



فرمولہ

ریاضیات

پایہ دوازدهم

## ریاضیات گسستہ

پایہ دوازدهم  
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف  
امیر سعید حسینی

فرمولہ  
پبلسٹ

# فرمول پست

۸  
نمونه  
امتحانی

۶۴۰  
پرسش  
تشریحی

۵۵  
صفحه  
درسنامه



+۸  
ساعت  
فیلم  
آموزشی  
ویژه  
شب  
امتحان



تهران، میدان انقلاب  
نیش بازارچه کتاب  
[www.gajmarket.com](http://www.gajmarket.com)

## پیشگفتار

### ن و القلم و ما یسطرون

هدف اصلی مجموعه کتاب‌های **پیشگفتار** ارائه آموزش لازم برای تسلط به کتاب درسی و آمادگی برای امتحانات نهایی می‌باشد.

در این کتاب سعی کردم تمام زوایای کتاب درسی را موشکافانه بررسی کنم. از طرف دیگر، با ارائه سؤالات امتحانی طبقه‌بندی شده، انواع سؤالات متداول در امتحانات آورده شده است، تا دانش‌آموزان با شکل‌های مختلف سؤالات آشنا شده و بیش‌ترین بازدهی را برای امتحانات داشته باشند. توصیه‌ی ما به دانش‌آموزان عزیز این است که ابتدا خودشان به سؤالات پاسخ دهند سپس به پاسخ‌نامه رجوع کنند.

این کتاب دارای سه فصل است که هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد.

در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات امتحان نهایی، یک مجموعه‌ی تمرین از جمله سؤالات پاسخ کوتاه و جای خالی و بانک سؤال خوب و کامل نیز طراحی شده است.

در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سؤالات بمب، مشخص شده است، این سؤالات از سطح بالاتری نسبت به تمرینات کتاب برخوردار است. این سؤالات دانش‌پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آن‌ها لذت حل مسائل را دوچندان کند. در انتهای کتاب، ۸ سری امتحان نهایی سال‌های اخیر گنجانده شده است تا شب امتحان کار ساده‌تری داشته باشند.

در ابتدای هر فصل یک فیلم به صورت QR-Code قرار داده شده است که در آن سؤالاتی شبیه به سؤالات امتحان نهایی را توضیح داده‌ایم که شما با تماشای این فیلم‌ها یک بار دیگر مباحث فصل را برای شب امتحان مرور کنید و برای امتحانات آماده شوید.

در پایان از همه دوستان و عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده‌اند، سپاس فراوان دارم، همچنین از همسر عزیزم و فرزندانم سیداحسان و الناسادات که مرا صبورانه همراهی کرده‌اند، سپاسگزارم.

پیروز باشید

**سید امیرسعید حسینی**

## فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
187 min	۹۶	۶ تا ۳۴
147 min	۱۱۹	۳۵ تا ۶۶
178 min	۱۳۹	۶۷ تا ۹۴

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

فصل دوم: گراف و مدل سازی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

## امتحان نهایی



بارم بندی درس ریاضیات گسسته		
نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۵	۱۵	اول
۲	۵	تا صفحه ۴۲
۵	-	صفحه ۴۲ به بعد
۸	-	سوم
۲۰	۲۰	جمع

۱۷۴	آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۰
۱۷۵	آزمون ۲: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۷۶	آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۰
۱۷۷	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۷۹	آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۱
۱۸۰	آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۱
۱۸۱	آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۲
۱۸۲	آزمون ۸: شهریور ماه ۱۴۰۲
۱۸۴	پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۸

۱

بخش



# درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

# آشنایی با نظریه اعداد

فصل اول ریاضیات گسسته دارای ۷ بسته است که در آن‌ها مباحثی همچون استدلال استنتاجی، مثال نقض، برهان خلف، اثبات بازگشتی، بخش پذیری، مقسوم‌علیه مشترک، هم‌نهنشتی، باقیمانده تقسیم اعداد و معادله هم‌نهنشتی مطرح شده است. از این فصل در نوبت اول ۱۵ نمره و در نوبت دوم ۵ نمره سؤال مطرح می‌شود.

فصل ۱



برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

فیلم شب امتحان

استدلال استنتاجی و مثال نقض و اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

بسته اول



استدلال ریاضی

استدلال و اثبات در ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال، امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و درک آن کمک می‌نماید. حال به بررسی بعضی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات می‌پردازیم.

اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد ولی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم.

**نکته!** وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

**سؤال** با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

**پاسخ** فرض می‌کنیم که دو عدد فرد به صورت  $a = 2k + 1$  و  $b = 2k' + 1$  که  $k, k' \in \mathbb{Z}$  باشند.

$$a + b = (2k + 1) + (2k' + 1) = 2k + 2k' + 2 = 2(\underbrace{k + k'}_k + 1) = 2k''$$

" $2k''$  عددی زوج است.

**سؤال** با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره مضرب ۶ است.

**پاسخ** فرض می‌کنیم  $a, a + 1, a + 2$  سه عدد متوالی باشند. از هر دو عدد متوالی یکی به ۲ بخش پذیر است. بنابراین یکی از دو عدد  $a + 1$  یا  $a$  زوج است، بنابراین  $(a + 1)(a + 2)$  مضرب ۲ است. هم‌چنین از هر سه عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، بنابراین  $(a + 1)(a + 2)$  مضرب ۳ می‌باشد. عدد  $(a + 1)(a + 2)$  هم به ۲ و هم به ۳ بخش پذیر است، بنابراین مضرب ۶ می‌باشد.

**سؤال** با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد، یک واحد اضافه شود، عددی زوج به دست می‌آید.

**پاسخ** فرض می‌کنیم که  $a = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$  عددی فرد است.

$$3a + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 3 + 1 = 6k + 4 = 2(\underbrace{3k + 2}_k) = 2k'$$

بنابراین سه برابر عددی فرد به اضافهٔ یک، عددی زوج است.

### مثال نقض

استدلال مستقیم به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه به دست آمده حتماً درست است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

**مثال نقض:** به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

**سؤال** برای اثبات نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر یک مثال نقض ارائه دهید.

**آ** توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است.

**ب** اگر  $x$  و  $y$  اعداد گنگی باشند، آن‌گاه  $x^y$  یک عدد گنگ است.

**پاسخ** **آ** مثال نقض  $x = \frac{1}{4}$  برای رد این گزاره کافی است، زیرا:  $x^2 = \frac{1}{16} < x = \frac{1}{4}$

**ب** مثال نقض  $x = 2^{\sqrt{2}}$  و  $y = \sqrt{2}$  را در نظر می‌گیریم. (اعداد گویا)  $x^y = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4 \in \mathbb{Q}$

### اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع)

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم و هر حالت را به طور مستقیم اثبات کنیم. سپس با توجه به هم‌ارزی  $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ، حکم کلی مسئله اثبات می‌شود.

