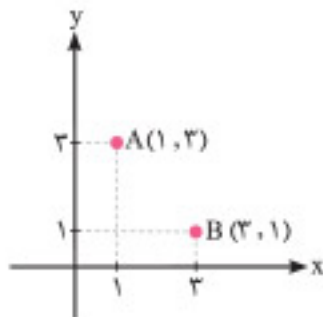


تابع

تابع سال دهم

زوج مرتب



به نماد (a, b) در ریاضی، می‌گوییم زوج مرتب که a عضو اول (مؤلفه اول) و b عضو دوم (مؤلفه دوم) نام دارد. دقت کنید همون طور که از اسم این نماد مشخصه، زوج مرتب (a, b) با (b, a) فرق دارد. اگر a و b دو عدد مختلف باشند، منظور از زوج مرتب (a, b) نقطه‌ای هست که طولش a و عرضش b هست؛ مثلاً زوج‌های $A(1, 3)$ و $B(3, 1)$ رو به صورت مقابل نمایش میدیم: کمی جلوتر می‌بینید که a و b لزوماً عدد نیستند. (موقع تعریف تابع، متوجه میشوید)

مساوی بودن دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) در صورتی با هم مساوی هستن که عضوهای اولشون با هم و عضوهای دومشون هم با هم برابر باشن یعنی:

$$a = c, b = d$$

؟ تست نمونه: دو زوج مرتب $(2x - y, 3)$ و $(9, x + y)$ در صفحه مختصات، نمایش یک نقطه هستند. حاصل xy کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۳) -۴ (۲) -۶ (۴)

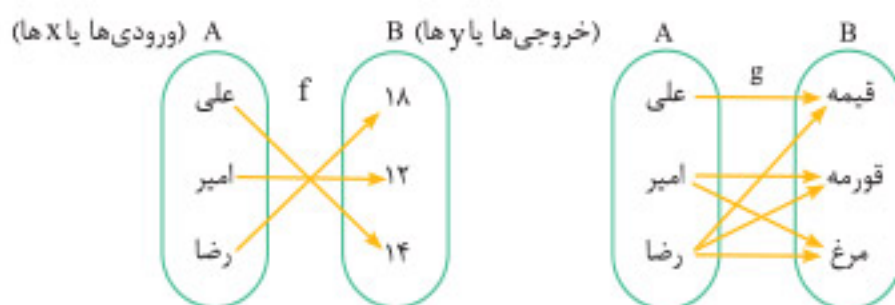
پاسخ: وقتی گفته میشه دو زوج مرتب، فقط یک نقطه رو نمایش میدن به این معنیه که با هم مساوی هستن پس خودمون میایم عضوهای اولشون رو با هم و عضوهای دومشون رو هم با همدیگه مساوی قرار میدیم:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4 \xrightarrow{x+y=3} 4+y=3 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow xy = (4)(-1) = -4$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

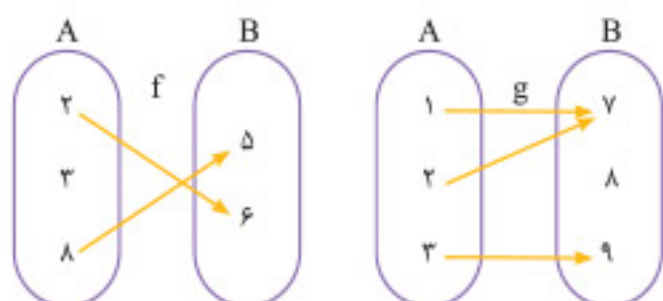
مفهوم تابع



به نمودار مقابل که نمودار پیکانی نام دارد توجه کنید: A : اسامی افراد و B : معدل دیپلم افراد (نمودار مقابل در واقع یک رابطه بین اسامی افراد و معدل دیپلم اون‌ها برقرار میکنه. در واقع A : اسامی افراد از نمودار پیکانی مقابل می‌فهمیم که معدل دیپلم علی برابر ۱۴، B : غذای مورد علاقه معدل دیپلم امیر برابر ۱۲ و معدل دیپلم رضا برابر ۱۸ است. حالا به نمودار پیکانی بعدی که مربوط به رابطه g هست توجه کنید:

به نظرتون فرق این نمودار با نمودار قبلی چیه؟ در نمودار اولی، هر فرد فقط یک معدل دیپلم داشت یعنی از هر عضو A فقط و فقط یک فلش (پیکان) خارج می‌شد ولی در نمودار دوم نفر ممکنه به دو یا سه غذای مختلف علاقه داشته باشه. الان تعریف تابع رو می‌گم بعدش خودتون بگین f تابع بود یا g ؟
تعریف تابع: یک رابطه بین دو مجموعه A و B (اکثر اوقات می‌نویسیم $A \rightarrow B$) یک تابع نامیده میشه هر گاه به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده بشه یا به عبارت ساده‌تر به ازای هر ورودی فقط یک خروجی داشته باشیم یا به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم.
با توجه به این تعریف، نمودار پیکانی f که در ابتدای بحث مثال زدیم تابع است ولی نمودار پیکانی g بیانگر تابع نیست چون در g همون طور که دیدین به هر عضو A فقط یک عضو از B نسبت داده نمیشه (اگه از امیر و رضا هم یک فلش خارج میشد اون وقت g هم تابع بود).

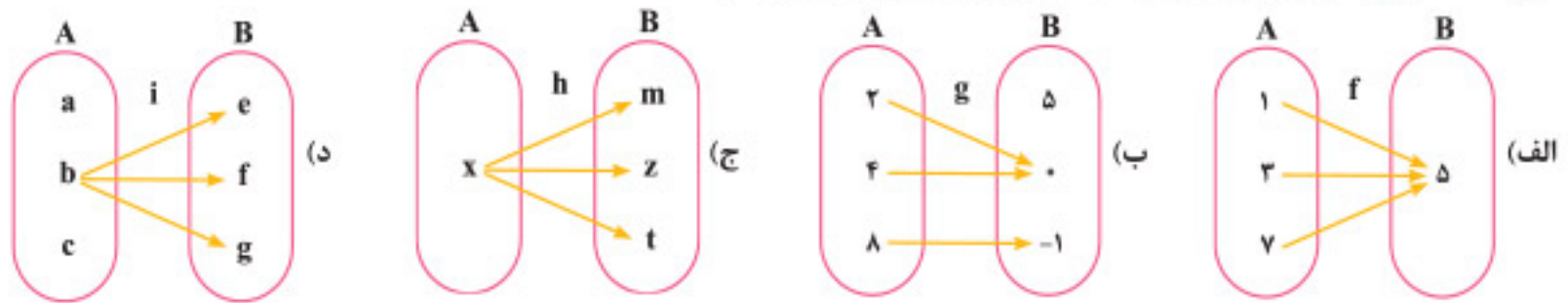
نمایش تابع با نمودار پیکانی



به راز مهم: در نمودار پیکانی مربوط به یک رابطه، اگه عضوی از A وجود داشته باشه که فلشی ازش خارج نشده باشه اون رابطه، تابع نیست ولی اگه به عضوی از مجموعه B فلش وارد نشده هیچ اشکال نداره و تابع بودن اون رابطه رو کنسل نمی‌کنه. ■

