ماز

پاسخنامه فوق تشریحی

جزوه طلایی ماز

ریاضیات تجربی جامع کنکور

ویژه کنکور ۱۴۰۴

دهم | یازدهم | دوازدهم

مهدی عزیزی، سید جواد نظری، محدثه شیخعلی

| بانک تست کامل |
| پاسخنامهٔ فوق تشریحی به سبک ماز |
| درسنامهٔ کامل |

جزوه طلایی ماز

جزوه طلایی

ریاضیات تجربی جامع کنکور

مهدی عزیزی | سید جواد نظری | محدثه شیخعلی

عنوان: جزوه طلایی ماز - ریاضیات تجربی جامع کنکور - دهم، یازدهم، دوازدهم
مؤلفین: عزیزی، مهدی، ۱۳۶۰، نظری، سیدجواد، ۱۳۷۰، شیخعلی، محدثه ۱۳۷۲
موضوع: آموزش متوسطه ۲
مشخصات ظاهری: ۸۶۴ ص، مصور ۲۲×۲۹ س.م، جدول
شابک: ۷-۱۹-۸۴۸۱-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
مشخصات نشر: تهران، موسسه هونام پرتواندیشان ماز، ۱۴۰۲
شماره کتاب‌شناسی ملی: ۹۵۷۰۳۹۷

عنوان: جزوه طلایی ماز - ریاضیات تجربی جامع کنکور - دهم، یازدهم، دوازدهم

ناشر: موسسه هونام پرتواندیشان ماز

مؤلفین: مهدی عزیزی، سیدجواد نظری، محدثه شیخعلی

مدیر محتوا: دکتر رسول خنجری

سرپرست پروژه: محدثه شیخعلی

ویراستاران: معین آعلی، ارسلان حسنوند، فاروق منوچهری، رضا قانع، ابوالفضل میرزایی، سجاد داوطلب، طارق پورعلی، شمیم پهلوان شریف، سجاد احمدی، مهرداد استقلالیان، مرضیه بنیانی

مدیر تولید: محمد یوسفی

طراح جلد: تایماز کاویانی

گرافیست ورسم شکل: مرجان مطلبی‌زاده

بررسی کیفیت محتوا: نیما مهندس، محمد قانع

لیتوگرافی / چاپخانه: ترانه

نوبت چاپ - سال چاپ: اول - ۱۴۰۳

تیراژ: ۳۰۰۰ جلد

قیمت: ۸۸۸۰۰۰ تومان

شماره تماس: ۹۱۳۰۶۰۶۰ (۰۲۱)

صندوق پستی: ۱۴۳۷۶۴۶۹۳۳

ماز

مقدمه ناشر

اگه می‌خوای برنده باشی، سعی کن خوب پیش‌بینی کنی!

حدوداً ۱۰ سال پیش بود، زمانی که تصمیم گرفتیم اولین آزمون الکترونیک کشور رو با همکارانم (شما بخونید دوستام) تأسیس کنیم.

اون روزها همه بهمون می‌خندیدن! آزمون مگه غیرکاغذی و غیرحضوری هم میتونه باشه؟!!

سال‌ها گذشت ...

تو این سال‌ها هر روز به جمعیت ماز اضافه شد و هر روز تعداد اون‌هایی که به مسیر ماز باور نداشتن، کمتر شد.

امروز همه تحسین می‌کنن.

تو این سال‌ها خیلی از آزمون‌های مهم الکترونیکی شد و در آخر قراره به زودی کنکور سراسری هم الکترونیکی بشه ...

داستان کتاب هم همینه!

با گرایش بیشتر افراد به وسایل الکترونیک مثل گوشی موبایل، تبلت، لپ‌تاپ و ...، کم‌شدن کاغذ و گران‌تر شدنش، بالارفتن هزینه‌ها، مشکلات اقتصادی، نیاز به درختان و هوای پاک ... همه این‌ها دست به دست هم خواهد داد و در یک دهه آینده خواهیم دید که انتشارات کاغذی هر روز کم‌رنگ‌تر میشه.

آینده به این شکل خواهد بود:

کتاب‌های الکترونیک بسیار ارزان‌تر از همه کتاب‌ها با هم در یک وسیلهٔ الکترونیکی با قابلیت به‌روزشدنِ لحظه‌ای، در کنار هوای پاک‌تر!

به همین خاطر، ما دیجی‌ماز رو تأسیس کردیم. قرار هست به همه اشکال ویندوز، IOS و اندروید، کتاب‌ها رو توش قرار بدیم و روز به روز، ویژگی‌هاش رو زیاد کنیم.

ماز به عنوان اولین انتشارات الکترونیک در این پلتفرم کار خودش رو آغاز می‌کنه و سایر انتشارات نیز می‌توانند در این پلتفرم کتاب‌های خود را قرار دهند.

دکتر سید آرمان موسوی‌زاده، مدیرعامل گروه آموزشی ماز

@biomaze biomaze biomaze.ir

دربارهٔ جزوه طلایی

سلام، به کامل‌ترین کتاب آموزشی در عرصهٔ کنکور خوش‌آمدید!

در این کتاب قراره تمامِ تمامِ مطالبی رو که برای صد زدن ریاضی کنکور نیاز داری، در اختیارت قرار بدیم.

اما چرا جزوه طلایی؟

۴ دلیل برای انتخاب جزوه طلایی:

۱ اگه قصد داری به جای خرید چندین کتاب مختلف و سردرگمی بین منابع مختلف که هر کدوم یک مطلب رو ناقص گفتن، از یک منبع کامل استفاده کنی و سردرگم نباشی، در جزوه طلایی سعی کردیم به این هدف برسیم. تمام مطالب و نکات کنکور و کتاب درسی، به صورت یک‌جا و منظم آورده شده است.

۲ اگه در تست زدن ضعف داری و میخوای از صفر شروع کنی، در جزوه طلایی سعی کردیم یادگیری کامل رو به صورت پله به پله پیش ببریم. هر درسنامه به صورت کامل تمام نکات و مثال‌های کتاب درسی رو پوشش میده و بعدش هم یک تست‌نامه کامل آوردیم که مراحل یادگیری رو برات تکمیل میکنه!

۳ اگه به دنبال این هستی که تمام ایده‌های تستی رو در کمترین زمان ممکن ببینی، در جزوه طلایی به این هدف هم فکر کردیم، در انتهای هر فصل، یک بانک تست کامل داریم و تمام ایده‌های تستی اون فصل رو برات پوشش دادیم.

۴ اگه از اون‌هایی هستی که زود مطالب رو فراموش می‌کنی، اما حوصله جمع‌بندی و یادداشت‌برداری نداری! باز هم مشکلی نیست، در ابتدای هر فصل نقشهٔ ذهنی فصل رو به صورت نمودار درختی و در انتهای جزوه، نکات رو به صورت جداول جمع‌بندی برات پوشش دادیم، تا نگران ایام جمع‌بندی هم نباشی.

دکتر رسول خنجری، مدیر محتوای گروه آموزشی ماز

مقدمه مؤلفان

این کتاب اولین و آخرین منبع مورد نیازتون برای کنکور خواهد بود؛ و فکر می‌کنیم همین مقدار توضیح درباره این کتاب کافی باشه!

دپارتمان ریاضی گروه آموزشی ماز

روش استفاده از این کتاب

۱ مشاوره نامهٔ ابتدای هر فصل رو بخون تا متوجه اهمیت فصل و بخش‌های مهم‌ترش بشی.

۲ نقشهٔ راه فصل رو بررسی کن تا یک نقشهٔ ذهنی و کامل از فصل داشته باشی.

۳ هر درسنامه‌رو کامل و دقیق بخون و بعدش سعی کن تست و مثال‌های بعدش رو خودت حل کنی (هدف آموزشی و بدون تایم).

۴ بعد حل هر تست آموزشی همونجا پاسخنامه‌شو دقیق بخون و اگه یاد نگرفتی مجدداً برگرد و درسنامه رو بررسی کن.

۵ بعد از اتمام درسنامه‌ها و حل تمامی مثال‌ها، برگرد به نقشهٔ ذهنی و با مشاهده هر بخش، سعی کن چشمات رو ببندی و تمام نکات اون بخش رو توی ذهنت مرور کنی.

۶ حالا برو سراغ بانک تست پایان فصل و سعی کن هر ۳۰ سوال رو در یک بازه ۴۵ دقیقه‌ای مثل کنکور جواب بدی و بعدش پاسخنامه رو بررسی کن!

«من با افتخار تمام مسئولیت بررسی کیفیت محتوای این کتاب رو در طی یك ماه اخیر به عهده داشتم، به جرئت میتونم بگم جامع ترین کتابی هست که برای درس ریاضی دیدم؛ هم از نظر بانك تست، هم از نظر درسنامه و به شدت عالی برای یادگیری، مرور و تمرین بیشتر...»

محمدقانع - رتبه ۲ کنکور سراسری تجربی

چرا دیجی‌ماز؟

ما در دیجی‌ماز این زمینه رو براتون فراهم کردیم تا از تجربه مطالعه کتاب الکترونیکی، لذت ببرید.

در دیجی‌ماز، همه کتاب‌هاتو، حتی‌کتاب‌های درسیتو یک‌جا و در یک اپلیکیشن کنار هم داری و همه‌جا میتونی با خودت ببریش!

مزیت های منحصر به فرد دیجی‌ماز نسبت به سایر ابزارهای مطالعه کتاب الکترونیکی:

■ امکان هایلایت کردن

همونطوری که با ماژیک فسفری توی کتاب‌های کاغذیت مطالب مهم رو هایلایت می‌کنی! با این تفاوت که ماژیکت تموم نمیشه و هر وقتم بخوای می‌تونی پاکش کنی!

■ امکان یادداشت گذاری در صفحات

همونطور که گوشه کتابت نکات مهم رو مینویسی؛ اینجا هم هر چه دل تنگت می‌خواهد بنویس و نگران کم‌بودن جا هم نیستی دیگه!

■ امکان نشان دار کردن صفحات برای مرور مجدد

دوست‌داری قبل امتحانت سریع صفحات مهم رو مرور کنی؟ دیگه نگران نیستی، صفحات مهم رو علامت میزنی و خیلی سریع میتونی مرورشون کنی!

■ امکان خط کشیدن و ترسیم آزاد

علاوه برهایلایت کردن دوست داری زیر کلمه‌های مهم هم خط بکشی؟ مشکلی نیست، توی دیجی‌ماز هم این امکانو داری! تازه خودکارتم چند رنگه و تموم نمیشه!

■ پاک کردن (یادداشت‌ها، خط کشی‌ها و هایلایت‌ها)

احساس می‌کنی کتابت خیلی شلوغ شده؟ یا چیزی رو نوشتی و می‌خوای پاکش کنی؟ بازم مشکلی نیست؛ هر چیزی که بخوای رو خیلی راحت می‌تونی پاک کنی! اثری هم ازش نمیمونه!!

■ ذخیره کردن تمامی تغییرات بعد از هر بار استفاده از کتاب

نگرانی که یه موقع نوشته‌ها و هایلایت و یادداشت‌هات توی کتاب گم بشن؟؟ نگران اینم نباش! توی دیجی‌ماز همه چیز ذخیره میشه و توی سیستمت باقی می‌مونه!

چرا دیجی‌ماز؟

■ امکان انتقال به صفحات مورد نظر از طریق فهرست مطالب

موقع خوندن pdf کتاب‌ها انگشتت درد می‌گیره و حوصله اسکرول‌کردن نداری؟ دوست‌داری سریع بری تو همون فصل وسط یا انتهایی کتاب؟ واسه اینم مشکل نداری!! هر جای کتاب که باشی می‌تونی فهرست رو باز کنی و فقط با یه کلیک بری توی صفحه مورد نظرت!!

■ امکان جست‌وجوی کلمات

از اون دسته آدم‌هایی هستی که دوست داری ترکیبی بخونی و یه کلمه رو سرچ کنی و تمام مطالب مرتب باهاش رو پیدا کنی؟؟ بازم مشکلی نداریی! هر چی که بخوای توی دیجی‌ماز به فارسی یا انگلیسی می‌تونی سرچ کنی و پیداش کنی!

■ وضعیت نایت مود (night mode)

نور گوشی یا تبلت چشماتو اذیت میکنه؟ بازم مشکلی نداری!! کافیه دیجی‌ماز رو بذاری روی حالت نایت مود!

■ هر کتاب رو فقط یک بار تهیه می‌کنی!

تا حالا شده یه کتابی رو تهیه کنی بعد ببینی آپدیت جدیدش اومده و مجبوری یه هزینه مجدد کنی تا تهیه‌ش کنی؟؟ دیگه این دغدغه رو نداشته باش! حتی اگه کتاب‌های دیجی‌ماز ۱۰۰ بار هم اپدیت بشن، نیاز به هزینه مجدد نداری و کتاب جدید برات فعال میشه!

■ آخریشو تو بگو ...

بهمون بگو چه ویژگی‌های دیگه‌ای لازم داری که به دیجی‌ماز اضافه کنیم؟ تا در آپدیت‌های بعدی این‌کارو انجام بدیم.اگه می‌خوای برنده باشی، سعی کن خوب پیش‌بینی کنی!

