

درسنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

ریاضیات پایه + جمع‌بندی

کاظم اجالی، ارشد حمیدی

رشته
ریاضی

انگه
نترالگو

ویژه
نظام جدید
آموزشی



پیش‌گفتار

معمولاً هر دانش‌آموزی در آستانه سال دوازدهم سودای قبولی در دانشگاه را دارد. با این حال، حتی وعده پذیرش بدون کنکور از اهمیت یادگیری اصولی نمی‌کاهد، چرا که آنچه همیشه مهم است دانستن و مهارت در استفاده از دانسته‌هاست. بگذریم که رشته‌های دانشگاهی هم مثل خیلی چیزهای دیگر «مُد روز» دارند و در هر مقطعی دانش‌آموزان برای قبولی در این رشته‌های مُد روز تلاش می‌کنند. به این ترتیب، دانش‌آموزان آینده‌نگر سعی می‌کنند پیش از ورود به سال دوازدهم پایه‌های معلومات خود را محکم کنند. بنابراین، مرور و جمع‌بندی دروس پایه‌های دهم و یازدهم اهمیت ویژه‌ای دارد.

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب سه‌بعدی** شامل درسنامه مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و **کتاب تست** شامل درسنامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. همین‌طور، کتاب‌های **موج آزمون** که ویژه آمادگی برای آزمون‌های آزمایشی و کنکورهای سراسری است.

کتابی که در دست دارید، ویژه جمع‌بندی درس‌های ریاضی ۱ سال دهم و حسابان ۱ سال یازدهم است. در این کتاب همه مباحث این درس‌ها را در ۱۲ فصل تنظیم کرده‌ایم.

در ابتدای هر فصل، همه مطالبی را که برای حل کردن پرسش‌های آن فصل باید بدانید آورده‌ایم. در درسنامه‌ها مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. پس از آن، نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون، ده پرسش دارد. در فصل ۱۲ هم شش آزمون جامع از همه مباحث آورده‌ایم. چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حرف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: بازه و مجموعه

- درسنامه ۲
آزمون ۱: بازه و مجموعه (۱) ۶
آزمون ۲: بازه و مجموعه (۲) ۷
آزمون ۳: بازه و مجموعه (۳) ۸

● فصل دوم: الگو و دنباله

- درسنامه ۱۰
آزمون ۴: الگو و دنباله (۱) ۱۵
آزمون ۵: الگو و دنباله (۲) ۱۶
آزمون ۶: الگو و دنباله (۳) ۱۷
آزمون ۷: الگو و دنباله (۴) ۱۸
آزمون ۸: الگو و دنباله (۵) ۱۹
آزمون ۹: الگو و دنباله (۶) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۲۰

● فصل سوم: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه

- درسنامه ۲۲
آزمون ۱۰: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۱) ۲۷
آزمون ۱۱: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۲) ۲۸
آزمون ۱۲: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۳) ۲۹
آزمون ۱۳: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۴) ۳۰

● فصل چهارم: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم

- درسنامه ۳۲
آزمون ۱۴: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۱) ۳۷
آزمون ۱۵: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۲) ۳۸
آزمون ۱۶: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۳) ۳۹
آزمون ۱۷: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۴) ۴۰

آزمون ۱۸: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۵) (برگزیده

کنکورهای سراسری) ۴۱

● فصل پنجم: تعیین علامت، معادله و نامعادله

- درسنامه ۴۴
آزمون ۱۹: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۱) ۴۹
آزمون ۲۰: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۲) ۵۰
آزمون ۲۱: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۳) ۵۱
آزمون ۲۲: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۴) ۵۲
آزمون ۲۳: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۵) (برگزیده
کنکورهای سراسری) ۵۳

● فصل ششم: مثلثات

- درسنامه ۵۶
آزمون ۲۴: مثلثات (۱) ۶۴
آزمون ۲۵: مثلثات (۲) ۶۵
آزمون ۲۶: مثلثات (۳) ۶۶
آزمون ۲۷: مثلثات (۴) ۶۷
آزمون ۲۸: مثلثات (۵) ۶۸

● فصل هفتم: قدرمطلق و جزء صحیح

- درسنامه ۷۰
آزمون ۲۹: قدرمطلق و جزء صحیح (۱) ۷۴
آزمون ۳۰: قدرمطلق و جزء صحیح (۲) ۷۵
آزمون ۳۱: قدرمطلق و جزء صحیح (۳) ۷۶
آزمون ۳۲: قدرمطلق و جزء صحیح (۴) ۷۷
آزمون ۳۳: قدرمطلق و جزء صحیح (۵) (برگزیده کنکورهای
سراسری) ۷۸