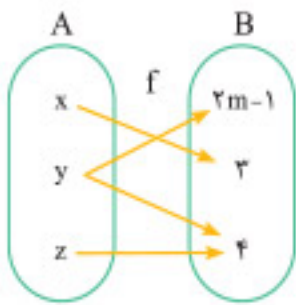
مثال: نمودار f تابع نیست؛ چون فلشی از ۳ خارج نشده. ولی نمودار g تابع است؛ چون از هر عضو A یک فلش خارج شده و ۸ که عضو B است و به اون فلشی وارد نشده مشکلی برای تابع بودن g ایجاد نمی‌کنه.

دست گرمی: تابع بودن یا نبودن نمودارهای پیکانی زیر را بررسی کنید.



پاسخ: f تابع است چون از هر عضو A فقط یک فلش (پیکان) خارج شده، g هم به دلیل مشابه، تابع است. همون طور که گفتیم اشکالی نداره که به عدد 5 در مجموعه B فلشی وارد نشده است. رابطه h تابع نیست چون از عضو x بیش از یک فلش خارج شده است. رابطه i هم که تابع نیست، چون از b بیشتر از یک فلش خارج شده، ضمناً از a و c هم فلشی خارج نشده است.

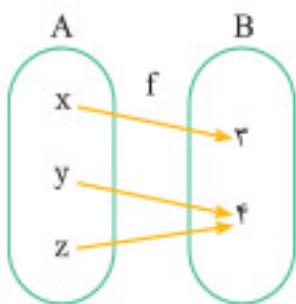
جراحی زیبایی در تابع نمودار پیکانی



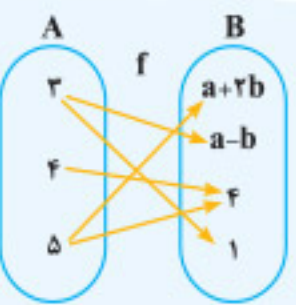
حتماً یادتونه که گفتیم در نمودار پیکانی یک تابع، از هر عضو مجموعه A دقیقاً باید یک فلش خارج بشه ولی گاهی اوقات یک نمودار پیکانی به ما میدن که از یک عضو A دو فلش خارج شده، بعدش میگوین این نمودار بیاتر تابع هست؛ مثل نمودار مقابل: این جاست که دست به کار می‌شیم تا این تابع رو که ظاهرش به تابع نمی‌خوره، جراحی کنیم. البته نوع جراحیمون سرپایی و بدون بیهوشیه!

از y دو تا فلش خارج شده پس باید اعداد انتهایی فلش‌های مربوط به y رو با هم مساوی بنویسیم:

$$y \begin{cases} 2m-1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow 2m-1=4 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$$



با این کار، تابع f برمیگرده به چهرهٔ اصلیش؛ چون دیگه از هیچ عضو A دو تا فلش خارج نمیشه. (از این عمل‌های جراحی، بازم داریم پس آماده باشین) الان اگه در تابع f به جای m عدد $\frac{5}{2}$ رو قرار بدیم این تابع به شکل مقابل تبدیل میشه:



تست نمونه: نمودار پیکانی مقابل بیاتر یک تابع است. حاصل $\frac{a-1}{b+1}$ کدام است؟

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

پاسخ: الان از 3 دو تا فلش خارج شده، درسته؟ خب اگه اعداد انتهایی فلش‌ها با هم برابر بشن در واقع دو تا فلش، میشن بدون فلش. چون دیگه 3 رو به صورت $1 \rightarrow 3$ می‌نویسیم. برای 5 هم، همین قضیه برقراره، یعنی اعداد انتهایی دو فلش خارج شده از 5 رو با هم مساوی می‌نویسیم:

$$3 \begin{cases} a-b \\ 1 \end{cases} \Rightarrow a-b=1 \quad \text{معادله (۱)}$$

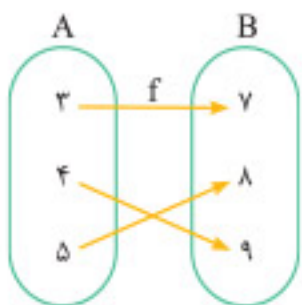
$$5 \begin{cases} a+2b \\ 4 \end{cases} \Rightarrow a+2b=4 \quad \text{معادله (۲)}$$

حالا دستگاه حاصل رو حل می‌کنیم، برای این کار معادله (۱) رو در 2 ضرب می‌کنیم تا بتونیم متغیر b رو حذف کنیم:

$$\begin{cases} 2a - 2b = 2 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+2b=4} 3 + 2b = 4 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-1}{b+1} = \frac{3-1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

بنابراین گزینهٔ 1 درست است.



مقدار تابع در نمودار پیکانی: در نمودار پیکانی مقابل، فلش از 3 به سمت 7 خارج شده، اصطلاحاً می‌گیم مقدار تابع f در

$$f(3) = 7$$

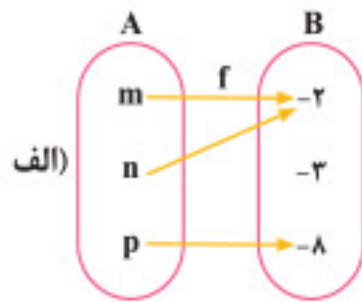
نقطهٔ $x = 3$ برابر 7 است و می‌نویسیم:

