

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار ۱ (دهم) از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

- ۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات نکات مشاوره‌ای نوشتیم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.
 - ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا یک آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌هایی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- ۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان نهایی طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.
 - ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها شامل امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳، شبیه‌ساز امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» است.
- ۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ‌برگ مورد تأیید آموزش و پرورش دارای ریزبارم‌بندی و آدرس مبحثی می‌باشند.
- ۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند 😊 در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۱) نیاز دارید، تنها در ۱۱ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!



بارم‌بندی درس ریاضی و آمار (۱)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم
اول	۱۰ نمره	۵ نمره
دوم: درس ۱ تا ۳	۱۰ نمره	۶ نمره
دوم: درس ۴	—	
سوم	—	۵ نمره
چهارم	—	۴ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

فهرست

صفحه	صفحه	نوبت	آزمون پاسخ‌نامه
۲۶	۳	اول	(طبقه‌بندی شده)
۲۷	۵	اول	(طبقه‌بندی شده)
۲۸	۷	اول	(طبقه‌بندی نشده)
۳۰	۸	اول	(طبقه‌بندی نشده)
۳۱	۱۰	دوم	(شبانه‌پای ۱۴۰۳ صبح)
۳۲	۱۲	دوم	(شبانه‌پای ۱۴۰۳ عصر)
۳۴	۱۴	دوم	(طبقه‌بندی شده)
۳۵	۱۶	دوم	(طبقه‌بندی شده)
۳۷	۱۸	دوم	۹ نهمی خرداد ۱۴۰۳ (طبقه‌بندی نشده)
۳۹	۲۰	دوم	۱۰ شبیه‌ساز خرداد ۱۴۰۳ (طبقه‌بندی نشده)
۴۰	۲۲	دوم	۱۱ بیست پلاس (چالشی‌تر) (طبقه‌بندی نشده)
۴۱	۲۴	دوم	۱۲ بیست پلاس (چالشی‌تر) (طبقه‌بندی نشده)

فصل اول

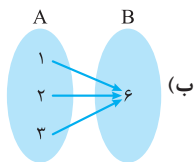
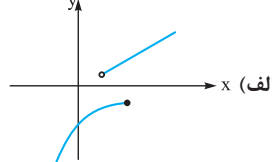
ردیف	۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید: معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ حداقل ۱ ریشه حقیقی دارد.
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید: الف) معادله مربوط به شکل مقابل برابر با می باشد. (کفه های ترازو دقیقاً روبه روی هم قرار دارند). ب) می خواهیم معادله $x^2 - 10x + 25 = 0$ را به کمک تجزیه حل کنیم. برای این منظور عبارت $x^2 - 10x + 25$ را به شکل تجزیه می کنیم.	
۳	حاصل جمع عددی با مربعش ۳۰ است. با تشکیل یک معادله، این عدد را به دست آورید. (مسئله چند جواب دارد؟)	
۴	معادلات زیر را به روش های خواسته شده حل کنید. در این گونه مسائل که روش حل هر معادله گفته شده، آنگه نتوانستیم به روشی که خواسته شده، معادله رو حل کنیم از هر روشی که بلدین، استفاده کنید تا حداقل نصف نمره رو بپتون بدن.	
۵	معادله گویای مقابل را حل کنید. آیا جواب یا جواب های آن قابل قبول است؟ $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} = 3$ پس از حل معادلات گویا (کسری) یاد تون تریه جواب یا جواب هارو در مفرح ها بنذارید. هیچ مفری نباید صفر بشه.	
۶	در یک کارخانه تولید فولاد، از روز یکشنبه، تولید هر روز نسبت به روز قبل ۳ برابر می شود. در پایان روز چهارشنبه، تولید فولاد به سقف ۱۶۲ هزار تن رسیده است. مجموع تولید در این پنج روز چه قدر بوده است؟ (اولین روز کاری، شنبه است)	
۷	مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.	
۸	معادلات درآمد و هزینه در یک شرکت به صورت $R(x) = -x^2 + 6x$ و $C(x) = x + 4$ می باشد. (R درآمد و C هزینه است). الف) معادله سود شرکت را به دست آورید. ب) نقطه یا نقاط سربه سر را به دست آورید. پ) به ازای تولید چه مقدار کالا، سوددهی خواهیم داشت؟	