● فصل هشتم: تابع

- درسنامه ۸۰
- آزمون ۳۴: تابع (۱) ۹۰
- آزمون ۳۵: تابع (۲) ۹۱
- آزمون ۳۶: تابع (۳) ۹۲
- آزمون ۳۷: تابع (۴) ۹۳
- آزمون ۳۸: تابع (۵) ۹۴
- آزمون ۳۹: تابع (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۹۵

● فصل نهم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درسنامه ۹۸
- آزمون ۴۰: توابع نمایی و لگاریتمی (۱) ۱۰۴
- آزمون ۴۱: توابع نمایی و لگاریتمی (۲) ۱۰۵
- آزمون ۴۲: توابع نمایی و لگاریتمی (۳) ۱۰۶
- آزمون ۴۳: توابع نمایی و لگاریتمی (۴) ۱۰۷
- آزمون ۴۴: توابع نمایی و لگاریتمی (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۰۸

● فصل دهم: حد و پیوستگی

- درسنامه ۱۱۰
- آزمون ۴۵: حد و پیوستگی (۱) ۱۱۷
- آزمون ۴۶: حد و پیوستگی (۲) ۱۱۸
- آزمون ۴۷: حد و پیوستگی (۳) ۱۱۹
- آزمون ۴۸: حد و پیوستگی (۴) ۱۲۰
- آزمون ۴۹: حد و پیوستگی (۵) ۱۲۱
- آزمون ۵۰: حد و پیوستگی (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۲۲

● فصل یازدهم: خط راست

- درسنامه ۱۲۴
- آزمون ۵۱: خط راست (۱) ۱۲۷
- آزمون ۵۲: خط راست (۲) ۱۲۸

● فصل دوازدهم: آزمون‌های جامع

- آزمون ۵۳: آزمون جامع (۱) ۱۳۰
- آزمون ۵۴: آزمون جامع (۲) ۱۳۱
- آزمون ۵۵: آزمون جامع (۳) ۱۳۲
- آزمون ۵۶: آزمون جامع (۴) ۱۳۳
- آزمون ۵۷: آزمون جامع (۵) ۱۳۴
- آزمون ۵۸: آزمون جامع (۶) ۱۳۵

● فصل سیزدهم: پاسخ‌های تشریحی ۱۳۸

● فصل چهاردهم: پاسخنامهٔ کلیدی ۲۰۰

فصل چہارم

**معادلہ درجہ دوم
و تابع درجہ دوم**

فصل ۴

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است، که در آن a, b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a \neq 0$.

وضعیت ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در جدول زیر آورده‌ایم:

$\Delta = b^2 - 4ac$	وضعیت ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta > 0$	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	معادله یک ریشه حقیقی مضاعف دارد: $x_1 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	معادله ریشه حقیقی ندارد.

اگر مجموع ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر صفر باشد، یکی از ریشه‌های این معادله برابر با ۱ و ریشه دیگر آن برابر با $\frac{c}{a}$ است و

اگر $a + c = b$ ، یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

اگر جواب کوچک‌تر معادله $kx^2 + (2k+1)x + k + 1 = 0$ برابر -۱ باشد، حدود k کدام است؟

- (۱) $k < 0$ (۲) $k > -1$ (۳) $-1 < k < 0$ (۴) $k > 0$

توجه کنید که -۱ جواب معادله است:

$$k(-1)^2 + (2k+1)(-1) + k + 1 = 0$$

بنابراین جواب دیگر معادله برابر $-\frac{k+1}{k}$ است. پس

$$-\frac{k}{k} - \frac{1}{k} > -1 \Rightarrow \frac{1}{k} < 0 \Rightarrow k < 0$$

تست

۱

راه‌حل

اگر معادله $2x^2 - kx - k - 2 = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، این ریشه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۴ (۴) ۴

شرط داشتن ریشه مضاعف صفر بودن Δ است:

$$\Delta = k^2 - 4(-k-2) = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 8 = 0$$

$$(k+4)^2 = 0 \Rightarrow k = -4$$

پس معادله به صورت $2x^2 + 4x + 2 = 0$ است و ریشه مضاعف آن $x = -1$ است:

$$2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

تست

۲

راه‌حل

با شرط $\Delta \geq 0$ اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب ریشه‌ها را با P نشان دهیم، آن‌گاه

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

همچنین، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر می‌شود با

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تست

۳

اگر α و β جواب‌های معادله $2x^2 - 4x - 3 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{68}{9}$

(۲) $-\frac{1}{9}$

(۱) $\frac{64}{9}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 2$ و $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{2^3 - 3(-\frac{3}{2})(2)}{(-\frac{3}{2})^2} = \frac{68}{9} \end{aligned}$$

تست

۴

اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - (k+2)x - 6 = 0$ باشند و $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{5}{6}$ ، مقدار k کدام است؟

(۴) $-\frac{9}{2}$

(۳) $-\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = k + 2$ و $\alpha\beta = -6$. از طرف دیگر

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{5}{6}$$

بنابراین

$$\frac{2(k+2)}{-6} = \frac{5}{6} \Rightarrow 2k+4 = -5 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$$

اگر x_1 و x_2 عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند، که در آن

$$S = x_1 + x_2$$

$$P = x_1 x_2$$

اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را **صفرهای تابع** f می‌نامند. صفرهای تابع f طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع با محور x هستند.