به همین ترتیب برای نقاط دیگر مجموعه A داریم: $f(4) = 8$ و $f(5) = 9$

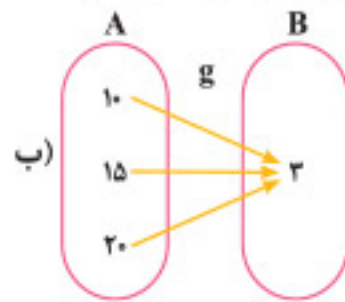
دامنه و برد تابع در نمودار پیکانی: در نمودار پیکانی، کل اعضای مجموعه A دامنه رو تشکیل میدن (دامنه یعنی مقادیر ورودی تابع) ولی بُرد لزوماً کل مجموعه B نیست بلکه زیر مجموعه‌ای از B است یعنی عضوهایی از B که به اون‌ها فلش وارد شده باشه. (بُرد یعنی مقادیر خروجی تابع) مثلاً در نمودار قبلی دامنه و برد عبارتند از:

$$D_f = \{3, 4, 5\} \quad , \quad R_f = \{7, 8, 9\}$$

دست گرمی: دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید و مقادیر خواسته شده را نیز محاسبه کنید.



$$\frac{f(n) + f(m)}{2f(p)} = ?$$



$$4g(10) - 5g(20) = ?$$

دامنه $D_f = \{m, n, p\}$ ، برد $R_f = \{-2, -3, -8\}$

پاسخ: الف) یعنی دامنه تابع f و R_f یعنی برد آن:

ملاحظه می کنید که به عدد -3 در مجموعه B فلشی وارد نشده پس جزء برد محسوب نمیشه ولی دامنه، همیشه با مجموعه A مساویه. حالا میریم سراغ محاسبه کسر خواسته شده:

$$f(n) = -2, f(m) = -2, f(p) = -8 \Rightarrow \frac{f(n) + f(m)}{2f(p)} = \frac{-2 + (-2)}{2(-8)} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$$

دامنه $D_g = \{10, 15, 20\}$ ، برد $R_g = \{3\}$

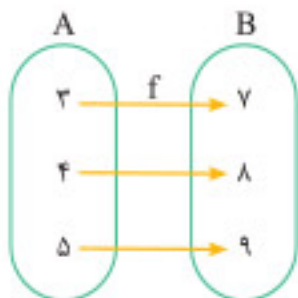
$$g(10) = 3, g(20) = 3 \Rightarrow 4g(10) - 5g(20) = 4(3) - 5(3) = -3$$

(ب)

روش های نمایش تابع: در کل ۶ روش برای نمایش تابع وجود داره که عبارتند از: ۱ نمودار پیکانی ۲ زوج مرتبها ۳ جدول ۴ نمودار هندسی ۵ توصیف فارسی ۶ ضابطه جبری (فرمول)

نمودار ون رو که کامل بررسی کردیم، پس میریم سراغ معرفی بقیه روش ها.

نمایش تابع با زوج مرتبها



$$f = \{(3, 7), (4, 8), (5, 9)\} \Rightarrow \text{تابع است.}$$

نمودار پیکانی مقابل رو به صورت مجموعه ای از زوج مرتبها می نویسیم که عضوی اول زوجها از A و عضوی دومشون از B انتخاب میشن:

واضح است در صورتی تابع داریم که عضوی اول، همگی مختلف باشن یا اگه عضوی اول مساوی بودن، عضوی دوم هم مساوی باشن. مثلاً رابطه $g = \{(1, 2), (7, 8), (6, 3)\}$ تابع نیست چون می دونیم $6^2 = 1$ است. الان در زوجهای $(1, 2)$ و $(1, 3)$ فقط عضوی اول باهم مساوی هستن پس g تابع نیست. در واقع به عدد ۱ از دامنه، دو مقدار ۲ و ۳ از B نسبت داده شده که با تعریف تابع در تضاد است. (در نمایش پیکانی از ۱ دو تا فلش خارج میشه یکی به ۲ و یکی به ۳ پس g تابع نیست.)

تست نمونه: اگر $f = \{(4, 3), (2, 7), (a, 5), (4, a^2 - 1)\}$ بیانگر یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

- فقط ۱ فقط ۲ فقط ۳ هیچ مقداری برای a پیدا نمی شود

پاسخ: در زوجهای $(4, 3)$ و $(4, a^2 - 1)$ عضوی اول برابرند (مختلف نیستن) پس باید کاری کنیم که عضوی دومشون هم مساوی باشن (اگه این اتفاق بیفته در واقع دوتا زوج مرتب $(4, 3)$ و $(4, 3)$ ایجاد میشه که چون تکرارین یکیشون حذف میشه و دیگه تابع خواهیم داشت) در واقع مثل نمودار ون عمل می کنیم:

$$a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} a = \pm 2$$

حالا باید جوابها رو بررسی کنیم، یکبار در f به جای a عدد ۲ و بار دیگه -2 رو قرار میدیم و تابع بودن اون رو بررسی می کنیم:

این دوتا زوج مرتب تکرارین پس یکیشون حذف میشن

$$a = 2 \xrightarrow{\text{در قرار میدیم}} f = \{(4, 3), (2, 7), (2, 5), (4, 3)\} = \{(4, 3), (2, 7), (2, 5)\}$$

این دو تا زوج کار رو خراب کردن چون فقط عضوی اولشون با هم مساوی هستن.

پس $a = 2$ قابل قبول نیست، چون باعث شد که f تابع نشه در صورتی که در متن سؤال، با قاطعیت گفته شده که f تابع است. حالا میریم سراغ $a = -2$:

$$a = -2 \xrightarrow{\text{در قرار میدیم}} f = \{(4, 3), (2, 7), (-2, 5), (4, 3)\} = \{(4, 3), (2, 7), (-2, 5)\}$$

خب خداروشکر، عضوی اول زوج مرتبها، همگی مختلف شدن پس f تابع است و $a = -2$ قابل قبوله. بنابراین گزینه «۲» درست است.

مقدار تابع در حالت زوج مرتبی

در تابع $f = \{(1, 5), (3, 4)\}$ به زوج مرتب $(1, 5)$ دقت کنید. ۱ عضو اول و ۵ عضو دوم است. اصطلاحاً می گیم مقدار تابع f در نقطه $x = 1$ برابر ۵ است و چنین می نویسیم: $f(1) = 5$ به همین ترتیب برای زوج $(3, 4)$ داریم: $f(3) = 4$

دامنه و برد تابع در حالت زوج مرتبی

مجموعه همه عضوی اول زوج مرتبها دامنه و مجموعه همه عضوی دوم اونها برد رو تشکیل میدن.

