف برابر ۲- است، معادلهٔ عمودمنصف را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$M(۲،۳)\,,\, m=-۲;$ معادلهٔ عمود منصف: $y-۳=-۲(x-۲)\Rightarrow y=-۲x+۷$

تست آموزشی **اگر اضلاع مثلث ABC به‌صورت $AB: ۲x+y=۳$ ، $AC: ۳x-y=۲$ و $BC: x+y=۱$ باشند، عرض نقطهٔ برخورد میانهٔ BM و خط $x=۱$ کدام نقطه است؟**

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

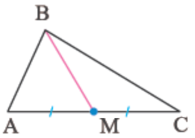
پاسخ گزینه ۱ دوبه‌دوی اضلاع را در دستگاه دو معادله دو مجهول قرار می‌دهیم تا مختصات نقاط A ، B و C پیدا شوند، پس داریم:

$$\begin{matrix}AB\\AC\end{matrix}\begin{cases}۲x+\cancel{y}=۳\\ ۳x-\cancel{y}=۲\end{cases}\Rightarrow ۵x=۵\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۱;\ A(۱،۱)$$

$$\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\begin{cases}۲x+y=۳\\ x+y=۱\xrightarrow{\times(-۱)}\end{cases}\begin{cases}۲x+\cancel{y}=۳\\ -x-\cancel{y}=-۱\end{cases}\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=-۱;\ B(۲،-۱)$$

$$\begin{matrix}AC\\BC\end{matrix}\begin{cases}۳x-\cancel{y}=۲\\ x+\cancel{y}=۱\end{cases}\Rightarrow ۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۴};\ C(\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴})$$

از طرفی مطابق شکل مقابل، نقطهٔ M وسط ضلع AC است، پس داریم:



$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_C}{۲}=\dfrac{۱+\frac{۳}{۴}}{۲}=\dfrac{۷}{۸}\\[2ex] y_M=\dfrac{y_A+y_C}{۲}=\dfrac{۱+\frac{۱}{۴}}{۲}=\dfrac{۵}{۸}\end{cases}\Rightarrow M(\frac{۷}{۸},\frac{۵}{۸})$$

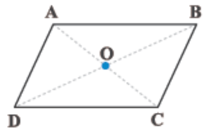
حالا باید معادلهٔ خط BM را پیدا کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$m_{BM}=\dfrac{\frac{۵}{۸}-(-۱)}{\frac{۷}{۸}-۲}=\dfrac{\frac{۱۳}{۸}}{\frac{-۹}{۸}}=\frac{-۱۳}{۹},\ \text{BM معادلهٔ خط}: y+۱=\frac{-۱۳}{۹}(x-۲)$$

در آخر برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط BM و $x=۱$ ، به‌جای x عدد ۱ می‌گذاریم که جوابش $y=\frac{۴}{۹}$ می‌شود.

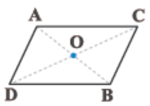
نکته

متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که ضلع‌های روبه‌رویش با هم موازی و مساوی باشند. در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی مطابق شکل مقابل، نقطهٔ O وسط دو پاره‌خط AC و BD است، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}y_O=\dfrac{y_A+y_C}{۲}\\[1ex] y_O=\dfrac{y_B+y_D}{۲}\end{cases}\Rightarrow \boxed{y_A+y_C=y_B+y_D}\quad,\quad \begin{cases}x_O=\dfrac{x_A+x_C}{۲}\\[1ex] x_O=\dfrac{x_B+x_D}{۲}\end{cases}\Rightarrow \boxed{x_A+x_C=x_B+x_D}$$

فقط حواستان باشد که رابطهٔ گفته‌شده، برای رأس‌های روبه‌روی هم است، مثلاً در شکل



تساوی‌های گفته‌شده به $x_A+x_B=x_C+x_D$ و $y_A+y_B=y_C+y_D$ تبدیل می‌شوند.

تذکر: مستطیل، لوزی و مربع همگی حالت‌های خاص متوازی‌الاضلاع هستند، پس رابطهٔ گفته‌شده برای همگی آن‌ها برقرار است.

تست آموزشی **نقاط $A(۲,۳)$ ، $B(-۱,-۱)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مستطیل ABCD هستند. اگر نقطهٔ D روی خط $y+ax=-۱۰$ باشد، a کدام است؟**

۱) ۵- ۲) ۶- ۳) ۲- ۴) ۳-

پاسخ گزینه ۴ نقاط A ، B ، C و D رئوس مستطیل ABCD هستند، پس برای پیدا کردن مختصات طول و عرض D می‌توان نوشت:

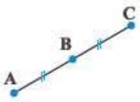
$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۲+۱=-۱+x_D\Rightarrow x_D=۴\\ y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۳+(-۲)=-۱+y_D\Rightarrow y_D=۲\end{cases}\Rightarrow D(۴،۲)$$

از طرفی نقطهٔ $D(۴,۲)$ روی خط $y+ax=-۱۰$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرض آن روی این خط صدق می‌کند، داریم:

$$y+ax=-۱۰ \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{D(۴,۲)\ \text{روی خط}} ۲+۴a=-۱۰ \Rightarrow a=-۳$$

نکته

قرینهٔ نقطه نسبت به نقطه: قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ نسبت به نقطهٔ $B(x_B,y_B)$ را نقطهٔ $C(x_C,y_C)$ می‌نامیم. مطابق شکل زیر به‌وضوح دیده می‌شود که نقطهٔ B دقیقاً وسط دو نقطهٔ A و C است، پس می‌توان نوشت:

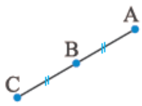


$$\boxed{x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}}\ ,\ \boxed{y_B=\frac{y_A+y_C}{۲}}$$

تست آموزشی قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۴,۰)$، نقطهٔ $C(a,b)$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۶　　۴) ۹

پاسخ گزینه ۴ مطابق شکل زیر، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به B، نقطهٔ C می‌شود، وقتی که نقطهٔ B دقیقاً وسط A و C است، پس می‌توان نوشت:

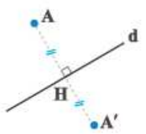


$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۴=\dfrac{۲+x_C}{۲} \Rightarrow ۸=۲+x_C \Rightarrow x_C=۶ \\ y_B=\dfrac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow ۰=\dfrac{-۳+y_C}{۲} \Rightarrow ۰=-۳+y_C \Rightarrow y_C=۳ \end{cases} \Rightarrow C(۶,۳)$$

پس طبق فرض مسئله، چون $C(a,b)$ است، متوجه می‌شویم که $a=۶$ ، $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۹$ است.

نکته

قرینهٔ نقطه نسبت به خط: برای پیدا کردن مختصات قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d، یعنی نقطهٔ A'، اول از همه باید معادلهٔ خط عمود بر d که گذرنده از نقطهٔ A است را بنویسیم و سپس با قرار دادن این دو معادله در یک دستگاه، نقطهٔ برخورد این دو خط را پیدا کنیم (نقطهٔ H). حالا مطابق شکل زیر متوجه می‌شویم که نقطهٔ H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:



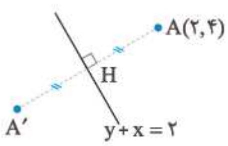
$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_{A'}=۲x_H-x_A}$$

$$y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow \boxed{y_{A'}=۲y_H-y_A}$$

تست آموزشی قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به خط $y+x=۲$ نقطهٔ $A'(\alpha,\beta)$ است. مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) صفر　　۴) ۴-

پاسخ گزینه ۱ برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به خط $y+x=۲$ اول معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ A که عمود بر خط $y+x=۲$ است را می‌نویسیم، ببینید:



$$y+x=۲ \Rightarrow \text{شیب}=-۱ \Rightarrow m_{\text{خط عمود}}=۱;\ A(۲,۴)$$

$$\text{معادلهٔ خط عمود}:\ y-۴=۱(x-۲) \Rightarrow y=x+۲$$

حالا برای پیدا کردن نقطهٔ H دو خط $y+x=۲$ و $y=x+۲$ را در یک دستگاه قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} y+\cancel{x}=۲ \\ y-\cancel{x}=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow H(۰,۲)$$

از طرفی برای پیدا کردن نقطهٔ A' با توجه به آن‌که H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:

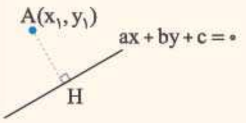
$$\begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۰=\dfrac{۲+x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲+x_{A'}=۰ \Rightarrow x_{A'}=-۲ \\ y_H=\dfrac{y_A+y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲=\dfrac{۴+y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۴=۴+y_{A'} \Rightarrow y_{A'}=۰ \end{cases} \Rightarrow A'(-۲,۰)$$

در نتیجه $\alpha=-۲$ ، $\beta=۰$ و در آخر $\alpha+\beta=-۲$ می‌باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۷۵ تا ۹۵

فاصلهٔ نقطه از خط

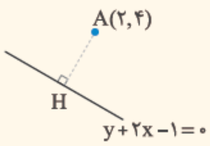
اول این‌که در ریاضی منظور از فاصله، کوتاه‌ترین فاصله است و می‌دانیم کوتاه‌ترین فاصله به‌صورت عمود اتفاق می‌افتد. در اینجا می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از خط $ax+by+c=0$ را پیدا کنیم. مطابق شکل مقابل، این فاصله برابر AH است و از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

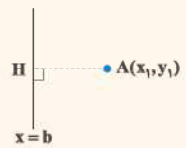
درواقع مختصات طول و عرض نقطهٔ A را به‌جای x و y در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم و سپس از آن قدرمطلق می‌گیریم، در آخر عدد به‌دست‌آمده را بر $\sqrt{a^2+b^2}$ تقسیم می‌کنیم. حواستان باشد که برای استفاده کردن از فرمول گفته‌شده باید همهٔ جملات معادلهٔ خط را به یک طرف تساوی ببریم (معادلهٔ گسترده)، مانند خط $2x+y+1=0$ نه مثل خط $x+y=1$.

برای مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ از خط $y+2x-1=0$ برابر است با:

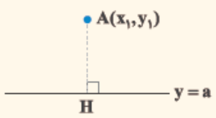


$$AH=\frac{|4+2(2)-1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

تذکر: دقت کنید که برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از خط‌های عمودی و افقی نیازی به استفاده از فرمول قبلی نیست و به راحتی از روی شکل محاسبه می‌شود، ببینید:

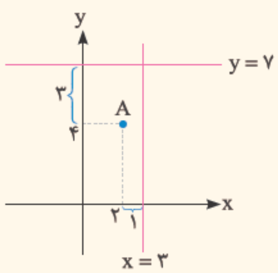


$AH=|x_1-b|$



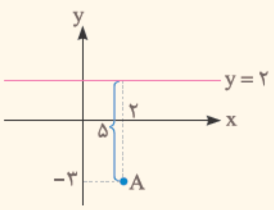
$AH=|y_1-a|$

برای مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ از خط عمودی $x=3$ برابر ۱ و از خط افقی $y=7$ برابر ۳ می‌باشد. شکلش را هم ببینید:



مثال آموزشی **فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-3)$ را از دو خط $x+y=1$ و $y=2$ پیدا کرده و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.**

پاسخ فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-3)$ از خط $y=2$ برابر $5=|2-(-3)|$ است. دلیلش را هم از روی شکل مقابل ببینید:



حالا برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-3)$ از خط $x+y-1=0$ به کمک فرمول گفته‌شده داریم:

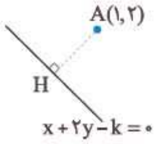
$$AH=\frac{|2+(-3)-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

به وضوح فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-3)$ از خط $y=2$ بیش‌تر از فاصلهٔ آن تا خط $x+y=1$ می‌باشد.

تست آموزشی **اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,2)$ از خط $x+2y=k$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد، مجموع مقادیر به‌دست آمده برای k کدام است؟**

۱) -10 ۲) 10 ۳) -20 ۴) 20

پاسخ گزینه ۲ اول خط را به‌صورت گسترده، یعنی $x+۲y-k=۰$ می‌نویسیم. حالا با کمک گرفتن از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط می‌توان نوشت:



$$AH=\frac{|۱+۲(۲)-k|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow\frac{|۵-k|}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow|۵-k|=۱۰\Rightarrow\begin{cases}۵-k=۱۰\Rightarrow k=-۵\\۵-k=-۱۰\Rightarrow k=۱۵\end{cases}$$

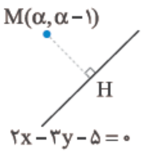
در نتیجه مجموعه مقادیر به‌دست آمده برای k برابر $۱۵+(-۵)=۱۰$ است.

یه تست فوق‌العاده مهم از کنکورهای قدیم...