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آن‌گاه

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

تست

۵

اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، معادله درجه دومی که جواب‌های آن $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ و $\beta - \frac{1}{\beta}$ باشند، کدام است؟

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (۴) \quad x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (۳) \quad 3x^2 + 4x - 3 = 0 \quad (۲) \quad 3x^2 - 4x - 3 = 0 \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -3$. پس مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$S = \alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1 - \frac{1}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= -3 + \frac{1}{-3} - \frac{1 - 2(-3)}{-3} = -1 \end{aligned}$$

پس معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 3 = 0$$

راه‌حل

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta \geq 0$.

• اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن‌گاه قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت کوچک‌تر است.

اگر $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن‌گاه قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت بزرگ‌تر است.

• اگر $\frac{c}{a} > 0$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه هم‌علامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن‌گاه هر دو ریشه مثبت‌اند. اگر $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

تست

۶

اگر معادله $(m-2)x^2 + 2x + m+2 = 0$ یک جواب مثبت و یک جواب منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

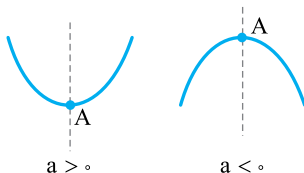
$$-2 < m < 2 \quad (۱) \quad -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$m < -2 \text{ یا } m > 2 \quad (۳) \quad m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > \frac{1}{2} \quad (۴)$$

شرط داشتن جواب‌های مختلف‌العلامت این است که حاصل ضرب جواب‌های معادله منفی باشد. پس

$$\frac{m+2}{m-2} < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$$

راه‌حل



به نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b, c عددهایی حقیقی‌اند و $a \neq 0$ ، سهمی می‌گویند. سهمی

برحسب علامت a به یکی از دو شکل روبه‌رو است.

اگر $a > 0$ ، A پایین‌ترین نقطه سهمی است، و اگر $a < 0$ ، A بالاترین نقطه سهمی است. در هر دو نمودار، A

را رأس سهمی می‌نامند. همچنین، خط‌چینی که از رأس سهمی گذشته و موازی محور y است، محور تقارن سهمی است.

رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نقطه $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ است و خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن این سهمی است.

معادله هر سهمی را می‌توان به شکل $y = a(x-h)^2 + k$ نوشت، که در اینجا $a \neq 0$. رأس این سهمی نقطه (h, k) است و خط $x = h$ محور تقارن این سهمی است.

تست

۷

رأس سهمی $y = kx^2 - 4x + 1$ روی خط $x + 2y = 1$ قرار دارد. طول رأس سهمی کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

 $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

راه حل

طول رأس سهمی برابر است با

$$x = -\frac{-4}{2k} = \frac{2}{k}$$

بنابراین عرض آن برابر است با

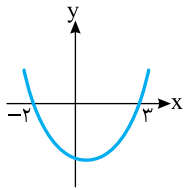
$$y = k\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{k}\right) + 1 = \frac{-4}{k} + 1$$

چون رأس سهمی روی خط $x + 2y = 1$ قرار دارد، پس طول و عرض آن در معادله خط صدق می کنند:

$$\frac{2}{k} + 2\left(\frac{-4}{k} + 1\right) = 1 \Rightarrow -\frac{6}{k} = -1 \Rightarrow k = 6$$

پس طول رأس سهمی برابر است با

$$x = \frac{2}{k} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



معادله سهمی شکل مقابل $y = -ax^2 + bx - c$ است. مقدار $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟

-۷ (۲)

۷ (۱)

-۵ (۴)

۵ (۳)

تست

۸

راه حل

با توجه به اینکه ۳ و -۲ صفرهای تابع هستند، معادله سهمی به صورت $y = k(x+2)(x-3)$ است. پس از ساده کردن، معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = kx^2 - kx - 6k$$

بنابراین

$$a = -k, \quad b = -k, \quad c = 6k$$

و در نتیجه

$$\frac{a+c}{b} = \frac{-k+6k}{-k} = -5$$

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ (*) و تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

• اگر برای معادله (*), $\Delta < 0$ ، آن گاه نمودار تابع f بالا یا پایین محور x قرار دارد.



• اگر برای معادله (*), $\Delta = 0$ ، آن گاه نمودار تابع f بر محور x مماس است.