مثال $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7)\}$ دامنه $D_f = \{1, 2, 3\}$ برد $R_f = \{5, 7\}$

نمایش تابع با جدول

در این روش، ورودی‌ها (xها) در ردیف بالای یک جدول و خروجی‌ها (yها) در ردیف پایین اون قرار می‌گیرند. به جدول‌های مقابل توجه کنید:

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 6 & 10 & 7 & 3 \end{array}$$

$$g: \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 3 & 5 & \sqrt{4} \\ \hline y & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

f تابع است چون تمام xها با هم فرق دارند ولی g تابع نیست چون در ردیف بالا دو تا عدد ۲ داریم که yهاشون با هم برابر نیست. یعنی دو زوج (۲, ۵) و (۲, ۸) داریم که فقط عضوهای اولشون با هم مساوی هستن. (دقیقاً مثل شرط تابع بودن در زوج مرتب عمل کردیم).

تست نمونه: اگر جدول مقابل یک تابع باشد، مقدار a.b کدام است؟

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & (\frac{1}{2})^{-1} & \sqrt{9} \\ \hline y & 6 & a-b & 2 & 1 & a+b \end{array}$$

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

پاسخ: اولاً می‌دونیم که: $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$ و $\sqrt{9} = 3$ پس در ردیف بالا هم ۲ها تکرار شدن و هم ۳ها. بنابراین yهای مربوط به xهای تکراری رو با هم مساوی قرار میدیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \begin{cases} a-b \\ 1 \end{cases} \Rightarrow a-b=1 \\ 3 \begin{cases} 2 \\ a+b \end{cases} \Rightarrow a+b=2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه (خودتون بلدین دیگه)}} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

مقدار تابع در حالت جدولی

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

در جدول مقابل مقدار تابع به ازای $x = 1$ برابر $y = 7$ است. پس می‌توان گفت: $f(1) = 7$.

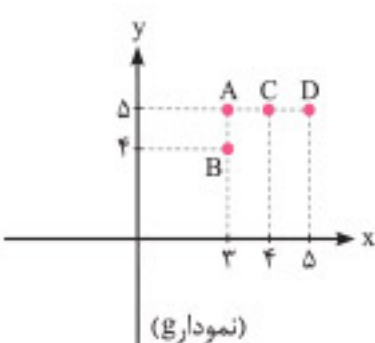
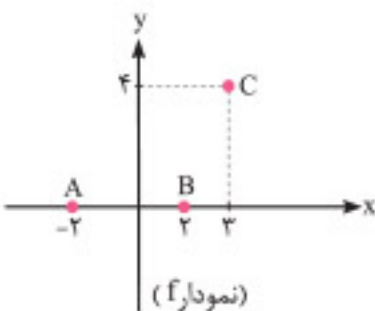
به همین ترتیب برای سایر نقاط جدول داریم:

$$f(2) = 8, \quad f(3) = 9, \quad f(4) = 10.$$

دامنه و برد تابع در حالت جدولی

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R_f = \{7, 8, 9, 10\}$$

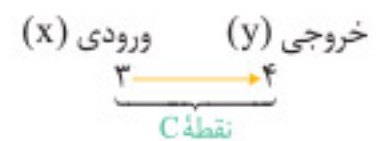
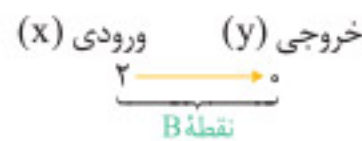
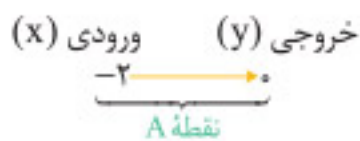
اعداد ردیف بالای جدول، دامنه و اعداد ردیف پایین، برد تابع رو نشون میدن در مثال بالا داریم:



نمایش تابع با نمودار هندسی

قطعاً می‌دونین که هر زوج مرتب به شکل (a, b) که در اون a و b دو عدد باشن در صفحه مختصات، یک نقطه رو نمایش میده. (طول a و عرض b نقطه است.) حالا فرض کنیم مثل شکل مقابل، تعدادی از این نقطه‌ها رو داشته باشیم:

الان f تابع است چون به ازای هر x از دامنه، فقط یک y وجود داره:

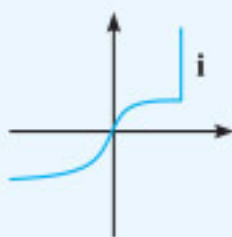


ولی نمودار g تابع نیست چون به ازای ورودی $x = 3$ دو تا خروجی $y = 5$ و $y = 4$ وجود داره:

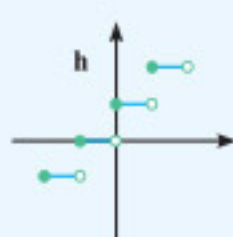
شرط تابع بودن یک نمودار هندسی

در نمودار هندسی یک رابطه، اگه بتونیم خطی عمودی (موازی محور yها) رسم کنیم که نمودار رو در بیشتر از یک نقطه (۲ نقطه یا بیشتر) قطع کنه، اون نمودار تابع نیست. در واقع هیچ دو نقطه‌ای (نقطه توپر) نباید زیر هم باشن (الان در نمودار g نقاط توپر A و B زیر هم هستن به همین علت گفتیم g تابع نیست اگه A یا B یا جفتشون تو خالی بودن، g تابع بود).

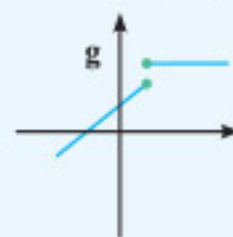
تست نمونه: چند تا از نمودارهای زیر، تابع هستن؟



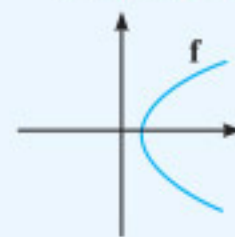
۱ (۴)



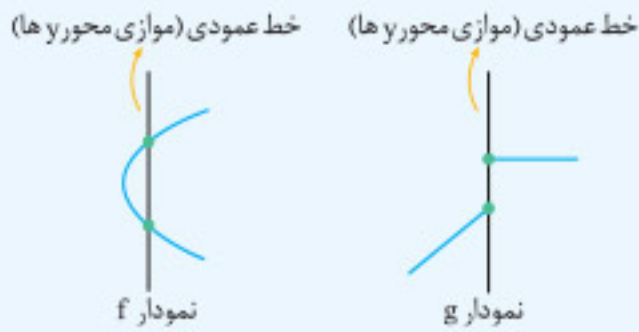
۲ (۳)