**سؤال** با استفاده از روش اشباع نشان دهید حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.

**پاسخ** فرض کنیم  $a$  و  $a+1$  دو عدد صحیح متوالی باشند. دو حالت وجود دارد:

**حالت اول**  $a$  عددی زوج است، بنابراین داریم:  $a = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(a+1) = 2k(2k+1) = 2(\underbrace{k(2k+1)}_{k'}) = 2k', k' \in \mathbb{Z}$  پس  $a(a+1)$  زوج است.

**حالت دوم**  $a$  عددی فرد است، بنابراین داریم:

$a = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(a+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'}) = 2k', k' \in \mathbb{Z}$  پس  $a(a+1)$  زوج است.

اگر زوج بودن  $a$  را با  $p$  و فرد بودن  $a$  را با  $q$  و زوج بودن  $a(a+1)$  را با  $r$  نمایش دهیم، در بالا ثابت کردیم که  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  و با توجه به هم‌ارزی  $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  حکم ثابت می‌شود.

**سؤال** برای هر عدد طبیعی  $n, 5 - 7n + n^2$  عددی فرد است.

**پاسخ** هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

**حالت اول**  $n$  زوج است، بنابراین داریم:  $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 7n - 5 = (2k)^2 + 7(2k) - 5 = 4k^2 + 14k - 5 = 4k^2 + 14k - 6 + 1$  که حاصل  $n^2 + 7n - 5$  یک عدد فرد است.

**حالت دوم**  $n$  فرد است، بنابراین داریم:

$n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 7n - 5 = (2k-1)^2 + 7(2k-1) - 5 = 4k^2 - 4k + 1 + 14k - 7 - 5 = 4k^2 + 10k - 11$  فاکتور  $= 4k^2 - 4k + 1 + 14k - 7 - 5 = 4k^2 + 10k - 11 = 2(\underbrace{2k^2 + 5k - 6}_{k'}) + 1 = 2k' + 1, k' \in \mathbb{Z}$

که حاصل  $n^2 + 7n - 5$  باز هم یک عدد فرد است.

لذا در دو حالت برای هر عدد طبیعی  $n, 5 - 7n + n^2$  عددی فرد است.

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱. عبارت «مربع هر عدد گنگ، عددی گویا است.» نادرست است و مثال نقض آن عدد ..... می باشد. (خرداد ۹۶)
۲. مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجه کلی ..... است.
۳. هنگامی از استدلال ..... استفاده می‌کنیم که مطمئن هستیم، نتیجه مسأله همیشه درست است.

● درستی یا نادرستی عبارات در سؤال‌های ۴ تا ۱۶ را مشخص کنید.

۴. حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)
۵. مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (شهریور ۹۸)
۶. برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱،  $2^n - 1$  اول است. (شهریور ۹۸ و دی ۹۹)
۷. مربع هر عدد حقیقی مثبت است.
۸. اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.
۹. بین هر دو عدد گنگ، عدد گویا وجود دارد.
۱۰. عدد  $4 + 3^n$  برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد اول است.
۱۱. اگر  $|a| = |b|$  باشد، آن‌گاه  $a = b$ .
۱۲. برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . (شهریور ۹۹)
۱۳. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$ ، آن‌گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ . (شهریور ۹۹)
۱۴. اگر  $a, b \in \mathbb{R}$ ، داریم:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ . (شهریور ۹۹)
۱۵. حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ و شهریور ۹۹)
۱۶. اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است. (خرداد ۹۹)
۱۷. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است. (دی ۹۵)
۱۸. کدام یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (شهریور ۹۳)

آ) توان دوم یک عدد، همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

ب) حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۱۹. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است. (خرداد ۹۳)
۲۰. با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

آ) تفاضل مربعات دو عدد فرد، همواره مضرب ۴ است.

- ب) اگر  $x$  یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه  $x(x+3)$  مضرب ۱۸ است. (دی ۹۰)

۲۱. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.

۲۲. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر  $P$  و  $P+2$ ،  $(P \geq 5)$  دو عدد اول باشند، آن‌گاه  $P+1$  مضرب ۶ است.

۲۳. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی به اضافه یک، مربع کامل است. (شهریور ۹۱)

۲۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی  $n$ :

آ)  $9 - 5n - n^2$  یک عدد فرد است.

ب)  $12 - 6n + 2n^2$  عددی زوج است.

(مشابه مثال صفحه ۴ کتاب درسی)



(خرداد ۱۴۰۱)

۲۵. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

۲۶.  $A = \{2, 3, 5\}$  یک زیرمجموعه از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  است و  $n \in S$ ، اگر  $\frac{n^2(n+1)^2}{3}$  یک عدد زوج باشد، ثابت کنید  $n \in A$

(مشابه تمرین کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

۲۷. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند و  $ab$  عددی فرد باشد، ثابت کنید  $a^2 + b^2 + 4$  زوج است.

(مشابه تمرین کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

۲۸. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت  $8k + 1$  است که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ .

۲۹. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت  $6q + 5$ ، عددی به صورت  $6q + 1$  است. ( $q \in \mathbb{Z}$ )

۳۰. آیا هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت؟

● برای اثبات نادرستی هر یک از احکام سوالات ۳۱ تا ۴۲ یک مثال نقض ارائه دهید.

۳۱. مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، گنگ است.

۳۲. همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می گیرد.

۳۳. اگر  $(a-1)(b-1) = 0$  آن گاه  $a = 1 \wedge b = 1$  می باشد.

۳۴. برای هر عدد حقیقی مثبت  $x$ ، داریم  $3^x \geq 3$ .

۳۵. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد گنگ باشند، آن گاه  $\frac{2x+y}{2x-y}$  نیز عدد گنگ است.

۳۶. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 + n + 41$  عددی اول است.

۳۷. اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد گنگ باشند، آن گاه  $abc^3$  یک عدد گنگ است.

۳۸. محیط دایره همواره عددی گنگ است.

(دی ۹۲)

۳۹. مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(دی ۹۲)

۴۰. برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $3^{n+2}$  اول است.

(دی ۸۹)

۴۱. اگر  $xy = 0$ ، آن گاه  $x = 0$  و  $y = 0$

(خرداد ۹۱)

۴۲. اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد طبیعی باشند، آن گاه  $b\sqrt{ac}$  یک عدد گنگ است.

(شهریور ۱۴۰۰)

۴۳. هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید.

آ) برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $2^n + 1$  اول است.

ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

(شهریور ۹۴)

۴۴. کدام یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

آ) اگر  $x > \frac{5}{7}$ ، آن گاه  $x > \frac{5}{7}$

ب) اگر  $x$  و  $y$  هر دو گویا باشند، آن گاه  $x + y$  گویا است.

(خرداد ۹۰)

۴۵. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

آ) به ازای هیچ دو عدد اول  $a$  و  $b$ ، عدد  $a + b$  اول نیست.

ب) اگر  $x$  فرد باشد، آن گاه  $x(x+2)$  هم فرد است.



الف اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

همان طور که در دو سال گذشته و در هندسه (۱) با اثبات غیرمستقیم آشنا شدید، گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از روش اثبات مستقیم به یک تناقض می‌رسیم. از این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست بوده است و در نتیجه حکم اولیه درست است. این روش استدلال را برهان خلف می‌گوییم.