تست آموزشی دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y=x-۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x-۳y=۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۹ و ۱۵- ۲) ۱۱ و ۱۵- ۳) ۹- و ۱۱ ۴) ۱۵ و ۱۱-

پاسخ گزینه ۲ هر نقطه روی خط $y=x-۱$ به شکل $M(\alpha,\alpha-۱)$ است. حالا به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط می‌توان نوشت:

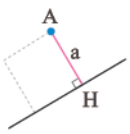


$$MH=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|۲\alpha-۳(\alpha-۱)-۵|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

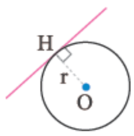
$$\Rightarrow|-\alpha-۲|=۱۳\Rightarrow\begin{cases}-\alpha-۲=۱۳\Rightarrow\alpha=-۱۵\\-\alpha-۲=-۱۳\Rightarrow\alpha=۱۱\end{cases}$$

نکته

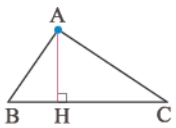
در این‌جا هم چند تا از حالت‌های پرکاربرد فاصلهٔ نقطه از خط را با هم یاد می‌گیریم:



حالت اول (محاسبهٔ طول ضلع مربع): در این حالت معادلهٔ یک خط داده می‌شود که یکی از ضلع‌های مربع روی آن قرار دارد. هم‌چنین یک نقطهٔ غیرواقع بر این خط داده می‌شود. حالا با پیدا کردن فاصلهٔ نقطه از این خط، طول ضلع مربع پیدا می‌شود که الان به راحتی محیط، مساحت و ... مربع را می‌توانیم پیدا کنیم (این مدل تست‌ها با کمی تغییر دربارهٔ مستطیل هم مطرح می‌شود.).



حالت دوم (محاسبهٔ شعاع دایره با داشتن مرکز و خط مماس بر دایره): *حرف خاصی نداریم.* مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره همان شعاع دایره است.



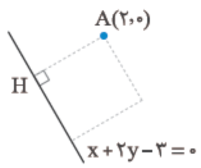
حالت سوم (محاسبهٔ ارتفاع مثلث): در این حالت یکی از ضلع‌های مثلث و یک رأس آن که خارج از آن ضلع است، داده می‌شود که در این‌صورت فاصلهٔ رأس داده شده از خط، همان ارتفاع مثلث است. این شکل را ببینید:

این هم دو تست دیگر در مورد فاصلهٔ نقطه از خط ...

تست آموزشی یکی از ضلع‌های مربعی روی خط $x+۲y=۳$ قرار دارد. اگر نقطهٔ $A(۲,۰)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ گزینه ۱ شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



نقطهٔ A روی خط داده شده قرار ندارد، پس همان‌طور که از روی شکل مشاهده می‌شود، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط داده شده همان ضلع مربع است، پس داریم:

$$AH=\frac{|۲+۲(۰)-۳|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

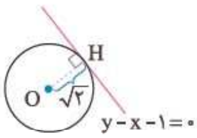
در نهایت محیط مربع برابر $۴AH=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ است.

تست آموزشی خط $y=x+۱$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ مماس است. اگر معادلهٔ قطر دایره به‌صورت خط $y=-۲x+۳$ باشد، مجموع طول و عرض مرکز دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۲ مطابق شکل، خط $y=x+۱$ بر دایره مماس است. از طرفی معادلهٔ قطر دایره برابر $y=-۲x+۳$ می‌باشد. بنابراین چون مرکز دایره بر روی قطر دایره است، پس مختصات مرکز به‌صورت $O(\alpha\,,\,-۲\alpha+۳)$ می‌باشد. حالا باید فاصلهٔ مرکز دایره را از خط $y-x-۱=۰$ برحسب مجهول α به‌دست آوریم و برابر $\sqrt{۲}$ قرار دهیم، پس داریم:

$$OH=\frac{|-۲\alpha+۳-\alpha-۱|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|-۳\alpha+۲|=۲\Rightarrow\begin{cases}-۳\alpha+۲=۲\Rightarrow\alpha=۰\\-۳\alpha+۲=-۲\Rightarrow\alpha=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$



حالا با جای‌گذاری طول‌های به‌دست آمده در معادلهٔ $y=-۲x+۳$، مرکز دایره به‌دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

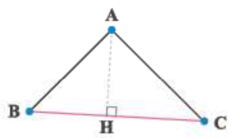
$$y=-۲x+۳\xrightarrow{\alpha=۰\,,\,\frac{۴}{۳}}\begin{cases}O(۰\,,\,۳)\\O(\frac{۴}{۳}\,,\,\frac{۱}{۳})\end{cases}$$

در واقع دو دایره با این شرایط داریم که مجموع طول و عرض مرکز این دایره‌ها $۰+۳=۳$ یا $\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}$ می‌باشد و با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست گزینهٔ «۲» است.

نکته

مساحت مثلث: احتمالاً خیلی منتظر روش پیدا کردن مساحت مثلث دلخواه ABC با داشتن سه رأس A ، B و C بودید. دو روش برای پیدا کردن مساحت خدمتتان عرض می‌کنیم:

روش اول: برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC ، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



۱) ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را پیدا می‌کنیم. این فاصله همان قاعدهٔ مثلث است.

۲) با داشتن دو نقطهٔ B و C معادلهٔ خط BC را پیدا می‌کنیم.

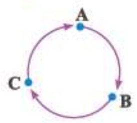
۳) به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC را به‌دست می‌آوریم که این فاصله همان ارتفاع مثلث می‌باشد.

۴) در آخر مساحت مثلث برابر $S=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}$ است.

روش دوم: اگر $A(x_A\,,\,y_A)$ ، $B(x_B\,,\,y_B)$ و $C(x_C\,,\,y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

برای این‌که فرمول بالا را فراموش نکنید، چرخهٔ مقابل را به خاطرتان بیاورید:

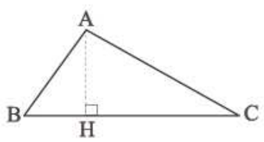


تست آموزشی مساحت مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲)$ ، $B(۴,۶)$ و $C(۰,۳)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ گزینه ۲ **روش اول:** با توجه به شکل مقابل ابتدا اندازهٔ ضلع BC را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$BC=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۶-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$



حالا با داشتن دو نقطهٔ B و C ، شیب BC و سپس معادلهٔ آن را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$m_{BC}=\frac{۶-۳}{۴-۰}=\frac{۳}{۴}\ ;\ \text{معادلهٔ خط } BC: y-۳=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۳$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱\,,\,۲)$ را از خط $y-\frac{۴}{۳}x-۳=۰$ پیدا می‌کنیم که این **همان ارتفاع مثلث است، پس می‌توان نوشت:**

$$AH=\frac{|۲-\frac{۴}{۳}-۳|}{\sqrt{(۱)^۲+(-\frac{۴}{۳})^۲}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}}=\frac{\frac{۷}{\cancel{۳}}}{\frac{۵}{\cancel{۳}}}=\frac{۷}{۵}$$

در نهایت مساحت مثلث ABC برابر است با:

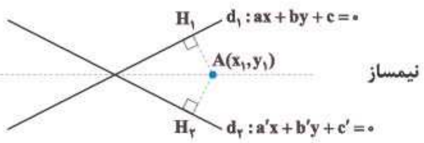
$$S=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۵\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

روش دوم: به کمک فرمول گفته شده در درسنامه، مساحت مثلث ABC با سه رأس A ، B و C را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|=\frac{۱}{۲}|۱(۶-۳)+۴(۳-۲)+۰(۲-۶)|=\frac{۱}{۲}|۳+۴+۰|=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

نکته

نیمساز: نیمساز دو خط، مجموعه نقاطی هستند که فاصله‌شان از دو خط برابر باشد. به بیانی دیگر اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو خط یکسان است، پس با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$AH_1=AH_۲\Rightarrow \boxed{\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|a'x_1+b'y_1+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}}$$

تست آموزشی نقطه با کدام عرض روی نیمساز ناحیهٔ اول، از دو خط $y-۲x+۲=۰$ و $۲y+x+۳=۰$ به یک فاصله قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) امکان‌ناپذیر

پاسخ گزینه ۴ مختصات هر نقطه روی نیمساز ناحیهٔ اول به‌صورت $M(\alpha,\alpha)$ است. حالا برای این‌که این نقطه از دو خط داده شده به یک فاصله باشد، می‌توان نوشت:

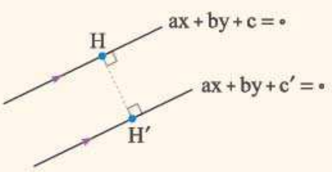
$$MH_1=MH_۲\Rightarrow\frac{|۲\alpha+\alpha+۳|}{\sqrt{\cancel{(۱)^۲+(۲)^۲}}}=\frac{|\alpha-۲\alpha+۲|}{\sqrt{\cancel{(-۲)^۲+(۱)^۲}}}\Rightarrow|۳\alpha+۳|=|-\alpha+۲|\Rightarrow\begin{cases}۳\alpha+۳=-\alpha+۲\Rightarrow ۴\alpha=-۱\Rightarrow\alpha=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow M(\frac{-۱}{۴},\frac{-۱}{۴})\\ ۳\alpha+۳=\alpha-۲\Rightarrow ۲\alpha=-۵\Rightarrow\alpha=\frac{-۵}{۲}\Rightarrow M(\frac{-۵}{۲},\frac{-۵}{۲})\end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقاط به‌دست آمده در ناحیهٔ سوم هستند. در واقع هیچ نقطه‌ای در نیمساز ناحیهٔ اول حضور ندارد که فاصله‌اش از دو خط $y-۲x+۲=۰$ و $۲y+x+۳=۰$ یکسان باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۹۶ تا ۱۰۷

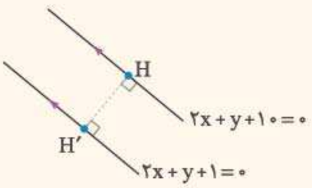
فاصلهٔ دو خط موازی

وقتی اسم فاصلهٔ دو خط می‌آید مطمئن باشید که حتماً دو خط با هم موازی هستند، یعنی شیب‌هایشان برابر است. دو خط موازی را به‌صورت $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که چون دو خط موازی هستند، پس باید شیب‌هایشان برابر باشد، برای همین در هر دو معادله، عبارت $ax+by$ وجود دارد (قبوله؟). فاصلهٔ دو خط موازی گفته شده از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:



$$\boxed{HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

برای مثال فاصلهٔ دو خط موازی $۲x+y+۱=۰$ و $۲x+y+۱۰=۰$ برابر است با:

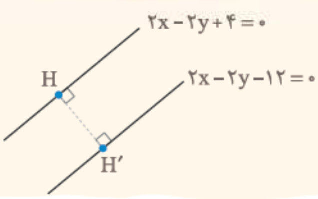


$$HH'=\frac{|۱۰-۱|}{\sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۹\sqrt{۵}}{۵}$$

تذکر: گاهی وقت‌ها فاصلهٔ دو خط موازی پرسیده می‌شود که در آن‌ها ضرایب x و y دو معادله برابر نیستند. در این مواقع قبل از هر کاری با تقسیم و یا ضرب کردن یکی از معادله‌ها در عددی، ضرایب را یکسان کنید و سپس سراغ فرمول $HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بروید.