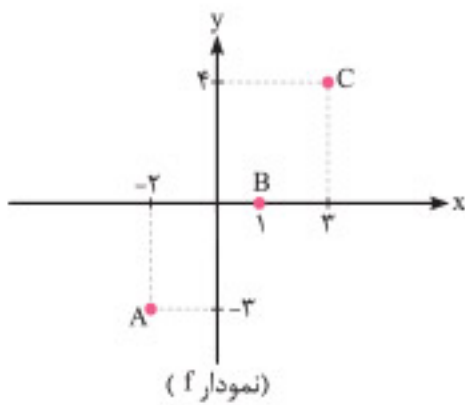
۳ (۲)



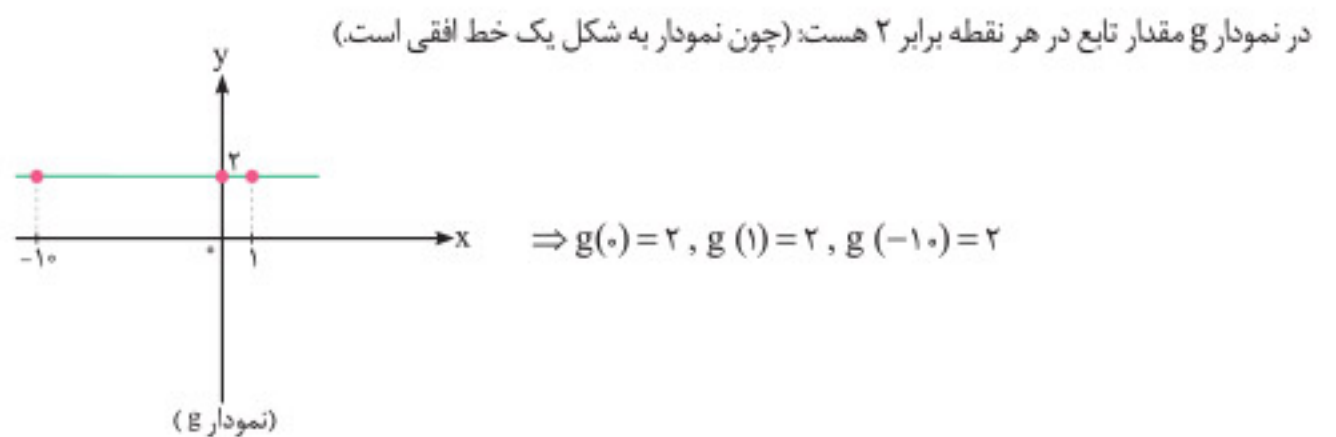
۴ (۱)



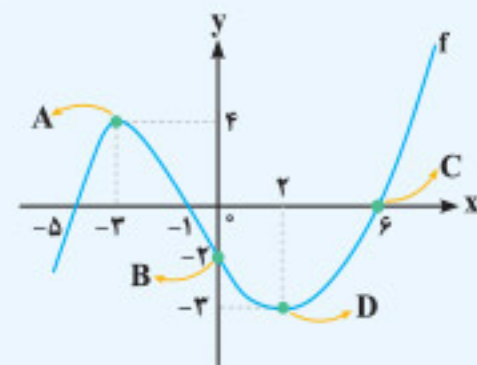
پاسخ: f تابع نیست چون همیشه خطی عمودی رسم کرد که نمودار رو در ۲ نقطه قطع کنه. g هم تابع نیست چون باز هم اون خط عمودی رو همیشه رسم کرد. نمودار h هم تابع نیست چون قسمتی از نمودار، خودش به شکل خط عمودیه و در نهایت اینکه h تابع است چون هیچ دو نقطه توپری زیر هم نیستن در واقع هیچ خط عمودی همیشه رسم کرد که نمودار رو در ۲ نقطه یا بیشتر قطع کنه. دقت کنید که نقطه توخالی، به این معناست که اون نقطه، متعلق به تابع نیست؛ پس فقط اگه ۲ یا چند نقطه توپری، زیر هم باشن، می‌گیم تابع نداریم. بنابراین گزینه «۴» درست است.



مقدار تابع در حالت هندسی: در شکل مقابل، طول نقطه A برابر -2 و عرض اون -3 است. اصطلاحاً می‌گیم مقدار تابع f در نقطه $x = -2$ برابر -3 است و این طوری می‌نویسیم: $f(-2) = -3$ به همین ترتیب برای نقاط B و C داریم: $f(1) = 0$ و $f(3) = 4$



در نمودار g مقدار تابع در هر نقطه برابر ۲ هست؛ (چون نمودار به شکل یک خط افقی است).



تست نمونه: با توجه به شکل مقابل، مقدار $\frac{3f(-3) + f(0)}{2f(6) - f(2)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{3}$
- (۲) $\frac{7}{3}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

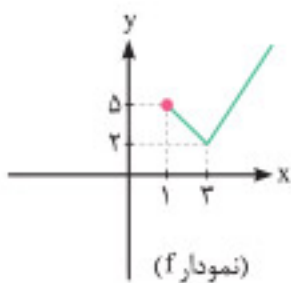
پاسخ: بچه‌های عزیز، نقاط خواسته شده در متن سؤال رو با A, B, C, D نمایش داده‌ایم (البته توی کنکور این اسامی رو نمیدن).

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ نقطه} \Rightarrow f(-3) = 4 \\ B \text{ نقطه} \Rightarrow f(0) = -2 \\ C \text{ نقطه} \Rightarrow f(6) = 0 \\ D \text{ نقطه} \Rightarrow f(2) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3f(-3) + f(0)}{2f(6) - f(2)} = \frac{3(4) + (-2)}{2(0) - (-3)} = \frac{10}{3}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

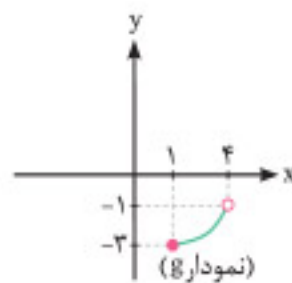
دامنه و برد تابع در حالت هندسی: اگه نمودار هندسی یک تابع داده بشه، طول تمام نقاط، دامنه و عرض اون‌ها برد رو تشکیل میدن. به عنوان مثال

دامنه و برد توابع زیر رو از روی شکل تعیین می‌کنیم:



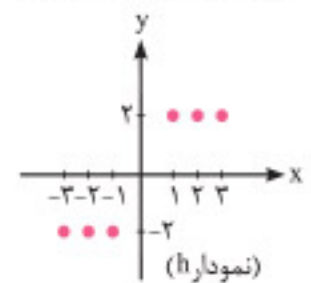
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$$



$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$$

$$R_g = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y < -1\}$$

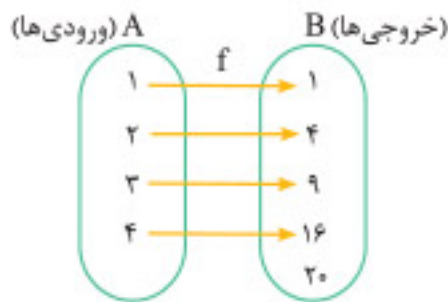


$$D_h = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$R_h = \{-2, 2\}$$

البته مجموعه‌ای مثل $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ رو معمولاً به‌طور خلاصه این‌جوری می‌نویسن: $\{x \geq 1\}$ ، یعنی $x \in \mathbb{R}$ رو نمی‌نویسن، شما باید بدونید منظور از $x \geq 1$ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ هست.