فصل دوم

ردیف	۹	درستی یا نادرستی جمله زیر را تعیین کنید: برد تابع $f = \{(1, 2), (0, 2), (4, 1), (5, 1)\}$ دارای ۲ عضو است.				
۱۰	گزینه درست را انتخاب کنید. با توجه به نمودار تابع f مقدار $f(10)$ کدام است؟	<table border="0"> <tr> <td>۱۲ (۱)</td> <td>۱۱/۵ (۲)</td> </tr> <tr> <td>۱۱ (۳)</td> <td>۱۰/۵ (۴)</td> </tr> </table>	۱۲ (۱)	۱۱/۵ (۲)	۱۱ (۳)	۱۰/۵ (۴)
۱۲ (۱)	۱۱/۵ (۲)					
۱۱ (۳)	۱۰/۵ (۴)					
۱۱	تابع بودن یا نبودن هر یک از رابطه های زیر را بررسی کنید. تقریباً توی همه امتحانات، به سوال در مورد بررسی تابع بودن یا نبودن رابطه ها مطرح می شه، پس تشفیص تابع رو چری بگیرد لطفآ.	<table border="0"> <tr> <td>الف) $f = \{(1, 3), (4, 8), (5, 10)\}$</td> <td>ب) </td> <td>پ) </td> <td>ت) $y^2 = x^2 + 5$</td> </tr> </table>	الف) $f = \{(1, 3), (4, 8), (5, 10)\}$	ب)	پ)	ت) $y^2 = x^2 + 5$
الف) $f = \{(1, 3), (4, 8), (5, 10)\}$	ب)	پ)	ت) $y^2 = x^2 + 5$			



۲	<p>با فرض آن که $f: A \rightarrow B$ و $A = \{-2, 0, 2\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید؛ سپس نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.</p> <p>$f(x) = x^2 - 3x + 1$</p>	۱۲
۲	<p>دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.</p> <p>یادتون باشه که دامنه یعنی مفروضه تغییرات x و برد یعنی مفروضه تغییرات y.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div data-bbox="115 474 369 679"> <p>(الف)</p> </div> <div data-bbox="477 474 677 646"> <p>(ب)</p> </div> <div data-bbox="816 539 1001 722"> <p>(پ)</p> </div> <div data-bbox="1124 474 1355 646"> <p>(ت)</p> </div> </div>	۱۳
۱	<p>اگر مجموعه $f = \{(1, a - 4b), (3, 4), (1, 5), (3, b - a)\}$ یک تابع باشد، a و b را به دست آورید.</p>	۱۴
۱/۵	<p>اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ باشند، حاصل $f(0) + 5g(1)$ را به دست آورید.</p>	۱۵
۱/۷۵	<p>نمودار تابع $y = 2x - 4$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید.</p>	۱۶
۲۰	<p>جمع نمرات</p>	موفق باشید