• اگر برای معادله (*), $\Delta > 0$ ، آن گاه نمودار تابع f در دو نقطه محور x را قطع می کند.



تست

۹

به ازای کدام مجموعه مقادیرهای m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 - 2(m+2)x + 12$ محور x را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) هر مقدار m
 (۲) هیچ مقدار m
 (۳) $m > 1$
 (۴) $-2 < m < 1$

راه‌حل

برای اینکه سهمی مورد نظر محور x را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند باید معادله درجه دوم $(m-1)x^2 - 2(m+2)x + 12 = 0$ دو جواب منفی داشته باشد. یعنی Δ مثبت باشد، مجموع جواب‌ها منفی باشد و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد:

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 48(m-1) > 0 \Rightarrow 4(m-4)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 4 \quad (1)$$

$$S = \frac{2(m+2)}{m-1} < 0 \Rightarrow -2 < m < 1 \quad (2)$$

$$P = \frac{12}{m-1} > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (3)$$

نابرابری‌های (۱)، (۲) و (۳) اشتراک ندارند، پس به ازای هیچ مقدار m شرایط مسئله برقرار نیست.

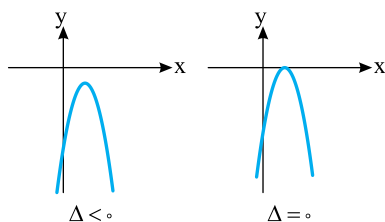
تست

۱۰

سهمی به معادله $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{a}$ از ناحیه اول صفحه مختصات نمی‌گذرد. حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a \leq 1$
 (۲) $a > 0$
 (۳) $0 < a \leq \frac{1}{2}$
 (۴) $a \geq 1$

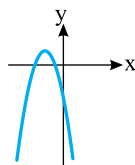
با توجه به اینکه ضریب x^2 منفی است، پس سهمی ماکزیمم دارد. در حالت‌های زیر سهمی از ناحیه اول صفحه مختصات عبور نمی‌کند. توجه کنید که رأس سهمی نقطه $(-1, 1 - \frac{1}{a})$ است.



پس کافی است $\Delta \leq 0$:

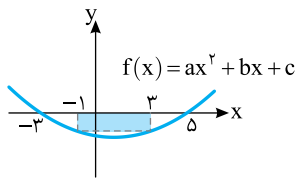
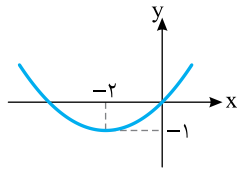
$$\Delta = 4 - \frac{4}{a} \leq 0 \Rightarrow \frac{4a - 4}{a} \leq 0 \Rightarrow 0 < a \leq 1$$

توجه کنید که چون مجموع ریشه‌های تابع مثبت است، حالت دیگری که به صورت زیر است نمی‌تواند اتفاق بیفتد. چون در این حالت مجموع ریشه‌های تابع منفی است.



معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۱)

- ۱- معادله $4x^2 - 6x + \frac{k}{4} - 2 = 0$ جواب دارد. حداکثر مقدار k کدام است؟
- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)
- ۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی برابر S و محیط آن برابر P است. اگر $S - P = \sqrt{3}$ ، اندازه ضلع مثلث کدام است؟
- ۲ + ۲√۳ (۱) ۴ + √۳ (۲) ۲ + √۳ (۳) ۴ + ۲√۳ (۴)
- ۳- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، مقدار $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ کدام است؟
- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴)
- ۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $3x^2 - 9m^2x + 2m - 1 = 0$ سه برابر عکس جواب دیگر باشد. مجموع جواب‌های معادله کدام است؟
- ۲۷ (۱) ۲۵۰ (۲) ۳۷۵ (۳) ۵۰۰ (۴)
- ۵- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ باشند. معادله‌ای که جواب‌های آن x_1^3 و x_2^3 باشد، کدام است؟
- $x^2 - 18x + 1 = 0$ (۱) $x^2 + 18x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 27x + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 36x + 1 = 0$ (۴)
- ۶- اگر معادله $2x^2 + (a+1)x + 8 = 0$ دو جواب مثبت داشته باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟
- $(-\infty, -9)$ (۱) $(-\infty, -1)$ (۲) $(7, +\infty)$ (۳) $(-1, 7)$ (۴)
- ۷- نمودار تابع $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{5}$ از چند ناحیه صفحه مختصات می‌گذرد؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۸- معادله سهمی مقابل به صورت $y = ax^2 + bx$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟
- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (۳)
- ۹- در شکل مقابل محیط مستطیل رنگی برابر ۱۰ است. مقدار b کدام است؟
- $-\frac{1}{5}$ (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{5}{4}$ (۴)
- ۱۰- سهمی به معادله $y = x^2 - mx + m^2 - 4$ از چهار ناحیه صفحه مختصات عبور می‌کند. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