نمایش تابع با ضابطه جبری



$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 4, 9, 16, 20\}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{یا} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f(x) = x^2$$

در این حالت، رابطه بین x ها و y ها با یک فرمول ریاضی نشون داده میشه. به تابع مقابل دقت کنید: با کمی دقت متوجه میشیم که هر عضو A به توان ۲ میرسه و عضو B مربوطه به دست میاد، پس ضابطه یا فرمول این تابع به صورت $y = x^2$ یا $f(x) = x^2$ است. البته ضابطه، بدون دامنه به درد نمی‌خوره. برای همین تابع f رو باید به شکل کامل و به صورت مقابل نمایش بدیم: در این مدل نمایش تابع، A همیشه همون دامنه تابع است ولی B لزوماً برد تابع نیست (ولی زیرمجموعه B است). الان هم ملاحظه می‌کنید که برد تابع $\{1, 4, 9, 16\}$ است که با B برابر نبود. تابع f رو به صورت‌های مقابل هم میشه نمایش بدیم (یعنی اکثر وقتا سمت راست فلش \mathbb{R} رو می‌نویسن).

مقدار تابع در حالت داشتن ضابطه

اگر ضابطه تابع به ما داده بشه و مقدار تابع در نقطه‌ای مثل $x = a$ خواسته بشه کافیست به جای تمام x های تابع، عدد a رو قرار بدیم. مثلاً با فرض $f(x) = x^2 - 2x + 1$ برای یافتن مقدار تابع در $x = -3$ داریم:

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

مقدار تابع f در $x = -3$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

حالا فرض کنید حاصل $f(3-x)$ خواسته بشه در این صورت در تابع f هر جا x دیدیم به جاش باید $(3-x)$ رو قرار بدیم:

$$f(3-x) = (3-x)^2 - 2(3-x) + 1 = 9 - 6x + x^2 - 6 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

اتحاد دوم

راز مهم: اگه در یک سؤال، عبارتی مثل $f(f(a))$ خواسته شد ابتدا $f(a)$ رو حساب می‌کنیم (پرانتر داخلی). فرض می‌کنیم جواب $f(a)$ برابر L شد، حالا میایم و $f(L)$ رو حساب می‌کنیم. در مورد عبارتهای $f(g(a))$ ، $g(f(a))$ و $g(g(a))$ هم به همین شکل عمل می‌کنیم؛ مثلاً در تابع $f(x) = 4x - 1$ مقدار $f(f(2))$ رو می‌خوایم حساب کنیم، پس اول $f(2)$ رو پیدا می‌کنیم:

$$f(2) = 4(2) - 1 = 7 \Rightarrow f(f(2)) = f(7) = 4(7) - 1 = 27$$

تست نمونه: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ و $g(x) = |x - 3|$ باشند، حاصل $\frac{2f(4) - g(5)}{f(g(1))}$ کدام است؟

۱) $8\sqrt{13}$ ۲) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ:

$$f(4) = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$g(5) = |5 - 3| = |2| = 2$$

$$g(1) = |1 - 3| = |-2| = 2 \Rightarrow f(g(1)) = f(2) = \sqrt{2^2 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \frac{2f(4) - g(5)}{f(g(1))} = \frac{2(5) - 2}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

بنابراین گزینه ۲، درست است.

محاسبه مقدار تابع وقتی به جای $f(x)$ عبارت $f(\square)$ به ما داده شود

طراحان انقدرها هم مهربون نیستن که همیشه به شما $f(x)$ رو بدن و بگن مثلاً $f(6)$ رو حساب کن و بعدش شما بیایی به جای تمام x ها 6 بذاری! این عزیزان، گاهی نقشه‌های خطرناکی براتون میکشن که ما در این کتاب، نقشه‌های شومشون رو خنثی می‌کنیم. فرض کنید به جای $f(x)$ به ما $f(2x - 1)$ رو بدن و بگن $f(6)$ رو حساب کن. ما اول میایم $2x - 1$ رو مساوی 6 قرار میدیم تا x به دست بیاد:

$$2x - 1 = 6 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

حالا در رابطه‌ای که به ما داده میشه به جای x ها عدد $\frac{7}{2}$ رو قرار میدیم. به تست زیر توجه کنید:

تست نمونه: با فرض آنکه $f(4x + 3) = x^2 - 6x + 1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

پاسخ:

$$4x + 3 = 7 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$f(4x + 3) = x^2 - 6x + 1 \xrightarrow{x=1} f(7) = 1^2 - 6(1) + 1 = -4$$

بنابراین گزینه ۱، درست است.

حل یک مسئله مهم در آزمون‌های آزمایشی

فرض کنید رابطه $f(x) = 2f(1) + x^2 - 6x$ به شما داده بشه و بگن مقدار $f(2)$ چقدره؟ الان اگه به جای x ها عدد 2 رو قرار بدیم به رابطه $f(2) = 2f(1) + 2^2 - 6(2)$ می‌رسیم که دو تا مجهول داره، یعنی هم $f(1)$ و هم $f(2)$ مجهول هستن، پس بهتره اول بیایم همون $f(1)$ موجود در رابطه رو به دست بیاریم لذا به x ها عدد 1 رو میدیم:

$$f(x) = f(1) + x^2 - 6x \xrightarrow{x=1} f(1) = 2f(1) + 1^2 - 6(1) \Rightarrow f(1) - 2f(1) = -5 \Rightarrow -f(1) = -5 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$f(x) = 2(5) + x^2 - 6x \xrightarrow{x=2} f(2) = 10 + 2^2 - 6(2) = 10 + 4 - 12 = 2$$

حالا این مقدار $f(1)$ رو در رابطه اصلی قرار میدیم:

دامنه و برد در حالت داشتن ضابطه

در به سری از سوالات، دامنه رو میدن و از ما برد رو میخوان و به وقتام برعکسه یعنی برد رو میدن و دامنه رو میخوان. کلاً کلمه دامنه رو دیدین یاد X بیفتین و کلمه برد رو هم دیدین یاد Y بیاد توی ذهنتون. بعدش با به جای گذاری ساده، به جواب می‌رسیم. البته وقتی دامنه خواسته میشه معمولاً میگوین بزرگ‌ترین مجموعه ممکن برای دامنه چیه که در تست‌های زیر، متوجه این طرز بیان میشین.