فهرست مطالب

فهرست میکروطبقه‌بندی بانک تست

راهنمای رنگ هر تست
تست آسان
تست متوسط
تست سخت
تست خیلی سخت

پاسخنامه بانک تست مبحث مشتق

۱۸۱۰ خط $y=۳x-۲$ در نقطه $x_۰=۲$ بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۲f(x)-۸}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۸۱۰ ۳ **روش اول:** می‌دانیم که خط $y=۳x-۲$ در نقطه $x_۰=۲$ بر منحنی مماس است و از طرفی هم می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع f در یک نقطه، با مشتق تابع f در آن نقطه برابر است، پس:

$$y=\underset{\text{شیب خط}}{۳}x-۲\Rightarrow m=f'(۲)=۳$$

حال حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۲f(x)-۸}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۴)(f(x)+۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\underbrace{\boxed{\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x-۲}}}_{f'(۲)}\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۲}{x+۲}$$

$$A=f'(۲)\times\frac{f(۲)+۲}{۲+۲}\quad (*)$$

از طرفی با توجه به این‌که خط $y=۳x-۲$ در نقطه $x_۰=۲$ بر منحنی تابع f مماس است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$f(۲)=y(۲)\Rightarrow y=۳x-۲\xrightarrow{x=۲}y(۲)=۳(۲)-۲=f(۲)\Rightarrow f(۲)=۴$$

با توجه به رابطه $(*)$ و با داشتن $f'(۲)=۳$ و $f(۲)=۴$:

$$A=۳\times\frac{۴+۲}{۲+۲}=۳\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

روش دوم: استفاده از قاعده هوپیتال:

یادآوری: $(f^n(x))'=n f'(x)f^{n-۱}(x)$

با توجه به این‌که $f(۲)=۴$ است پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۲f(x)-۸}{x^۲-۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۲f'(x)f(x)-۲f'(x)}{۲x}=\frac{۲f'(۲)f(۲)-۲f'(۲)}{۴}\xrightarrow[f(۲)=۴]{f'(۲)=۳}\frac{(۲\times ۳\times ۴)-(۲\times ۳)}{۴}=\frac{۱۸}{۴}=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

www.biomaze.ir

۱۸۱۱ در تابع پیوسته f اگر $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x+۲}{f(x)+۱}=-\frac{۳}{۴}$ باشد، خط مماس بر منحنی در نقطه به طول $x=-۲$ روی آن محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۷}{۳}$ ۳) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$

۱۸۱۱ ۳ ابتدا $x=-۲$ را در حد داده شده جایگذاری می‌کنیم که اگر این کار را انجام دهیم متوجه خواهیم شد که صورت کسر به صفر میل می‌کند. اما همان‌طور که می‌بینید حاصل حد برابر عدد حقیقی $-\frac{۳}{۴}$ اســت. پس داستان چیست؟ ماجرا از این قرار است که با جایگذاری $x=-۲$ در حد داده شده قطعاً حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ ایجاد شده است که پس از رفع ابهام از آن حاصل حد برابر $-\frac{۳}{۴}$ شده است. پس نتیجه می‌گیریم که مخرج کسر نیز به ازای $x=-۲$ به صفر میل می‌کند بنابراین:

$$f(x)+۱=۰\xrightarrow{x=-۲}f(-۲)+۱=۰\Rightarrow f(-۲)=-۱$$

از طرفی می‌دانیم که $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است حال اگر طرفین این رابطه را معکوس کنیم داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{۱}{f'(a)}$$

پس نتیجه می‌گیریم که حد داده شده همان عکس تعریف مشتق در نقطه $x=-۲$ است لذا:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+۲}{f(x)+۱}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\lim_{x\to -۲}\frac{x-(-۲)}{f(x)-(-۱)}=\frac{۱}{f'(-۲)}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow f'(-۲)=-\frac{۴}{۳}$$

و این یعنی شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=-۲$ برابر $-\frac{۴}{۳}$ است حال با داشتن شیب خط مماس و مختصات نقطه تماس یعنی $(-۲,f(-۲))$ ، می‌توانیم معادله خط مماس را تشکیل دهیم:

$$y-f(-۲)=f'(-۲)(x-(-۲)) \Rightarrow y+۱=-\frac{۴}{۳}(x+۲) \Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x-\frac{۱۱}{۳}$$: معادله خط مماس

محل برخورد خط مماس با محور y ها، همان عرض از مبدأ خط $y=-\frac{۴}{۳}x-\frac{۱۱}{۳}$ ، یعنی $-\frac{۱۱}{۳}$ است. پس گزینه ۳ صحیح است.

www.biomaze.ir

۱۸۱۲ اگر نمودار $f(x)$ یک سهمی با دهانه رو به بالا و $f^۲(x)+f(x)=x^۴+۳x^۲+۲$ باشد، در این صورت حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۸۱۲ ۱ ابتدا معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f^۲(x)+f(x)=x^۴+۳x^۲+۲ \Rightarrow f^۲(x)+f(x)-(x^۴+۳x^۲+۲)=۰$$

$f(x)$ را برابر t فرض کرده و داریم: $t^۲+t-(x^۴+۳x^۲+۲)=۰$

$$\Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow \Delta=(۱)^۲-۴(۱)(-(x^۴+۳x^۲+۲))=۱+۴(x^۴+۳x^۲+۲)=۴x^۴+۱۲x^۲+۹$$

$$\Rightarrow \Delta=۴x^۴+۱۲x^۲+۹ \Rightarrow \Delta=(۲x^۲+۳)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{(-۱)+\sqrt{(۲x^۲+۳)^۲}}{۲(۱)}=\frac{|۲x^۲+۳|-۱}{۲} \\ t=\frac{(-۱)-\sqrt{(۲x^۲+۳)^۲}}{۲(۱)}=\frac{-|۲x^۲+۳|-۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow[t=f(x)]{۲x^۲+۳>۰} \begin{cases} f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{۲}=x^۲+۱ \checkmark \\ f(x)=\frac{-۲x^۲-۴}{۲}=-x^۲-۲ \times \end{cases}$$

با توجه به گفته سؤال، $f(x)$ یک سهمی با دهانه رو به بالا می‌باشد بنابراین از بین ضابطه‌های به‌دست آمده برای $f(x)$، فقط $f(x)=x^۲+۱$ قابل قبول است.

حال سراغ حد خواسته سؤال می‌رویم، می‌دانیم که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ است پس: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)$

از تابع $f(x)=x^۲+۱$ مشتق گرفته و $x=۲$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲+۱ \xrightarrow{f'} f'(x)=۲x \xrightarrow{x=۲} f'(۲)=۲\times۲=۴$$

www.biomaze.ir

۱۸۱۳ اگر f تابعی پیوسته و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳x-۲h)-f(۳x)}{h}=\frac{۱}{۲x+۱}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۵}$

۱۸۱۳ ۲ با توجه به رابطه $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\bigcirc+mh)-f(\bigcirc+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(\bigcirc)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳x-۲h)-f(۳x)}{h}=\frac{۱}{۲x+۱} \Rightarrow -۲f'(۳x)=\frac{۱}{۲x+۱} \Rightarrow f'(۳x)=\frac{-۱}{۴x+۲}$$

حال برای یافتن $f'(۲)$، در تساوی به‌دست آمده $x=\frac{۲}{۳}$ را قرار می‌دهیم:

$$f'(۳x)=\frac{-۱}{۴x+۲} \xrightarrow{x=\frac{۲}{۳}} f'(۲)=\frac{-۱}{۴(\frac{۲}{۳})+۲}=\frac{-۱}{\frac{۸}{۳}+۲}=\frac{-۳}{۱۴}$$

www.biomaze.ir

۱۸۱۴ هرگاه $f'(۱)=۲$ و $f(۱)=۰$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty} x f(\frac{x+۲}{x})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۴-

۱۸۱۴ ۳ ابتدا سعی می‌کنیم که از حد داده شده تعریف مشتق را بیرون بکشیم لذا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

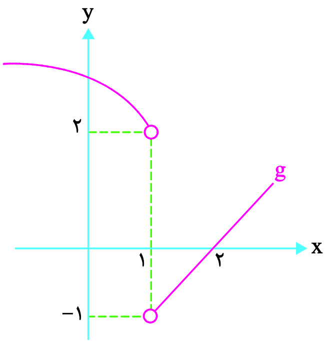
$$\lim_{x\to+\infty} xf\left(\frac{x+۲}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{x+۲}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(۱+\frac{۲}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}$$

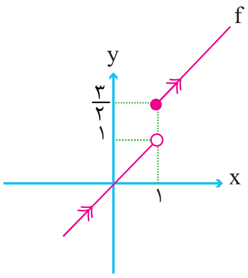
حال $\frac{۱}{x}$ را برابر h فرض کرده داریم:

$$\begin{cases}\frac{۱}{x}=h\\ x\to+\infty\Rightarrow h\to ۰\end{cases}\qquad A=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+۲h)}{h}=۲f'(۱)\xrightarrow{f'(۱)=۲}A=۲\times۲=۴$$

www.biomaze.ir

۱۸۱۵ با توجه به نمودار توابع g,f، حاصل $\lim_{x\to۱^+}\frac{۲f(x)-۳}{g(x)+۱}$ کدام است؟





۱) ۲

۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) ۲-

۴) حد موجود نیست

۱۸۱۵ ۱ با توجه به شکل، مشخص است که توابع g, f در نقطه x = ۱ حد ندارند اما با توجه به این‌که خود صورت سؤال مشخص کرده که حدگیری در همسایگی راست ۱ انجام شود، پس باید فقط همسایگی راست عدد ۱ را بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to۱^+}f(x)=\frac{۳}{۲}\\ \lim_{x\to۱^+}g(x)=-۱\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}\frac{۲f(x)-۳}{g(x)+۱}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to۱^+}\frac{۲f'(x)}{g'(x)}\quad(*)$$

حال برای محاسبه $f'(x)$ و $g'(x)$، شیب خط‌های متناظر با آن‌ها در همسایگی راست عدد ۱ را به‌دست می‌آوریم:

در تابع f: دو خط موازی‌اند، پس شیب برابری دارند. بنابراین:

$$\text{شیب خط}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۱}=۱\Rightarrow f'(x)=۱$$

در تابع g: خط مورد نظر از دو نقطه $(۱,-۱)$ و $(۲,۰)$ عبور می‌کند پس:

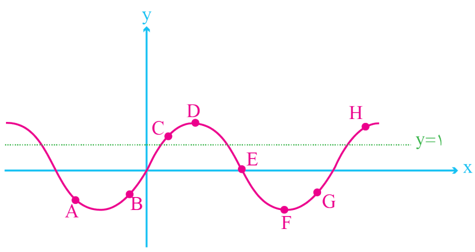
$$\text{شیب خط}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۱}=۱\Rightarrow g'(x)=۱$$

حال بر اساس رابطه (*) داریم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{۲f'(x)}{g'(x)}=\frac{۲\times۱}{۱}=۲$$

www.biomaze.ir

۱۸۱۶ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نامعادله $\frac{f(x)-۱}{f'(x)}>۰$ در چه تعداد از نقاط مشخص شده برقرار است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۸۱۶ ۳ برای این‌که نامعادله $\frac{f(x)-۱}{f'(x)}>۰$ برقرار باشد باید صورت و مخرج آن هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند یعنی:

$$(۱)\begin{cases}f(x)-۱>۰\Rightarrow f(x)>۱\\ f'(x)>۰\end{cases}\qquad(۲)\begin{cases}f(x)-۱<۰\Rightarrow f(x)<۱\\ f'(x)<۰\end{cases}$$

یعنی باید دنبال نقاطی باشیم که در آن‌ها یکی از شروط (۱) یا (۲) برقرار باشد.