**سؤال** نشان دهید که با فرض صحیح بودن  $n$ ، اگر  $n^2$  فرد باشد،  $n$  نیز فرد است.

**پاسخ** فرض می‌کنیم که  $n$  یک عدد صحیح و  $n^2$  عددی فرد است. اگر  $n$  عدد فرد نباشد، یک عدد زوج است (فرض خلف). یعنی  $n = 2k$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ .  
 $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$   
 $n^2$  یک عدد صحیح زوج است. بنابراین با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش برهان خلف

- ۱ فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد (فرض خلف).
- ۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.
- ۳ حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست است. بنابراین نتیجه مطلوب درست است.

**سؤال** ثابت کنید اگر  $x$  گویا و  $y$  گنگ باشد، آن‌گاه  $x - y$  گنگ است.

**پاسخ** فرض کنیم که  $x$  گویا و  $y$  گنگ است. نشان می‌دهیم  $x - y$  یک عدد گنگ است.  
**فرض خلف:** فرض کنیم  $x - y$  گویا باشد (گنگ نباشد). چون تفاضل دو عدد گویا نیز گویا است، پس  $x - y - x \in \mathbb{Q}$  یعنی  $-y \in \mathbb{Q}$  و  $y \in \mathbb{Q}$  و این با فرض گنگ بودن  $y$  تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

**سؤال** می‌دانیم  $\sqrt{3}$  یک عدد گنگ است. ثابت کنید  $\sqrt{\sqrt{3} + 2}$  یک عدد گنگ است.

**پاسخ** فرض می‌کنیم که  $\sqrt{\sqrt{3} + 2}$  یک عدد گنگ نباشد، بنابراین یک عدد گویا است (فرض خلف).  
 گنگ = گویا  $\Rightarrow \sqrt{3} = a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = \sqrt{3} + 2 \Rightarrow a^2 = (\sqrt{\sqrt{3} + 2})^2 = \sqrt{3} + 2$  مربع عدد گویا عددی گویا است.  
 چون تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است و طبق فرض مسئله  $\sqrt{3}$  گنگ است پس در این تساوی به تناقض می‌رسیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

**سؤال** با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی،  $x \neq 3$  و  $7 = x + 4y^2$  آن‌گاه  $y \neq -1$  است. **شهریور ۹۳**

**پاسخ** ابتدا حکم مسئله را نقض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $y = -1$  باشد (فرض خلف).  
 $7 = x + 4(-1)^2 \Rightarrow x = 3$   
 که با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم  $y \neq -1$  برقرار است.

**سؤال** با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\sqrt{5}$  عددی گنگ است. **خرداد ۹۶**

**پاسخ** فرض کنیم  $\sqrt{5}$  گنگ نباشد، یعنی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح  $a$  و  $b$  وجود دارند به طوری که  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول هستند و داریم:  
 $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ ,  $(a, b) = 1$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$   
 $a$  مضرب ۵ است.  $\Rightarrow a^2$  مضرب ۵ است.  $\Rightarrow a^2 = 5b^2$  به توان ۲ می‌رسانیم.  
 $b$  مضرب ۵ است.  $\Rightarrow b^2$  مضرب ۵ است.  $\Rightarrow b^2 = 5k^2$   
 $\Rightarrow a = 5k$ ,  $a^2 = 5b^2 \Rightarrow 25k^2 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 5k^2$   
 لذا  $a$  و  $b$  هر دو مضرب ۵ هستند که با فرض اول بودن  $a$  و  $b$  نسبت به هم، در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است، یعنی  $\sqrt{5}$  عددی گنگ است.

**نکته** ! البته توجه کنید که گاهی اوقات برای رد ادعایی فرض می‌کنیم که آن ادعا درست است و با استفاده از دانسته‌ها به مطالب نادرست می‌رسیم، در این حالت نیز از فرض خلف استفاده کرده‌ایم.

## ب اثبات بازگشتی - گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های  $P \Rightarrow Q$  و  $Q \Rightarrow P$  هر دو درست هستند و در نتیجه  $P \Leftrightarrow Q$  یک گزاره درست است.

برعکس اگر ترکیب دو شرطی  $P \Leftrightarrow Q$  درست باشد، آن‌گاه  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم، به طوری که اگر  $P$ ،  $Q$  و  $R$  سه گزاره باشند و  $Q \Leftrightarrow R$  و  $P \Leftrightarrow Q$  یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. با تکرار این کار و با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی و یا فرض مسئله می‌رسیم.

در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن روش بازگشتی هم می‌گویند)، توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

**مثال**  $a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0$  یک ترکیب دو شرطی درست است. ولی  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$  یک ترکیب دو شرطی درست نیست، زیرا:

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

**سؤال**  $a$  و  $b$  دو عدد مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

**پاسخ** فرض کنیم که حکم درست است، پس باید به یک رابطه بدیهی برسیم.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (بدیهی است.)}$$

آخرین گزاره یعنی  $(a-b)^2 \geq 0$  همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم، هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است.

خرداد ۹۱

**سؤال** اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

نامساوی اخیر بدیهی است.

خرداد ۹۴

**سؤال** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^2 + 1 \geq b(2-b)$$

**پاسخ** نامساوی اخیر بدیهی است.

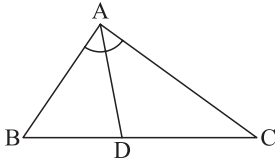
$$a^2 + 1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + (b^2 - 2b + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۴۶. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم ..... باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های ..... و مبتنی بر فرض به یک نتیجه ..... با فرض می‌رسیم و از آن جا معلوم می‌شود که فرض ..... بودن حکم باطل است و ..... حکم ثابت می‌گردد.
۴۷. حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی ..... است.
۴۸. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی ..... (گنگ، گویا) است. (دی ۱۴۰۰)
۴۹. اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های ..... می‌نامند.
۵۰. میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها ..... نیست.

● درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

۵۱. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۲)
۵۲. حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۲)
۵۳. اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد،  $\frac{1}{x}$  نیز عدد گنگ است. (دی ۱۴۰۱)
۵۴. برای مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  به شرط آنکه  $a + b \neq 0$ ، تساوی  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  برقرار است. (دی ۱۴۰۱)
۵۵. اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه زوج بودن  $n$  و زوج بودن  $n^2$  هم‌ارز هستند.
۵۶. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، آن‌گاه  $\alpha - \beta$  گویا است.
۵۷. اگر  $y \neq 1$  و  $x^3 + 2y = 10$ ، آن‌گاه  $x \neq 2$  است.
۵۸. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند، آن‌گاه  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 2$  است.
۵۹. هیچ عدد صحیحی مانند  $x$  و  $y$  وجود ندارند که رابطه  $x^2 + y^2 = (x + y)^2$  برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۰)
۶۰. با استفاده از استدلال برهان خلف، ثابت کنید که با فرض صحیح بودن  $n$ ، اگر  $n^2$  زوج باشد،  $n$  نیز زوج است. (شهریور ۹۴)
۶۱. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر  $\sqrt{5}$  گنگ باشد،  $3 + \sqrt{5}$  هم گنگ است. (دی ۹۵)
۶۲. اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد ولی  $g$  در  $x = a$  ناپیوسته باشد، ثابت کنید  $f - g$  در  $x = a$  ناپیوسته است. (برهان خلف)
- (مشابه تمرین کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۶ کتاب درسی)
۶۳. با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $3 + 5n$  زوج باشد، آن‌گاه  $n$  یک عدد فرد است. (خرداد ۹۱ و مشابه شهریور ۹۰)
۶۴. می‌دانیم  $\sqrt{2}$  گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\sqrt{1} + \sqrt{2}$  نیز گنگ می‌باشد. (شهریور ۹۱)
۶۵. ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۰)
۶۶. می‌دانیم  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{2}$  اعداد گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید  $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$  نیز گنگ است. (دی ۹۰)
۶۷. با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد،  $\frac{1}{x}$  نیز عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ خارج)
۶۸.  $a_1, a_2, a_3$  اعداد صحیح هستند و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است. (شهریور ۱۴۰۵)
۶۹.  $a_1, a_2, a_3, a_4$  و  $a_5$  عددهایی صحیح هستند و  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$  عددی زوج است. (مشابه مثال صفحه ۶ کتاب درسی)
۷۰. ثابت کنید عدد حقیقی مانند  $x$  وجود دارد که  $x^2 < x^3$ . (تمرین ۲ صفحه ۸ کتاب درسی)



۷۱. اگر  $n^3$  مضرب ۵ باشد، نشان دهید  $n$  نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)

۷۲. فرض کنید  $AD$  نیمساز زاویه  $\hat{A}$  در مثلث  $ABC$  باشد. اگر  $BD \neq DC$ ، ثابت کنید  $AB \neq AC$ .

۷۳. اگر  $x$  یک عدد گویا و  $\sqrt{3}$  یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید  $2x + \frac{\sqrt{3}}{3}$  یک عدد گنگ است.

۷۴. می دانیم  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{7}$  اعدادی گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$  نیز گنگ است.

۷۵. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\log_5 5$  عددی گنگ است.

۷۶. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  و هم چنین  $2\alpha + \beta$  گنگ هستند.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب درسی، دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۷۷. با استفاده از برهان خلف و با فرض صحیح بودن  $n$ ، نشان دهید اگر  $n^2$  مضرب ۶ باشد، آن گاه  $n$  نیز مضرب ۶ است.

۷۸. با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، ثابت کنید:

۱ از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

۲ اگر سه خط راست  $d$ ،  $d'$  و  $d''$  دوه دو متمایز باشند و  $d \parallel d'$  و  $d' \parallel d''$ ، آن گاه  $d \parallel d''$ .

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۸ کتاب درسی)

۷۹. آیا اعداد صحیح مانند  $a$  و  $b$  وجود دارند که  $a^2 + b^2 = (a - b)^2$ .

(شهریور ۹۵)

۸۰. با استفاده از اثبات بازگشتی برای هر دو عدد حقیقی مثبت  $x$  و  $y$  نشان دهید  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ .

(دی ۹۸)

۸۱. به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر  $a > 0$  آن گاه  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

(خرداد ۹۹)

۸۲. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

(شهریور ۹۹)

۸۳. ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

(خرداد ۹۸)

۸۴. ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن ها کم تر نیست.

۸۵. با استفاده از استدلال بازگشتی، ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربع های آن ها است.

(شهریور ۹۴ و خرداد ۱۴۰۰)

۸۶. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید  $a^2 + b^2 \geq 2(b - 1)$ .

(شهریور ۹۳)

(تمرین ۵ صفحه ۸ کتاب درسی)

۸۷. آیا مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  چنان وجود دارند که:  $(a + b \neq 0)$ ،  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

(خرداد ۹۳)

۸۸. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ .

(خرداد ۱۴۰۲)

۸۹. اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید  $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$ .

(شهریور ۱۴۰۲)

۹۰. برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) نشان دهید:  $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$ .

(دی ۱۴۰۱)

۹۱. گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:

«برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:  $(y^2 + 1) \geq -2x(y + x + 1)$ »

(خرداد ۹۲ و خارج دی ۹۸)

۹۲. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ .

(دی ۹۲)

۹۳. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ .

(شهریور ۹۸)

۹۴. اگر  $x$ ،  $y$  و  $z$  سه عدد حقیقی باشند، آن گاه ثابت کنید:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ .

(شهریور ۹۱)

۹۵. اگر  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی باشند، به طوری که  $ab < 0$ ، ثابت کنید  $-\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$ .

(دی ۹۰)

۹۶. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه  $x^4 + y^4 \geq x^2y + xy^2$  را ثابت کنید.

(شهریور ۸۹)

۹۷. با اثبات بازگشتی نشان دهید:  $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ,  $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

(خرداد ۸۷)

۹۸. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

۹۹. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید:

$$y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$$

۱۰۰. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند، آنگاه ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1$$

۱۰۱. اگر  $x, y, z$  سه عدد حقیقی مثبت باشند، آنگاه ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$$

### بخش پذیری در اعداد صحیح<sup>۱</sup>

صفحه ۱۲ تا ۱۳ کتاب درسی

### بسته سوم



### شمارنده

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء بدون آن‌که باقی مانده‌ای داشته باشد را، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیاء توسط شمارنده‌ها می‌نامیم. به عنوان مثال ۱۸ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ شمارش کرد. برای نمایش این مفهوم از نماد «|» به معنی عاد کردن یا همان شمردن استفاده می‌کنیم. به طوری که می‌نویسیم  $18 \mid 3$  و می‌خوانیم:

۱ | ۳ می‌شمارد عدد ۱۸ را

۳ | ۳ عاد می‌کند عدد ۱۸ را

۳ | ۱۸ بر ۳ بخش پذیر است. (باقی مانده تقسیم صفر است.)

### عاد کردن

عدد صحیح  $a$  که مخالف صفر است، شمارنده عدد  $b$  است (یا  $a, b$  را می‌شمارد یا  $b$  بر  $a$  بخش پذیر است یا  $a \mid b$ )، هرگاه عدد صحیحی چون  $q$  وجود داشته باشد به طوری که  $b = aq$ . (اگر  $b$  بر  $a$  بخش پذیر نباشد یا عدد  $a$  عدد  $b$  را عاد نکند، آن را به صورت  $a \nmid b$  نمایش می‌دهیم.)