مثال آموزشی فاصلهٔ دو خط موازی $y=x+۲$ و $۲x-۲y=۱۲$ چند است؟

پاسخ معادله‌ها در حالت گسترده به‌صورت $y-x-۲=۰$ و $۲x-۲y-۱۲=۰$ هستند که به وضوح شیب‌های هر دوی آن‌ها برابر ۱ است و دو خط موازی هستند. حالا برای محاسبهٔ فاصلهٔ این دو خط موازی، اول باید ضرایب x و y آن‌ها را یکسان کنیم و سپس سراغ فرمول گفته شده برویم، پس می‌توان نوشت:



$$y-x-۲=۰\xrightarrow{\times(-۲)}۲x-۲y+۴=۰\ ,\ ۲x-۲y-۱۲=۰$$

$$HH'=\frac{|۴-(-۱۲)|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۶}{\sqrt{۸}}=\frac{۱۶}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۴}=۴\sqrt{۲}$$

تست آموزشی **دو ضلع مربعی بر خطوط $۲y-x=۵$ و $y=\frac{x}{۲}+۱$ قرار دارند. محیط مربع کدام است؟**

۱) $۱۲\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

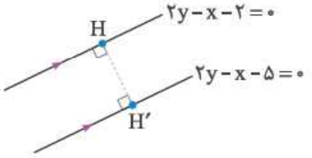
پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$۲y-x-۵=۰\ ;\ m=\frac{-(-۱)}{۲}=\frac{۱}{۲}\ ,\ y=\frac{x}{۲}+۱\ ;\ m=\frac{۱}{۲}$$

شیب دو خط داده شده برابر است، در نتیجه خطوط با هم موازی‌اند، پس فاصلهٔ این دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است. برای استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی ابتدا باید ضرایب x و y دو معادله را یکسان کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۲y-x-۵=۰\\ y-\frac{x}{۲}-۱=۰\xrightarrow{\times ۲}۲y-x-۲=۰\end{cases}$$

$$HH'=\frac{|-۲-(-۵)|}{\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$



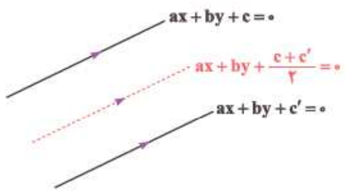
در نهایت محیط مربع برابر است با:

$$\text{محیط}=۴a=۴(\frac{۳}{\sqrt{۵}})=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

نکته

معادلهٔ خطی که دقیقاً وسط دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ می‌باشد برابر است با:

$$\boxed{ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰}$$ *(همون میانگین فورمونه)*

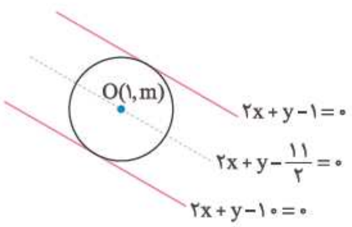


دقت کنید که این خط هم موازی دو خط داده شده است.

تست آموزشی **دو خط $۲x+y=۱۰$ و $۲x=-y+۱$ بر دایره‌ای مماس‌اند. اگر مرکز دایره نقطهٔ $O(۱,m)$ باشد، m کدام است؟**

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ گزینه ۴ با توجه به این‌که شیب دو خط داده شده با هم برابر است، مطابق شکل مقابل مرکز دایره حتماً روی خط میانی خط‌های مماس بر دایره قرار می‌گیرد؛ یعنی $O(۱,m)$ روی خط $۲x+y+\frac{-۱۰-۱}{۲}=۰$ یا همان $۲x+y-\frac{۱۱}{۲}=۰$ قرار دارد و درون آن صدق می‌کند، پس داریم:



$$۲x+y-\frac{۱۱}{۲}=۰\xrightarrow{O(۱,m)\ \text{روی خط است.}}۲(۱)+m-\frac{۱۱}{۲}=۰\Rightarrow m=\frac{۱۱}{۲}-۲=\frac{۷}{۲}$$

یادداشت:

تست‌های درس اول

مفاهیم اولیهٔ نقطه

۱) اگر $A(\alpha , ۲\beta - ۳)$ نقطه‌ای روی محور x ها و $B(۲\alpha - ۱ , ۳\beta)$ نقطه‌ای روی محور y ها باشد، $۵\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲) اگر $A(۱ , ۳)$ و $B(۲a , ۲a^۲ + a)$ دو نقطهٔ هم‌عرض باشند و این دو نقطه در یک ناحیهٔ مختصاتی نباشند، $|a|$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۳) اگر $A(\frac{۲m-۳}{m+۱} , ۲m - m^۲)$ نقطه‌ای در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $۰ < m < ۲$ ۲) $-۱ < m < ۲$ ۳) $۰ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $-۱ < m < \frac{۳}{۲}$

مفاهیم اولیهٔ خط

۴) به‌ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y - mx = ۸$ از نقطهٔ $A(-۱,۱)$ می‌گذرد؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) -۳

۵) نقطه‌ای روی خط به معادلهٔ $۲x + ۳y = ۵(۱ - x)$ قرار دارد که عرض آن از قرینهٔ طول آن ۱ واحد کم‌تر است. طول این نقطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۶) اگر نقطهٔ $M(۲\alpha + \frac{۵}{۲}, \alpha^۲)$ پایین خط $y = ۲x$ باشد، α چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

۷) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(۲ , ۵)$ و $B(۲ , -۳)$ به‌صورت $x + m = ۰$ و معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $C(۱ , -۴)$ و $D(-۱ , -۴)$ به‌صورت $y + n = ۰$ می‌باشد. $m + n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

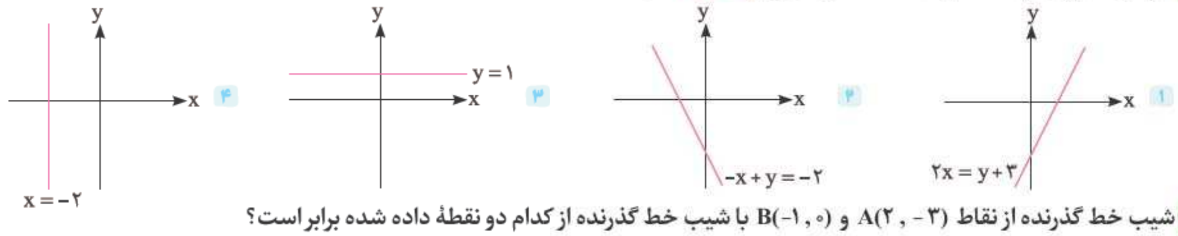
۸) خط به معادلهٔ $mx + (۲+m)y + x = ۲m$ موازی محور x ها است. این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۹) دو نقطهٔ $A(۶ , ۱)$ و $B(a^۲ + a , a)$ بر روی خطی موازی محور y ها قرار دارند. اگر نقطهٔ B در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات باشد، $a^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

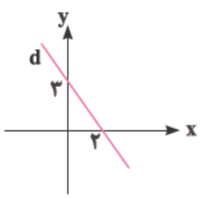
۱۰) نمودار کدام‌یک از خط‌های داده شده درست رسم **نشده** است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱۱) شیب خط گذرنده از نقاط $A(۲ , -۳)$ و $B(-۱ , ۰)$ با شیب خط گذرنده از کدام دو نقطهٔ داده شده برابر است؟

۱) $C(-۲ , -۲)$ ، $D(۰ , ۱)$ ۲) $C(-۵ , -۴)$ ، $D(۴ , ۵)$ ۳) $C(۵ , -۴)$ ، $D(-۴ , ۵)$ ۴) $C(۲ , ۲)$ ، $D(۰ , -۱)$

۱۲) نمودار خط d به‌صورت مقابل رسم شده است. کدام‌یک از نقاط داده شده روی این خط قرار دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $(-۲ , ۵)$
۲) $(-۲ , ۴)$
۳) $(۴ , -۳)$
۴) $(۴ , -۵)$

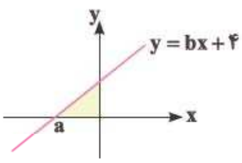
۱۳) خط گذرنده از نقاط $A(2, 7)$ و $B(-1, 1)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱/۵   ۲) ۲   ۳) ۱/۵-   ۴) ۲-

۱۴) خطی که از نقاط $A(-3, 1-m)$ و $B(m-1, m+5)$ می‌گذرد، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. مساحت ناحیهٔ محدود به این خط و محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۴/۵   ۲) ۹   ۳) ۱۵   ۴) ۱۸

۱۵) در شکل مقابل اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر ۱۲ باشد، a کدام است؟



۱) ۲-   ۲) ۳-   ۳) ۴-   ۴) ۶-

۱۶) خطی که از نقطهٔ $A(2, -5)$ عبور می‌کند و شیب آن ۲ برابر عرض از مبدأ آن است، از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور **نمی‌کند**؟

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

۱۷) خط گذرنده از نقاط $A(m, 2m+2)$ و $B(-m, 5m+1)$ با جهت منفی محور x ها زاویهٔ 45° می‌سازد. m کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۱   ۳) $\frac{-1}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۸) مجموع طول و عرض نقطهٔ تلاقی دو خط $2y + x = 5$ و $y = 2x - 5$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۹) دو خط $ax + 3y = b$ و $2ax + by = 4$ همدیگر را در نقطهٔ $(1, 2)$ قطع می‌کنند. a کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲-   ۳) ۴   ۴) ۴-

۲۰) دو خط $y = 2x + a$ و $y = ax + 2b$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور طول‌ها قطع می‌کنند. $a + b$ کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۳-   ۳) ۲-   ۴) ۴-

۲۱) به‌ازای چه مقادیری از m، دو خط $mx + y = 2$ و $-x + (m+1)y = 4$ روی محور y ها همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۱-   ۴) ۲-

۲۲) مساحت ناحیهٔ محدود به محور x ها، نیمساز ناحیهٔ دوم و خط $y = 2x + 4$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۲۳) مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار دو خط $y = x - 1$ و $2x + 3y = 6$ و محور x ها کدام است؟

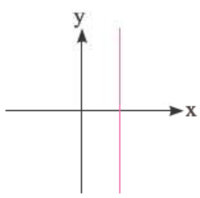
۱) ۰/۸   ۲) ۰/۹   ۳) ۱/۶   ۴) ۱/۸

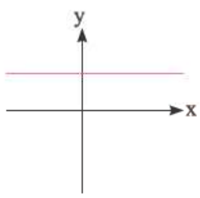
۲۴) به‌ازای کدام مقدار a، سه خط $3x - y = 2$، $x - ay = 10$ و $2x + y = 8$ در یک نقطه متقاطع‌اند؟

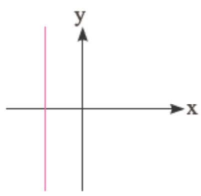
۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۲-   ۴) ۴-

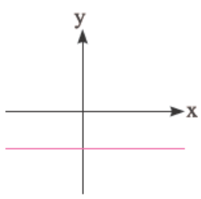
فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم

۲۵) دو خط $x = my + 1$ و $2x + 5y = 3$ با هم موازی هستند. نمودار خط $x = 2m$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۶) عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطهٔ $A(2,-1)$ که با خط به معادلهٔ $2x + y = 5$ موازی می‌باشد، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۲۷) اگر خط به معادلهٔ $ax+by=-1$ با خط به معادلهٔ $ay+x=b$ موازی باشد و از نقطهٔ $(2,1)$ بگذرد، a^2+2b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸) اگر دو خط $y=1-3x$ و $2x=(m+1)y+3$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۹) خط گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ بر خط d به معادلهٔ $x+(1+2m)y=m+3$ عمود است. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ $(a\neq b)$

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

۳۰) دو خط d و d' بر هم عمود هستند. اگر شیب خط d برابر $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ باشد، شیب خط d' کدام است؟

۱) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ ۴) $\sqrt{3}-2$

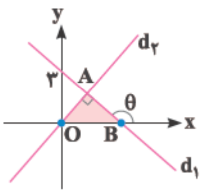
۳۱) نقطهٔ $A(2,a)$ واقع بر خطی است که از نقطهٔ تلاقی دو خط $3y-x=2$ و $y+2x=3$ عبور کرده و بر خط به معادلهٔ $2y-4x=1$ عمود است. a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۳۲) مساحت ناحیهٔ محدود به خط گذرنده از نقطهٔ برخورد خط $y=2x+6$ و نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم و عمود بر خط $x-5y=1$ با محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۳/۲ ۳) ۵/۴ ۴) ۶/۴

۳۳) در شکل مقابل اگر $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۰/۳۵
۲) ۰/۴
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۵

۳۴) مثلث ABC با رئوس $A(2,m)$، $B(-1,1)$ و $C(0,6)$ در رأس A قائمه است. مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۵) اگر نقاط $A(1,2)$ و $B(4,3)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند، معادلهٔ ضلع دیگر مستطیل که یک رأس آن نقطهٔ B است، کدام می‌باشد؟

۱) $3x-y=9$ ۲) $3x+y=9$ ۳) $y+3x=15$ ۴) $y-3x=15$

۳۶) دو ضلع مستطیلی بر روی دو خط به معادلات $my=8x-1$ و $m^2x+y=2$ واقع هستند. حاصل‌ضرب مقادیر m کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳۷) سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y-x=3$، $AC: y-2x=5$ و $BC: 2y+3x=6$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث ABC کدام است؟

۱) $6y-4x=15$ ۲) $9y-6x=17$ ۳) $3y-2x=7$ ۴) $3y+2x=9$

۳۸) معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x-y=2$، $y=\frac{x}{2}$ و محور x ها می‌باشد. معادلهٔ خط بزرگ‌ترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

۱) $y=4$ ۲) $y-x=2$ ۳) $x=4$ ۴) $2x+y=1$

۳۹) معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=1$، $y=2x$ و $x=1$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=\frac{2}{3}$ ۲) $x=\frac{2}{3}$ ۳) $y+x=\frac{2}{3}$ ۴) $y+x=\frac{1}{3}$

۴۰) خط $x+2y+9=0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1,0)$ مماس است. مجموع طول و عرض نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -4 ۲) -5 ۳) -6 ۴) -7