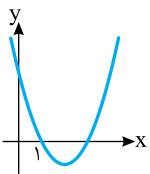


آزمون ۱۵

راه حل: ۱۵۰ تا ۱۵۱

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۲)

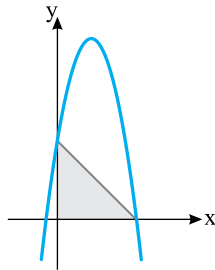
- ۱- اگر معادله $x^2 + 4x + k - 2 = 0$ دو جواب متمایز داشته باشد، درباره معادله $x^2 - 3x - k + 9 = 0$ کدام درست است؟
 (۱) دو جواب هم علامت دارد. (۲) دو جواب غیرهم علامت دارد.
 (۳) یک جواب مضاعف دارد. (۴) جواب ندارد.
- ۲- اگر یکی از جواب های معادله $x^2 - kx - 1 = 0$ سه واحد از عکس جواب دیگر بیشتر باشد، مقدار k کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{6}{5}$
- ۳- اگر α و β جواب های معادله $-x^2 + kx + 2 = 0$ باشند و $|\alpha - \beta| = 2k$ ، مقدار k^2 کدام است؟
 (۱) $\frac{32}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۴- اگر α و β اعدادی مثبت و جواب های معادله $x^2 - (\alpha\beta - 1)x + \alpha^2 + \beta^2 - 7 = 0$ باشند، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۵- بیشترین مقدار عبارت $y = -2x^2 - 4x + m$ برابر ۶ است. مقدار m کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶- رأس سهمی به معادله $y = x^2 + (2-m)x + \frac{m^2}{4}$ در ناحیه دوم صفحه مختصات قرار دارد. حدود m کدام است؟
 (۱) $1 < m < 2$ (۲) $-1 < m < 2$
 (۳) $-2 < m < -1$ (۴) $-1 < m < 0$
- ۷- خط $x = -2$ محور تقارن سهمی به معادله $y = (m+1)x^2 - (m-1)x - m$ است. مقدار m کدام است؟
 (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$
- ۸- اگر نمودار تابع $y = (m-2)x^2 - 2(m-1)x + m$ به صورت مقابل باشد، حدود m کدام است؟
 (۱) $m > 2$ (۲) $2 < m < 4$
 (۳) $2 < m < 3$ (۴) $m > 3$
- ۹- به ازای کدام مقادیر a ، سهمی به معادله $y = (a+1)x^2 - 2\sqrt{6}x + a$ همواره پایین محور x قرار دارد؟
 (۱) $a < -3$ (۲) $-\frac{1}{3} < a < -3$ (۳) $a > 2$ (۴) $2 < a < \frac{9}{4}$
- ۱۰- سهمی به معادله $y = -2x^2 + mx - 1$ فقط از ناحیه دوم صفحه مختصات عبور نمی کند. حدود m کدام است؟
 (۱) $m > \sqrt{8}$ (۲) $m > 0$
 (۳) $-\sqrt{8} < m < \sqrt{8}$ (۴) $m < -\sqrt{8}$



معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۳)

محاسبات

- ۱- اگر جواب بزرگتر معادله $x^2 - (2m^2 + 1)x + m^4 + m^2 = 0$ بزرگتر از ۵ باشد، حدود m کدام است؟
 (۱) $|m| > 1$ (۲) $|m| > 2$ (۳) $1 < |m| < 4$ (۴) $2 < |m| < 4$
- ۲- مجموع معکوسات دو عدد مختلف‌العلامت برابر ۲ و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۴ است. حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟
 (۱) $\frac{1 - \sqrt{17}}{4}$ (۲) $\frac{1 - \sqrt{8}}{4}$ (۳) $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ (۴) $\frac{1 - \sqrt{8}}{2}$
- ۳- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند، مقدار عبارت $\alpha^2 + 5\beta(1 + \alpha)$ کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷
- ۴- یکی از جواب‌های معادله $16x^2 - mx + 81 = 0$ مکعب جواب دیگر است. مقدار $|m|$ کدام است؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۷۸ (۳) ۸۱ (۴) ۱۲۵
- ۵- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - mx + 1 = 0$ باشند و $\alpha^2 + \beta^2 \leq 7$ ، حدود m کدام است؟
 (۱) $|m| \leq 2$ (۲) $|m| \leq 3$ (۳) $2 \leq |m| \leq 3$ (۴) $1 \leq |m| \leq 3$
- ۶- اگر جواب‌های معادله $x^2 - 7x + b = 0$ دو واحد بیشتر از جواب‌های معادله $x^2 + ax + 2 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۱۰ (۴) -۱۰
- ۷- اگر ریشه‌های معادله $a^2x^2 + x + 1 - a^2 = 0$ منفی باشند، حدود a کدام است؟
 (۱) $a \in (-1, 1) - \{0\}$ (۲) $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$
 (۳) $a \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۴) $a \in (-1, 1)$
- ۸- سهمی‌ای که از نقاط $(0, 0)$ ، $(1, -2)$ و $(2, -6)$ عبور می‌کند، از کدام نقطه زیر عبور می‌کند؟
 (۱) $(-2, -2)$ (۲) $(-2, -4)$ (۳) $(-3, -9)$ (۴) $(-3, -7)$
- ۹- در شکل مقابل سهمی به معادله $y = -x^2 + 6x + c$ رسم شده است. اگر مساحت مثلث رنگی برابر $\frac{c^2}{2}$ باشد، محیط آن کدام است؟
 (۱) $5(2 + \sqrt{2})$ (۲) $7(2 + \sqrt{2})$ (۳) $5(3 + \sqrt{2})$ (۴) $7(3 + \sqrt{2})$
- ۱۰- سهمی به معادله $y = mx^2 + 2mx + 1$ از ناحیه سوم صفحه مختصات عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟
 (۱) $m > 0$ (۲) $0 < m \leq 1$ (۳) $m \leq 1$ (۴) $\frac{1}{2} < m \leq 1$