ردیف	نمره	سوال
۱	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) در معادله درجه دوم اگر $\Delta = 0$ باشد، آن گاه معادله دارای ریشه مضاعف است. ب) در نمودار دایره‌ای، گزارش درصد به تنهایی اطلاعات کافی را در اختیار ما قرار می‌دهد. ج) مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند. د) وقتی با داده دورافتاده مواجه هستید، میانگین معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا میانه.
۲	۱	در سوالات زیر گزینه درست را انتخاب نمایید. الف) معادله ریاضی عبارت توصیفی «سه برابر پول شخصی به اضافه نصف آن ۲۸۰۰۰ تومان می‌شود.» کدام است؟ $(1) \quad 3x + \frac{x}{2} = 28000 \quad (2) \quad \frac{3x}{2} + x = 28000 \quad (3) \quad 3x + \frac{x}{2} = 14000 \quad (4) \quad \frac{3x}{2} + x = 14000$ ب) اگر $f = \{(2, x), (3, 5), (1, 2), (2, 1), (3, y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x + y$ کدام است؟ $(1) \quad 5 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 4$ ج) مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟ $(1) \quad \text{شعاع دایره‌ها} \quad (2) \quad \text{مساحت دایره‌ها} \quad (3) \quad \text{محیط دایره‌ها} \quad (4) \quad \text{قطر دایره‌ها}$ د) وزن شخصی با نماتوب (BMI) ۲۰ و قد ۱۵۰ سانتی‌متر کدام است؟ $(1) \quad 40 \quad (2) \quad 45 \quad (3) \quad 50 \quad (4) \quad 55$
۳	۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) برای حل معادله $x^2 + 6x = 7$ به روش مربع کامل، عدد را به دو طرف اضافه می‌کنیم. ب) تقریباً درصد از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارد. ج) موتورسواری با سرعت ثابت ۳ متر در ثانیه در حرکت است. نمایش جبری رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) به شکل $d = 3t$ نمایش داده می‌شود. در این رابطه متغیر مستقل و متغیر وابسته است.
۴	۰/۷۵	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴- و ۳ باشد.
۵	۲	معادله‌های درجه دوم زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید. الف) $x^2 - 3x = 0$ (روش تجزیه) ب) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ ((Δ)) (روش کلی)
۶	۱/۵	معادله $\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} = 1$ را حل کنید.
۷	۰/۵	برد تابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده به دست آورید. $f: A \rightarrow B \quad A = \{5, 9\}$ $f(x) = \sqrt{x-1} \quad B = \{\dots, \dots\}$
۸	۱	کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟  
۹	۱/۵	نمودار تابع خطی f از نقطه (۱, ۵) می‌گذرد و $f(2) = 8$ است. ضابطه آن را مشخص کنید.
۱۰	۲	الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 - 3$ را مشخص کنید و به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید. ب) تابع هزینه شرکتی $C(x) = 18x + 40$ و تابع درآمد آن $R(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 30x$ است. بیشترین مقدار سود را بیابید.
۱۱	۰/۷۵	متغیرها را در چهار مقیاس «اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی» دسته‌بندی کنید. الف) وزن دانش‌آموزان یک کلاس ب) رتبه دانش‌آموز در مسابقه علمی ج) درجه حرارت شهرهای مختلف برحسب سانتی‌گراد (سلسیوس)

۱	روش‌های گردآوری داده‌ها را نام ببرید.	۱۲																		
۱/۵	میانگین، انحراف معیار و واریانس داده‌های مقابل را به دست آورید. ۲, ۵, ۸, ۹	۱۳																		
۱	سن بازیکنان والیبال نوجوانان یک کشور به شرح زیر است. نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید. ۱۳, ۱۲, ۱۵, ۱۳, ۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۲, ۱۴, ۱۷, ۱۸, ۱۴	۱۴																		
۱/۷۵	برای داده‌های مقابل: الف) چارک‌ها را مشخص کنید. ب) دامنه میان‌چارکی را به دست آورید. ج) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم نمایید. ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۰, ۵, ۸, ۱۴, ۱۸, ۳۰	۱۵																		
۱/۷۵	الف) اگر در یک نمودار راداری ۵ متغیر حضور داشته باشد، زاویه بین دو شعاع مجاور را به دست آورید. ب) نمرات ۵ درس دانش‌آموزی در جدول زیر داده شده است. نمودار راداری آن را رسم کنید.	۱۶																		
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>درس</th> <th>فارسی</th> <th>ریاضی</th> <th>عربی</th> <th>منطق</th> <th>جامعه‌شناسی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>نمره</td> <td>۱۷</td> <td>۱۴</td> <td>۱۶</td> <td>۸</td> <td>۱۰</td> </tr> <tr> <td>بیشینه</td> <td>۲۰</td> <td>۲۰</td> <td>۲۰</td> <td>۲۰</td> <td>۲۰</td> </tr> </tbody> </table>	درس	فارسی	ریاضی	عربی	منطق	جامعه‌شناسی	نمره	۱۷	۱۴	۱۶	۸	۱۰	بیشینه	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
درس	فارسی	ریاضی	عربی	منطق	جامعه‌شناسی															
نمره	۱۷	۱۴	۱۶	۸	۱۰															
بیشینه	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰															
۲۰	جمع نمرات	«موفق باشید»																		

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- نادرست (۰/۲۵)؛ اگر بخواهیم به روش تجزیه این معادله را حل کنیم، باید از x فاکتور

$$x^2 - 14x = 0 \Rightarrow x(x - 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 14 \end{cases} \quad \text{بگیریم:}$$