۴۱) اگر نقاط $A(0,0)$، $B(2,2)$ و $C(6,-2)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(2,2)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(-1,0)$

۴۲ نقاط $A(۲,۱)$ ، $B(-۱,۱)$ و $C(۵,۲)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و پای میانهٔ AM باشند، $x_M + x_H$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۲}{۴۹}$ ۲) $\frac{۱۴۵}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴۳}{۲۲}$

۴۳ به‌ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a,۳)$ ، $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲,-\frac{۳}{۴}$ ۴) $۲,-\frac{۹}{۴}$

۴۴ زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $۲y - x = ۱$ و $۳x = ۲ - ۹y$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

فاصلهٔ دو نقطه

۴۵ در مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲)$ ، $B(-۳,۱)$ و $C(۴,۰)$ طول ضلع متوسط مثلث کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\sqrt{۱۹}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $\sqrt{۲۱}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۴۶ اگر نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث و محیط آن به‌ترتیب کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) قائم‌الزاویه - $۵(۱+\sqrt{۲})$
۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین - $۵(۲+\sqrt{۲})$
۳) متساوی‌الاضلاع - ۱۵
۴) متساوی‌الاضلاع - $۱۵\sqrt{۲}$

۴۷ نقاط $A(۱,۳)$ ، $B(۵,-۵)$ و $C(-۱,۲)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

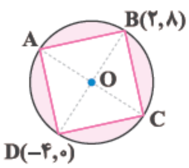
۴۸ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۳)$ از نقطهٔ $B(m,۳)$ دو برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $C(۱,m+۱)$ است. حاصل‌ضرب مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۹ نقاط $A(۲,-۴)$ و $B(۷,۸)$ دو انتهای قطر دایره‌ای هستند. محیط دایره کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۵/۵\pi$ ۲) $۶/۵\pi$ ۳) ۱۱π ۴) ۱۳π

۵۰ در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟ (ABCD مربع و $\pi \simeq ۳$ است.)



۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۱ در دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادلهٔ دو قطر به صورت $۲x - ۳y = ۵$ و $۳ = ۲x - ۵y$- هستند. طول قطر دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۵۲ نقطهٔ $O(۱,۲)$ مرکز لوزی ABCD است. اگر قطرهای این لوزی به موازات محورهای مختصات باشد و یکی از اضلاع این لوزی خط $۲x + y = ۶$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۵۳ دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی نقاط $A(-۲,۵)$ و $B(۴,-۳)$ هستند. اگر زاویهٔ بین دو قطر این مستطیل ۳۰° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۴ دو نقطه روی خط $۲x + y = ۱$ وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات $\sqrt{۱۰}$ است. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{-۴}{۵}$ ۴) $\frac{-۲}{۵}$

۵۵ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $M(۲,۰)$ و $N(۱,۲)$ می‌گذرد و معادلهٔ یکی از قطرهایش $x + y = ۱$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

مختصات وسط پاره‌خط

۵۶) اگر $A(-۱,۶)$ و $B(۵,۲)$ باشد، فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۵۷) با فرض $A(۳a+۲,۲a)$ و $B(-a,۰)$، اگر نقطهٔ وسط پاره‌خط AB روی خط $۲x+y=۸$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۸) دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲,۱)$ و $B(۶,۵)$ هستند. فاصلهٔ مرکز دایره از مبدأ مختصات کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۹) دو نقطهٔ $A(m,m+۸)$ و $B(۳m,۴+m)$ دو سر قطر یک دایره هستند که مرکز آن روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم محورهای مختصات قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ $C(-۴,۲)$ از مرکز دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۰) اگر نقاط $A(-۱,۳)$ و $B(۳,۱)$ مختصات دو سر قطر یک مربع باشند، معادلهٔ قطر دیگر مربع کدام است؟

۱) $x=۲y$ ۲) $y=۲x$ ۳) $y+۲x=۵$ ۴) $۲y+x=۵$

۶۱) در مثلث ABC با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ طول میانهٔ AM کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۲) در مثلث ABC با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۲,۷)$ و $C(۸,۵)$، خطی که میانهٔ وارد بر ضلع BC بر آن واقع است، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۶۳) در مثلث ABC معادلهٔ دو ضلع AB و AC به ترتیب $x+y=۲$ و $۲y-x=۴$ می‌باشند. اگر نقطهٔ $M(۱,۱)$ وسط ضلع AB باشد، مختصات نقطهٔ B کدام است؟

۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(۲,۰)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۳,۱)$

۶۴) اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

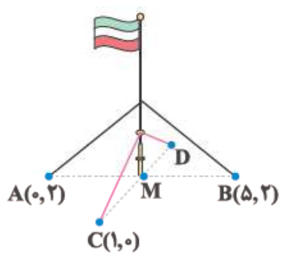
۶۵) نقاط $A(-۱,۵)$ و $B(۳,۳)$ مفروض هستند. عمود منصف AB محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۶۶) نقاط $A(۲,۳)$، $B(-۱,۰)$ و $C(۱,۲)$ سه رأس از متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. طول BD کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۶۷) یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل، توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله است. مختصات نقطهٔ D کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) $(۳,۲)$ ۲) $(۱,۴)$ ۳) $(۴,۴)$ ۴) $(۲,۳)$

۶۸) برای متوازی‌الاضلاعی با رئوس $A(۳,-۱)$، $B(-۱,-۲)$ و $C(۱,۲)$، رأس D کدام نمی‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(۵,۳)$ ۲) $(۱,-۵)$ ۳) $(-۳,۱)$ ۴) $(۲,-۳)$

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

۱ | ۳ می‌دانیم هر نقطه روی محور x ها دارای عرض صفر و هر نقطه روی محور y ها دارای طول صفر است. با توجه به این‌که طبق فرض مسئله نقطهٔ $A(\alpha \,،\, ۲\beta - ۳)$ روی محور x ها و $B(۲\alpha - ۱ \,،\, ۳\beta)$ روی محور y هاست، می‌توان نوشت:

$$۲\beta - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲\beta = ۳ \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲} \quad ، \quad ۲\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه خواستهٔ مسئله برابر با ۴ می‌باشد. $۵\alpha + \beta = ۵(\frac{۱}{۲}) + \frac{۳}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$

---

۲ | ۲ طبق فرض مسئله دو نقطهٔ A و B هم‌عرض هستند، پس باید $۲a^۲ + a$ برابر با ۳ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۲a^۲ + a = ۳ \Rightarrow ۲a^۲ + a - ۳ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} a = ۱ \,،\, a = \frac{-۳}{۲}$$

کسی هست که یادش نباشه وقتی جمع ضرایب معادله صفره، یکی از ریشه‌ها ۱ و اون یکیش $\frac{c}{a}$ هستش؟

حالا باید بررسی کنیم به ازای a های به‌دست آمده، A و B در یک ناحیهٔ مختصاتی قرار نگیرند، پس داریم:

$a = ۱ : A(۱،۳) ، B(۲،۳)$ ✗ $\qquad a = \frac{-۳}{۲} : A(۱ \,،\, ۳) \,،\, B(-۳ \,،\, ۳)$ ✓

توجه داشته باشید به ازای $a = ۱$ دو نقطهٔ A و B هر دو در ناحیهٔ اول محورهای مختصات هستند ولی به ازای $a = -\frac{۳}{۲}$ نقطهٔ A در ناحیهٔ اول و نقطهٔ B در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد، پس $a = -\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $|a| = \frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

---

۳ | ۳ برای هر نقطه در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات، طول عددی منفی و عرض عددی مثبت است *(قبوله؟)*.

با توجه به این‌که طبق فرض مسئله، نقطهٔ $A(\frac{۲m-۳}{m+۱} \,،\, ۲m - m^۲)$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد، پس باید $\frac{۲m-۳}{m+۱} < ۰$ و $۲m - m^۲ > ۰$ باشند و در نتیجه داریم:

$\frac{۲m-۳}{m+۱} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

m	$-\infty$		-۱		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
$\frac{۲m-۳}{m+۱}$		+		−		+	

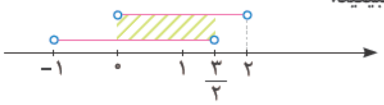
$\Rightarrow -۱ < m < \frac{۳}{۲} \quad (۱)$

$۲m - m^۲ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

m	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$۲m - m^۲$		−		+		−	

$\Rightarrow ۰ < m < ۲ \quad (۲)$

در نهایت مجموعه مقادیر قابل قبول برای m، اشتراک دو مجموعه جواب (۱) و (۲)، یعنی $۰ < m < \frac{۳}{۲}$ می‌باشد، ببینید:



---

۴ | ۳ با توجه به این‌که خط $(m+۲)y - mx = ۸$ از نقطهٔ $A(-۱،۱)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(m+۲)y - mx = ۸ \xrightarrow[\text{خط است}]{(-۱ \,،\, ۱) \text{ روی}} (m+۲)(۱) - m(-۱) = ۸ \Rightarrow ۲m + ۲ = ۸ \Rightarrow ۲m = ۶ \Rightarrow m = ۳$$

---

۵ | ۱ نقطه‌ای مانند A روی خط $۲x + ۳y = ۵(۱ - x)$ یا همان خط $۷x + ۳y = ۵$ قرار دارد که مختصات عرض آن از قرینهٔ طولش ۱ واحد کم‌تر است، پس فرض می‌کنیم $A(\alpha \,،\, -\alpha - ۱)$ باشد *(منطقیه دیگه؟)*. حالا با توجه به این‌که نقطهٔ A روی خط داده شده قرار دارد، پس مختصات طول و عرض آن روی خط صدق می‌کند، پس می‌توان نوشت:

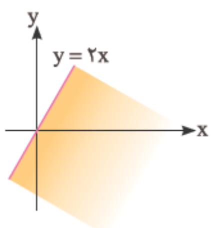
$$۷x + ۳y = ۵ \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{A(\alpha،-\alpha-۱) \text{ روی خط}} ۷\alpha + ۳(-\alpha - ۱) = ۵ \Rightarrow ۷\alpha - ۳\alpha - ۳ = ۵ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

در آخر خواستهٔ مسئله، طول این نقطه، یعنی $\alpha = ۲$ است.

---

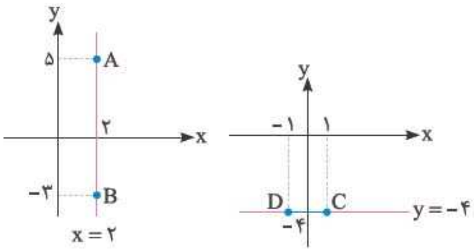
۶ | ۴ اگر نقطهٔ $M(x_۰،y_۰)$ بخواهد پایین خط $y = ۲x$ باشد، آنگاه $y_۰ < ۲x_۰$ می‌شود، پس در مورد نقطهٔ $M(۲\alpha + \frac{۵}{۲}،\alpha^۲)$ داریم:

$$\alpha^۲ < ۲(۲\alpha + \frac{۵}{۲}) \Rightarrow \alpha^۲ - ۴\alpha - ۵ < ۰ \Rightarrow (\alpha - ۵)(\alpha + ۱) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < \alpha < ۵$$



در نتیجه α اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد که تعدادشان ۵ تا است.

۷ | ۱ نقاط $A(۲,۵)$ و $B(۲,-۳)$ دو نقطهٔ هم‌طول با طول برابر ۲ هستند، پس معادلهٔ خط گذرنده از این دو نقطه به‌صورت $x=۲$ یا $x-۲=۰$ می‌باشد که به وضوح $m=-۲$ است. از طرفی دو نقطهٔ $C(۱,-۴)$ و $D(-۱,-۴)$ دو نقطهٔ هم‌عرض با عرض -۴ هستند، پس معادلهٔ خط گذرنده از این دو نقطه به‌صورت $y=-۴$ یا $y+۴=۰$ می‌باشد که به وضوح $n=۴$ است. در نهایت خواستهٔ مسئله، یعنی $m+n$ برابر با $-۲+۴=۲$ می‌باشد. برای درک بهتر به شکل‌های مقابل دقت کنید:



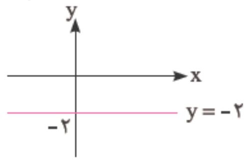
---

۸ | ۲ ابتدا معادلهٔ خط داده شده را با فاکتورگیری به‌صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم، ببینید: $mx+(۲+m)y+x=۲m \Rightarrow (m+۱)x+(۲+m)y=۲m$

از طرفی می‌دانیم معادلهٔ هر خط موازی با محور xها به‌صورت $y=k$ است، پس باید در معادلهٔ این خط، ضریب x صفر باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$m+۱=۰ \Rightarrow m=-۱\ ;\ (m+۱)x+(۲+m)y=۲m \xrightarrow{m=-۱} (۲-۱)y=-۲ \Rightarrow y=-۲$$

در آخر این‌که نمودار این خط به‌صورت



است که به وضوح محور yها را با عرض -۲ قطع می‌کند.