وضعیت	$f'(x)$	$f(x)$	نقطه
✓	$-$	<۱	A
✗	$+$	<۱	B
✓	$+$	>۱	C
✗	صفر	>۱	D
✓	$-$	<۱	E
✗	صفر	<۱	F
✗	$+$	<۱	G
✓	$+$	>۱	H

پس در نقاط A، C، E و H نامعادله گفته شده برقرار است.

www.biomaze.ir

۱۸۱۷ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۴$ و $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(x^{۲}-mx-\dfrac{۱}{۲}-\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴x-h)-f(۴x)}{h})=۶$ باشد، m کدام است؟

۱) $۴/۵$ ۲) $-۴/۵$ ۳) $-۲/۲۵$ ۴) $۲/۲۵$

۱۸۱۷ ۲ می‌دانیم $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ است پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۴\Rightarrow f'(۲)=۴$$

حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم با علم به این‌که:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\bigcirc+mh)-f(\bigcirc+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(\bigcirc)$$

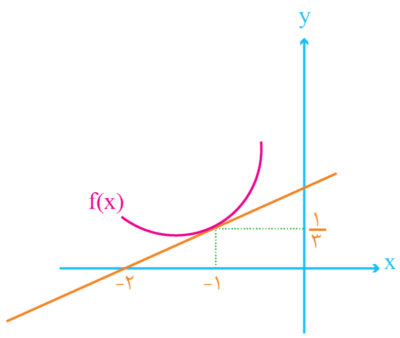
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴x-h)-f(۴x)}{h}=-f'(۴x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(x^{۲}-mx-\frac{۱}{۲}-\underbrace{\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴x-h)-f(۴x)}{h}}_{-f'(۴x)})=۶\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{۲}-m(\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}+f'(۲)=۶$$

$$\Rightarrow\frac{m}{۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+f'(۲)-۶\xrightarrow{f'(۲)=۴}\frac{m}{۲}=\frac{-۱}{۴}+۴-۶\Rightarrow\frac{m}{۲}=-\frac{۹}{۴}\Rightarrow m=-\frac{۹}{۲}=-۴/۵$$

www.biomaze.ir

۱۸۱۸ با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^{۳}(۲h-۱)-f^{۳}(-۱+\frac{h}{۲})}{-h}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۶}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸۱۸ ۱ **روش اول:** ابتدا با کمک اتحاد زیر، $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$ حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^{۳}(۲h-۱)-f^{۳}(-۱+\frac{h}{۲})}{-h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۲h-۱)-f(-۱+\frac{h}{۲}))(f^{۲}(۲h-۱)+f^{۲}(-۱+\frac{h}{۲})+f(۲h-۱)f(-۱+\frac{h}{۲}))}{-h}$$

$$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1+\frac{h}{2})}{-h}}_{-\frac{3}{2}f'(-1)}\times\lim_{h\to 0}f^2(2h-1)+f(2h-1)f(-1+\frac{h}{2})+f^2(-1+\frac{h}{2})$$

$$=(-\frac{3}{2}f'(-1))\times(f^2(-1)+f(-1)f(-1)+f^2(-1))=-\frac{3}{2}f'(-1)\times 3f^2(-1)=-\frac{9}{2}f'(-1)f^2(-1)$$

حال با توجه به شکل سؤال می‌دانیم که $f(-1)=\frac{1}{3}$ است و نیز می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=-1$، همان مشتق تابع f در $x=-1$ (یعنی $(f'(-1))$) است پس‌خط مماس بر نمودار تابع f از نقاط $(-2,0)$ و $(-1,\frac{1}{3})$ عبور می‌کند در نتیجه:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{3}-0}{-1-(-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$$

معادله خط مماس: $y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow[(-2,0)]{m=\frac{1}{3}}y=\frac{1}{3}(x-(-2))\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

پس شیب خط مماس بر منحنی تابع f در $x=-1$، برابر $\frac{1}{3}$ است لذا: $f'(-1)=\frac{1}{3}$

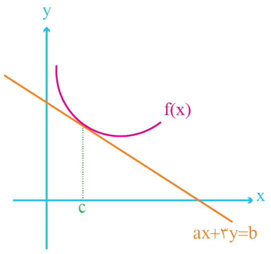
$$-\frac{9}{2}f'(-1)f^2(-1)\xrightarrow[f(-1)=\frac{1}{3}]{f'(-1)=\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^2=-\frac{1}{6}$$

روش دوم: استفاده از قاعده هوپیتال:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^3(2h-1)-f^3(-1+\frac{h}{2})}{-h}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(3\times 2f'(2h-1)f^2(2h-1))-(3\times\frac{1}{2}f'(-1+\frac{h}{2})f^2(-1+\frac{h}{2}))}{-1}$$

$$=\frac{(6f'(-1)f^2(-1))-(\frac{3}{2}f'(-1)f^2(-1))}{-1}=-\frac{9}{2}f'(-1)f^2(-1)\overset{f'(-1)=\frac{1}{3}}{\underset{f(-1)=\frac{1}{3}}{=\!=\!=}}-\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^2=-\frac{1}{6}$$

۱۸۱۹ در شکل مقابل، خط به معادله $ax+3y=b$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{2}$ بر منحنی تابع f مماس بوده و نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول $\frac{4}{5}$ قطع می‌کند. اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{h+1}{2})-f(\frac{1-2h}{2})}{h^2+2h}=-\frac{1}{2}$ باشد حاصل abc کدام است؟



۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

۱۸۱۹ ۴ می‌دانیم که اگر f' موجود باشد داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{h+1}{2})-f(\frac{1-2h}{2})}{h^2+2h}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{2}+\frac{h}{2})-f(\frac{1}{2}-h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+2}=-\frac{1}{2}=\left(\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1}\right)f'(\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}f'(\frac{1}{2})=-1\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}$$

از طرفی $f'(\frac{1}{2})=\frac{-2}{3}$ یعنی شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{2}$، برابر $-\frac{2}{3}$ است. بنابراین با توجه به شکل سؤال داریم:

$$f'(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=c=\frac{1}{2}\\ \text{شیب خط مماس}=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده و معادله خط مماس بر منحنی داریم: $ax+۳y=b \Rightarrow y=(-\frac{a}{۳})x+\frac{b}{۳}$:معادله خط مماس بر منحنی

می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی برابر $-\frac{۲}{۳}$ است پس: $-\frac{a}{۳}=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۲$

از طرفی طبق گفته سؤال، خط مماس بر منحنی تابع f، نیمساز ناحیه اول $(y=x)$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{۴}{۵}$ قطع می‌کند بنابراین نقطه $(\frac{۴}{۵},\frac{۴}{۵})$ باید در معادله خط مماس صدق کند:

$$y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{b}{۳} \xrightarrow{(\frac{۴}{۵},\frac{۴}{۵})} \frac{۴}{۵}=(-\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۵})+\frac{b}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{۵}=-\frac{۸}{۱۵}+\frac{b}{۳} \Rightarrow b=۴$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} a=۲ \\ b=۴ \Rightarrow abc=۲\times۴\times\frac{۱}{۲}=۴ \\ c=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

www.biomaze.ir

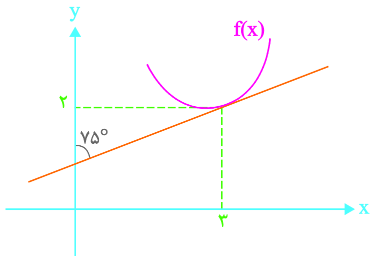
۱۸۲۰ در شکل زیر، خط مماس بر منحنی تابع f در $x=۳$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)+h-f(۳)}{\sqrt{۳}h}$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$

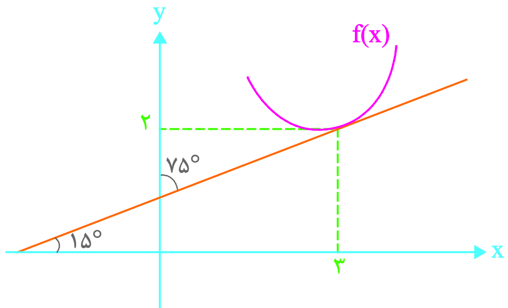
۲) $\sqrt{۳}+۱$

۳) $\sqrt{۳}-۱$

۴) $-۱-\sqrt{۳}$



۱۸۲۰ ۳ با توجه به شکل زیر، زاویه خط مماس با محور x ها برابر ۱۵° است بنابراین شیب خط مماس برابر است با: $m=\tan ۱۵^\circ$



از طرفی می‌دانیم $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، پس:

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۲\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan^۲ ۱۵^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan^۲ ۱۵^\circ}$$

حال $\tan ۱۵^\circ$ را برابر x فرض کرده و داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲x}{۱-x^۲} \Rightarrow \sqrt{۳}x^۲+۶x-\sqrt{۳}=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۴۸} \begin{cases} x_۱=\tan ۱۵^\circ=\frac{-۶+\sqrt{۴۸}}{۲\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}>۰ \xrightarrow{\tan ۱۵^\circ>۰} ✓ \\ x_۲=\tan ۱۵^\circ=\frac{-۶-\sqrt{۴۸}}{۲\sqrt{۳}}=-۲-\sqrt{۳}<۰ \xrightarrow{\tan ۱۵^\circ>۰} × \end{cases}$$

حال حد خواسته شده را ساده کرده و حاصل آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)+h-f(۳)}{\sqrt{۳}h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)+h}{\sqrt{۳}h}=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}+۱\right)$$

حاصل حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ همان $f'(۳)$ است و از طرفی می‌دانیم که مشتق تابع f در نقطه $x=۳$ همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقطه است پس:

$$(\frac{۱}{\sqrt{۳}})\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}+۱\right)=\frac{f'(۳)}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{f'(۳)=\tan ۱۵^\circ=۲-\sqrt{۳}} \frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۱$$

www.biomaze.ir

۱۸۲۱ خط گذرنده از دو نقطه $(-۱,-۱۵)$ و $(۲,-۶)$، بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ در $x=۲$ مماس است. حد عبارت $\dfrac{f^{۲}(x)+۵f(x)-۶}{۲-x}$ وقتی $x\to ۲$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۸۲۱ ۱ ابتدا سعی می‌کنیم که معادله خط مماس بر منحنی f را تشکیل بدهیم و می‌دانیم که این خط از دو نقطه $(-۱,-۱۵)$ و $(۲,-۶)$ عبور می‌کند پس:

شیب خط مماس: $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-۶-(-۱۵)}{۲-(-۱)}=\dfrac{۹}{۳}=۳$

معادله خط مماس: $y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[(۲,-۶)]{m=۳}y+۶=۳(x-۲)\Rightarrow y=۳x-۱۲$

معادله خط مماس برابر $y=۳x-۱۲$ است و نیز می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه تماس $(x=۲)$ برابر مشتق تابع در آن نقطه است پس:

$$\begin{cases}f'(۲)=۳\\ f(۲)=-۶\end{cases}$$

حال به سراغ حد خواسته شده می‌رویم و آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to ۲}\frac{f^{۲}(x)+۵f(x)-۶}{۲-x}=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)+۶)(f(x)-۱)}{-(x-۲)}$$

می‌دانیم که $f(۲)=-۶$ است پس:

$$A=\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}_{f'(۲)}\times\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۱)}{-۱}=f'(۲)\times(-f(۲)+۱)$$

$$A=f'(۲)(-f(۲)+۱)\xrightarrow[f(۲)=-۶]{f'(۲)=۳}A=۳(-(-۶)+۱)=۳(۷)=۲۱$$

www.biomaze.ir

۱۸۲۲ اگر خط گذرا از نقاط $(-۳,۰)$ و $(۱,۲)$ در نقطه‌ای با عرض ۱- بر نمودار تابع وارون f مماس باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{f^{۲}(x)+۲f(x)-۱۵}{\sqrt{۳-x}-۲}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲

۱۸۲۲ ۱ ابتدا معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون f را به دست می‌آوریم، می‌دانیم که این خط از دو نقطه با مختصات $(-۳,۰)$ و $(۱,۲)$ عبور می‌کند پس:

شیب خط مماس : $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{۲-۰}{۱-(-۳)}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}$

خط y در نقطه‌ای به عرض ۱- بر نمودار تابع $f^{-۱}$ مماس است بنابراین:

$$y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=-۵\xrightarrow{\text{نقطه تماس}}A(-۵,-۱)$$

دقت شود که خط y با شیب $\frac{۱}{۲}$ در نقطه $A(-۵,-۱)$ بر نمودار تابع $f^{-۱}$ مماس می‌باشد بنابراین نتیجه می‌گیریم که خط مماس بر نمودار تابع f، با شیب ۲ در نقطه‌ای با مختصات $B(-۱,-۵)$ بر تابع f مماس می‌باشد پس:

$$\begin{cases}\text{شیب خط مماس بر نمودار تابع } f \text{ در } x=-۱ = f'(-۱)=۲\\ \text{مختصات نقطه تماس}: B(-۱,-۵)\Rightarrow f(-۱)=-۵\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{f^{۲}(x)+۲f(x)-۱۵}{\sqrt{۳-x}-۲}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to -۱}\frac{۲f'(x)f(x)+۲f'(x)}{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}=\frac{۲f'(-۱)f(-۱)+۲f'(-۱)}{\frac{-۱}{۴}}$$

$$\xrightarrow[f'(-۱)=۲]{f(-۱)=-۵}\frac{(۲\times ۲\times(-۵))+(۲\times ۲)}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{-۲۰+۴}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{-۱۶}{-\frac{۱}{۴}}=۶۴$$

نکته اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه (a,b) را $f'(a)$ بنامیم، شیب خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای با مختصات (b,a) برابر است با:

مشتق تابع معکوس: $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

توجه این نکته خارج از اهداف کتاب درسی است اما با توجه به این‌که مباحث تابع وارون و مشتق، جزء سرفصل‌های کتاب درسی است، به شما پیشنهاد می‌کنیم که این نکته را گوشهٔ ذهنتان داشته باشید.

۱۸۲۳ اگر مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{2x-b}$ به ازای $x=\frac{7}{2}$ برابر $\frac{1}{6}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۸۲۳ ۱ ابتدا طبق رابطه زیر از تابع f مشتق می‌گیریم و $x=\frac{7}{2}$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$y=\sqrt[m]{u^n}\Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-b}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-b)^2}}\xrightarrow{x=\frac{7}{2}}f'(\frac{7}{2})=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2(\frac{7}{2})-b)^2}}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt[3]{(7-b)^2}}=\frac{1}{6}\Rightarrow 3\sqrt[3]{(7-b)^2}=12\Rightarrow(7-b)^{\frac{2}{3}}=4$$

حال طرفین رابطه فوق را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$((7-b)^{\frac{2}{3}})^3=(4)^3\Rightarrow(7-b)^2=64\xrightarrow{\text{جذر از طرفین}}|7-b|=8\Rightarrow\begin{cases}7-b=8\Rightarrow b=-1\\7-b=-8\Rightarrow b=15\end{cases}$$

مجموع مقادیر به دست آمده برای b، برابر ۱۴ است.