آزمون ۱۷

راه حل: ۱۵۲ تا ۱۵۳

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۴)

- ۱- اگر معادله $x^2 + mx + 1 = 0$ دو جواب داشته باشد، معادله $mx^2 - 4x + m = 0$ چند جواب دارد؟
 (۱) یک جواب (۲) حداکثر یک جواب (۳) دو جواب (۴) جواب ندارد.
- ۲- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$ باشند و $\alpha < \beta$ ، مقدار عبارت $\alpha^3 + \beta^4$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۳- a عددی غیرصفر است و عددهای a و b ریشه‌های معادله $x^2 - (b+3a+6)x + 2a^2 = 0$ هستند. مقدار $a-b$ چقدر است؟
 (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) -۹
- ۴- اگر عددهای x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2c = 0$ باشند، $x_1 \neq 0$ و $x_1 x_2 + x_1^2 - 4c = 0$ ، مقدار c چقدر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۵- اگر s و t ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند و s^2 و t^2 ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ باشند، مقدار $b+c$ چقدر است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴
- ۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 6 = 0$ باشند، معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $x_1 - \frac{1}{x_2}$ و $x_2 - \frac{1}{x_1}$ باشند، کدام است؟
 (۱) $6x^2 + 14x - 49 = 0$ (۲) $6x^2 - 14x - 49 = 0$
 (۳) $3x^2 - 7x - 19 = 0$ (۴) $3x^2 + 7x - 19 = 0$
- ۷- اگر $x_1(1-x_2) + x_2 = 2$ و $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 7$ ، معادله‌ای درجه دوم که ریشه‌هایش x_1 و x_2 باشند، کدام است؟
 (۱) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - x - 3 = 0$ (۴) $x^2 + x - 3 = 0$
- ۸- رأس سهمی به معادله $y = x^2 + 2mx - 3m$ روی خط $y = x + 1$ قرار دارد. این سهمی از چند ناحیه صفحه مختصات عبور می‌کند؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۹- نقطه $(1, -2)$ رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + ab$ است. این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ ($b > 0$)
 (۱) $-\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ (۲) $-\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ (۳) $-\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ (۴) $-\frac{3+\sqrt{15}}{4}$
- ۱۰- نمودار تابع درجه دوم $y = mx^2 + x + m$ فقط در دو ناحیه صفحه مختصات قرار دارد. حدود m کدام است؟
 (۱) $|m| \geq \frac{1}{2}$ (۲) $m \neq 0$ و $|m| \leq \frac{1}{2}$ (۳) $|m| \geq 1$ (۴) $m \neq 0$ و $|m| \geq 1$

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)

- ۱- در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵
- ۲- اگر نمودار تابع $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، مجموعه مقادیر m کدام است؟
 (۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$ (۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$
- ۳- به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
 (۱) $a \leq -2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 2$
- ۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $2(\Delta x + 3) = x$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است؟
 (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱
- ۵- به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶- به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵
- ۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟
 (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$
- ۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟
 (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$
- ۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟
 (۱) $m > 2$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m
- ۱۰- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x است؟
 (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = 2$. پس

$$\begin{aligned}(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 + 2\beta + 1 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) + 2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 2 \\ &= 4^2 - 2 \times 2 + 2 \times 4 + 2 = 22\end{aligned}$$

۴- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = \frac{3}{\beta}$.