---

۹ | ۳ می‌دانیم همهٔ نقاطی که روی یک خط موازی محور yها قرار دارند دارای طول‌های برابر هستند، پس داریم:

$$a^۲+a=۶ \Rightarrow a^۲+a-۶=۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۳ & ✓ \\ a=۲ & × \end{cases}$$

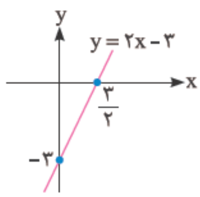
توجه داشته باشید به ازای $a=۲$ نقطهٔ B به‌صورت $B(۶,۲)$ است که در ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار دارد ولی به ازای $a=-۳$ نقطهٔ B به‌صورت $B(۶,-۳)$ است که در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات قرار دارد. خلاصه این‌که $a=-۳$ و در نتیجه $a^۲=۹$ می‌باشد.

---

۱۰ | ۲ نمودار هر یک از خط‌ها را رسم می‌کنیم:

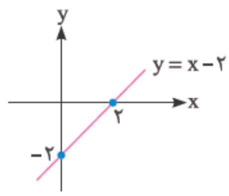
«گزینهٔ «۱»: $y=۲x-۳$

x	۰	$\frac{۳}{۲}$
y	-۳	۰

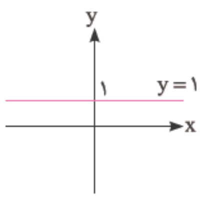


«گزینهٔ «۲»: $y=x-۲$

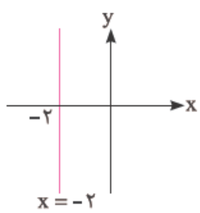
x	۰	۲
y	-۲	۰



«گزینهٔ «۳»: $y=۱$



«گزینهٔ «۴»: $x=-۲$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید فقط نمودار داده شده در گزینهٔ «۲» به درستی رسم نشده است.

---

۱۱ | ۳ می‌دانیم شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ برابر $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ است. با استفاده از این رابطه، شیب خط AB برابر $\frac{۰-(-۳)}{-۱-۲}=\frac{۳}{-۳}=-۱$ می‌باشد. حالا شیب خط گذرنده از نقاط C و D را در هر یک از چهار گزینه به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

«گزینهٔ «۱»: $m_{CD}=\frac{۱-(-۲)}{۰-(-۲)}=\frac{۳}{۲}$ ×

«گزینهٔ «۲»: $m_{CD}=\frac{۵-(-۴)}{۴-(-۵)}=\frac{۹}{۹}=۱$ ×

«گزینهٔ «۳»: $m_{CD}=\frac{۵-(-۴)}{-۴-۵}=\frac{۹}{-۹}=-۱$ ✓

«گزینهٔ «۴»: $m_{CD}=\frac{-۱-۲}{۰-۲}=\frac{۳}{۲}$ ×

۱۲ **۳** خط d از دو نقطهٔ $A(2,0)$ و $B(0,3)$ می‌گذرد، پس شیب این خط برابر است با: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-0}{0-2}=\frac{-3}{2}$

از طرفی چون عرض از مبدأ این خط ۳ است، پس معادلهٔ خط d به‌صورت $y=-\frac{3}{2}x+3$ می‌باشد که از بین نقاط داده شده فقط نقطهٔ $(4,-3)$ روی این خط قرار دارد، ببینید:

$$y=-\frac{3}{2}x+3 \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{(4,-3)\ \text{روی خط}} -3=\frac{-3}{2}(4)+3 \Rightarrow -3=-3 \ \checkmark$$

---

۱۳ **۳** ابتدا شیب خط گذرنده از این دو نقطه را با استفاده از رابطهٔ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به‌دست می‌آوریم، پس داریم: $m=\frac{7-1}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2$

حالا با استفاده از رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ و نقطهٔ $B(-1,1)$، سراغ نوشتن معادلهٔ خط می‌رویم، ببینید: $y-1=2(x-(-1)) \Rightarrow y-1=2x+2 \Rightarrow y=2x+3$

در نهایت برای به‌دست آوردن طول نقطه برخورد این خط با محور xها، به‌جای y صفر می‌گذاریم، پس مقدار طول از مبدأ برابر $x=-\frac{3}{2}$ یا همان x = -۱/۵ می‌شود.

---

۱۴ **۲** ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را پیدا می‌کنیم، ببینید:

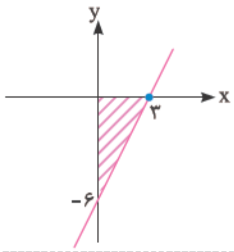
$$\text{شیب}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(m+5)-(1-m)}{m-1-(-3)}=\frac{2m+4}{m+2}=\frac{2\cancel{(m+2)}}{\cancel{m+2}}=2$$

حالا با معلوم بودن شیب خط و این‌که یکی از نقاط واقع بر خط $(3,0)$ است، با کمک گرفتن از رابطهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلهٔ خط را پیدا می‌کنیم. معادلهٔ این خط به‌صورت مقابل است:

$$y-0=2(x-3) \Rightarrow y=2x-6$$

در آخر مساحت ناحیهٔ محدود به این خط و محورهای مختصات برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}(3)(6)=\frac{18}{2}=9$$



---

۱۵ **۴** می‌دانیم اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط p و q باشند، مساحت محدود به خط و محورهای مختصات برابر $S=\frac{1}{2}|pq|$ است. در این جا طول از مبدأ a و عرض از مبدأ برابر ۴ می‌باشد (چرا؟)، پس داریم:

$$S=\frac{1}{2}|4a|=12 \xrightarrow{\times 2} |4a|=24 \Rightarrow \begin{cases} 4a=24 \Rightarrow a=6 & \times \\ 4a=-24 \Rightarrow a=-6 & \checkmark \end{cases}$$

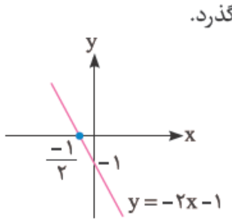
با توجه به نمودار داده شده به وضوح $a<0$ است، پس فقط $a=-6$ قابل قبول می‌باشد.

---

۱۶ **۱** می‌دانیم معادلهٔ هر خط به‌صورت $y=mx+h$ است که در آن m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است. در اینجا با توجه به این‌که طبق فرض مسئله شیب خط ۲ برابر عرض از مبدأ آن است، معادلهٔ خط را به‌صورت $y=2ax+a$ در نظر می‌گیریم. از طرفی با توجه به این‌که خط از نقطهٔ $A(2,-5)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$y=2ax+a \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{A(2,-5)\ \text{روی خط}} -5=2a(2)+a \Rightarrow 4a+a=-5 \Rightarrow 5a=-5 \Rightarrow a=-1$$

پس معادلهٔ خط به‌صورت $y=-2x-1$ می‌باشد و همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودار خط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.



x	0	$-\frac{1}{2}$
y	-1	0

---

۱۷ **۲** می‌دانیم شیب یک خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. طبق فرض مسئله خط گذرنده از نقاط $A(m, 2m+2)$ و $B(-m, 5m+1)$ با جهت منفی محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، یعنی زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها 135° و تانژانت آن -1 می‌باشد، پس شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را پیدا می‌کنیم و جوابش را برابر -1 می‌گذاریم، در نتیجه داریم:

$$\text{شیب}=\frac{(2m+2)-(5m+1)}{m-(-m)}=\frac{-3m+1}{2m}=-1 \Rightarrow -3m+1=-2m \Rightarrow m=1$$

---

۱۸ **۴** برای به‌دست آوردن نقطهٔ برخورد دو خط $2y+x=5$ و $y=2x-5$ کافی است دستگاه شامل معادلات این دو خط را حل کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} 2y+x=5 \\ y=2x-5 \end{cases} \Rightarrow 2(2x-5)+x=5 \Rightarrow 5x-10=5 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3, y=1$$

در نتیجه خواستهٔ مسئله $x+y=3+1=4$ است.

۱۹ | **۲** طبق فرض مسئله دو خط $ax+۳y=b$ و $۲ax+by=۴$ همدیگر را در نقطهٔ $(۲,۱)$ قطع می‌کنند، پس مختصات این نقطه در هر دو خط صدق می‌کند و در نتیجه داریم:

$$a+۶=b \quad (۱) \qquad ۲a+۲b=۴ \xrightarrow{\div ۲} a+b=۲ \quad (۲)$$

حالا با حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a-\cancel{b}=-۶ \\ a+\cancel{b}=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a=-۴ \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow b=۴$$

---

۲۰ | **۱** با توجه به این‌که دو خط $y=۲x+a$ و $y=ax+۲b$ همدیگر را در نقطهٔ $(۱,۰)$ قطع می‌کنند، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند و می‌توان نوشت:

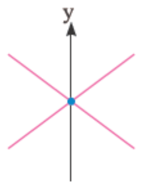
$$y=۲x+a \xrightarrow{\text{نقطهٔ } (۱,۰) \text{ روی خط است.}} ۰=۲+a \Rightarrow a=-۲$$

$$y=ax+۲b \xrightarrow{\text{نقطهٔ } (۱,۰) \text{ روی خط است.}} ۰=a+۲b \xrightarrow{a=-۲} ۲b=۲ \Rightarrow b=۱$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر $a+b=-۱$ است.

---

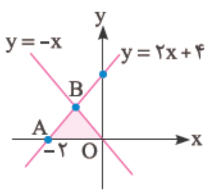
۲۱ | **۱** مطابق شکل، وقتی که دو خط همدیگر را روی محور yها قطع می‌کنند، طول نقطهٔ تقاطع صفر می‌شود، پس مقدار دو خط داده شده به‌ازای $x=۰$ برابر می‌شود و داریم:



$$\begin{cases} mx+y=۲ \xrightarrow{x=۰} y=۲ \\ -x+(m+۱)y=۴ \xrightarrow{x=۰} y=\frac{۴}{m+۱} \end{cases} \Rightarrow ۲=\frac{۴}{m+۱} \Rightarrow ۲m+۲=۴ \Rightarrow m=۱$$

---

۲۲ | **۲** هر دو خط گفته‌شده را رسم می‌کنیم. مطابق شکل، ناحیهٔ محدودشده یک مثلث است که نامش را OAB می‌گذاریم. حالا برای پیدا کردن مساحت این مثلث باید نقطهٔ B را پیدا کنیم که این نقطه محل برخورد دو خط $y=-x$ و $y=۲x+۴$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با:

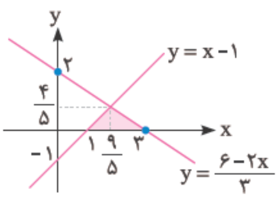


$$۲x+۴=-x \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$$

حالا با جای‌گذاری $x=-\frac{۴}{۳}$ در یکی از دو خط به‌راحتی $y_B=\frac{۴}{۳}$ می‌شود. در نهایت مساحت مثلث OAB برابر با $S=\frac{۱}{۲}\times(۲)\times(\frac{۴}{۳})=\frac{۴}{۳}$ است.