۱۸۲۴ تابع f با ضابطه $f(x)=(2m^2-m-3)x^{2m-1}$ مفروض است. اگر به ازای تمامی مقادیر حقیقی برای x، $f'(x)=0$ باشد در آن صورت مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۲۴ ۲ چون به ازای تمامی مقادیر حقیقی برای x، $f'(x)=0$ است پس تابع f تابعی ثابت است. در دو حالت ممکن، تابع f تابعی ثابت خواهد شد:

حالت اول: ضریب x برابر صفر باشد:

$$2m^2-m-3=0\Rightarrow(m+1)(2m-3)=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\m=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالت دوم: توان x برابر صفر باشد:

$$2m-1=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با:

$$(-1)+(\frac{3}{2})+(\frac{1}{2})=1$$

۱۸۲۵ مشتق تابع $f(x)=\left(\dfrac{x^2+x-4}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)^3$ به‌ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -56 ۲) -54 ۳) -52 ۴) -50

۱۸۲۵ ۱ ابتدا تابع داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{x^۲+x-۴}{\sqrt[۳]{x^۲+۱}}\right)^۳ \Rightarrow f(x)=\frac{(x^۲+x-۴)^۳}{x^۲+۱}$$

حال از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۳(۲x+۱)(x^۲+x-۴)^۲(x^۲+۱)-(۲x)(x^۲+x-۴)^۳}{(x^۲+۱)^۲}$$

حال $x=-۱$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f'(-۱)=\frac{۳(-۱)(-۴)^۲(۲)-(-۲)(-۴)^۳}{(۲)^۲}=\frac{-۹۶-۱۲۸}{۴}=-۵۶$$

۱۸۲۶ مشتق تابع $f(x)=x\left(\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}\right)$ در نقطه $x=-۳$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۸۲۶ ۲

یادآوری

$$\begin{cases} y=\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \\ y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^۲} \end{cases}$$

با استفاده از روابط فوق مشتق‌گیری را انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x\left(\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}\right) \Rightarrow f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\frac{\frac{۶-۱}{(x+۲)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^۲}}\times x$$

حال $x=-۳$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f'(-۳)=\sqrt[۳]{\frac{-۹+۱}{-۳+۲}}+\frac{\frac{۵}{(-۳+۲)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{-۹+۱}{-۳+۲}\right)^۲}}\times(-۳)=\sqrt[۳]{۸}+\left(\frac{۵}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times(-۳)\right) \Rightarrow f'(-۳)=۲+\left(\frac{۵\times(-۳)}{۳\times۴}\right)=۲+\frac{-۵}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۱۸۲۷ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}-۱$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}}$ باشد، حاصل $f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)$ کدام است؟

۱) $۰/۲۵$ ۲) $۱/۲۵$ ۳) $۲/۵$ ۴) $۴/۵$

۱۸۲۷ ۲ همان‌طور که می‌دانید عبارت $f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)$ در صورت مشتق تابع $\frac{f}{g}$ وجود دارد بنابراین ابتدا باید ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل بدهیم:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-۱}-۱ \\ g(x)=\dfrac{۲x+۱}{\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}}=\dfrac{۲x+۱}{\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^۲}}=\dfrac{۲x+۱}{|\underbrace{\sqrt{x-۱}+۱}_{+}|}=\dfrac{۲x+۱}{\sqrt{x-۱}+۱} \quad (A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{\frac{۲x+۱}{\sqrt{x-۱}+۱}}=\frac{(\sqrt{x-۱}-۱)(\sqrt{x-۱}+۱)}{۲x+۱}=\frac{(x-۱)-۱}{۲x+۱}=\frac{x-۲}{۲x+۱} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-۲}{۲x+۱}$$

حال از طرفین رابطه فوق مشتق می‌گیریم: (دقت شود که برای مشتق‌گیری از سمت راست تساوی فوق، از مشتق تابع هموگرافیک استفاده کردیم)

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}=\frac{۱-(-۴)}{(۲x+۱)^۲}$$

$x=۲$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)=g^۲(۲)\times\frac{۱}{۵} \quad (B)$$

برای به دست آمدن حاصل خواسته شده، مقدار $g(۲)$ را از رابطه (A) به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{x-۱}+۱} \xrightarrow{x=۲} g(۲)=\frac{۲(۲)+۱}{\sqrt{۲-۱}+۱}=\frac{۵}{۲}$$

حال $g(۲)=\frac{۵}{۲}$ را در رابطه (B) قرار داده و حاصل خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)=\underbrace{\boxed{g^۲(۲)}}_{\frac{۲۵}{۴}}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲۵}{۴}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

www.biomaze.ir

۱۸۲۸ اگر $f(x)=g(x)\sqrt[۳]{x^۲+۱}$ باشد، حاصل $\frac{f'(۱)}{g(۱)}-\frac{g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$ چند برابر $\sqrt[۳]{۲}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۸۲۸ **۴** ابتدا از عبارت خواسته شده مخرج مشترک گرفته و آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{f'(۱)}{g(۱)}-\frac{g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{g(۱)f'(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}=\left(\frac{f}{g}\right)'(۱)$$

از طرفی مطابق فرض سؤال داریم:

$$f(x)=g(x)\sqrt[۳]{x^۲+۱}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$$

حال از طرفین رابطه به دست آمده مشتق می‌گیریم و $x=۱$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲}}\xrightarrow{x=۱}(\frac{f}{g})'(۱)=\frac{۲(۱)}{۳\sqrt[۳]{((۱)^۲+۱)^۲}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲}}{۶}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۳}$$

حاصل خواسته شده برابر $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۳}$ است که $\frac{۱}{۳}$ برابر $\sqrt[۳]{۲}$ است.

www.biomaze.ir

۱۸۲۹ اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۲\sqrt{x+۳}+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱-۲h)-f(۴h+۱)}{۵h}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۸۲۹ **۳** ابتدا حد خواسته شده را مطابق رابطه $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=(\frac{m-n}{k})f'(a)$، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-۲h)-f(۴h+۱)}{۵h}=(\frac{-۲-۴}{۵})f'(۱)=-\frac{۶}{۵}f'(۱)\quad (*)$$

حال مشتق تابع f را به ازای $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۲\sqrt{x+۳}+۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}})}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲\sqrt{x+۳}+۳)^۲}}$$

$$\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=\frac{۲(۱)+(\frac{۲}{۲\sqrt{۱+۳}})}{۳\sqrt[۳]{((۱)^۲+۲\sqrt{۱+۳}+۳)^۲}}=\frac{۲+\frac{۱}{۲}}{۳\sqrt[۳]{(۱+۴+۳)^۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}=\frac{۵}{۲۴}$$

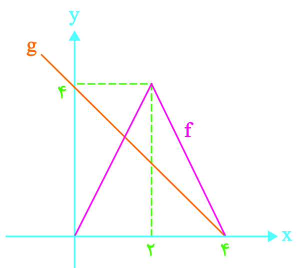
در نهایت $f'(۱)=\frac{۵}{۲۴}$ را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم تا حاصل خواسته شده به دست آید:

$$A=-\frac{۶}{۵}f'(۱)\xrightarrow{f'(۱)=\frac{۵}{۲۴}}A=-\frac{۶}{۵}\times\frac{۵}{۲۴}=-\frac{۶}{۲۴}=-\frac{۱}{۴}$$

www.biomaze.ir

۱۸۳۰ نمودار توابع g,f به صورت مقابل است اگر $h(x)=\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$ باشد، حاصل $h'(۳)$ کدام است؟

۱) ۴-
۲) ۲-
۳) ۶-
۴) ۳-



۱۸۳۰ ۴ ابتدا ضابطه توابع g, f را تشکیل می‌دهیم:

$$\bullet\ f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 2 \\ -2x + 8 & 2 \le x \le 4 \end{cases} \qquad \bullet\ g(x) = -x + 4$$

حال از ضابطه تابع h مشتق گرفته و $x = 3$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$h(x) = \frac{x + f(x)}{x - g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{(1 + f'(x))(x - g(x)) - (1 - g'(x))(x + f(x))}{(x - g(x))^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} h'(3) = \frac{(1 + f'(3))(3 - g(3)) - (1 - g'(3))(3 + f(3))}{(3 - g(3))^2} \quad (*)$$

$$\bullet\ g(x) = -x + 4 \xrightarrow{g'} g'(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} g(3) = 1 \\ g'(3) = -1 \end{cases}$$

$$\bullet\ f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 2 \\ -2x + 8 & 2 \le x \le 4 \end{cases} \xrightarrow{f'} f'(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x < 2 \\ -2 & 2 < x \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(3) = -2 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری کرده و حاصل خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$h'(3) = \frac{(1 + (-2))(3 - 1) - (1 - (-1))(3 + 2)}{(3 - 1)^2} = \frac{(-1)(2) - (2)(5)}{4} = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

۱۸۳۱ اگر $f(x) = \frac{x}{2x + 1}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt[3]{f(x)}}$ در $x = -1$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{12}$ ۲) $-\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{5}{24}$

۱۸۳۱ ۲ ابتدا از تابع g مشتق می‌گیریم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt[3]{f(x)}} \xrightarrow{g'} g'(x) = \frac{-\left(\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}\right)}{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\right)^2}$$

حال $x = -1$ را جایگزین می‌کنیم:

$$g'(-1) = \frac{-\left(\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)}} + \frac{f'(-1)}{3\sqrt[3]{f^2(-1)}}\right)}{\left(\sqrt{f(-1)} + \sqrt[3]{f(-1)}\right)^2} \quad (*)$$

با توجه به رابطه بالا، باید $f(-1)$ و $f'(-1)$ را به دست بیاوریم، حال به سراغ تابع f رفته و این مقادیر را به واسطه آن به دست می‌آوریم (دقت شود که برای محاسبه f'، از رابطه مشتق تابع هموگرافیک استفاده می‌کنیم):

$$f'(x) = \frac{1 - 0}{(2x + 1)^2} = \frac{1}{(2x + 1)^2} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = \frac{1}{(2(-1) + 1)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f(x) = \frac{x}{2x + 1} \xrightarrow{x=-1} f(-1) = \frac{-1}{2(-1) + 1} = \frac{-1}{-2 + 1} = 1$$

حال مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری کرده و حاصل $g'(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g'(-1) = \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1)^2}}\right)}{(\sqrt{1} + \sqrt[3]{1})^2} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{(1 + 1)^2} = \frac{-\frac{5}{6}}{4} = -\frac{5}{24}$$

۱۸۳۲ اگر $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2f(x) + x}}$ باشد، حاصل $f'(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۸۳۲ **۲** ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم و $x=۲$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲}{\sqrt{۲f(x)+x}}$$

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{۲f'(x)+۱}{۲\sqrt{۲f(x)+x}}\right)\times(۲)}{۲f(x)+x}\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=\frac{-\left(\frac{۲f'(۲)+۱}{۲\sqrt{۲f(۲)+۲}}\right)\times ۲}{۲f(۲)+۲}\quad(A)$$

حال $f(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۲)=\frac{۲}{\sqrt{۲f(۲)+۲}}\quad(B)$$

رابطه (A) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و آن را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$f'(۲)=\frac{-\left(\overbrace{\frac{۲}{\sqrt{۲f(۲)+۲}}}^{f(۲)}\right)\times\left(\frac{۲f'(۲)+۱}{۲}\right)}{۲f(۲)+۲}=\frac{-۲f'(۲)f(۲)-f(۲)}{۴f(۲)+۴}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}-۲f'(۲)f(۲)-f(۲)=۴f'(۲)f(۲)+۴f'(۲)$$

$$\Rightarrow -f(۲)=۴f'(۲)+۶f'(۲)f(۲)\Rightarrow f'(۲)(۴+۶f(۲))=-f(۲)\quad\Rightarrow f'(۲)=\frac{-f(۲)}{۴+۶f(۲)}\quad(C)$$

همان‌طور که می‌بینید برای محاسبه $f'(۲)$ نیاز به $f(۲)$ داریم پس به سراغ رابطه (B) می‌رویم:

$$f(۲)=\frac{۲}{\sqrt{۲f(۲)+۲}}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}f^{۲}(۲)=\frac{۴}{۲f(۲)+۲}=\frac{۲}{f(۲)+۱}\quad\Rightarrow f^{۳}(۲)+f^{۲}(۲)-۲=۰\xrightarrow[\text{فرض}]{f(۲)=t}t^{۳}+t^{۲}-۲=۰$$

مجموع ضرایب معادله به دست آمده برابر صفر است بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۱ است پس معادله را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$t^{۳}+t^{۲}-۲=۰\Rightarrow(t-۱)(\underbrace{t^{۲}+۲t+۲}_{\Delta<۰})=۰\Rightarrow t=f(۲)=۱$$