(فصل ۱- حل معادله درجه دوم)

الف) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ یا $\frac{b^2}{4}$ (۰/۲۵)

ب) مخرجی (۰/۲۵)

۳- گزینه «۳» (۰/۵) می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، خود آن معادله برابر است با $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ ، لذا داریم:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = 0$$

پرانته‌ها را ضرب می‌کنیم.

$$\times 9 \rightarrow 9x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 8x - 1 = 0$$

(فصل ۱- نوشتن معادله درجه دوم)

۴- با فرض x به‌عنوان عدد مطلوب، چنین می‌نویسیم:

$$2x + 1 = 5x - 4 \Rightarrow 2x - 5x = -4 - 1 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

اگر در متن سؤال گفته می‌شد عدد مطلوب، باید طبیعی یا صحیح باشد آن‌گاه جواب $x = \frac{5}{3}$ قابل قبول نبود.

(فصل ۱- کاربرد معادله درجه اول)

۵-

$$\text{الف) } -x(1-x) = 2 + 5x \Rightarrow -x + x^2 - 2 - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(-2) = 36 + 8 = 44 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{6 + \sqrt{44}}{2} \\ x'' = \frac{6 - \sqrt{44}}{2} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

ب) $(x-4)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر}} x-4 = \pm 5$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4 = 5 \Rightarrow x = 9 \\ x-4 = -5 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

پ) $(x-4)(5x-1) = 3(5x-1) \Rightarrow \underbrace{(x-4)(5x-1) - 3(5x-1)}_{\text{فاکتور } (5x-1)} = 0$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \\ x-7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

ت) $9x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 9} x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$$

به دو طرف تساوی $\frac{b^2}{4}$ یعنی $\frac{1}{36}$ را اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}}_{\text{اتحاد اول}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2}_{(۰/۲۵)} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{6} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱- حل معادله درجه دوم)

ت) تابع نیست (۰/۲۵)؛ چون توان y زوج است و مثلاً اگر به x عدد صفر را نسبت دهیم برای y دو مقدار مختلف بدست می‌آید:

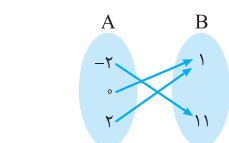
$$y^2 = x^2 + 5 \xrightarrow{(x=0)} y^2 = 5 \xrightarrow{\text{جذر}} y = \pm\sqrt{5}$$

(فصل ۲- مفهوم تابع)

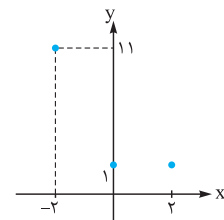
۱۲-

$$\begin{aligned} x=-2 &\rightarrow f(-2) = |(-2)^2 - 3(-2) + 1| = 11 \quad (۰/۲۵) \\ x=0 &\rightarrow f(0) = |0^2 - 3(0) + 1| = 1 \quad (۰/۲۵) \\ x=2 &\rightarrow f(2) = |2^2 - 3(2) + 1| = 1 \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{برد } R_f = \{1, 11\} \quad (۰/۲۵)$$



(۰/۵)



(۰/۵)

(فصل ۲- شباهت فبری تابع)

۱۳-

الف) $\begin{cases} D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ R_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$

ب) $\begin{cases} D_f = \{x \geq 2\} \\ R_f = \{y \geq 3\} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$

پ) $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \{y \leq -2\} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$

ت) $\begin{cases} D_f = \{1 \leq x \leq 5\} \\ R_f = \{1 \leq y \leq 4\} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$

(فصل ۲- دامنه و برد تابع)

۱۴-

$$\begin{aligned} (1, a-4b) = (1, 5) &\Rightarrow a-4b = 5 \\ (3, 4) = (3, b-a) &\Rightarrow b-a = 4 \\ -3b = 9 &\Rightarrow b = -3 \end{aligned}$$

حالا ۳- را در یکی از رابطه‌ها به جای b قرار می‌دهیم تا a هم پیدا شود:

$$b-a = 4 \Rightarrow -3-a = 4 \Rightarrow a = -7$$

(فصل ۲- مفهوم تابع)