---

۲۳ | **۱** نمودار دو خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار این دو خط و محور xها را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}(۲)(\frac{۴}{۵})=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

توجه داشته باشید که طول نقطهٔ تلاقی دو خط از حل معادلهٔ $x-۱=\frac{۶-۲x}{۳}$ و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید، ببینید:

$$x-۱=\frac{۶-۲x}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۳x-۳=۶-۲x \Rightarrow ۵x=۹ \Rightarrow x=\frac{۹}{۵} \Rightarrow y=\frac{۴}{۵}$$

---

۲۴ | **۳** اول از همه نقطهٔ تقاطع دو خط $۳x-y=۲$ و $۲x+y=۸$ را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{cases} ۳x-\cancel{y}=۲ \\ ۲x+\cancel{y}=۸ \end{cases} \Rightarrow ۵x=۱۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۴;\ A(۲,۴)$$

حالا با توجه به این‌که خط سوم، یعنی خط $x-ay=۱۰$ هم باید از نقطهٔ $A(۲,۴)$ بگذرد، پس باید این نقطه در خط $x-ay=۱۰$ صدق کند، پس داریم:

$$x-ay=۱۰ \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{A(۲,۴) \text{ روی خط}} ۲-۴a=۱۰ \Rightarrow ۴a=-۸ \Rightarrow a=-۲$$

---

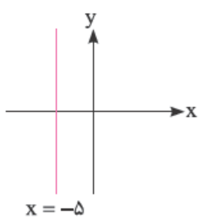
۲۵ | **۳** ابتدا شیب هر یک از خط‌های $x=my+۱$ و $۲x+۵y=۳$ را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$x=my+۱ \Rightarrow x-my=۱;\ \text{شیب}=\frac{-۱}{-m}=\frac{۱}{m} \qquad , \qquad ۲x+۵y=۳;\ \text{شیب}=\frac{-۲}{۵}$$

با توجه به این‌که طبق فرض مسئله این دو خط با هم موازی هستند، پس شیب آن‌ها با هم برابر است و در نتیجه برای محاسبهٔ مقدار m می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{m}=\frac{-۲}{۵} \Rightarrow m=\frac{-۵}{۲}$$

در نتیجه خط $x=۲m=۲(\frac{-۵}{۲})=-۵$ یک خط موازی محور عرض‌ها و در سمت چپ آن می‌باشد، ببینید:



۲۶ ۲ شیب خط $2x+y=5$ برابر با $-2=\frac{-2}{1}$ می‌باشد و با توجه به این‌که خط مورد نظر با این خط موازی است، پس شیب آن خط هم برابر ۲- می‌باشد و برای نوشتن معادلهٔ آن با استفاده از رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$، داریم: $y-(-1)=-2(x-2)\Rightarrow y+1=-2x+4\Rightarrow y=-2x+3$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض از مبدأ این خط برابر با ۳ است.

---

۲۷ ۲ شیب خط $ax+by=-1$ برابر با $\frac{-a}{b}$ و شیب خط $ay+x=b$ برابر با $\frac{-1}{a}$ است. با توجه به این‌که طبق فرض مسئله این دو خط موازی هستند، پس باید شیب آن‌ها با هم برابر باشد و در نتیجه می‌توان نوشت: $-\frac{a}{b}=\frac{-1}{a}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{a}\Rightarrow b=a^2$

از طرفی در صورت تست گفته شده که خط $ax+by=-1$ از نقطهٔ $(2,1)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و داریم:

$$ax+by=-1\xrightarrow[\text{خط است.}]{\text{روی }(2,1)}2a+b=-1\xrightarrow{b=a^2}2a+a^2=-1\Rightarrow a^2+2a+1=0\Rightarrow(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1\,,\,b=a^2=1$$

در نهایت $a^2+2b=1+2(1)=3$ می‌باشد.

---

۲۸ ۴ ابتدا شیب هر یک از خط‌های $y=1-3x$ و $2x=(m+1)y+3$ را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$2x-(m+1)y=3\,;\ \text{شیب}=\frac{-2}{-(m+1)}=\frac{2}{m+1}\qquad y=1-3x\,;\ \text{شیب}=-3$$

طبق فرض مسئله این دو خط بر هم عمود هستند، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر با ۱- می‌باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(-3)(\frac{2}{m+1})=-1\Rightarrow\frac{6}{m+1}=1\Rightarrow 6=m+1\Rightarrow m=5$$

---

۲۹ ۴ ابتدا شیب خط گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ را با استفاده از رابطهٔ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$\text{شیب}=\frac{b-a}{a-b}=\frac{-(a-b)}{a-b}=-1$$

از طرفی شیب خط $x+(1+2m)y=m+3$ برابر $\frac{-1}{1+2m}$ می‌باشد و چون طبق فرض مسئله این دو خط بر هم عمودند، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها ۱- است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(-1)(\frac{-1}{1+2m})=-1\Rightarrow\frac{1}{1+2m}=-1\Rightarrow 1+2m=-1\Rightarrow 2m=-2\Rightarrow m=-1$$

پس معادلهٔ خط d به صورت $x-y=2$ یا $y=x-2$ است که عرض از مبدأ آن برابر ۲- می‌باشد.

---

۳۰ ۴ همگی باید بدانیم که $7+4\sqrt{3}$ همان $(2+\sqrt{3})^2$ است. حالا با توجه به این‌که خط d' عمود بر خط d با شیب $\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ است، پس شیب خط d' عکس و قرینهٔ شیب خط d می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{d'}=\frac{-1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}=\frac{-1}{\underbrace{|2+\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}}}=\frac{-1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{-(2-\sqrt{3})}{4-3}=\sqrt{3}-2$$

---

۳۱ ۱ ابتدا نقطهٔ تلاقی دو خط $3y-x=2$ و $y+2x=3$ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار دستگاه شامل معادلات این دو خط را حل می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases}3y-x=2\\y+2x=3\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}6y-\cancel{2x}=4\\y+\cancel{2x}=3\end{cases}\Rightarrow 7y=7\Rightarrow y=1\Rightarrow x=1$$

پس نقطهٔ تلاقی به‌صورت $(1,1)$ است. از طرفی شیب خط $2y-4x=1$ برابر با $2=\frac{-(-4)}{2}$ است و چون خط موردنظر بر این خط عمود است، شیب آن قرینه و معکوس عدد ۲ یعنی $\frac{-1}{2}$ می‌باشد و در نتیجه با استفاده از رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(1,1)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-1)\Rightarrow y-1=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$$

در آخر با توجه به این‌که نقطهٔ $A(2,a)$ روی این خط قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند و برای محاسبهٔ مقدار a می‌توان نوشت:

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\xrightarrow[\text{روی خط است.}]{(2,a)}a=\frac{-1}{2}(2)+\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

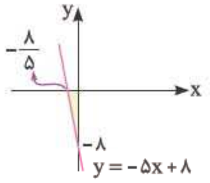
۳۲ **۴** ابتدا نقطهٔ برخورد خط $y=2x+6$ و نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم یعنی $y=-x$ را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$2x+6=-x \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=-2 , y=2$$

در نتیجه نقطهٔ برخورد این دو خط به‌صورت $(-2 , 2)$ می‌باشد. از طرفی خط موردنظر بر خط به معادلهٔ $x-5y=1$ با شیب $\frac{1}{5}=\frac{-1}{-5}$ عمود است، پس باید شیب این خط ۵- باشد. حالا با استفاده از رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ با توجه به این‌که شیب خط ۵- است و از نقطهٔ $(-2 , 2)$ می‌گذرد، معادلهٔ این خط را نوشته و با رسم نمودار آن خواستهٔ مسئله را به‌دست می‌آوریم، ببینید:

معادلهٔ خط: $y-(2)=-5(x+2) \Rightarrow y-2=-5x-10 \Rightarrow y=-5x-8$

x	0	$-\frac{8}{5}$
y	-8	0



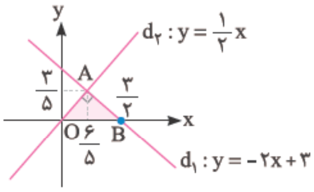
$$S=\frac{1}{2}(8)(\frac{8}{5})=\frac{32}{5}=6/4$$

۳۳ **۳** می‌دانیم شیب یک خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، پس باید با استفاده از روابط $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ و $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$، مقدار $\tan\theta$، یعنی شیب خط d_1 را به‌دست آوریم، پس داریم:

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2} \Rightarrow 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 1+\cot^2\theta=\frac{5}{4} \Rightarrow \cot^2\theta=\frac{1}{4} \xrightarrow{\theta\ \text{منفرجه}} \cot\theta=\frac{-1}{2} \xrightarrow{\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}} \tan\theta=-2$$

در نتیجه معادلهٔ خط d_1 با توجه به این‌که شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۳ است، به‌صورت $y=-2x+3$ می‌باشد.

همچنین d_2 بر خط d_1 عمود است و در نتیجه شیب آن برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد و چون از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{1}{2}x$ می‌باشد و در نتیجه برای محاسبهٔ خواستهٔ مسئله می‌توان نوشت: $S=\frac{1}{2}(\frac{3}{2})(\frac{3}{5})=\frac{9}{20}=0/45$



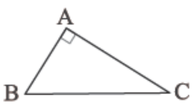
توجه داشته باشید B محل برخورد خط d_1 با محور xها و A محل برخورد دو خط d_1 و d_2 است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$B: y=-2x+3 \xrightarrow{y=0} -2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$A: -2x+3=\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times 2} -4x+6=x \Rightarrow 5x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{5} \Rightarrow y=\frac{3}{5} \Rightarrow A(\frac{6}{5},\frac{3}{5})$$

۳۴ **۴** با توجه به این‌که مثلث ABC در رأس A قائمه است، پس دو ضلع AB و AC بر هم عمودند. حالا شیب دو خط AB و AC را به‌دست می‌آوریم، ببینید:

$$m_{AB}=\frac{m-1}{2-(-1)}=\frac{m-1}{3} \quad , \quad m_{AC}=\frac{m-6}{2-0}=\frac{m-6}{2}$$



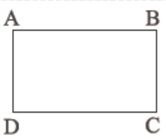
با توجه به این‌که این دو خط بر هم عمود هستند، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر ۱- می‌باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$m_{AB}\times m_{AC}=-1 \Rightarrow (\frac{m-1}{3})(\frac{m-6}{2})=\frac{m^2-7m+6}{6}=-1 \Rightarrow m^2-7m+6=-6 \Rightarrow m^2-7m+12=0 \Rightarrow (m-3)(m-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر ۷ می‌باشد.

۳۵ **۳** ابتدا شکل فرضی مقابل را در نظر گرفته و هم‌چنین شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(1 , 2)$ و $B(4 , 3)$ را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$$



از طرفی با توجه به این‌که اضلاع مجاور مستطیل بر هم عمودند، پس شیب خط BC عکس و قرینه شیب خط AB است، در واقع $m_{BC}=-3$ می‌باشد. حالا با استفاده از رابطهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلهٔ خط BC به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$B(4,3) , m_{BC}=-3 ; y-3=-3(x-4) \Rightarrow y+3x=15$$

۳۶ **۳** ابتدا شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم، ببینید:

$$my-8x=-1 ; \text{شیب}=\frac{-(-8)}{m}=\frac{8}{m} \qquad m^2x+y=2 ; \text{شیب}=\frac{-m^2}{1}=-m^2$$

حالا مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر دو خط داده شده معادلهٔ دو ضلع روبه‌روی هم از مستطیل باشند، باید با هم موازی باشند، یعنی شیب آن‌ها با هم برابر باشد، پس داریم:

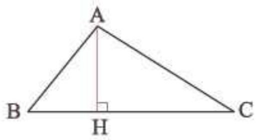
$$\frac{8}{m}=-m^2 \Rightarrow -m^3=8 \Rightarrow m^3=-8 \Rightarrow m=-2$$

حالت دوم: اگر این دو خط، معادلهٔ دو ضلع مجاور از مستطیل باشند، بر هم عمودند، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر ۱- می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\frac{8}{m}(-m^2)=-1 \Rightarrow 8m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{8}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب مقادیر m برابر $-2\times(\frac{1}{8})=-\frac{1}{4}$ می‌باشد.