**قرارداد** چون بی‌شمار عدد صحیح مانند  $q$  وجود دارد در  $0 = 0 \times q$  صدق می‌کند، به معنی آن است که صفر عدد صفر را می‌شمارد و این به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

**نکته** ! اگر  $a$  عددی طبیعی باشد، داریم  $a \mid a$  و  $1 \mid a$  یعنی هر عدد بر خودش و عدد ۱ بخش پذیر است، مانند:

$$1 \mid 7 \xrightarrow{(q=7)} 7 = 1 \times 7, \quad 5 \mid 5 \xrightarrow{(q=1)} 5 = 5 \times 1$$

**سؤال** ؟ با توجه به تعریف رابطه عاد کردن، دلیل درستی رابطه‌های زیر را بیان کنید.

۱۴  $5 \nmid 17$

۳  $4 \mid -32$

۲  $-3 \mid 39$

۱  $5 \mid 45$

۲  $-3 \mid 39 \xrightarrow{q=-13} 39 = (-3) \times (-13)$

۱ پاسخ  $5 \mid 45 \xrightarrow{q=9} 45 = 5 \times 9$

۴  $5 \nmid 17 \Rightarrow \frac{17}{5} \notin \mathbb{Z}$

۳  $4 \mid -32 \xrightarrow{q=-8} -32 = 4 \times (-8)$

### خواص و ویژگی‌های رابطه عاد کردن

$a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

۱ اگر  $a$  عاد کند عدد ۱ را آنگاه  $a = 1$  یا  $a = -1$

۱. تا پایان این فصل، منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲) برای هر عدد طبیعی  $m$  و  $n$  که  $n$  بزرگ‌تر یا مساوی  $m$  باشد، داریم  $a^m \mid a^n$ .

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

مثال  $2^4 \mid 2^9 \xrightarrow{q=2^5} 2^9 = 2^4 \times 2^5$

۳) اگر عدد  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آن‌گاه هر مضرب عدد  $b$  را نیز می‌شمارد، یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

مثال  $7 \mid 14 \Rightarrow 7 \mid 14 \times 5, 7 \mid 14 \times (-3), 7 \mid 14 \times 12$

۴) اگر  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آن‌گاه  $b^2$  را می‌شمارد و در حالت کلی  $b^n$ ، ( $n \in \mathbb{N}$ ) را می‌شمارد.

$$a \mid b \Rightarrow a \mid b^2, \quad a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$$

مثال  $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6^2, \quad 3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6^n$

۵) اگر عدد  $a$ ، عدد  $b$  را بشمارد و  $b$  نیز  $c$  را بشمارد، آن‌گاه  $a$ ، عدد  $c$  را می‌شمارد. این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن می‌نامیم.

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

مثال  $3 \mid 9 \wedge 9 \mid 18 \Rightarrow 3 \mid 18$

۶) هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$$

مثال  $7 \mid 14 \wedge 7 \mid 21 \Rightarrow \begin{cases} 7 \mid 14 + 21 \Rightarrow 7 \mid 35 \\ 7 \mid 14 - 21 \Rightarrow 7 \mid -7 \end{cases}$

۷) اگر  $a \mid b$  و  $b \neq 0$  در این صورت  $|a| \leq |b|$ .

$$a \mid b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $a \mid b$  و  $b \mid a$ ، آن‌گاه  $a = \pm b$ .

مثال  $5 \mid 25 \Rightarrow 5 \leq |25|, \quad -5 \mid 25 \Rightarrow -5 \leq |25|, \quad 5 \leq 25, \quad -5 \leq 25$

۸) اگر  $a \mid b$ ، آن‌گاه داریم  $a^n \mid b^n$ .

$$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

مثال  $3 \mid -6 \Rightarrow \begin{cases} 3^2 \mid (-6)^2 \Rightarrow 9 \mid 36 \\ 3^3 \mid (-6)^3 \Rightarrow 27 \mid -216 \end{cases}$

۹) اگر  $a \mid b$  و  $c \mid d$ ، آن‌گاه داریم  $ac \mid bd$ .

$$a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

(دو طرف بخش پذیری را می‌توان در هم ضرب کرد.)

مثال  $4 \mid 12, 5 \mid 15 \Rightarrow 4 \times 5 \mid 12 \times 15 \Rightarrow 20 \mid 180$

۱۰) اگر  $a \mid b$  و  $a \mid c$ ، آن‌گاه  $a \mid mb \pm nc$  ( $m$  و  $n$  اعداد صحیح‌اند).

$$a \mid b \wedge a \mid c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a \mid mb \pm nc, (n, m \in \mathbb{Z})$$

مثال  $2 \mid 6, 2 \mid 4 \xrightarrow{n=5, m=3} \begin{cases} 2 \mid 3 \times 6 + 5 \times 4 \Rightarrow 2 \mid 18 + 20 \Rightarrow 2 \mid 38 \\ 2 \mid 3 \times 6 - 5 \times 4 \Rightarrow 2 \mid 18 - 20 \Rightarrow 2 \mid -2 \end{cases}$

سؤال از رابطه  $4 \mid \Delta n^2 - 8n + 4$  چند مقدار طبیعی برای  $n$  به دست می‌آید؟

پاسخ با توجه به ویژگی شماره یک داریم:

$$\Delta n^2 - 8n + 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta n^2 - 8n + 4 = +1 \\ \Delta n^2 - 8n + 4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta n^2 - 8n + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 64 - 4(5)(3) = 4} n_1 = 1, n_2 = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N} \text{ (غرق)} \\ \Delta n^2 - 8n + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = 64 - 4(5)(5) = -36} \Delta = -36 < 0 \end{cases}$$

بنابراین فقط یک مقدار عدد طبیعی یعنی  $n = 1$  به دست می‌آید.

عدد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارنده مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$  نمایش داده می‌شود.

**نکته!** اگر  $p$  عددی اول و  $a$  عددی طبیعی باشد و  $a | p$ ، در این صورت  $a = 1$  یا  $a = p$ .

**سؤال** اگر  $a$  عددی طبیعی باشد و دو عدد  $(7k + 8)$  و  $(6k + 5)$  را عاقد کند، ثابت کنید  $a = 1$  یا  $a = 13$ .

**پاسخ**

$$\left. \begin{aligned} a | 7k + 8 &\xrightarrow{(\times 6)} a | 6(7k + 8) \Rightarrow a | 42k + 48 \\ a | 6k + 5 &\xrightarrow{(\times 7)} a | 7(6k + 5) \Rightarrow a | 42k + 35 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ترکیب خطی} \\ \text{و ویژگی } 1^\circ \end{array} \rightarrow a | (42k + 48) - (42k + 35)$$

$$\Rightarrow a | 42k + 48 - 42k - 35 \Rightarrow a | 13 \xrightarrow{\text{۱۳ عددی اول است.}} a = 1 \text{ یا } a = 13$$

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

پریش‌های تشریحی

بسته  
۳

• در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۱۰۲. اگر  $a | 1$  آن‌گاه،  $a$  برابر ..... یا ..... است.

۱۰۳. اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a$  عددی طبیعی و  $a | p$ ، در این صورت  $a$  برابر ..... یا ..... است.

۱۰۴. اگر  $a | b$  و  $a | a$ ، آن‌گاه  $a$  برابر ..... یا ..... است.

۱۰۵. اگر  $a | b$  و  $a | a$ ، آن‌گاه  $ac | bd$ .

۱۰۶. اگر  $a | a$ ، آن‌گاه  $a$  برابر ..... است.

۱۰۷.  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح و  $a$  مخالف صفر است. اگر  $a | b$ ، آن‌گاه عدد ..... شمارنده عدد ..... است. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۰۸. اگر برای دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  داشته باشیم  $a | b$ ، برای هر  $m \in \mathbb{Z}$  داریم: .....  $(a | mb, ma | b)$ . (دی ۱۴۰۰)

• درستی یا نادرستی هریک از عبارات‌های سوالات ۱۰۲ تا ۱۰۷ را با دلیل بیان کنید.