۱۵-

$$f(x) = |x-1| \xrightarrow{x=0} f(0) = |0-1| = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \xrightarrow{x=1} g(1) = \sqrt{1^2 + 3(1)} = \sqrt{4} = 2$$

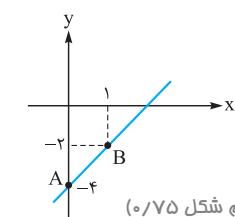
$$\Rightarrow f(0) + 5g(1) = 1 + 5(2) = 11$$

(فصل ۲- مقدار تابع)

۱۶- کافی است x به دو عدد دلخواه نسبت دهیم و y مربوط به آن‌ها را به دست آوریم:

$$y = 2x - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y = 2(0) - 4 = -4 \Rightarrow A(0, -4) \\ x=1 \rightarrow y = 2(1) - 4 = -2 \Rightarrow B(1, -2) \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$



$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = \mathbb{R} \end{cases}$

(رسم شکل ۰/۷۵)

(فصل ۲- تابع قطعی)

درس نامه توپ برای شب امتحان

روش های حل معادله درجه دوم

1 روش تجزیه: در سال های گذشته با تجزیه عبارتهای جبری آشنا شدید. بسیاری از معادلات درجه دوم را به کمک فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها حل می کنیم:

مثال 1: $14x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 2x(7x - 6) = 0$
 البته می توانیم از x هم فاکتور بگیریم.
 فاکتور $2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

مثال 2: $64x^2 - 100 = 0 \Rightarrow (8x - 10)(8x + 10) = 0$
 اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \\ 8x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

مثال 3: $x^2 - x - 56 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$
 اتحاد جمله مشترک

2 روش جذرگیری (ریشه گیری): از این روش فقط زمانی می توانیم استفاده کنیم که معادله شامل x^2 هست ولی x^1 ندارد. در این صورت عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده و از دو طرف جذر می گیریم.

مثال 4: $x^2 - 49 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}}$ $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

مثال 5: $9x^2 - 64 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{9} \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}}$

$$x = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3}$$

مثال 6: $(x - 3)^2 = 25 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}}$ $x - 3 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8 \\ x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

3 روش مربع کامل: در این روش ابتدا عدد ثابت را به سمت راست می بریم، اگر ضریب x^2 عددی به جز 1 بود تمام جملات معادله را بر آن ضریب تقسیم می کنیم تا ضریب x^2 یک شود سپس ضریب x را نصف کرده به توان 2 می رسانیم، عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می کنیم (به طور خلاصه $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف معادله، اضافه می کنیم که b ضریب x است). سمت چپ معادله، حتماً اتحاد مربع 2 جمله ای خواهد شد. در نهایت مانند روش جذرگیری عمل می کنیم:

مثال 7: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -3$
 $\frac{b^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4$ عدد را به دو طرف می افزاییم.
 اتحاد مربع دو جمله ای $x^2 - 4x + 4 = -3 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$

جذراز دو طرف $x - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

مثال 8: $2x^2 + 10x = 1 \xrightarrow{\div 2}$ $x^2 + 5x = \frac{1}{2}$

عدد $\frac{b^2}{4} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}$ را به دو طرف اضافه می کنیم.
 اتحاد مربع دو جمله ای $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{2} + \frac{25}{4} \Rightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = \frac{27}{4}$

$$\Rightarrow x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \\ x + \frac{5}{2} = -\frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

فصل 1: معادله درجه دوم

معادله درجه اول و کاربردهای آن

هر معادله که پس از ساده شدن به صورت $ax + b = 0$ تبدیل شود، معادله درجه اول نام دارد (a و b دو عدد حقیقی دلخواهاند ولی a نمی تواند صفر باشد). مثلاً معادلات $x - 1 = 2x$ و $5x = -1$ ، $3x - 2 = 0$ همگی درجه اول هستند. برای حل آن ها ابتدا اعداد را از متغیرها جدا کرده سپس عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم:

مثال 1: $(x + 1)(x - 6) = x^2 + 3x - 1$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow -6x + x - 3x = -1 + 6$$

$$\Rightarrow -8x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

مثال 2: $\frac{x+3}{2} - \frac{x}{5} = 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5(x+3) - 2x}{10} = 1$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5x + 15 - 2x = 10$$

$$\Rightarrow 3x = 10 - 15 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی گاهی به جای آن که یک معادله به صورت حاضر و آماده به ما داده شود، خودمان باید با توجه به یک توصیف (متن فارسی) معادله ای مناسب تشکیل داده و آن را حل کنیم تا مجهول مورد نظر به دست آید.