دست گرمی: اگر تابع f به صورت مقابل تعریف شود، برد آن را به دست آورید.

$$\begin{cases} f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 1 \end{cases}, A = \{-1, 0, \sqrt{2}, 3\}$$

x	f(x)
-1	$f(-1) = (-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
0	$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$
3	$f(3) = 3^2 + 1 = 27 + 1 = 28$

$$\Rightarrow f_{\text{برد}} = \{0, 1, 3, 28\}$$

پاسخ: دامنه تابع به ما داده شده (مجموعه A) پس اعضای اون رو تک‌تک به جای X در ضابطه f قرار میدیم تا اعضای برد به دست بیان:

تست نمونه: ۱. اگر $f(x) = x^2 - 3$ و برد تابع f به صورت $\{0, 1\}$ باشد، بزرگ‌ترین مجموعه برای دامنه f کدام مجموعه می‌تواند باشد؟

(۱) $\{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$
 (۲) $\{\pm\sqrt{3}\}$
 (۳) $\{\pm 2\}$
 (۴) $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$

پاسخ: این بار برد تابع داده شده یعنی مقادیر Y رو داریم، پس یکبار به جای $f(x)$ عدد ۰ و بار دیگه عدد ۱ رو قرار میدیم ($f(x)$ همه‌جا همون Y است):

$$y = x^2 - 3 \xrightarrow{y=0} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{3}$$

$$y = x^2 - 3 \xrightarrow{y=1} x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

بنابراین گزینه «۱» درست است. \Rightarrow وسیع‌ترین دامنه $= \{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$

۲. اگر $f(x) = x^2 - mx + n$ باشد و روابط $f(0) = 1$ و $f(-1) = 2$ برقرار باشند، حاصل $m \times n$ کدام است؟

(۱) ۲
 (۲) -۱
 (۳) ۱
 (۴) صفر

پاسخ: از رابطه $f(0) = 1$ نتیجه می‌گیریم که: $y = 1$ و $x = 0$ از رابطه $f(-1) = 2$ هم می‌فهمیم که: $y = 2$ و $x = -1$

$$\left. \begin{aligned} y = x^2 - mx + n \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=1}} 1 = 0^2 - m(0) + n \Rightarrow n = 1 \\ y = x^2 - mx + n \xrightarrow{\substack{x=-1 \\ y=2}} 2 = (-1)^2 - m(-1) + 1 \Rightarrow 2 = 1 + m + 1 \Rightarrow m = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m \times n = 0 \times 1 = 0$$

حالا این X و Y ها رو در ضابطه f قرار میدیم:
 بنابراین گزینه «۴» درست است.

نمایش تابع با توصیف کلامی

در این روش، با یک جمله فارسی، یک رابطه بین ورودی و خروجی بیان میشه. آگه به ازای هر ورودی فقط یک خروجی داشتیم، می‌گیم تابع داریم مثلاً توصیف فارسی «رابطه f به هر شخص، تاریخ تولدش را نسبت می‌دهد» یک تابع هست چون هر شخص (x) فقط یک تاریخ تولد (y) داره. ولی توصیف فارسی «رابطه g به هر استان، نام شهرستان‌هایش را نسبت می‌دهد» تابع نیست چون هر استان (x) شامل چندین شهرستان (y) است.

تست نمونه: تابع f به هر عدد طبیعی که به آن وارد شود مجموع خودش و نصف مربعش را نسبت می‌دهد. ضابطه f کدام است؟

(۱) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 (۲) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$
 (۳) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 (۴) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

پاسخ: اگر ورودی تابع رو x فرض کنیم، نصف مربع x برابر همیشه با $\frac{x^2}{2}$ پس مجموع خود x با نصف مربع x برابر است با: $f(x) = x + \frac{x^2}{2}$ الان فقط باید دامنه f رو تعیین کنیم، در متن سؤال گفته شده « f به هر عدد طبیعی» پس دامنه برابر \mathbb{N} است، بنابراین گزینه «۳» درست است.

به دست آوردن تعداد توابع از مجموعه A به B

گاهی اوقات دو مجموعه A و B به ما داده میشن و گفته میشه چند تابع میشه از A به B یا از B به A ساخت. آگه مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشه در این صورت از A به B ($A \rightarrow B$) به تعداد n^m تابع مختلف میشه تشکیل داد و از B به A ($B \rightarrow A$) به تعداد m^n تابع ساخته میشه. مثلاً آگه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{5, 6\}$ باشن از A به B میشه 2^3 تابع (یعنی ۸ تابع) و از B به A (یعنی ۹ تابع) میشه 3^2 ساخت.

تست نمونه: از مجموعه $A = \{1, 1, 1, 4, 7, 8, 8, 9, 10\}$ به مجموعه $B = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ چند تابع مختلف می‌توان ساخت؟

(۱) ۳۲
 (۲) ۶۴
 (۳) ۳^۹
 (۴) ۹^۳

پاسخ: می‌دونیم تکرار در مجموعه‌ها بی‌تأثیره پس باید مجموعه‌های A و B رو به شکل زیر نوشت:

$$A = \{1, 4, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow 6 \text{ عضو داره}$$