۳۷ **۲** شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



همگی می‌دانیم که شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{۳}{۲}$ است و در نتیجه شیب خط عمود بر آن، یعنی AH مساوی $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد. از طرفی برای پیدا کردن معادلهٔ خط AH به یک نقطه از این خط، یعنی A نیاز داریم که به وضوح این نقطه محل برخورد دو خط AB و AC است. پس با حل دستگاه شامل معادلات AB و AC مختصات نقطهٔ A را پیدا می‌کنیم، ببینید:

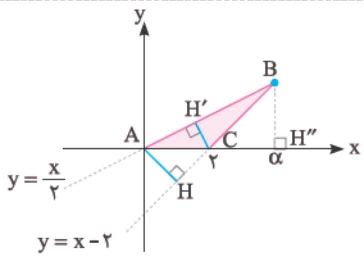
$$\begin{cases}۲y-x=۳\\ y-۲x=۵\end{cases}\xrightarrow{\times(-۲)}\begin{cases}-۴y+\cancel{۲x}=-۶\\ y-\cancel{۲x}=۵\end{cases}\Rightarrow -۳y=-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{-۷}{۳}\ ;\ A(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳})$$

در آخر با داشتن نقطهٔ $A(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳})$ و شیب خط AH، یعنی $\frac{۲}{۳}$، معادلهٔ این خط به‌صورت زیر به‌دست آید:

$$y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}(x+\frac{۷}{۳})\xrightarrow{\times ۹}۹y-۳=۶x+۱۴\Rightarrow ۹y-۶x=۱۷$$

---

۳۸ **۳** شکل مثلثی که اضلاع آن روی خط‌های $y=x-۲$، $y=\frac{x}{۲}$ و $y=۰$ قرار دارد، به‌صورت مقابل است:

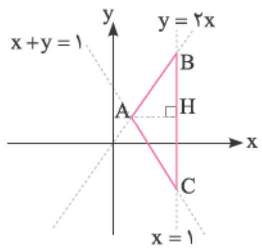


مطابق شکل رسم‌شده بزرگترین ارتفاع مثلث ″BH است که خطی عمودی می‌باشد و معادله‌اش به‌صورت $x=\alpha$ است. حالا برای پیداکردن α دوخط $y=\frac{x}{۲}$ و $y=x-۲$ را با هم قطع می‌دهیم، پس داریم:

$$\frac{x}{۲}=x-۲\Rightarrow\frac{x}{۲}=۲\Rightarrow x=۴$$

---

۳۹ **۱** شکل مثلثی که اضلاع آن $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ باشد به صورت مقابل است:



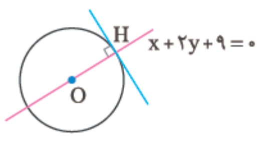
با توجه به این شکل، کوچکترین ارتفاع در این مثلث AH است که برای محاسبهٔ معادلهٔ ارتفاع AH، ابتدا باید دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ را با هم قطع دهیم تا مختصات نقطهٔ A به دست آید:

$$\begin{cases}x+y=۱\\ y=۲x\end{cases}\Rightarrow x+۲x=۱\Rightarrow ۳x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}$$

با توجه به آنکه ارتفاع AH افقی است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

---

۴۰ **۲** شیب خط مماس بر دایره یعنی خط $x+۲y+۹=۰$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است و مطابق شکل مقابل، خط عمود بر این خط که به وضوح شیبش ۲ است از مرکز دایره می‌گذرد (حله؟). در واقع به راحتی با داشتن نقطهٔ $O(۱,۰)$ و هم‌چنین شیب این خط یعنی ۲، می‌توانیم معادلهٔ خط گذرنده از مرکز دایره را بنویسیم، ببینید:



$$O(۱,۰)\ ,\ m=۲\ ;\ y-۰=۲(x-۱)\Rightarrow y-۲x+۲=۰$$

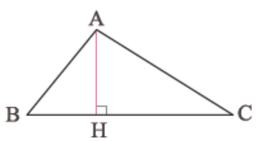
از طرفی مطابق شکل، نقطهٔ تماس خط و دایره، نقطهٔ H است که برای پیدا کردن مختصات این نقطه باید دو خط $x+۲y+۹=۰$ و $y-۲x+۲=۰$ را در یک دستگاه حل کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x+۲y+۹=۰\\ y-۲x+۲=۰\end{cases}\xrightarrow{\times(-۲)}\begin{cases}x+\cancel{۲y}+۹=۰\\ -\cancel{۲y}+۴x-۴=۰\end{cases}\Rightarrow ۵x+۵=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=-۴$$

خلاصه این‌که مختصات نقطهٔ H به‌صورت $H(-۱,-۴)$ و در نتیجه $x_H+y_H=-۱-۴=-۵$ می‌باشد.

---

۴۱ **۱** با توجه به شکل مقابل، برای پیداکردن مختصات پای ارتفاع AH، یعنی H باید معادلهٔ دو خط BC و AH را پیدا کنیم و آن‌ها را در یک دستگاه قطع بدهیم.



برای این کار اول با داشتن دو نقطهٔ B و C معادلهٔ خط BC را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$B(۲,۲)\ ,\ C(۶,-۲)\ ;\ m_{BC}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲+۲}{۲-۶}=-۱\ ;\ \text{معادلهٔ BC}: y-۲=-۱(x-۲)\Rightarrow y=-x+۴$$

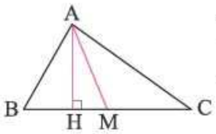
از طرفی شیب خط BC برابر ۱- و در نتیجه شیب خط AH عکس و قرینهٔ آن یعنی ۱ است. حالا با داشتن نقطهٔ $A(۰,۰)$ و همچنین شیب ۱، معادلهٔ ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$A(۰,۰)\ ,\ m_{AH}=۱\ ;\ \text{معادلهٔ AH}: y-۰=۱(x-۰)\Rightarrow y=x$$

در آخر از حل دستگاه شامل معادلات $BC: y=-x+۴$ و $AH: y=x$ مختصات نقطهٔ تقاطع، یعنی H پیدا می‌شود، ببینید:

$$\begin{cases}y+\cancel{x}=۴\\ y-\cancel{x}=۰\end{cases}\Rightarrow ۲y=۴\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=۲\ ;\ H(۲,۲)$$

۴۲ **۲** طبق شکل مقابل، ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را می‌یابیم: $M(\frac{-۱+۵}{۲},\frac{۱+۲}{۲}) \Rightarrow M(۲,\frac{۳}{۲})$



حالا به‌سراغ محاسبهٔ مختصات نقطهٔ H می‌رویم. ابتدا معادلهٔ خط BC را نوشته و سپس با قرینه و معکوس کردن شیب خط BC، شیب AH را یافته و معادلهٔ AH را می‌نویسیم، داریم:

$$m_{BC}=\frac{۲-۱}{۵+۱}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \text{معادلهٔ } BC: y-۲=\frac{۱}{۶}(x-۵) \Rightarrow y=\frac{x}{۶}+\frac{۷}{۶}$$

$$m_{AH}=-۶ \Rightarrow \text{معادلهٔ } AH: y-۱=-۶(x-۲) \Rightarrow y=-۶x+۱۳$$

اکنون کافی است معادلهٔ دو خط BC و AH را با هم قطع دهیم تا مختصات H را بیابیم، می‌نویسیم:

$$\frac{x}{۶}+\frac{۷}{۶}=-۶x+۱۳ \Rightarrow \frac{x}{۶}+۶x=۱۳-\frac{۷}{۶} \Rightarrow \frac{۳۷}{۶}x=\frac{۷۸-۷}{۶} \Rightarrow \frac{۳۷}{\cancel{۶}}x=\frac{۷۱}{\cancel{۶}} \Rightarrow x_H=\frac{۷۱}{۳۷} \Rightarrow x_M+x_H=۲+\frac{۷۱}{۳۷}=\frac{۷۴+۷۱}{۳۷}=\frac{۱۴۵}{۳۷}$$

---

۴۳ **۴** شرط قرار گرفتن سه نقطهٔ $A(۰,۰)$، $B(a,۳)$ و $C(۶,۴a+۱)$ در یک راستا این است که $m_{AB}=m_{BC}$، پس می‌توان نوشت:

$$m_{AB}=\frac{۳-۰}{a-۰}=\frac{۳}{a} \;,\; m_{BC}=\frac{۴a+۱-۳}{۶-a} \Rightarrow \frac{۳}{a}=\frac{۴a-۲}{۶-a} \Rightarrow ۴a^۲-۲a=۱۸-۳a \Rightarrow ۴a^۲+a-۱۸=۰$$

$$\Delta=۱-۴(۴)(-۱۸)=۱+۲۸۸=۲۸۹ \Rightarrow a=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۸۹}}{۸}=\frac{-۱\pm۱۷}{۸} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=-\frac{۹}{۴} \end{cases}$$

---

۴۴ **۲** شیب خط $۲y-x=۱$ برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{-(-۱)}{۲}$ و شیب خط $۳x+۹y=۲$ برابر $\frac{-۳}{۹}=\frac{-۱}{۳}$ است. حالا برای محاسبهٔ زاویهٔ حادهٔ بین این دو خط با استفاده از رابطهٔ $\tan\alpha=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$ می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۳})}{۱+(\frac{۱}{۲})(\frac{-۱}{۳})}\right|=\left|\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۶}}\right|=\left|\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۵}{۶}}\right|=|۱|=۱ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

---

۴۵ **۲** با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه، طول اضلاع AB، BC و AC را پیدا کرده و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$AB=\sqrt{(۱+۳)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷} \;,\; AC=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳} \;,\; BC=\sqrt{(-۳-۴)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}$$

به‌وضوح ضلع متوسط مثلث، AB است که اندازه‌اش برابر $\sqrt{۱۷}$ می‌باشد.

---

۴۶ **۲** ابتدا با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه از هم، اندازهٔ هر یک از اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$AC=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۵-(-۲))^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۷^۲+۱^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که در این مثلث، رابطهٔ فیثاغورس به‌صورت $AB^۲+AC^۲=BC^۲$ برقرار است *(موافقی؟)*، این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشد و محیط آن برابر با $۵+۵+۵\sqrt{۲}=۵(۲+\sqrt{۲})$ است.

---

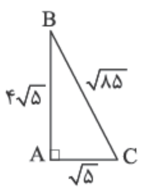
۴۷ **۲** ابتدا اندازهٔ هر یک از اضلاع مثلث را با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

$$AC=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(۵-(-۱))^۲+(-۵-۲)^۲}=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵}$$

با توجه به این‌که در این مثلث، رابطهٔ فیثاغورس به‌صورت $AB^۲+AC^۲=BC^۲$ برقرار است، این مثلث در رأس A قائمه می‌باشد و برای محاسبهٔ مساحت آن می‌توان نوشت:



$$S=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵}\times۴\sqrt{۵}=۱۰$$

جلوتر روش‌های بهتری برای حل این تست گفته می‌شه.

۴۸ **۴** دو نقطهٔ $A(1,3)$ و $B(m,3)$ دو نقطهٔ هم‌عرض هستند، پس فاصلهٔ آن‌ها قدرمطلق تفاضل طول‌ها یعنی $AB=|m-1|$ و دو نقطهٔ $A(1,3)$ و $C(1,m+1)$ دو نقطهٔ هم‌طول هستند و در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها قدرمطلق تفاضل عرض آن‌ها یعنی $AC=|m-2|$ می‌باشد. از طرفی با توجه به فرض مسئله $AB=2AC$ می‌باشد و برای محاسبهٔ مقادیر m می‌توان نوشت:

$$|m-1|=2|m-2| \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^2-2m+1=4(m^2-4m+4) \Rightarrow m^2-2m+1=4m^2-16m+16 \Rightarrow 3m^2-14m+15=0$$

$$\Delta=(-14)^2-4(3)(15)=196-180=16 \Rightarrow \begin{cases} m_1=\frac{14+4}{6}=3 \\ m_2=\frac{14-4}{6}=\frac{5}{3} \end{cases}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب مقادیر m برابر $3(\frac{5}{3})=5$ است.

۴۹ **۴** می‌دانیم فاصلهٔ دو انتهای قطر دایره برابر با اندازهٔ قطر دایره است، پس با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه می‌توان نوشت:

$$\text{اندازهٔ قطر}=\sqrt{(7-2)^2+(8-(-4))^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

پس اندازهٔ شعاع دایره $r=\frac{13}{2}$ می‌باشد و محیط این دایره $P=2\pi r=2\pi(\frac{13}{2})=13\pi$ است.

۵۰ **۳** مطابق شکل صورت سؤال، BD هم قطر دایره و هم قطر مربع است، **پس قبل از هر چیز طول آن را پیدا می‌کنیم:**

$$BD=\sqrt{(2+4)^2+(8-0)^2}=\sqrt{36+64}=10$$

از طرفی همگی بلدیم که قطر مربع، $\sqrt{2}$ برابر ضلع آن است *(بلدیم دیگه؟)*، **پس طول ضلع و مساحت مربع برابر است با:**

$$\text{قطر مربع}=\sqrt{2}\times\text{ضلع} \Rightarrow \text{ضلع}=\frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت مربع}=(\frac{10}{\sqrt{2}})^2=\frac{100}{2}=50$$

همچنین چون قطر دایره ۱۰ است، پس شعاع آن ۵ و مساحت دایره برابر $\pi r^2=3\times(5)^2=75$ می‌باشد. **در نهایت مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با مساحت دایره** منهای مساحت مربع می‌شود، یعنی $75-50=25$.

۵۱ **۴** همگی می‌دانیم که قطرهای دایره در مرکز دایره همدیگر را قطع می‌کنند، پس می‌توان نوشت:

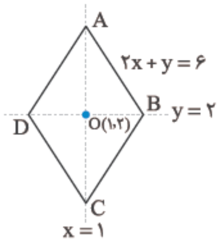
$$\begin{cases} \cancel{2x}-3y=5 \\ \cancel{-2x}-5y=3 \end{cases} \Rightarrow -8y=8 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=1 \quad ; \quad A(1,-1)$$

حالا با توجه به آن‌که طبق فرض مسئله دایره از نقطهٔ $O(0,0)$ هم می‌گذرد، پس فاصلهٔ این دو نقطه همان شعاع دایره است، پس داریم:

$$OA=\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$$

در نهایت قطر دایره برابر $2\sqrt{2}$ می‌شود.