حال $f(۲)=۱$ را در رابطه (C) جایگذاری کرده و حاصل $f'(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\frac{-f(۲)}{۴+۶f(۲)}\xrightarrow{f(۲)=۱}f'(۲)=\frac{-۱}{۴+۶(۱)}=-\frac{۱}{۱۰}$$

www.biomaze.ir

۱۸۳۳ اگر $f(x)=(x^{۲}+x-۶)\sqrt[۳]{۶x-x^{۲}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۳+h)-f(-۳)}{۲h}$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۵

۱۸۳۳ **۳** ابتدا حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$A=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۳+h)-f(-۳)}{۲h}=\left(\frac{۱-۰}{۲}\right)f'(-۳)=\frac{۱}{۲}f'(-۳)\quad(*)$$

حال به سراغ تابع f رفته و مشتق آن را به ازای $x=-۳$ پیدا می‌کنیم ولی با کمی دقت می‌توان فهمید که عبارت پشت رادیکال یعنی $(x^{۲}+x-۶)$، به ازای $x=-۳$ برابر صفر است بنابراین فقط از آن مشتق می‌گیریم (مشتق عامل صفرشونده) و حد بقیهٔ تابع f را به ازای $x=-۳$ محاسبه می‌کنیم به این صورت که:

$$f(x)=(x^{۲}+x-۶)\sqrt[۳]{۶x-x^{۲}}\xrightarrow{f'}f'(x)=(۲x+۱)\times\lim_{x\to -۳}\sqrt[۳]{۶x-x^{۲}}=(۲x+۱)\times\sqrt[۳]{۶(-۳)-(-۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(۲x+۱)\times\sqrt[۳]{-۱۸-۹}=(۲x+۱)\sqrt[۳]{-۲۷}=(۲x+۱)(-۳)$$

حال $x=-۳$ را در $f'(x)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$f'(-۳)=(۲(-۳)+۱)(-۳)=(-۶+۱)(-۳)=(-۵)(-۳)=۱۵$$

حال $f'(-۳)=۱۵$ را در رابطه $(*)$ قرار داده و حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$A=\frac{۱}{۲}f'(-۳)\xrightarrow{f'(-۳)=۱۵}A=\frac{۱}{۲}\times ۱۵=۷/۵$$

www.biomaze.ir

۱۸۳۴ اگر $f(۱)=۳$ و $f'(۱)=۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{f(x)+۱}-۲}{\sqrt{x}-۱}\right)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۳۴ ۱ اگر حاصل حد خواسته شده را محاسبه کنیم داریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{0}{0}$$

چون به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیدیم مجوز استفاده از قاعده هوپیتال را داریم پس:

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{1}}}=\frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)+1}}$$

از طرفی با توجه به فرض سؤال می‌دانیم که $f(1)=3$ و $f'(1)=2$ است پس داریم:

$$\frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{2}=1$$

۱۸۳۵ در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x} & ;0\le x<4\\ [\frac{x}{4}](x^2-9x) & ;4\le x<8\end{cases}$ **، مقدار** $f'(2)-f'(5)$ **کدام است؟** (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۳۵ ۱ با توجه به این‌که $x=2$ در دامنه ضابطه بالایی حضور دارد، برای محاسبه $f'(2)$، از ضابطه بالایی مشتق می‌گیریم و نیز چون $x=5$ در دامنه ضابطه پایینی قرار دارد، برای محاسبه $f'(5)$، از ضابطه پایینی مشتق می‌گیریم:

محاسبه $f'(2)$:

$$f(x)=\sqrt{x^2+6x}\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}\xrightarrow{x=2}f'(2)=\frac{(2\times 2)+6}{2\sqrt{4+12}}=\frac{10}{2\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$$

محاسبه $f'(5)$: برای مشتق‌گیری از ضابطه پایین، ابتدا باید تکلیف براکت را مشخص کنیم، می‌دانیم که در همسایگی $x=5$، حاصل $[\frac{x}{4}]$ برابر $[\frac{5}{4}]=1$ است، پس:

$$f(x)=[\frac{x}{4}](x^2-9x)\xrightarrow{f'}f'(x)=1\times(2x-9)\xrightarrow{x=5}f'(5)=((2\times 5)-9)=10-9=1$$

حال، حاصل $f'(2)-f'(5)$ برابر است با:

$$f'(2)-f'(5)=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

۱۸۳۶ اگر $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x-2}$ **باشد، شیب خط مماس بر** $y=(x+1)f(x)$ **در** $x=1$ **کدام است؟**

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{11}{3}$

۱۸۳۶ ۴ برای یافتن شیب خط مماس در یک نقطه کافی است که مقدار مشتق تابع در آن نقطه را پیدا کنیم:

$$y=(x+1)f(x)\xrightarrow{y'}y'=(1\times f(x))+(f'(x)(x+1))\xrightarrow{x=1}y'(1)=f(1)+2f'(1)\ (*)$$

حال $f(1)$ و $f'(1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x-2}\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times(x-2)\right)-(1\times\sqrt[3]{x})}{(x-2)^2}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{(\frac{1}{3}\times(-1))-(1)}{(-1)^2}=\frac{-\frac{1}{3}-1}{1}=-\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x-2}\xrightarrow{x=1}f(1)=\frac{1}{-1}=-1$$

حال مقادیر $f(1)=-1$ و $f'(1)=-\frac{4}{3}$ را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$y'(1)=f(1)+2f'(1)=(-1)+2(-\frac{4}{3})=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$$

۱۸۳۷ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ **را در نظر بگیرید، شیب خط مماس بر منحنی** $f^{-1}(x)$ **در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟**

۱) ۱۲- ۲) ۸- ۳) ۸ ۴) ۱۲ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱۸۳۷ ۱ **روش اول:** ابتدا ضابطه وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow y(\sqrt{x}-۱)=\sqrt{x}+۱\Rightarrow y\sqrt{x}-y-\sqrt{x}-۱=۰\Rightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=y+۱\Rightarrow \sqrt{x}(y-۱)=y+۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱}\Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$$

ضابطه وارون تابع f، به صورت فوق به دست آمد، حال برای به دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲، از ضابطه $f^{-۱}$ مشتق گرفته و $x=۲$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲\to (f^{-۱}(x))'=۲(\frac{-۱-۱}{(x-۱)^۲})(\frac{x+۱}{x-۱})\xrightarrow{x=۲}(f^{-۱}(۲))'=۲\left(\frac{-۲}{(۲-۱)^۲}\right)\left(\frac{۲+۱}{۲-۱}\right)\Rightarrow (f^{-۱}(۲))'=۲\times(-۲)\times(۳)=-۱۲$$

روش دوم:

نکته می‌دانیم که اگر f تابعی وارون‌پذیر بوده و $(a,b)\in f$ باشد در این صورت $(b,a)\in f^{-۱}$ ؛ با علم به این موضوع داریم:

$x=b$ در $f^{-۱}$ شیب خط مماس بر نمودار تابع $=(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{f'(a)}$

ابتدا مختصات نقطه تماس خط مماس با نمودار تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم و می‌دانیم که طول نقطه تماس $x=۲$ است. پس برای پیدا کردن عرض نقطه تماس داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}=۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۲\sqrt{x}-۲\Rightarrow \sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۹$$

مختصات نقطه تماسِ خط مماس با نمودار تابع $f^{-۱}$، برابر $A(۲,۹)$ است پس می‌توانیم ادعا کنیم که نقطه $B(۹,۲)$ روی نمودار تابع f قرار دارد حال طبق نکته فوق داریم:

$$(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{f'(۹)}\quad (*)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}-۱)-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)^۲}=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(-۲)}{(\sqrt{x}-۱)^۲}\xrightarrow{x=۹}f'(۹)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{۹}})(-۲)}{(\sqrt{۹}-۱)^۲}=\frac{\frac{-۲}{۶}}{۴}=\frac{-۲}{۲۴}=-\frac{۱}{۱۲}$$

حال مطابق رابطه $(*)$ داریم:

$$(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{f'(۹)}\xrightarrow{f'(۹)=-\frac{۱}{۱۲}}(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{-\frac{۱}{۱۲}}=-۱۲$$

۱۸۳۸ اگر $f(۲)=۳f'(۲)=۶$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=\frac{f+۱}{f^۲}$ به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۲۷}$ ۲) $-\frac{۲}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۱}{۲۷}$

۱۸۳۸ ۲ ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم فقط دقت شود که: $(f^n(x))'=nf'(x)f^{n-۱}(x)$

$$y=\frac{f+۱}{f^۲}\xrightarrow{y'}y'=\frac{f'(x)(f^۲(x))-(۲f'(x)f(x))(f(x)+۱)}{(f^۲(x))^۲}$$

حال $x=۲$ را در رابطه به دست آمده جایگزین می‌کنیم:

$$y'(۲)=\frac{f'(۲)(f^۲(۲))-(۲f'(۲)f(۲))(f(۲)+۱)}{(f^۲(۲))^۲}$$

می‌دانیم که $f(۲)=۳f'(۲)=۶$ است پس:

$$\begin{cases}f(۲)=۶\\ f'(۲)=\frac{۶}{۳}=۲\end{cases}\Rightarrow y'(۲)=\frac{(۲\times(۶^۲))-((۲\times۲\times۶)(۶+۱))}{((۶)^۲)^۲}=\frac{۷۲-۱۶۸}{۳۶\times۳۶}=\frac{-۹۶}{۳۶\times۳۶}=-\frac{۲}{۲۷}$$

۱۸۳۹ اگر $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f^۳(x)+f(x)-۲}{x^۲-۱}=۴$ باشد، در این صورت مشتق تابع $g(x)=\sqrt{x}f^۳(x)$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۵/۵

۱۸۳۹ ۳ ابتدا حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)+f(x)-2}{x^2-1}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+2)}{(x-1)(x+1)}=4$$

از طرفی می‌دانیم که $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$؛ پس:

$$A=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\overset{f(1)}{1}}{x-1}}_{f'(1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)+f(x)+2}{x+1}=f'(1)\times\frac{f^2(1)+f(1)+2}{2}=4$$

با توجه به رابطه مشتق در بالا دانستیم که $f(1)=1$ است پس:

$$A=f'(1)\times\frac{(1)^2+1+2}{2}=2f'(1)=4\Rightarrow f'(1)=2$$

توجه برای محاسبه حد فوق، از قاعده هوپیتال هم می‌توانستیم استفاده کنیم.

حال به سراغ خواسته مسئله می‌رویم، یعنی باید مشتق تابع g را در $x=1$ محاسبه کنیم، پس:

$$g(x)=\sqrt{x}f^3(x)\xrightarrow{g'}g'(x)=(\frac{1}{2\sqrt{x}}\times f^3(x))+(3f'(x)f^2(x)\times\sqrt{x})\xrightarrow{x=1}g'(1)=(\frac{1}{2\sqrt{1}}\times f^3(1))+(3f'(1)f^2(1)\times\sqrt{1})=\frac{f^3(1)}{2}+3f'(1)f^2(1)$$

می‌دانیم که $f(1)=1$ و $f'(1)=2$ است پس:

$$\frac{f^3(1)}{2}+3f'(1)f^2(1)=\frac{(1)^3}{2}+(3\times 2\times(1)^2)=\frac{1}{2}+6=6/5$$

نکته اگر در معادله درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$، مجموع ضرایب برابر صفر باشد $(a+b+c+d=0)$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ است و برای محاسبه سایر ریشه‌های معادله، عبارت درجه سوم را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم، ریشه‌های دیگر از حل این معادله به دست می‌آید. اما اگر حافظه خوبی دارید، می‌توانید این نکته را به صورت زیر نیز به خاطر بسپارید:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\xrightarrow{a+b+c+d=0}(x-1)(ax^2+(a+b)x-d)=0$$

۱۸۴۰ **هرگاه $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$ باشد، مشتق تابع $y=f^2of$ به‌ازای $x=2$ کدام است؟**

۱) $\frac{700}{9}$ ۲) $\frac{700}{3}$ ۳) $\frac{1400}{9}$ ۴) $\frac{1400}{3}$

۱۸۴۰ ۴ می‌دانیم اگر g,f توابعی مشتق‌پذیر باشند داریم:

- $f^n(x)=nf'(x)f^{n-1}(x)$
- $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

به سراغ محاسبه مشتق تابع y در $x=2$ می‌رویم:

$$y=(f^2of)(x)=f^2(f(x))\xrightarrow{y'}y'=f'(x)\times(2f'(f(x))\times f(f(x)))$$

$x=2$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$y'(2)=f'(2)\times(2f'(f(2)).f(f(2)))$$

از طرفی با توجه به فرض سؤال می‌دانیم که $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$ است پس $f(2)=3$ و $f(3)=\frac{25}{3}$ بوده و داریم:

$$y'(2)=f'(2)\times(2\times f'(3).f(3))=2\times f'(2)\times f'(3)\times\frac{25}{3}\Rightarrow y'(2)=\frac{50}{3}f'(2)f'(3)$$

حال با توجه به ضابطه $f(x)$، مقادیر $f'(2)$ و $f'(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^2-\frac{2}{x}\xrightarrow{f'}f'(x)=2x+\frac{2}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow f'(2)=4+\frac{2}{4}=\frac{9}{2}\\ x=3\Rightarrow f'(3)=6+\frac{2}{9}=\frac{56}{9}\end{cases}\Rightarrow y'(2)=\frac{50}{3}\times\frac{9}{2}\times\frac{56}{9}=\frac{1400}{3}$$