۱۰۹. اگر  $a | 17$ ، آن‌گاه  $a | 51$ .

۱۱۰. اگر  $a | 24$ ، آن‌گاه  $a | 6$  یا  $a | 8$ .

۱۱۱. اگر  $a | 19$ ، آن‌گاه  $4a | 76$ .

۱۱۲. اگر  $a | 3$ ، آن‌گاه  $a | 243$ .

۱۱۳. برای اعداد صحیح  $a, b, c$  که  $a \neq 0$ ، اگر  $a | b + c$ ، آن‌گاه  $a | c$  یا  $a | b$ . (دی ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲)

۱۱۴. اگر  $a | b$  و  $b \neq 0$ ، در این صورت  $|a| > |b|$ . (خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۵. اگر فرض کنیم  $ab = cd$ ،  $a, b, c, d$  اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت سه رابطه عاقد کردن را از این تساوی نتیجه بگیرید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

۱۱۶. از رابطه  $2n^2 - 7n + 4$  چند مقدار طبیعی برای  $n$  به دست می‌آید؟

۱۱۷. اگر  $a | b$  ثابت کنید:  $a | -b$ ،  $a | b$ ،  $-a | -b$  و  $-a | b$ . (تمرین ۲ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

۱۱۸. ثابت کنید اگر  $a$  عدد  $b$  را بشمارد، آن‌گاه  $b^2$  را می‌شمارد و در حالت کلی  $b^n$ ،  $(n \in \mathbb{N})$  را می‌شمارد.

آ  $a | b \Rightarrow a | b^2$

ب  $a | b \Rightarrow a | b^n$



۴

بخش



پاسخنامه

۱ | عددی مانند  $1 + \sqrt{3}$  یا  $1 + \sqrt{2}$

۲ | نادرست | استنتاجی (اثبات مستقیم)

۴ | درست، زیرا حاصل ضرب سه عدد متوالی هم بر عدد ۲ بخش پذیر است و هم بر عدد ۳ بخش پذیر است، در نتیجه به عدد ۶ بخش پذیر است.

۵ | درست، (استدلال استنتاجی)

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a &= 2k+1 \\ b &= 2k'+1 \end{aligned} \right\} \text{ هر دو عدد فرد} \\ \Rightarrow a+b &= 2k+1+2k'+1 \\ &= 2k+2k'+2 = 2(k+k'+1) = 2k'' \end{aligned}$$

عدد زوج  $2k''$

۶ | نادرست، مثال نقض:  $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$   $\xrightarrow{(n=4)}$   $2^n - 1 = 15$  عدد اول نیست.

۷ | نادرست، مثال نقض:  $x = 0$

۸ | درست | ۹ | درست

۱۰ | نادرست، مثال نقض:  $n = 4$  که  $3^4 + 4 = 85$  عدد اول نیست.

۱۱ | نادرست، چون  $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

۱۲ | نادرست، مثال نقض:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{13} \neq 5$$

۱۳ | درست، زیرا برای  $a$  دو حالت ممکن است، رخ دهد:

**حالت اول** اگر  $a = 0$  در این حالت حکم برقرار است، زیرا  $a \times b = 0$

**حالت دوم** اگر  $a \neq 0$  در این حالت  $a^{-1}$  (معکوس  $a$ ) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه  $ab = 0$  در  $a^{-1}$  داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین در دو حالت حکم برقرار است.

۱۴ | نادرست، مثال نقض:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < 1 \not\Rightarrow (-2)^2 < (1)^2$$

۱۵ | نادرست، مثال نقض:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$$

عدد گویا  $0 \in \mathbb{Q}$

۱۶ | درست،  $a = 2k + 1$  را به عنوان یک عدد فرد در نظر می‌گیریم و طرفین

را به توان ۲ رسانده و از آن یک واحد کم می‌کنیم، حاصل باید مضرب ۸ باشد.

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1$$

$$= 4k(k+1) = 4 \times 2k' = 8k'$$

دقت کنید حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ است.

$$k(k+1) = 2k'$$

۱۷ | فرض می‌کنیم که سه عدد زوج متوالی به صورت  $c = 2k + 4$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) و  $b = 2k + 2$  و  $a = 2k$  باشد.

$$a \times b \times c = (2k) \times (2k+2) \times (2k+4)$$

$$= 2(k) \times 2(k+1) \times 2(k+2) = 8(k)(k+1)(k+2) = 8k'$$

پس حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۸ | آ این حکم نادرست است. زیرا اگر  $x = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه  $x = \frac{1}{4} < x = \frac{1}{4}$

**ب** حکم درست است. زیرا اگر فرض کنیم  $2k$  و  $2k+2$  دو عدد صحیح زوج متوالی باشند، آن‌گاه:

$$2k(2k+2) = 2k(2(k+1)) = 4k(k+1) = 8k', k' \in \mathbb{Z}$$

۱۹ | فرض کنیم  $2k+1$  و  $2k'+1$  ( $k, k' \in \mathbb{Z}$ ) دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$$(2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (4k'^2 + 4k' + 1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1) = 2k'' \text{ (عدد زوج)}$$

$k'' \in \mathbb{Z}$

۲۰ | فرض کنیم دو عدد فرد به صورت  $2k+1$  و  $2k'+1$  باشند ( $k, k' \in \mathbb{Z}$ ). در این صورت داریم:

$$(2k+1)^2 - (2k'+1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4k'^2 + 4k' + 1)$$

$$= 4(k^2 + k - k'^2 - k') = 4k'' , k'' \in \mathbb{Z}$$

**ب** فرض کنیم  $x$  عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، در این صورت:

$$x = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(x+3) = 3k(3k+3)$$

$$= 9k(k+1) = 9(2k') = 18k', k' \in \mathbb{Z}$$

زوج

۲۱ | فرض کنیم  $a, a+1, a+2$  سه عدد صحیح متوالی باشند، داریم:

$$a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3(a+1) = 3a'$$

$a' \in \mathbb{Z}$

بنابراین حاصل جمع سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

۲۲ | از هر دو عدد متوالی یکی زوج است. دو عدد  $P+1$  و  $P$  متوالی

می‌باشند و  $P$  زوج نمی‌باشد، (زیرا  $P$  اول و  $P \geq 5$  است.) بنابراین  $P+1$

زوج است. از طرفی از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ می‌باشد و  $P, P+1$

و  $P+2$  سه عدد متوالی می‌باشند و چون  $P$  و  $P+2$  مضرب ۳

نمی‌باشند، لذا  $P+1$  مضرب ۳ است.  $P+1$  هم مضرب ۲ و هم مضرب

۳ می‌باشد و در نتیجه مضرب ۶ است.