بنابراین $\alpha\beta = 3$. از طرف دیگر

$$\alpha\beta = \frac{2m-1}{3} \Rightarrow \frac{2m-1}{3} = 3 \Rightarrow m = 5$$

پس

$$\alpha + \beta = \frac{9m^3}{3} = \frac{9 \times 5^3}{3} = 375$$

۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $x_1 + x_2 = -3$ و $x_1 x_2 = 1$.

بنابراین جمع و ضرب جواب‌های معادله‌ای که می‌خواهیم بنویسیم به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned}P &= x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = 1^3 = 1 \\ S &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= (-3)^3 - 3 \times 1 \times (-3) = -18\end{aligned}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 18x + 1 = 0$$

۶- گزینه ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta = (a+1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (a+1)^2 > 64 \Rightarrow \begin{cases} a+1 > 8 \Rightarrow a > 7 \\ \text{یا} \\ a+1 < -8 \Rightarrow a < -9 \end{cases} \quad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها مثبت باشد. حاصل ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها

برابر $-\frac{a+1}{2}$ است. پس

$$-\frac{a+1}{2} > 0 \Rightarrow a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \quad (2)$$

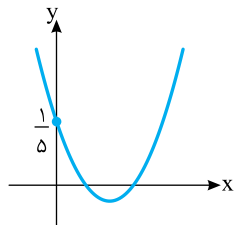
از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a < -9$.

۷- گزینه ۳ توجه کنید که $\Delta = 1 - \frac{4}{\delta} > 0$. پس تابع f دو صفر دارد که

مجموع آن‌ها برابر ۱ و حاصل ضرب آن‌ها برابر $\frac{1}{\delta}$ است. یعنی هر دو صفر تابع

f مثبت هستند. با توجه به $f(0) = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{5}$ به صورت زیر است که از

سه ناحیه صفحه مختصات می‌گذرد.



۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 7 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})^2 - 2a \times \frac{1}{a} = 7 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})^2 = 9 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 3 \quad (a > 0)$$

در نتیجه، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2a \times \frac{1}{a} = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)^2 &= (a+b)^2 (a^2 - ab + b^2)^2 \\ &= ((a+b)(a^2 - ab + b^2))^2 = (a^3 + b^3)^2\end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر تساوی‌های داده شده در فرض را با هم جمع کنیم به دست می‌آید

$$3a^3 + 3b^3 = 15 \Rightarrow a^3 + b^3 = 5$$

در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $5^2 = 25$.

۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 2(6 + 2ab - ab) = 2(6 + ab)$$

بنابراین باید ab را حساب کنیم. اکنون توجه کنید که

$$a + b = 2 \Rightarrow (a+b)^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4$$

$$6 + 2ab + 2ab = 4 \Rightarrow ab = -\frac{1}{2}$$

بنابراین $a^3 + b^3 = 2(6 + ab) = 11$.

۹- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3 &= (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) \\ &= (x-1)^2 - (y-2)^2 = (x-1 - (y-2))(x-1 + (y-2)) \\ &= (x-y+1)(x+y-3)\end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}x^{2^0} + 4 &= (x^{2^0} + 4x^{1^0} + 4) - 4x^{1^0} = (x^{1^0} + 2)^2 - (2x^{1^0})^2 \\ &= (x^{1^0} + 2 - 2x^{1^0})(x^{1^0} + 2 + 2x^{1^0})\end{aligned}$$

بنابراین $x^{2^0} + 4$ عاملی از $x^{1^0} + 2x^{1^0} + 2$ است.

آزمون ۱۴

فصل ۴

۱- گزینه ۳ شرط داشتن جواب نامنفی بودن Δ است. پس

$$\Delta = 36 - 16 \left(\frac{k}{4} - 2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 4k \leq 68 \Rightarrow k \leq 17$$

پس حداکثر مقدار k برابر ۱۷ است.

۲- گزینه ۴ اگر فرض کنیم طول ضلع مثلث برابر a باشد، مساحت

آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ و محیط آن $3a$ خواهد بود. بنابراین

$$S - P = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - 3a = \sqrt{3} \Rightarrow 3a^2 - 12\sqrt{3}a - 12 = 0$$

$$\Delta = (12\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 4 \times 12^2$$

$$a = \frac{12\sqrt{3} + 24}{6} = 2\sqrt{3} + 4$$

۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $a = -1$ ، $\Delta = k^2 + 8$ و

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{k^2 + 8}$$

$$\sqrt{k^2 + 8} = 2k \Rightarrow k^2 + 8 = 4k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{8}{3}$$

۴- گزینه ۴ توجه کنید که در معادله

$$x^2 - (\alpha\beta - 1)x + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma = 0$$

مجموع جواب‌ها برابر $\alpha\beta - 1$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ است.