مثال: عددی را به دست آورید که 3 برابر آن به علاوه 1 مساوی با نصف همان عدد، منهای 2 شود.

حل: آن عدد را x فرض کرده و این طور می نویسیم:

$$3x + 1 = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow 3x - \frac{x}{2} = -2 - 1 \Rightarrow \frac{5x}{2} = -3 \Rightarrow 5x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{5}$$

مثال: مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



حل: مساحت مستطیل = عرض \times طول = $(2x + 3)(x + 4)$

$$= 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 2x^2 + 11x + 12$$

مساحت مثلث = $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(x + 8) \times 4x}{2} = 2x(x + 8) = 2x^2 + 16x$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت مثلث} \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow 16x - 11x = 12 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

عرض مستطیل = $x + 4 = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$

طول مستطیل = $2x + 3 = 2(\frac{12}{5}) + 3 = \frac{24}{5} + 3 = \frac{39}{5}$

معادله درجه دوم و روش های حل آن

هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، با شرط $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم نام دارد. به a ضریب x^2 ، به b ضریب x و به c عدد ثابت می گوئیم. مثلاً در معادله $-x^2 + 6x - 7 = 0$ ضرایب معادله عبارتند از: $c = -7$ ، $b = +6$ و $a = -1$ و یا در معادله $\frac{x^2}{5} + 3 = 0$ ضرایب معادله برابرند با: $c = 3$ ، $b = 0$ و $a = \frac{1}{5}$.

۴ روش کلی (روش استفاده از دلتا): در این روش ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه

کرده، سپس حالات زیر را خواهیم داشت:

معادله ۲ ریشه متمایز دارد. $\Rightarrow \Delta > 0$ اگر الف

که این ریشه‌ها عبارت‌اند از: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

معادله ریشه مضاعف دارد. $\Rightarrow \Delta = 0$ اگر ب

که این ریشه عبارت است از: $x = \frac{-b}{2a}$

معادله جواب ندارد. $\Rightarrow \Delta < 0$ اگر ج

ضمناً به دلتا (Δ) میتین معادله هم می‌گوییم. حال معادلات زیر را به روش کلی حل می‌کنیم:

مثال ۱: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49$

$$\begin{aligned} & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 \\ & \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x'' = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۲: $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$

$$\begin{aligned} & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0 \\ & \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2(1)} = 5 \end{aligned}$$

مثال ۳: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(3) = -8$

معادله جواب ندارد چون دلتای آن منفی شده است.

نکته: گاهی اوقات یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم داده می‌شود و پارامتری مثل m ، k و n ... خواسته می‌شود که باید به جای تمام متغیرهای معادله، ریشه داده شده را قرار دهیم.

مثال: به ازای چه مقدار از k معادله $10x^2 - 4x + 3k = 0$ دارای جواب $x=1$ است؟

حل: $10x^2 - 4x + 3k = 0 \xrightarrow{(x=1)} 10(1)^2 - 4(1) + 3k = 0$

$\Rightarrow 3k = -6 \Rightarrow k = -2$

مجموع و ضرایب ریشه‌های معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بدون آن که معادله را حل کنیم می‌توانیم به سرعت بگوییم که:

البته توجه دارید که Δ حتماً باید مثبت باشد تا معادله دارای ۲ ریشه متمایز باشد.

مثال: بدون حل معادله $-x^2 + 3x + 4 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

حل: $\begin{cases} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3 \\ x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{4}{-1} = -4 \end{cases}$

نوشتن معادلات درجه دومی که جواب‌های همگی آن‌ها یکسان است فرض کنید

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جواب‌های x' و x'' باشد. حال اگر تمام جملات معادله را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادله حاصل هم دارای جواب‌های x' و x'' خواهد بود. مثلاً جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 6 = 0$ عبارت‌اند از -1 و 6 . حال مثلاً اگر تمام جملات معادله را در 2 ضرب کنیم، به معادله $2x^2 - 10x - 12 = 0$ می‌رسیم. با حل این معادله می‌بینیم که جواب‌ها باز هم -1 و 6 خواهند بود.

نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش به ما داده شده است اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم را m و n بنامیم، خود معادله درجه دوم مربوط به این ریشه‌ها برابر است با $(x-m)(x-n) = 0$. اگر معادله‌ای ریشه مضاعف m داشته باشد، معادله مربوط به آن برابر با $(x-m)^2 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش 3 و -10 باشند. آیا این معادله

منحصربه‌فرد است؟

حل: $(x-3)(x-(-10)) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 10x - 3x - 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 30 = 0$

این معادله، منحصربه‌فرد نیست و اگر جملات آن را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادله حاصل هم دارای ریشه‌های 3 و -10 خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه مضاعف $x = \sqrt{3}$ داشته باشد.

حل: $(x-\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل

گاهی باید برای یک توصیف داده شده، معادله‌ای مناسب تشکیل دهیم و با حل آن، به مجهول مورد نظر برسیم. فقط باید حواسمان باشد معادله‌ای که تشکیل می‌دهیم باید دارای یک متغیر مثل x باشد؛ یعنی اگر 2 متغیر مثل x و y داشته باشیم باید آن‌ها را به یک متغیر تبدیل کنیم.

مثال: عددی صحیح پیدا کنید که مربعش با سه برابرش مساوی باشد. مسئله

چند جواب دارد؟

حل: اگر عدد صحیح مورد نظر را x فرض کنیم می‌توانیم این‌طور بنویسیم که:

$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

صفر و 3 هر دو عدد صحیح‌اند پس مسئله دو جواب دارد.

مثال: رضا از خواهرش 2 سال کوچک‌تر است. اگر حاصل ضرب سن آن‌ها 80

باشد، سن هر دو را پیدا کنید.

حل: اگر سن رضا را x فرض کنیم، سن خواهرش $(x+2)$ خواهد بود لذا:

$x(x+2) = 80 \Rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-8) = 0$

اتحاد جمله مشترک

$\Rightarrow \begin{cases} x+10=0 \Rightarrow x=-10 \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases}$ (سن نمی‌تواند منفی باشد.)

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل سود

در ابتدا خوب است با یک سری نمادها آشنا شوید:

تعداد کالاها: x

قیمت هر کالا: p یا v

تابع سود: $P(x)$

تابع درآمد: $R(x)$

تابع هزینه: $C(x)$

تابع درآمد هر شرکت یا کارخانه از رابطه $R(x) = x \cdot p$ به دست می‌آید. ضمناً تابع

هزینه برابر است با:

$C(x) = \text{هزینه متغیر} + \text{هزینه ثابت (تولید) (اوبه)}$

مثلاً اگر گفته شود هزینه ثابت 2000 تومان و هزینه تولید هر کالا 10 تومان است،

آن‌گاه: (همیشه x را باید در هزینه تولید هر کالا ضرب کنید.) $C(x) = 2000 + 10x$

تابع سود هم برابر است با:

$P(x) = R(x) - C(x)$

سود شرکت وقتی ماکزیمم است که تعداد کالاها تولیدی‌اش برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ باشد.

(معادله سود همیشه به شکل $P(x) = ax^2 + bx + c$ تبدیل می‌شود). ضمناً اگر

معادله $P(x) = 0$ را حل کنیم نقاط سر به سر به دست می‌آیند.

نقاط سر به سر

نقاط سر به سر تعداد کالاهایی است که به ازای تولید آن‌ها شرکت نه سود می‌کند و نه ضرر. پس از حل معادله $P(x) = 0$ معمولاً 2 جواب به دست می‌آید (آن‌ها را m و n فرض می‌کنیم). حال اگر شرکت به اندازه x کالا تولید کند و $m < x < n$ باشد سوددهی خواهد داشت. (با فرض $m < n$)

مثال: معادلات (توابع) درآمد و هزینه در شرکتی به صورت $R(x) = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$

و $C(x) = 18x + 80$ می‌باشند:

الف) تابع سود را تشکیل داده و مشخص کنید به ازای تولید چه تعداد کالا، سود

شرکت ماکزیمم می‌شود؟