۵۲ **۴** شکل مقابل، احوالات صورت مسئله را به‌خوبی نمایش می‌دهد:



دقت داشته باشید که چون محورهای مختصات به موازات قطرهای لوزی هستند و قطرها از نقطهٔ $O(1,2)$ می‌گذرند، پس به ناچار معادلهٔ قطرها $x=1$ و $y=2$ می‌شود *(قبوله؟)*.

از طرفی یکی از اضلاع لوزی خط $2x+y=6$ است، پس مطابق شکل روبه‌رو، مختصات B و C به‌راحتی پیدا می‌شود، ببینید:

$$2x+y=6 \begin{cases} \xrightarrow{y=2} 2x+2=6 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \;;\; B(2,2) \\ \xrightarrow{x=1} 2(1)+y=6 \Rightarrow y=4 \;;\; A(1,4) \end{cases}$$

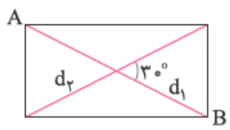
در نهایت، برای پیدا کردن محیط لوزی، طول AB را پیدا و سپس در ۴ ضرب می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5} \Rightarrow \text{محیط}=4\sqrt{5}$$

۵۳ **۳** فاصلهٔ نقاط A و B برابر با اندازهٔ قطر مستطیل است، پس داریم:

$$d=AB=\sqrt{(4-(-2))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

از طرفی با توجه به این‌که در مستطیل اندازهٔ قطرها با هم برابر است، برای محاسبهٔ مساحت این مستطیل با استفاده از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$ می‌توان نوشت:



$$S=\frac{1}{2}(10)(10)\sin 30^\circ=\frac{1}{2}(10)(10)(\frac{1}{2})=\frac{100}{4}=25$$

توجه داشته باشید مساحت هر چهارضلعی دلخواه با اندازهٔ قطرهای d_1 و d_2 که زاویهٔ بین آن‌ها θ است از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$ محاسبه می‌شود *(یادت اومد؟)*.

۵۴ | **۲** می‌دانیم مختصات هر نقطه روی خط $y=۱-۲x$ به‌صورت $A(\alpha\,،\,۱-۲\alpha)$ است (قبوله؟). همچنین طبق فرض مسئله، فاصلهٔ این نقاط از مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ برابر $\sqrt{۱۰}$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

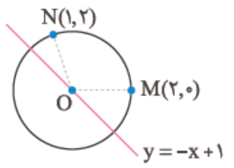
$$OA=\sqrt{\alpha^۲+(۱-۲\alpha)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱}=\sqrt{۵\alpha^۲-۴\alpha+۱}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۵\alpha^۲-۴\alpha+۱=۱۰\Rightarrow ۵\alpha^۲-۴\alpha-۹=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}\alpha=-۱\\ \alpha=\frac{۹}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه مجموع عرض نقاط برابر با $۳+(\frac{-۱۳}{۵})=\frac{۲}{۵}$ است، دلیلش را هم ببینید:

$$y=۱-۲\alpha\xrightarrow{\alpha=-۱}y=۳\;;\;A(-۱\,،\,۳)\quad،\quad y=۱-۲\alpha\xrightarrow{\alpha=\frac{۹}{۵}}y=-\frac{۱۳}{۵}\;;\;A(\frac{۹}{۵},-\frac{۱۳}{۵})$$

---

۵۵ | **۲** برای درک بهتر مسئله، شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



واضح است که مرکز دایره، روی قطر یا همان خط $y=-x+۱$ قرار دارد، پس مختصات آن را به‌صورت $O(\alpha,-\alpha+۱)$ نمایش می‌دهیم (حله؟). از طرفی M و N نقاط واقع بر محیط دایره هستند، پس $OM=ON$، همان شعاع‌های دایره است و داریم:

$$\begin{cases}OM=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(-\alpha+۱-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۴\alpha+۴+\alpha^۲-۲\alpha+۱}=\sqrt{۲\alpha^۲-۶\alpha+۵}\\ ON=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+\underbrace{(-\alpha+۱-۲)^۲}_{(-\alpha-۱)^۲}}=\sqrt{\alpha^۲-۲\alpha+۱+\alpha^۲+۲\alpha+۱}=\sqrt{۲\alpha^۲+۲}\end{cases}$$

$$OM=ON\Rightarrow\sqrt{۲\alpha^۲-۶\alpha+۵}=\sqrt{۲\alpha^۲+۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\cancel{۲\alpha^۲}-۶\alpha+۵=\cancel{۲\alpha^۲}+۲\Rightarrow -۶\alpha=-۳\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}$$

حالا با جای‌گذاری $\alpha=\frac{۱}{۲}$ در رابطهٔ ON شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم، ببینید:

$$ON=\sqrt{۲\alpha^۲+۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{۱}{۲}}ON=\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})^۲+۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

---

۵۶ | **۱** مختصات وسط پاره‌خط AB با استفاده از رابطهٔ $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ برابر $M(\frac{-۱+۵}{۲},\frac{۶+۲}{۲})=M(۲\,،\,۴)$ است که فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر با $MO=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$ می‌باشد.

---

۵۷ | **۱** ابتدا وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$M(\frac{۳a+۲-a}{۲},\frac{۲a+۰}{۲})=M(\frac{۲a+۲}{۲},\frac{۲a}{۲})=M(a+۱,a)$$

طبق فرض مسئله این نقطه روی خط به معادلهٔ $۲x+y=۸$ قرار دارد، پس مختصات نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و برای محاسبهٔ مقدار a می‌توان نوشت:

$$۲x+y=۸\xrightarrow{M(a+۱,a)\text{ روی خط است.}}۲(a+۱)+a=۸\Rightarrow ۲a+۲+a=۸\Rightarrow ۳a=۶\Rightarrow a=۲$$

---

۵۸ | **۳** می‌دانیم وسط دو انتهای یکی از قطرهای دایره، مرکز آن دایره است، پس می‌توان نوشت:

$$O(\frac{۲+۶}{۲},\frac{۱+۵}{۲})=O(۴\,،\,۳)$$

فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$ است.

---

۵۹ | **۱** می‌دانیم وسط دو سر قطر دایره، مرکز دایره است، پس داریم:

$$O(\frac{m+۳m}{۲},\frac{m+۸+۴+m}{۲})=O(\frac{۴m}{۲},\frac{۲m+۱۲}{۲})=O(۲m\,،\,m+۶)$$

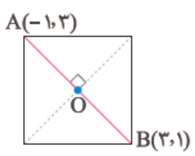
از طرفی طبق فرض مسئله مرکز دایره روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم، یعنی خط $y=-x$ قرار دارد، پس طول و عرض آن قرینه هم هستند (موافقی؟). در نتیجه برای محاسبهٔ مقدار m می‌توان نوشت:

$$-۲m=m+۶\Rightarrow -۳m=۶\Rightarrow m=-۲$$

خلاصه این‌که مرکز این دایره $O(-۴\,،\,۴)$ است که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $C(-۴\,،\,۲)$ با توجه به هم‌طول بودن آن‌ها برابر $۲=|۴-۲|$ می‌باشد.

---

۶۰ | **۲** ابتدا نقطهٔ برخورد دو قطر مربع را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که این نقطه دقیقاً وسط هر یک از قطرها قرار دارد، می‌توان نوشت:

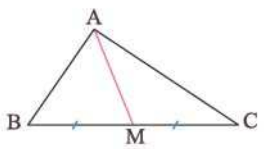


$$O(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۳+۱}{۲})=O(۱\,،\,۲)$$

از طرفی شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر $m_{AB}=\frac{۳-۱}{-۱-۳}=\frac{-۱}{۲}$ است و چون قطرهای مربع بر هم عمودند، شیب قطر دیگر، قرینه و معکوس شیب AB یعنی ۲ است، پس خواستهٔ مسئله در واقع معادلهٔ خطی با شیب ۲ می‌باشد که از نقطهٔ $(۱\,،\,۲)$ می‌گذرد، یعنی:

$$y-۲=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x$$

۶۱ | ۳ ابتدا مختصات نقطهٔ M که وسط پاره‌خط BC قرار دارد را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:



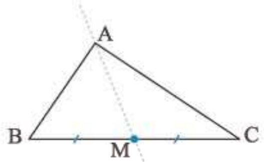
$$M(\frac{۷+۳}{۲},\frac{۱۱+۱}{۲})=M(۵,۶)$$

حالا برای محاسبهٔ اندازهٔ میانهٔ AM با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه می‌توان نوشت:

$$AM=\sqrt{(۱-۵)^۲+(۹-۶)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

---

۶۲ | ۳ ابتدا نقطهٔ وسط پاره‌خط BC یعنی M را به‌دست می‌آوریم. مطابق آن‌چه آموختیم مختصات این نقطه به‌صورت $M(\frac{۸+۲}{۲},\frac{۵+۷}{۲})=M(۵,۶)$ می‌باشد. حالا باید معادلهٔ AM یعنی خط گذرنده از نقاط $A(۱,۹)$ و $M(۵,۶)$ را بنویسیم که برای نوشتن معادلهٔ این خط داریم:



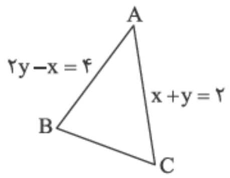
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۹-۶}{۱-۵}=\frac{-۳}{۴}\ ;\ y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۶=\frac{-۳}{۴}(x-۵)$$

با توجه به این‌که خواستهٔ مسئله نقطهٔ برخورد این خط با محور xها است، کافی است به جای y عدد صفر را در معادلهٔ به‌دست آمده قرار دهیم، پس می‌توان نوشت:

$$y-۶=\frac{-۳}{۴}(x-۵)\xrightarrow{y=۰}-۶=\frac{-۳}{۴}(x-۵)\Rightarrow x-۵=۸\Rightarrow x=۱۳$$

---

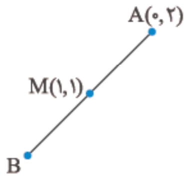
۶۳ | ۲ برای درک بهتر مسئله، شکل مقابل را در نظر بگیرید:



همان‌طور که می‌بینید، نقطهٔ A محل برخورد دو خط $x+y=۲$ و $۲y-x=۴$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x+y=۲\\ ۲y-x=۴\end{cases}\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲\Rightarrow x=۰\ ;\ A(۰,۲)$$

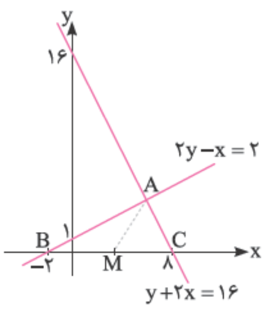
از طرفی نقطهٔ $M(۱,۱)$ وسط ضلع AB است، پس داریم:



$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow ۱=\frac{۰+x_B}{۲}\Rightarrow x_B=۲\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow ۱=\frac{۲+y_B}{۲}\Rightarrow y_B=۲-۲=۰\end{cases}\Rightarrow B(۲,۰)$$

---

۶۴ | ۲ با توجه به شکل مقابل، مختصات وسط ضلع افقی به وضوح $(۳,۰)$ است: $M(\frac{-۲+۸}{۲},۰)=M(۳,۰)$



حالا برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ A، با توجه به اینکه این نقطه محل برخورد دو خط $y+۲x=۱۶$ و $۲y-x=۲$ است، کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

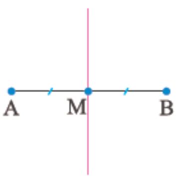
$$\begin{cases}y+۲x=۱۶\\ ۲y-x=۲\end{cases}\xrightarrow{\times ۲}\begin{cases}y+\cancel{۲x}=۱۶\\ ۴y-\cancel{۲x}=۴\end{cases}\Rightarrow y=۴\Rightarrow x=۶\Rightarrow A(۶,۴)$$

در نهایت طول میانهٔ AM برابر است با:

$$AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

---

۶۵ | ۲ شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB اول از همه باید مختصات وسط پاره‌خط AB را به کمک رابطهٔ $(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ پیدا کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$M(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۳+۵}{۲})=M(۱,۴)$$

از طرفی شیب پاره‌خط AB به کمک رابطهٔ $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{۵-۳}{-۱-۳}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$$

همچنین واضح است که شیب عمود منصف AB برابر ۲ می‌باشد. حالا با داشتن **شیب عمود منصف و یک نقطه واقع بر آن به نام $M(۱,۴)$ معادلهٔ عمود منصف AB** را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$m_{\text{عمودمنصف}}=۲\ ,\ M(۱,۴)\ ;\ y-۴=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x+۲$$

در آخر با توجه به این‌که خواستهٔ مسئله محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB **با محور x ها است، در معادلهٔ به‌دست آمده به‌جای y صفر می‌گذاریم، پس طول** نقطهٔ برخورد این خط با محور xها برابر $x=-۱$ می‌باشد (قبوله؟).