۱۸۴۱ **اگر $f'(1)=2$ و $f(1)=1$ باشد، مشتق تابع $y=f^2(\frac{1}{f(x)})$ به ازای $x=1$ کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۸۴۱ ۲ می‌دانیم $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ است، پس:

$$y=f^{2}(\frac{1}{f(x)})\Rightarrow y=(f^{2}o\frac{1}{f})(x)\Rightarrow y'=(\frac{1}{f(x)})'\times(f^{2})'(\frac{1}{f(x)})\Rightarrow y'=(\frac{-f'(x)}{f^{2}(x)})\times(2\times f'(\frac{1}{f(x)})\times f(\frac{1}{f(x)}))$$

حال $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم و می‌دانیم که $f(1)=1$ و $f'(1)=2$ می‌باشد پس:

$$y'(1)=(\frac{-f'(1)}{f^{2}(1)})\times(2\times f'(\frac{1}{f(1)})\times f(\frac{1}{f(1)}))\ =(\frac{-2}{(1)^{2}})\times(2\times f'(\frac{1}{1})\times f(\frac{1}{1}))$$

$$y'(1)=-2\times2\times f'(1)f(1)=-4f'(1)f(1)=-4\times2\times1=-8$$

www.biomaze.ir

۱۸۴۲ هرگاه $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}}$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=(fof)(x)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۱۸۴۲ ۲ ابتدا تابع $f(x)$ را تا جای ممکن ساده می‌کنیم تا محاسبه مشتق راحت‌تر باشد:

$$f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\cancel{(2x+1)}\times(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})}{\cancel{(2x+1)}}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}$$

$$f(x)=\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}$$

حال مشتق تابع $(fof)(x)$ را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$(fof)'(x)=f'(x)f'(f(x))\xrightarrow{x=1}(fof)'(1)=f'(1)f'(f(1))\quad(*)$$

باید به دنبال مقادیر $f'(1)$ و $f(1)$ باشیم پس:

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}\xrightarrow{x=1}f(1)=\sqrt{3(1)+1}-\sqrt{1}=\sqrt{4}-1=2-1=1\\ f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\dfrac{3}{2\sqrt{3(1)+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

حال مقادیر $f(1)=1$ و $f'(1)=\frac{1}{4}$ را در رابطه $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$(fof)'(1)=f'(1)f'(f(1))\Rightarrow(fof)'(1)=\frac{1}{4}\times f'(1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

www.biomaze.ir

۱۸۴۳ اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد

۱۸۴۳ ۲ ابتدا توابع g,f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و به عبارتی تکلیف قدرمطلق‌ها را مشخص می‌کنیم:

- $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{x}{5} & x\geq0\\ \frac{4}{5}x+\frac{x}{5} & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq0\\ x & x<0\end{cases}$

- $g(x)=4x+|x|\Rightarrow\begin{cases}4x+x & x\geq0\\ 4x-x & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x & x\geq0\\ 3x & x<0\end{cases}$

حال ضابطه تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\begin{cases}x\geq0 & :\frac{3}{5}(5x)=3x\\ x<0 & :3x\end{cases}$$

ضابطه تابع $(fog)(x)$ از هر دو ضابطه، برابر $3x$ به دست آمد و با توجه به این‌که تابع $(fog)(x)=3x$، تابعی پیوسته می‌باشد بنابراین مشتق آن موجود و برابر ۳ است.

www.biomaze.ir

۱۸۴۴ اگر $f(x)=3x^{2}+|x|$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=f(\sqrt{f(x)})$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟

۱) $-22/75$ ۲) $-20/25$ ۳) $-19/25$ ۴) $-17/75$

۱۸۴۴ ۱ ابتدا ضابطه تابع f را از حضور قدرمطلق خلاص می‌کنیم و آن را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=3x^2+|x| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x^2+x & x\geq 0\\ 3x^2-x & x<0\end{cases}$$

تابع f تابعی پیوسته می‌باشد بنابراین ضابطه مشتق آن را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}6x+1 & x>0\\ 6x-1 & x<0\end{cases}$$

حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم و مشتق تابع y را در نقطه $x=-1$ به دست می‌آوریم اما قبل از آن رابطه زیر را نگاهی بیاندازید:

یادآوری: $y=f(\bigcirc)\rightarrow y'=\bigcirc' f'(\bigcirc)$

$$y=f(\sqrt{f(x)})\xrightarrow{y'} y'=(\sqrt{f(x)})'f'(\sqrt{f(x)})=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\times f'(\sqrt{f(x)})\xrightarrow{x=-1} y'(-1)=\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)}}\times f'(\sqrt{f(-1)})\quad (*)$$

برای محاسبه $f(-1)$، از ضابطه پایینی تابع f کمک می‌گیریم:

$$f(x)=3x^2-x\xrightarrow{x=-1} f(-1)=3(-1)^2-(-1)=3+1=4$$

و برای محاسبه $f'(-1)$، از ضابطه پایینی تابع f' استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=6x-1\xrightarrow{x=-1} f'(-1)=6(-1)-1=-6-1=-7$$

حال مقادیر $f(-1)=4$ و $f'(-1)=-7$ را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$y'(-1)=\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)}}\times f'(\sqrt{f(-1)})=\frac{-7}{2\sqrt{4}}\times f'(\sqrt{4})=\frac{-7}{4}\times \underbrace{f'(2)}_{}=\frac{-7}{4}\times 13=-22/75$$

از ضابطه بالایی تابع f'

۱۸۴۵ توابع g,f به صورت $f(x)=\sqrt{2x+1-2\sqrt{x^2+x-2}}$ و $g(x)=\frac{1}{k}f(3x-1)$ مفروضند، اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{gof(x)-gof(2)}{x-2}=-\frac{3}{8}$ باشد، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۸۴۵ ۴ می‌دانیم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$، بیانگر مشتق تابع f در نقطه $x=a$ است لذا حاصل حد داده شده برابر است با $(gof)'(2)$، پس:

$$(gof)'(2)=f'(2)g'(\underbrace{f(2)}_{1})=f'(2)g'(1)=-\frac{3}{8}$$

حال برای محاسبه مشتق توابع g,f داریم:

$$f(x)=\sqrt{2x+1-2\sqrt{x^2+x-2}}=\sqrt{2x+1-2\sqrt{(x+2)(x-1)}}=\sqrt{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^2}$$

$$f(x)=|\underbrace{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}_{>0}|=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\xrightarrow{x=2} f'(2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$g(x)=\frac{1}{k}f(3x-1)\xrightarrow{g'} g'(x)=\frac{3}{k}f'(3x-1)\xrightarrow{x=1} g'(1)=\frac{3}{k}f'(2)\xrightarrow{f'(2)=-\frac{1}{4}} g'(1)=\frac{3}{k}\times(-\frac{1}{4})=-\frac{3}{4k}$$

از طرفی می‌دانیم که $f'(2)g'(1)=-\frac{3}{8}$ است، پس:

$$f'(2)g'(1)=-\frac{3}{8}\Rightarrow(-\frac{1}{4})\times(-\frac{3}{4k})=-\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{3}{16k}=-\frac{3}{8}\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

www.biomaze.ir

۱۸۴۶ اگر $f(x)=\frac{x^2}{g(x)}$ و $g(2)=2$ و $g'(2)=-3$ باشد، مقدار مشتق تابع $(f+g)og$ به‌ازای $x=2$ کدام است؟

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

۱۸۴۶ ۴ ابتدا براساس رابطه $(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$، مشتق تابع $(f+g)og$ را به ازای $x=2$ پیدا می‌کنیم:

$$y=(f+g)og\xrightarrow{y'} y'=g'(x).(f+g)'(g(x))=g'(x).(f'(g(x))+g'(g(x)))$$

$$\xrightarrow{x=2} y'(2)=g'(2)\times\big(f'(g(2))+g'(g(2))\big)$$

می‌دانیم که $g(2)=2$ و $g'(2)=-3$ است، بنابراین:

$$y'(2)=-3\times\big(f'(2)+g'(2)\big)=-3f'(2)-3(-3)=-3f'(2)+9 \quad (*)$$

حال با استفاده از ضابطه داده شده برای f، مشتق آن را در $x=2$ محاسبه کرده و در رابطه فوق قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{x^2}{g(x)} \xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{(2x)(g(x))-(g'(x))(x^2)}{g^2(x)}$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2)=\frac{(2\times2)(\overbrace{g(2)}^{2})-(\overbrace{g'(2)}^{-3})(2^2)}{g^2(2)}=\frac{(4\times2)-(-3\times4)}{(2)^2}=\frac{8+12}{4}=\frac{20}{4}=5 \Rightarrow f'(2)=5$$

با به دست آمدن $f'(2)=5$، آن را در رابطه $(*)$ قرار می‌دهیم تا خواسته سؤال به دست بیاید:

$$y'(2)=-3f'(2)+9 \xrightarrow{f'(2)=5} y'(2)=(-3\times5)+9=-15+9=-6$$

۱۸۴۷ اگر $f(x)=2-\frac{3}{x}$ و $g(x)=\frac{x+5}{2x+1}$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=fo(f-g)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) 4 ۴) -4

۱۸۴۷ ۲ ابتدا با توجه به رابطه $(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$، مشتق $y=fo(f-g)$ را به ازای $x=1$ به دست می‌آوریم:

$$y=fo(f-g)\xrightarrow{y'} y'=(f(x)-g(x))'.f'(f(x)-g(x))=(f'(x)-g'(x)).f'(f(x)-g(x))$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1)=(f'(1)-g'(1)).f'(f(1)-g(1)) \quad (*)$$

حال با توجه به ضابطه توابع g,f، مقادیر موجود در رابطه فوق را محاسبه می‌کنیم (دقت شود که برای محاسبه مشتق تابع g، از رابطه مربوط به مشتق تابع هموگرافیک استفاده کرده‌ایم):

- $f(x)=2-\frac{3}{x}\xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{3}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=-1\\ f'(1)=3\end{cases}$
- $g(x)=\frac{x+5}{2x+1}\xrightarrow{g'} g'(x)=\frac{1-10}{(2x+1)^2}=\frac{-9}{(2x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}g(1)=2\\ g'(1)=-1\end{cases}$

حال مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$y'(1)=(3-(-1))\times f'(-1-2)=4\underbrace{f'(-3)}_{\frac{1}{3}}=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

توجه با توجه به ضابطه f'، مقدار $f'(-3)=\frac{1}{3}$ به دست می‌آید.

۱۸۴۸ اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x)).g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

۱۸۴۸ ۲ با توجه به رابطه $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ می‌دانیم که حاصل خواسته شده همان مشتق تابع $(fog)(x)$ می‌باشد پس ابتدا ضابطه تابع $(fog)(x)$ را تشکیل داده و از آن مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}\\ g(x)=\sqrt[3]{x-1}\end{cases}\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3-2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{(x-1)-2}{1+(x-1)}=\frac{x-3}{x}$$

دقت شود که برای محاسبه مشتق تابع $(fog)(x)=\frac{x-3}{x}$، از مشتق تابع هموگرافیک کمک می‌گیریم:

$$(fog)'(x)=\frac{0-(-3)}{x^2}=\frac{3}{x^2}\Rightarrow g'(x)f'(g(x))=\frac{3}{x^2}$$

۱۸۴۹ اگر $f(x)=(x[x^۲-\frac{۱}{۴}]-۱)^۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۸}x\sqrt[۳]{\frac{x}{x-۷}}$ باشد، حاصل مشتق تابع fog در $x=۸$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۸۴۹ ۲ برای محاسبه مشتق تابع fog در $x=۸$ داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))\xrightarrow{x=۸}(fog)'(۸)=g'(۸)f'(g(۸))\quad(*)$$

حال با توجه به ضابطه توابع f و g داریم:

$$g(x)=\frac{۱}{۸}x\sqrt[۳]{\frac{x}{x-۷}}\xrightarrow{x=۸}g(۸)=\frac{۱}{۸}\times۸\times\sqrt[۳]{\frac{۸}{۸-۷}}=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

$$g'(x)=\frac{۱}{۸}\times\left(\sqrt[۳]{\frac{x}{x-۷}}+\left(\frac{\frac{-۷-۰}{(x-۷)^۲}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{x}{x-۷})^۲}}\times x\right)\right)\xrightarrow{x=۸}g'(۸)=\frac{۱}{۸}\times\left(\sqrt[۳]{۸}+\left(\frac{-۷}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times۸\right)\right)$$

$$\Rightarrow g'(۸)=\frac{۱}{۸}\times(۲-\frac{۵۶}{۱۲})=\frac{۱}{۸}\times(-\frac{۸}{۳})=-\frac{۱}{۳}$$