۲۶ | هر یک از حالت‌های اعداد مجموعه S را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{3}$$

n=1	$\rightarrow \frac{1^2(1+1)^2}{3} = \frac{4}{3}$	زوج نیست.
n=2	$\rightarrow \frac{2^2(2+1)^2}{3} = \frac{4 \times 9}{3} = 4 \times 3 = 12$	زوج است.
n=3	$\rightarrow \frac{3^2(3+1)^2}{3} = \frac{9 \times 16}{3} = 3 \times 16 = 48$	زوج است.
n=4	$\rightarrow \frac{4^2(4+1)^2}{3} = \frac{16 \times 25}{3} = \frac{400}{3}$	زوج نیست.
n=5	$\rightarrow \frac{5^2(5+1)^2}{3} = \frac{25 \times 36}{3} = 25 \times 12 = 300$	زوج است.

بنابراین حاصل به ازای اعداد مجموعه A زوج است و  $n \in A$  می‌باشد.

۲۷ | a و b دو عدد صحیح است و چون ab عددی فرد است، بنابراین هر دو عدد a و b باید فرد باشد. فرض کنیم.

$$a = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b = 2k' + 1 \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

$$a^2 + b^2 + 4 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 + 4$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 4$$

$$= 4k^2 + 4k + 4k'^2 + 4k' + 6 = 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 3) = 2k''$$

بنابراین  $a^2 + b^2 + 4$  یک عدد زوج است.

۲۸ | فرض کنیم a یک عدد صحیح فرد باشد، در این صورت:

$$a = 2m + 1, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1 \quad (1)$$

$m(m+1)$  حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است، بنابراین عددی زوج است، پس:

$$m(m+1) = 2k \xrightarrow{(1)} a^2 = 4(2k) + 1 = 8k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲۹ | فرض کنیم  $6q + 5$  و  $6q' + 5$  دو عدد دلخواه باشند، در این صورت:

$$(6q+5)(6q'+5) = 36qq' + 30q + 30q' + 25$$

$$= (36qq' + 30q + 30q' + 24) + 1$$

$$= 6(6qq' + 5q + 5q' + 4) + 1 = 6k + 1$$

در واقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل ضرب دو عددی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر 6 برابر 5 است را بر 6 تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم برابر 1 می‌شود.

۳۰ | بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد

متوالی نوشت. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \quad 74 = 17 + 18 + 19 + 20$$

$$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$$

اما عدد 8 را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. در واقع عدد 8 مثال نقضی است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

۲۳ | چهار عدد صحیح متوالی را به ترتیب  $k, k+1, k+2, k+3$  در نظر می‌گیریم و حاصل ضرب آن‌ها به اضافه یک را می‌نویسیم.

$$(k)(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1$$

در دو جمله ضرب می‌کنیم. در هم ضرب می‌کنیم.

$$= (k^2 + 3k)^2 + 2(k^2 + 3k) + 1$$

اتحاد مربع کامل  $(k^2 + 3k + 1)^2$  مربع کامل

۲۴ | (آ) برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول | n زوج است. به عبارت دیگر  $n = 2k, (k \in \mathbb{N})$  در این حالت داریم:

$$n^2 + 5n - 9 = (2k)^2 + 5(2k) - 9 = 4k^2 + 10k - 9$$

$$= 4k^2 + 10k - 10 + 1 = 2(2k^2 + 5k - 5) + 1 = 2k' + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

حالت دوم | n فرد است. به عبارت دیگر  $n = 2k - 1, (k \in \mathbb{N})$  در این حالت داریم:

$$n^2 + 5n - 9 = (2k-1)^2 + 5(2k-1) - 9$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 + 10k - 5 - 9 = 4k^2 + 6k - 14 + 1 = 2(2k^2 + 3k - 7) + 1 = 2k' + 1$$

باز هم حاصل یک عدد فرد است.

در هر دو حالت  $n^2 + 5n - 9$  یک عدد فرد می‌باشد.

(ب) روش اول | برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول | n زوج است. به عبارت دیگر  $n = 2k, (k \in \mathbb{N})$  در این حالت داریم:

$$2n^2 + 6n - 12 = 2(2k)^2 + 6(2k) - 12$$

$$= 8k^2 + 12k - 12 = 2(4k^2 + 6k - 6) = 2k'$$

که حاصل یک عدد زوج است.

حالت دوم | n فرد است. به عبارت دیگر  $n = 2k - 1, (k \in \mathbb{N})$  در این حالت داریم:

$$2n^2 + 6n - 12 = 2(2k-1)^2 + 6(2k-1) - 12$$

$$= 8k^2 - 8k + 2 + 12k - 6 - 12 = 8k^2 + 4k - 16 = 2(4k^2 + 2k - 8) = 2k'$$

باز هم حاصل یک عدد زوج است.

در هر دو حالت  $2n^2 + 6n - 12$  یک عدد زوج می‌باشد.

روش دوم | توجه کنید که به صورت مستقیم هم می‌توانیم اثبات کنیم، برای این کار داریم:

$$2n^2 + 6n - 12 = 2\left(\frac{n^2 + 3n - 6}{k}\right) = 2k \Rightarrow$$

۲۵ | عدد زوج  $n = 2k (k \in \mathbb{Z})$  را در نظر می‌گیریم.

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7$$

$$= 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k' + 1$$

در نتیجه  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

۴۳ | آ | نادرست است. زیرا طبق مثال نقض  $n = 3$  عدد  $2^n + 1 = 2^3 + 1 = 9$  عددی اول نیست.

۴۳ | ب | درست است، عدد  $a = 2k + 1$  را یک عدد فرد در نظر می‌گیریم.  
 $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$   
 $= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 \Rightarrow a^2 = 2k' + 1$   
 مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۴۴ | آ | نادرست است. مثال نقض  $x = 2/1$ ، در فرض صدق می‌کند ولی در حکم صدق نمی‌کند.

۴۴ | ب | درست است، بنابراین با استفاده از اثبات مستقیم، حکم را ثابت می‌کنیم.  
 فرض  $x = \frac{a}{b}$ ،  $y = \frac{c}{d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ،  $b, d \neq 0$ )

$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$   
 صورت و مخرج کسر عددی صحیح است و  $bd \neq 0$  در نتیجه  $x + y$  گویا است.

۴۵ | آ | نادرست است، زیرا اگر  $a = 3$  و  $b = 2$ ، آن‌گاه  $a + b = 5$  عدد اول است.

۴۵ | ب | درست است، زیرا اگر  $x = 2k + 1$  (عدد فرد) باشد که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه:  
 $x(x + 2) = (2k + 1)(2k + 3) = 4k^2 + \underbrace{6k + 2k + 3}_{k}$   
 $= 2(\underbrace{2k^2 + 4k + 1}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$   
 بنابراین  $x(x + 2)$  یک عدد فرد است.

۴۶ | آ | طبق تعریف برهان خلف، در جاهای خالی به ترتیب داریم:  
 نادرست - درست - غیرممکن (متضاد) - نادرست - درستی

۴۷ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات: فرض کنیم که  $a$  یک عدد گویا و  $x$  یک عدد گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $a + x$  یک عدد گنگ است. اگر  $a + x$  گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل  $a + x$  و  $a$  باید عددی گویا باشد، یعنی:

$a + x - a \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$   
 که  $x \in \mathbb{Q}$  با فرض مسأله تناقض دارد و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴۸ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

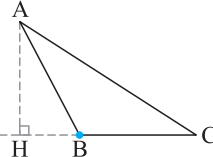
اثبات: فرض کنیم  $a$  یک عدد گویای ناصفر باشد و  $x$  عددی گنگ باشد ولی  $ax$  عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا است. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویا است. بنابراین داریم:

$\frac{1}{a}(ax) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$   
 که با فرض در تناقض است.