بنابراین

$$\alpha + \beta = \alpha\beta - 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 - \gamma = \alpha\beta$$

در نتیجه

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - \gamma = \alpha\beta \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 3\alpha\beta + \gamma$$

اگر قرار دهیم $\alpha + \beta = \alpha\beta - 1$ ، آن‌گاه $(\alpha\beta - 1)^2 = 3\alpha\beta + \gamma$ با فرض

$P = \alpha\beta$ نتیجه می‌شود

$$(P - 1)^2 = 3P + \gamma \Rightarrow P^2 - 5P - 6 = 0$$

$$(P + 1)(P - 6) = 0 \Rightarrow P = -1, P = 6$$

چون α و β مثبت هستند پس $P = -1$ قبول نیست و $P = 6$ قابل قبول است.

۵- گزینه ۴ بیشترین مقدار عبارت $y = ax^2 + bx + c$ وقتی که

$a < 0$ برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است. در اینجا $a = -2$ و $\Delta = 16 + 8m$ پس

$$\frac{-(16 + 8m)}{-8} = 6 \Rightarrow 8m + 16 = 48 \Rightarrow m = 4$$

۶- گزینه ۱ طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{2-m}{2 \times 1} = \frac{m-2}{2}$ است.

پس عرض آن برابر است با

$$y = \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - (m-2)\left(\frac{m-2}{2}\right) + \frac{m^2}{4} = \frac{-m^2}{4} + m - 1 + \frac{m^2}{4} = m - 1$$

پس نقطه $(\frac{m-2}{2}, m-1)$ رأس سهمی است. چون این نقطه در ناحیه دوم

صفحه مختصات قرار دارد، پس طول آن منفی و عرض آن مثبت است.

$$\frac{m-2}{2} < 0 \Rightarrow m < 2, \quad m-1 > 0 \Rightarrow m > 1$$

پس $1 < m < 2$.

۷- گزینه ۱ محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ خط

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{m-1}{2(m+1)} = -2 \Rightarrow m-1 = -4m-4 \Rightarrow m = \frac{-3}{5}$$

۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار که نقطهٔ مینیمم دارد، باید ضریب x^2 مثبت باشد. پس $m-2 > 0$ و در نتیجه $m > 2$. از طرف دیگر یکی از

صفه‌های تابع $x=1$ است که نتیجه می‌شود صفر دیگر آن $\frac{m}{m-2}$ است. با

توجه به نمودار باید $\frac{m}{m-2} > 1$ پس

$$\frac{m}{m-2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{m-2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

۸- گزینه ۳ طول رأس سهمی برابر است با $x = -\frac{b}{2a}$ پس

$$-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{-\Delta}{4a}$ پس

$$\frac{-b^2}{4a} = -1 \Rightarrow b^2 = 4a$$

بنابراین

$$(4a)^2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 1$$

در نتیجه $b - a = \frac{3}{4}$.

۹- گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع معلوم است که ۵ و ۳- صفرهای

تابع هستند. پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$f(x) = k(x+3)(x-5) = k(x^2 - 2x - 15)$$

از طرف دیگر طول مستطیل برابر ۴ و عرض آن برابر $|f(-1)|$ است. پس

محیط مستطیل برابر است با $2(4 + |f(-1)|)$. بنابراین

$$2(4 + |f(-1)|) = 10 \Rightarrow f(-1) = -1, \quad f(-1) = k(1 + 2 - 15) = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{4}$$

پس $b = -\frac{1}{6}$.

۱۰- گزینه ۲ شرط اینکه سهمی از چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور

کند این است که در دو نقطه محور x را قطع کند که طول یکی مثبت و طول

دیگری منفی باشد. پس معادلهٔ $x^2 - mx + m^2 - 4 = 0$ باید دو جواب

مختلف‌العلامت داشته باشد. بنابراین

$$\frac{m^2 - 4}{1} < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$$

پس m می‌تواند مقادیر صحیح ± 1 و ۰ را داشته باشد.

آزمون ۱۵

فصل ۴

۱- گزینه ۴ شرط داشتن دو جواب متمایز، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta = 16 - 4(k-2) > 0 \Rightarrow 4k < 24 \Rightarrow k < 6$$

در معادلهٔ $x^2 - 3x - k + 9 = 0$ برای تعیین تعداد جواب‌ها Δ را به دست

می‌آوریم: $\Delta = 9 - 4(-k+9) = 4k - 27$. چون $k < 6$ ، پس

$$4k < 24 \Rightarrow 4k - 27 < -3 \Rightarrow \Delta < 0$$

پس این معادله جواب ندارد.

۲- گزینه ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\beta = \frac{1}{\alpha} + 3$.

از طرف دیگر $\alpha\beta = -1$ پس $\beta = -\frac{1}{\alpha}$ و در نتیجه

$$\frac{-1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + 3 \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = -3 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{3}{2}$$

از طرف دیگر $\alpha + \beta = k$ ، بنابراین $k = \frac{-2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$.