با داشتن $g(۸)=۲$ و $g'(۸)=-\frac{۱}{۳}$ و با توجه به رابطه $(*)$ داریم:

$$(fog)'(۸)=g'(۸)f'(g(۸))=-\frac{۱}{۳}f'(۲)$$

حال باید $f'(۲)$ را نیز به دست آوریم تا به خواسته مسئله برسیم اما ضابطه تابع f دارای جزء صحیح است و می‌دانیم که در این مواقع باید از دست جزء صحیح خلاص بشویم بنابراین برای محاسبه $f'(۲)$، باید جزء صحیح را در همسایگی $x=۲$، تعیین مقدار کنیم پس داریم:

$$[x^۲-\frac{۱}{۴}]\xrightarrow{x=۲}[۴-\frac{۱}{۴}]=۳$$

$$f(x)=(x[x^۲-\frac{۱}{۴}]-۱)^۲\Rightarrow f(x)=(۳x-۱)^۲\xrightarrow{f'}f'(x)=۲\times۳\times(۳x-۱)=۱۸x-۶\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=(۱۸\times۲)-۶=۳۶-۶=۳۰$$

در نتیجه:

$$(fog)'(۸)=-\frac{۱}{۳}f'(۲)=-\frac{۱}{۳}\times۳۰=-۱۰$$

www.biomaze.ir

۱۸۵۰ خط به معادله $y=۳x-۵$ در نقطه $x=۲$ بر نمودار تابع $y=x+g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{۲x+۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۸۵۰ ۳ برای محاسبه $(fog)'(۲)$ داریم:

$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))\quad(A)$$

باید مقادیر مجهول در رابطه فوق را به‌دست بیاوریم. می‌دانیم که خط به معادله $y=۳x-۵$ در نقطه $x=۲$ بر نمودار تابع $y=x+g(x)$ مماس است پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که شیب خط $y=۳x-۵$ (یعنی ۳) با مشتق تابع $y=x+g(x)$ در نقطه $x=۲$ برابر است پس:

$$y=x+g(x)\xrightarrow{y'}y'=۱+g'(x)=۳\xrightarrow{x=۲}y'(۲)=۱+g'(۲)=۳\Rightarrow g'(۲)=۲$$

و نیز باید خط $y=۳x-۵$ و تابع $y=x+g(x)$ در نقطه تماس، مقدار برابری داشته باشند پس:

$$\begin{cases}y=۳x-۵\\y=x+g(x)\end{cases}\Rightarrow۳x-۵=x+g(x)\xrightarrow{x=۲}۳(۲)-۵=۲+g(۲)\Rightarrow g(۲)=-۱$$

با داشتن $g'(۲)=۲$ و $g(۲)=-۱$ و با توجه به رابطه (A) داریم:

$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=۲\times f'(-۱)\quad(B)$$

حال به سراغ حد داده شده می‌رویم و انتظار داریم که بتوانیم از آن $f'(-۱)$ را بیرون بکشیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{۲x+۲}=\frac{۰}{۰}\underset{=}{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{f'(x)}{۲}=\frac{f'(-۱)}{۲}$$

می‌دانیم که حاصل حد داده شده برابر $\frac{۲}{۳}$ است پس:

$$\frac{f'(-۱)}{۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(-۱)=\frac{۴}{۳}$$

در نهایت با توجه به رابطه (B) و با داشتن $f'(-1)=\frac{4}{3}$ داریم:

$$(fog)'(2)=2\times f'(-1)=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

۱۸۵۱ اگر $f(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=(f(3-2f(x)))^4$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) -12 ۲) -8 ۳) -6 ۴) -4

۱۸۵۱ ۲ ابتدا در تابع $g(x)$، عبارت تحتِ توان، یعنی $f(3-2f(x))$ را برابر $h(x)$ فرض می‌کنیم و سپس طبق رابطه $(f^n(x))'=nf'(x)f^{n-1}(x)$، از تابع g در $x=1$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=(\underbrace{f(3-2f(x))}_{h(x)})^4\Rightarrow g(x)=(h(x))^4\xrightarrow{g'}g'(x)=4h'(x)h^3(x)$$

حال $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$g'(1)=4h'(1)h^3(1)\ \ (*)$$

می‌دانیم که $h(x)=f(3-2f(x))$ است پس برای محاسبه مقادیر فوق از ضابطه تابع h استفاده کرده و داریم:

$$\begin{cases}h(x)=f(3-2f(x))\xrightarrow{x=1}h(1)=f(3-2f(1))\ \ (A)\\ f(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}\xrightarrow{x=1}f(1)=\frac{4-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1\ \ (B)\end{cases}\xrightarrow{A,B}h(1)=f(3-(2\times1))=f(1)=1\Rightarrow h(1)=1$$

حال مشتق تابع h را در $x=1$ پیدا می‌کنیم: (دقت شود که برای این کار از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم)

$$h(x)=f(3-2f(x))\xrightarrow{h'}h'(x)=-2f'(x)f'(3-2f(x))\xrightarrow{x=1}h'(1)=-2f'(1)f'(3-2f(1))$$

$$\xrightarrow{f(1)=1}h'(1)=-2f'(1)f'(3-2)=-2f'(1)f'(1)\ \ (C)$$

خسته شدم!!

حالا با استفاده از ضابطه تابع f، مشتق تابع f را در $x=1$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{(4)(2\sqrt{x}+1)-(\frac{2}{2\sqrt{x}})(4x-1)}{(2\sqrt{x}+1)^2}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{(4\times3)-(1\times3)}{9}=\frac{12-3}{9}=1\Rightarrow f'(1)=1$$

با داشتن $f'(1)=1$ و رابطه (C) داریم:

$$h'(1)=-2f'(1)f'(1)=-2\times1\times1=-2$$

در نهایت با به دست آمدن $h(1)=1$ و $h'(1)=-2$ و مطابق رابطه $(*)$ داریم:

$$g'(1)=4h'(1)h^3(1)=4\times(-2)\times(1)^3=-8$$

۱۸۵۲ اگر $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x-2}+\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-4}=-2$ باشد، مشتق تابع $y=xf(x^2+x)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) -1

۱۸۵۲ ۱ می‌دانیم که مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر $f'(a)$ و برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حال فرض می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x-2}=A$ باشد، در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-4}=-2\Rightarrow A+\frac{1}{A}=-2\Rightarrow A^2+2A+1=0\Rightarrow(A+1)^2=0\Rightarrow A=-1$$

از حد بالا متوجه می‌شویم که $f(2)=4$ و $f'(2)=-1$ است.

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{f(x)-\overset{f(2)}{4}}{x-2}=A=f'(2)=-1$$

به سراغ خواسته سؤال می‌رویم و مشتق تابع y را به ازای $x=1$ به دست می‌آوریم:

$$y=xf(x^2+x)\xrightarrow{y'}y'=(1\times f(x^2+x))+(((2x+1)f'(x^2+x))\times x)$$

$$\xrightarrow{x=1}y'(1)=f(2)+(3f'(2))\xrightarrow[f'(2)=-1]{f(2)=4}y'(1)=4+(3\times(-1))=4-3=1\Rightarrow y'(1)=1$$

۱۸۵۳ هرگاه f تابعی پیوسته و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(2x-3)+1}{2x^2-3x-2}=\dfrac{1}{10}$ باشد، مشتق تابع $y=f(2x+f(x))$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۸۵۳ ۲ ابتدا به سراغ حد داده شده می‌رویم؛ در این حد، زمانی که $x\to 2$ برود مخرج کسر به صفر میل می‌کند اما همان‌طور که می‌بینید حاصل حد برابر عدد حقیقی $\frac{1}{10}$ شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که صورت کسر هم باید به ازای $x=2$، به صفر میل کند و به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم و پس از رفع ابهام حاصل حد برابر $\frac{1}{10}$ شود، پس:

صورت کسر در حد: $f(2x-3)+1\xrightarrow{x=2}f(1)+1=0\Rightarrow f(1)=-1$

همان‌طور که گفتیم در حد داده شده به ازای $x=2$، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برمی‌خوریم که در این مواقع قاعده هوپیتال کارساز خواهد بود:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(2x-3)+1}{2x^2-3x-2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2f'(2x-3)}{4x-3}=\frac{2f'(1)}{8-3}=\frac{2f'(1)}{5}$$

با توجه به صورت سؤال می‌دانیم که حاصل حد فوق برابر $\frac{1}{10}$ است پس:

$$\frac{2f'(1)}{5}=\frac{1}{10}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{4}$$

حال با داشتن $f(1)=-1$ و $f'(1)=\frac{1}{4}$، به سراغ محاسبه مشتق تابع y در $x=1$ می‌رویم:

$$y=f(2x+f(x))\xrightarrow{y'}y'=(2+f'(x)).f'(2x+f(x))\xrightarrow{x=1}y'(1)=(2+f'(1)).f'(2+f(1))$$

$$\xrightarrow[f(1)=-1]{f'(1)=\frac{1}{4}}y'(1)=(2+\frac{1}{4})\times f'(2-1)=\frac{9}{4}f'(1)\Rightarrow y'(1)=\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$$

۱۸۵۴ اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{2h}=3$ و $f(x^2+4x-10)=g(2x^2+5x-16)$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{13x-26}{2g(x)-2g(2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{96}{169}$ ۳) ۲۴ ۴) $\frac{169}{96}$

۱۸۵۴ ۴ با توجه به حد داده شده در صورت سؤال، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(2+h)}{2}=\frac{1}{2}f'(2)$$

می‌دانیم که حاصل حد داده شده برابر ۳ است پس:

$$\frac{1}{2}f'(2)=3\Rightarrow f'(2)=6$$

حال به سراغ حد خواسته سؤال می‌رویم:

$$K=\lim_{x\to 2}\frac{13x-26}{2g(x)-2g(2)}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2}\frac{13}{2g'(x)}=\frac{13}{2g'(2)}\quad(A)$$

برای رسیدن به جواب مسئله نیاز داریم که $g'(2)$ را داشته باشیم بنابراین فرض دوم مسئله را به کار می‌گیریم:

$$f(x^2+4x-10)=g(2x^2+5x-16)\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{مشتق از}}(2x+4)f'(x^2+4x-10)=(4x+5)g'(2x^2+5x-16)\quad(B)$$

با توجه به این‌که $f'(2)=6$ و ما نیز به دنبال $g'(2)$ هستیم، بنابراین باید کاری کنیم که در معادله فوق، دو عبارت $(2x^2+5x-16)$ و $(x^2+4x-10)$ هر دو برابر ۲ بشوند، پس:

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+4x-10=2\Rightarrow x^2+4x-12=0\Rightarrow x=2,-6\\ 2x^2+5x-16=2\Rightarrow 2x^2+5x-18=0\Rightarrow x=2,-\frac{9}{2}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{اشتراک}}x=2$$

حال در رابطه (B)، $x=2$ را قرار می‌دهیم:

$$(4+4)f'(4+8-10)=(8+5)g'(8+10-16)\Rightarrow 8f'(2)=13g'(2)\xrightarrow{f'(2)=6}g'(2)=\frac{48}{13}$$

با داشتن $g'(2)=\frac{48}{13}$ و با توجه به رابطه (A) داریم:

$$K=\frac{13}{2g'(2)}=\frac{13}{2\times\frac{48}{13}}=\frac{169}{96}$$

۱۸۵۵ با فرض $f'(۴)=۳$ و $g(۴)=۴$؛ اگر مشتق تابع g در نقطه $x=۴$ موجود باشد، در این صورت حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{fog(x)-f(۴)}{\sqrt{g(x)}-۲}$ کدام است؟ (به ازای $x\neq ۴$، $g(۴)\neq ۰$ است)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) $۱۲g'(۴)$

۱۸۵۵ ۲ ابتدا به سراغ حد خواسته سؤال می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{fog(x)-f(۴)}{\sqrt{g(x)}-۲}=\frac{f(g(۴))-f(۴)}{\sqrt{g(۴)}-۲}\xrightarrow{g(۴)=۴}\frac{f(۴)-f(۴)}{\sqrt{۴}-۲}=\frac{۰}{۰}$$

حال قاعده هوپیتال را وارد داستان می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to ۴}\frac{fog(x)-f(۴)}{\sqrt{g(x)}-۲}=\frac{۰}{۰}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to ۴}\frac{g'(x)f'(g(x))}{\frac{g'(x)}{۲\sqrt{g(x)}}}=\frac{\cancel{g'(۴)}\,f'(g(۴))}{\frac{\cancel{g'(۴)}}{۲\sqrt{g(۴)}}}$$

می‌دانیم که $g(۴)=۴$ و $f'(۴)=۳$ است پس:

$$A=\frac{f'(۴)}{\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}=۴f'(۴)=۴\times ۳=۱۲$$

۱۸۵۶ هرگاه f تابعی پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)+۲}{x^۲-۱}=\frac{۳}{۲}$، به طوری‌که $(gof)'(۱)=۴$، مشتق تابع $y=g(\frac{۲}{x})$ به ازای $x=-۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

۱۸۵۶ ۴ ابتدا به سراغ حد داده شده در مسئله می‌رویم؛ همان‌طور که مشخص است، مخرج کسر این حد به ازای $x=۱$ به سمت صفر میل می‌کند ولی حاصل حد عدد $\frac{۳}{۲}$ شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که صورت کسر این حد نیز به ازای $x=۱$ به سمت صفر میل کرده است که پس از رفع حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ از این حد، حاصل آن برابر $\frac{۳}{۲}$ شده است پس:

صورت کسر: $f(x)+۲\xrightarrow{x=۱}f(۱)+۲=۰\Rightarrow f(۱)=-۲$

همان‌طور که گفتیم، در این حد به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برخورد می‌کنیم پس طبق قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)+۲}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to ۱}\frac{f'(x)}{۲x}=\frac{f'(۱)}{۲}$$

طبق صورت سؤال، می‌دانیم که حاصل این حد برابر $\frac{۳}{۲}$ است پس:

$$\frac{f'(۱)}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f'(۱)=۳$$

از طرفی می‌دانیم که $(gof)'(۱)=۴$ است حال طبق رابطه مشتق تابع مرکب داریم:

$$(gof)'(۱)=۴\Rightarrow f'(۱).g'(f(۱))=۴\ \xrightarrow[f(۱)=-۲]{f'(۱)=۳}\ ۳\times g'(-۲)=۴\Rightarrow g'(-۲)=\frac{۴}{۳}$$

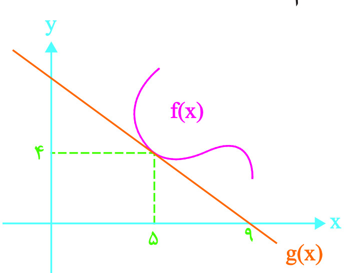
حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم و مشتق تابع $y=g(\frac{۲}{x})$ را به ازای $x=-۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$y=g(\frac{۲}{x})\xrightarrow{y'}y'=-\frac{۲}{x^۲}g'(\frac{۲}{x})\xrightarrow{x=-۱}y'(-۱)=-۲g'(-۲)$$

می‌دانیم که $g'(-۲)=\frac{۴}{۳}$ است پس:

$$y'(-۱)=-۲\times\frac{۴}{۳}=-\frac{۸}{۳}$$

۱۸۵۷ در شکل زیر نمودار توابع g,f داده شده است. اگر $h(x)=\frac{f(۲x-۱)}{g(x^۲-x)}$ باشد، حاصل $h'(۳)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲۶}{۹}$

۲) $\frac{۱۴}{۹}$

۳) ۱۴

۴) $-\frac{۴}{۳}$

۱۸۵۷ **۲** برای محاسبه $h'(۳)$، طبق رابطه $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$ داریم:

$$h(x) = \frac{f(۲x-۱)}{g(x^۲-x)}$$

$$h'(x) = \frac{(۲f'(۲x-۱)g(x^۲-x)) - ((۲x-۱)g'(x^۲-x)f(۲x-۱))}{g^۲(x^۲-x)}$$

$$h'(۳) = \frac{(۲f'(۵)g(۶)) - (۵g'(۶)f(۵))}{g^۲(۶)} \quad (*)$$

با توجه به نمودار داده شده، تابع g از دو نقطه $(۹,۰)$ و $(۵,۴)$ عبور کرده است، پس:

$$g(x) = -x+۹ \Rightarrow \begin{cases} g(۶) = ۳ \\ g'(۶) = -۱ \end{cases}$$

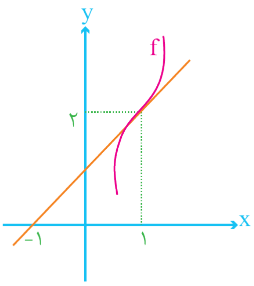
از طرفی می‌دانیم که مشتق تابع در یک نقطه با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است، پس: $f'(۵) = -۱$

در نتیجه مطابق رابطه $(*)$ داریم:

$$h'(۳) = \frac{(۲\times(-۱)\times۳) - (۵\times(-۱)\times۴)}{(۳)^۲} = \frac{-۶+۲۰}{۹} = \frac{۱۴}{۹}$$

www.biomaze.ir

۱۸۵۸ **اگر قسمتی از نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آنگاه حاصل $\left(\frac{x^۲}{f^۲+f}\right)'$ در $x=۱$ کدام است؟**



۱) $\frac{۱}{۱۲}$

۲) $\frac{۷}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$

۴) $\frac{۷}{۳۶}$

۱۸۵۸ **۴** ابتدا مشتق عبارت داده شده را در $x=۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x^۲}{f^۲(x)+f(x)} \xrightarrow{y'} y' = \frac{(۲x)(f^۲(x)+f(x)) - (۲f'(x)f(x)+f'(x))(x^۲)}{(f^۲(x)+f(x))^۲}$$

حال $x=۱$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$y'(۱) = \frac{۲(f^۲(۱)+f(۱)) - (۲f'(۱)f(۱)+f'(۱))(۱)}{(f^۲(۱)+f(۱))^۲} \quad (*)$$

با توجه به شکل داده شده مشخص است که $f(۱) = ۲$ است از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه، با مشتق تابع در آن نقطه برابر است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=۱$ با $f'(۱)$ برابر است و چون خط مماس بر نمودار تابع f از دو نقطه با مختصات $(-۱,۰)$ و $(۱,۲)$ می‌گذرد پس:

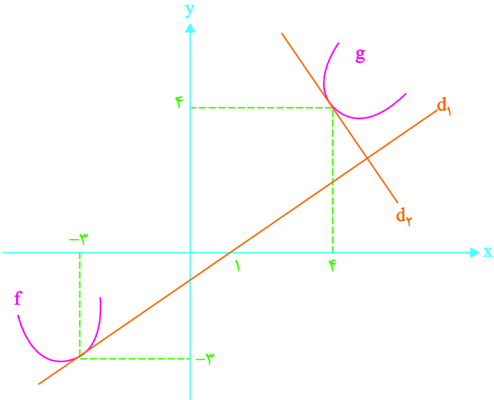
$$\text{شیب خط مماس} = f'(۱) = \frac{۲-۰}{۱-(-۱)} = \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۱$$

حال با داشتن $f(۱) = ۲$ و $f'(۱) = ۱$، و با استفاده از رابطه $(*)$ داریم:

$$y'(۱) = \frac{۲(۴+۲) - ((۲\times۱\times۲)+۱)(۱)}{(۴+۲)^۲} = \frac{۱۲-۵}{۳۶} = \frac{۷}{۳۶}$$

www.biomaze.ir

۱۸۵۹ در شکل مقابل نمودارهای توابع g,f داده شده است. اگر $h(x)=\frac{g(1-x)}{f(x)}$ باشد آن‌گاه حاصل $h'(-3)$ کدام است؟ (خطوط d_1 و d_2 برهم عمودند)



۱) $\frac{1}{9}$

۲) $-\frac{7}{9}$

۳) $\frac{7}{9}$

۴) $-\frac{1}{9}$

۱۸۵۹ ۲ با توجه به شکل صورت سؤال، خط d_1 از نقاط $(-3,-3)$ و $(1,0)$ عبور کرده است بنابراین شیب این خط برابر است با:

$$m_{d_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3-0}{-3-1}=\frac{3}{4}$$

و چون دو خط d_1 و d_2 بر هم عمودند بنابراین:

$$m_{d_1}.m_{d_2}=-1\Rightarrow m_{d_2}=-\frac{4}{3}$$

حال برای به دست آوردن $h'(-3)$ داریم:

$$h(x)=\frac{g(1-x)}{f(x)}\Rightarrow h'(x)=\frac{-g'(1-x)f(x)-f'(x)g(1-x)}{f^2(x)}\xrightarrow{x=-3}h'(-3)=\frac{-g'(4)f(-3)-f'(-3)g(4)}{f^2(-3)}\quad(*)$$

با توجه به نمودار توابع g,f:

$$\begin{cases}f(-3)=-3\\ g(4)=4\end{cases}$$

از طرفی برای محاسبه مقادیر $f'(-3)$ و $g'(4)$ داریم:

$f'(-3)=$ (شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=-3$) $=$ شیب خط d_1 $=\frac{3}{4}$

$g'(4)=$ (شیب خط مماس بر نمودار تابع g در $x=4$) $=$ شیب خط d_2 $=-\frac{4}{3}$

حال مقادیر به‌دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$h'(-3)=\frac{(-(-\frac{4}{3})(-3))-((\frac{3}{4})(4))}{(-3)^2}=-\frac{7}{9}$$

۱۸۶۰ هرگاه f تابعی یک به یک، $f(1)=1$ و $fof(x)=x^3+\frac{2}{x}$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۸۶۰ ۱ ابتدا از طرفین تابع $fof(x)$، مشتق می‌گیریم:

$$fof(x)=x^3+\frac{2}{x}\xrightarrow{f'}f'(x).f'(f(x))=3x^2-\frac{2}{x^2}$$

حال $x=1$ را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$f'(1).f'(f(1))=3-2\Rightarrow f'(1).f'(f(1))=1$$

از طرفی می‌دانیم که $f(1)=1$ است پس:

$$f'(1).f'(1)=1\Rightarrow (f'(1))^2=1\Rightarrow f'(1)=\pm1$$

$f'(1)=\pm1$ است که تنها $f'(1)=1$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۸۶۱ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $g(\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۳

۱۸۶۱ **۱** ابتدا با استفاده از ضابطه توابع $f(x)$ و $fog(x)$، ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

- $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$
- $fog(x)=f(g(x))=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$

$$\Rightarrow \frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}\Rightarrow (g(x)+۱)(x^۲+۱)=(g(x)-۱)(x^۲+۲)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^۲g(x)}+g(x)+x^۲+۱=\cancel{x^۲g(x)}+۲g(x)-x^۲-۲\Rightarrow g(x)=۲x^۲+۳$$

حال تابع $g(\sqrt{x})$ را تشکیل داده و از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=۲x^۲+۳\xrightarrow{g(\sqrt{x})}g(\sqrt{x})=۲(\sqrt{x})^۲+۳=۲x+۳\xrightarrow{\text{مشتق}}g'(\sqrt{x})=۲$$

www.biomaze.ir

۱۸۶۲ اگر $f(\frac{۶x+۵}{۳x+۵})=\sqrt{-۲x}$ باشد آن‌گاه مشتق تابع $f(۳x-۲)$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $-\frac{۱}{۱۰}$ ۳) ۳۰ ۴) $-\frac{۱}{۳۰}$

۱۸۶۲ **۲** ابتدا مشتق تابع $f(۳x-۲)$ را در $x=۳$ به‌دست می‌آوریم:

$$y=f(۳x-۲)\xrightarrow{f'}y'=۳f'(۳x-۲)\xrightarrow{x=۳}y'(۳)=۳f'(۷)\quad (A)$$

حال از طرفین رابطه $f(\frac{۶x+۵}{۳x+۵})=\sqrt{-۲x}$ مشتق می‌گیریم: (دقت شود که برای مشتق‌گیری از تابع درونی تابع f، از مشتق تابع هموگرافیک استفاده می‌کنیم):

$$(\frac{(۳۰-۱۵)}{(۳x+۵)^۲})f'(\frac{۶x+۵}{۳x+۵})=\frac{-۲}{۲\sqrt{-۲x}}\quad (B)$$

با توجه به رابطه (A)، ما نیاز به $f'(۷)$ داریم پس در رابطه فوق باید کاری کنیم که تابع درونی f'، برابر ۷ بشود پس:

$$\frac{۶x+۵}{۳x+۵}=۷\Rightarrow ۶x+۵=۲۱x+۳۵\Rightarrow ۱۵x=-۳۰\Rightarrow x=-۲$$

حال در رابطه (B)، $x=-۲$ را قرار می‌دهیم:

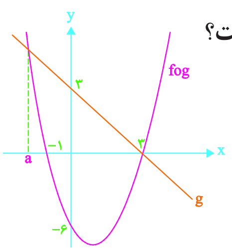
$$(\frac{۱۵}{(-۱)^۲})f'(\frac{-۷}{-۱})=\frac{-۲}{۲\sqrt{۴}}\Rightarrow ۱۵f'(۷)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'(۷)=-\frac{۱}{۳۰}$$

درنهایت $f'(۷)=-\frac{۱}{۳۰}$ را در رابطه (A) قرار می‌دهیم و خواسته مسئله را به‌دست می‌آوریم:

$$y'(۳)=۳f'(۷)=۳\times(-\frac{۱}{۳۰})=-\frac{۱}{۱۰}$$

www.biomaze.ir

۱۸۶۳ نمودار تابع $(fog)(x)$ و $g(x)$ در شکل مقابل داده شده است مقدار مشتق تابع gof در $x=a$ کدام است؟



۱) -۱۴
۲) ۱۴
۳) ۱۰
۴) -۱۰

۱۸۶۳ **۲** ابتدا سعی می‌کنیم که ضابطه توابع $fog(x)$ و $g(x)$ را تشکیل دهیم:

نمودار تابع $(fog)(x)$ از سه نقطه با مختصات $(-۱,۰)$، $(۰,-۶)$ و $(۳,۰)$ عبور می‌کند بنابراین این سه نقطه باید در ضابطه آن یعنی $(fog)(x)=ax^۲+bx+c$، صدق کنند، پس:

$$(fog)(x)=ax^۲+bx+c\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{(۰,-۶)}c=-۶\\ \xrightarrow{(-۱,۰)}a-b-۶=۰\Rightarrow a-b=۶\\ \xrightarrow{(۳,۰)}۹a+۳b-۶=۰\Rightarrow ۹a+۳b=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=۶\\ ۹a+۳b=۶\end{cases}\times۳\Rightarrow\begin{cases}۳a-۳b=۱۸\\ ۹a+۳b=۶\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=-۴$$