۳۱ | اگر مثال نقض را  $y = \sqrt{2}$  و  $x = -\sqrt{2}$  در نظر بگیریم، آن‌گاه:  
 $x + y = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$

$xy = (-\sqrt{2})(\sqrt{2}) = -2 \in \mathbb{Q}$ ،  $\frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \in \mathbb{Q}$

و اگر  $x = 1 + \sqrt{2}$  و  $y = \sqrt{2}$  آن‌گاه  $x - y = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}$

۳۲ | مثال نقض: در مثلث منفرجه‌الزاویه مقابل، ارتفاع  $AH$  خارج مثلث واقع می‌شود:  


۳۳ | نادرست.  $a = 1$  یا  $b = 1$  درست است، زیرا:  
 $(a - 1)(b - 1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$  یا  $b - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$  یا  $b = 1$

پس به عنوان مثال نقض اگر  $a = 1$  و  $b = 4$  باشد، آن‌گاه:  
 $(a - 1)(b - 1) = 0$

۳۴ | مثال نقض  $x = \frac{1}{3}$ ، پس:  
 $\frac{1}{3^2} \geq 3 \Rightarrow \sqrt{3} \geq 3$

۳۵ | مثال نقض  $x = \sqrt{2}$  و  $y = -2\sqrt{2}$ ،  
 $\frac{2x + y}{2x - y} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \frac{0}{4\sqrt{2}} = 0 \in \mathbb{Q}$

۳۶ | با قرار دادن  $n = 41$ ، عدد  $n^2 + n + 41$  بر ۴۱ بخش پذیر است زیرا  $41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$  (مثال نقض)، بنابراین عدد غیراول می‌باشد. (توجه کنید تمام اعداد طبیعی مضرب ۴۱، مثال نقض خواهند بود.)

۳۷ | مثال نقض: اگر  $a = \sqrt{2}$  و  $b = \sqrt{8}$  و  $c = \sqrt{3}$  باشد، آن‌گاه:  
 $abc^3 = (\sqrt{2})(\sqrt{8})(\sqrt{3})^3 = \sqrt{16} \times 3 = 4 \times 3 = 12 \in \mathbb{Q}$

۳۸ | مثال نقض: اگر  $R = \frac{1}{\pi}$  (شعاع دایره) قرار دهیم، آن‌گاه:  
 محیط دایره  $= 2\pi R = 2\pi(\frac{1}{\pi}) = 2 \in \mathbb{Q}$

۳۹ | اگر  $x = \sqrt{2}$  و  $y = -\sqrt{2}$ ، آن‌گاه:  
 $x + y = 0 \in \mathbb{Q}$

۴۰ | اگر  $n = 5$ ، آن‌گاه عدد  $2 + 2 = 3^5 + 2 = 245$  یک عدد مرکب است (۲۴۵ بر ۵ بخش پذیر است).

۴۱ | اگر  $x = 2$  و  $y = 0$ ، آن‌گاه  $xy = 0$  ولی  $x \neq 0$

۴۲ | اگر  $a = c = 2$  و  $b = 1$ ، آن‌گاه  $b\sqrt{ac} = 2\sqrt{2}$  یک عدد گویا است.

۵۷ | درست است، زیرا طبق برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم که  $x = 2$  (فرض خلف).  
 $x^2 + 2y = 10 \xrightarrow{x=2} 2^2 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 4$   
 $\Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$

که با فرض مسئله در تناقض است. فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۵۸ | نادرست است، زیرا طبق اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 < 0$$

به ازای هیچ  $x$  و  $y$  برقرار نیست.  $(x - y)^2 < 0$

۵۹ | نادرست است. زیرا:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ y = 0 \end{cases}$$

پس اعداد صحیح مانند  $x = 0$  و  $y = 2$  وجود دارد که رابطه برقرار است.

۶۰ | ابتدا حکم مسئله را نقیض می‌کنیم. فرض کنیم  $n$  فرد باشد،  
 $n = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$  یک عدد صحیح فرد است (فرض خلف).

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

$n^2$  یک عدد فرد می‌شود که با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۶۱ | ابتدا حکم مسئله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $3 + \sqrt{5}$  گنگ نباشد یعنی  $3 + \sqrt{5}$  گویا است (فرض خلف). پس آن را به صورت کسر گویای زیر در نظر می‌گیریم.

$$3 + \sqrt{5} = \frac{a}{b}, (b \neq 0) \Rightarrow \underbrace{\sqrt{5}}_{\text{گنگ}} = \frac{a}{b} - 3 = \frac{a - 3b}{b} \in \mathbb{Q}$$

به تناقض در یک تساوی رسیدیم، بنابراین فرض خلف باطل و حکم که  $3 + \sqrt{5}$  عدد گنگ است، ثابت می‌شود.

۶۲ | ابتدا حکم مسئله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $h = f - g$  در  $x = a$  پیوسته است (فرض خلف).

$$(f - g)(x) = h(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = h(x) \Rightarrow g(x) = f(x) - h(x)$$

تفاضل دو تابع پیوسته نیز پیوسته است. پس:

$$\underbrace{g(x)}_{\text{در } x=a \text{ ناپیوسته}} = \underbrace{f(x) - h(x)}_{\text{در } x=a \text{ پیوسته}}$$

به تناقض در تساوی رسیدیم بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴۹ | طبق تعریف اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامند.

۵۰ | طبق اثبات بازگشتی، ثابت می‌شود که میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

اثبات: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

پس:

$$\Leftrightarrow a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

این گزاره همیشه درست است.

۵۱ | درست، زیرا ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ می‌باشد.

۵۲ | نادرست، زیرا اگر عدد گویا را صفر در نظر بگیریم در هر عدد گنگ برابر صفر است که یک عدد گویا می‌باشد.

۵۳ | درست، اثبات با استفاده از برهان خلف

۵۴ | نادرست، زیرا به ازای  $a = 1$  و  $b = 2$  برقرار نیست.

۵۵ | آ | درست است، زیرا اگر  $n$  زوج باشد، آن‌گاه  $n^2$  زوج است و اگر  $n^2$  زوج باشد، آن‌گاه  $n$  زوج است.

$$\text{زوج } n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k'$$

در نتیجه  $n^2$  زوج است.

برای اثبات عکس قضیه شرطی یعنی اگر  $n^2$  زوج باشد، آن‌گاه  $n$  زوج است از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

برهان خلف: فرض می‌کنیم که  $n$  زوج نباشد، پس  $n$  فرد است.

$$\text{فرد } n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

با فرض تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. بنابراین زوج بودن  $n$  و زوج بودن  $n^2$  هم‌ارز هستند.

۵۶ | نادرست است. زیرا می‌توانیم برای رد کردن این حکم از مثال نقض استفاده کنیم.

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$$

گویا

$$\alpha - \beta = 1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

ولی