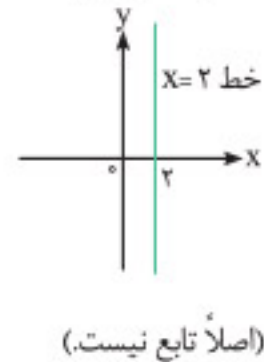
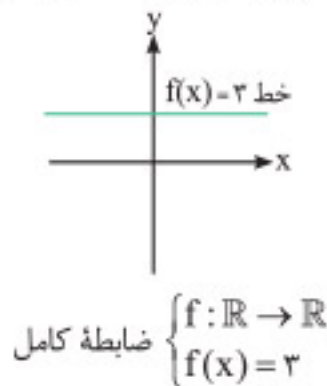
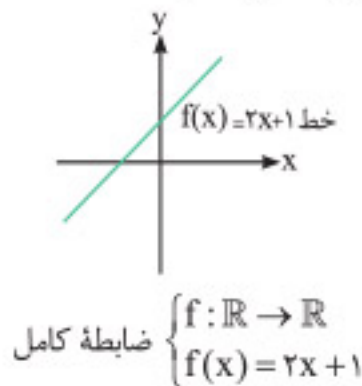
$$B = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\} \Rightarrow 2 \text{ عضو داره}$$

$$B \text{ به } A \Rightarrow 2^6 = 64 = \text{تعداد توابع از } A \text{ به } B$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

تابع خطی (تابع درجه اول)

شما قبلاً معادله درجه یک رو یاد گرفتین، حالا می‌خواهیم تابع درجه یک یا همون تابع خطی رو بررسی کنیم. خوب همون‌طور که از اسمش معلومه نمودار این تابع به شکل یک خطه. البته نه هر خطی. این خط فقط می‌تونه افقی یا مایل باشه چون اگه خطی عمودی باشه اصلاً تابع محسوب نمیشه:



جراحی زیبایی تابع خطی

ممکنه یک فرمول به شما بدن که ظاهراً خطی نیست ولی یکن این تابع، خطی است. در این جور مسائل باید توجه کنیم که تابع خطی، فقط شامل x^1 است و بقیه x ها باید به قول معروف، ناکاوت بشن، مثلاً اگه تابع $f(x) = (k-2)x^2 + 5x$ خطی باشه x^2 باید نابود بشه پس ضریبش رو مساوی صفر قرار می‌دیم: $k-2=0 \Rightarrow k=2$

تست نمونه: تابع $g(x) = (m^2 - 4)x^3 - (3m - 6)x^2 - x + 4m$ خطی است. حاصل $g(m)$ کدام است؟

 ۸ (۴)

 ۶ (۳)

 ۴ (۲)

 ۲ (۱)

پاسخ: جملات شامل x^2 و x^3 باید تشریف ببرن خونه‌شون پس باهاشون خداحافظی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} m = \pm 2 \\ 3m - 6 = 0 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جوابها}} m = 2$$

$$g(x) = -x + 4m = -x + 4(2) = -x + 8 \Rightarrow g(m) = g(2) = -2 + 8 = 6$$

بنابراین گزینه ۳ درست است.

نوشتن ضابطه توابع خطی

در اکثر مسائل و سؤالات کنکور، لازمه که معادله یه خط رو به‌دست بیاریم. با توجه به اطلاعات متن سؤال، دو حالت وجود خواهد داشت:

حالت اول: اگه شیب خط و یک نقطه از خط مثل $A(x_1, y_1)$ به ما داده شد، معادله خط از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ به‌دست میاد.

مثلاً معادله خطی با شیب -2 که از نقطه $A(1, 4)$ می‌گذره برابر هست با:

حالت دوم: اگه فقط دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شد، اول باید شیب رو از فرمول $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به‌دست بیاریم بعدش از فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ استفاده می‌کنیم. البته می‌تونیم از فرمول $y - y_2 = m(x - x_2)$ هم استفاده کنیم. (در هر دو به یک معادله خط می‌رسیم.)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 7}{-1 - 2} = \frac{-3}{-3} = 1$$

مثلاً معادله خط گذرنده از نقاط $A(-1, 4)$ و $B(2, 7)$ رو به دست میاریم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 5$$

تذکره: در حالت دوم می‌تونیم به‌جای محاسبه شیب و معادله خط، فرمول $y = mx + n$ رو برای خط در نظر بگیریم و نقاط A و B رو در اون قرار بدیم تا m و n به‌دست بیان. در همین مثال که حل کردیم خواهیم داشت:

$$y = mx + n \xrightarrow{A(-1, 4)} 4 = m(-1) + n \Rightarrow -m + n = 4$$

$$y = mx + n \xrightarrow{B(2, 7)} 7 = m(2) + n \Rightarrow 2m + n = 7$$

حالا دستگاه حاصل رو حل کرده و به جواب‌های $m = 1$ و $n = 5$ می‌رسیم پس معادله خط $y = 1x + 5$ می‌باشد. ■

دست گرمی: تابع f از نقطه $(1, 4)$ گذشته و رابطه $f(-2) = 6$ برقرار است. ضابطه f و سپس حاصل $f(10)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: درواقع دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(-2, 6)$ به ما داده شده‌اند، ابتدا شیب رو پیدا می‌کنیم:

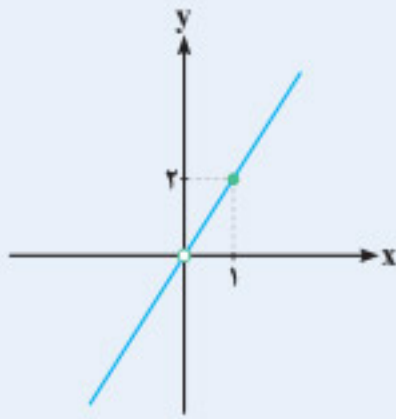
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 4}{-2 - 1} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{معادله خط: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \xrightarrow{\text{همون } f \text{ است}} f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow f(10) = -\frac{2}{3}(10) + \frac{14}{3} = \frac{-20}{3} + \frac{14}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

حالا به‌جای x عدد 10 رو قرار میدیم تا $f(10)$ به‌دست بیاد:



۳. اگر $f(x) = x^2$ و نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

$g(x) = \frac{x^2}{2}$ (۲)

$g(x) = \frac{x}{2}$ (۱)

$g(x) = 2x^2$ (۴)

$g(x) = 2x$ (۳)

پاسخ: نمودار $\frac{f}{g}$ به ما داده شده که به کمک دو نقطه از اون، معادله اش رو به دست میاریم:

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x \xrightarrow[\text{همون } y \text{ است } \frac{f}{g}]{\text{طرفین وسطین}} (\frac{f}{g})(x) = 2x \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{f(x)=x^2} \frac{x^2}{g(x)} = 2x \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{\text{طرفین وسطین}} 2xg(x) = x^2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

★ حواستون باشه: الان در نمودار داده شده، مبدأ جزء نمودار نیست (تو خالیه) ولی برای محاسبه شیب خط و معادله خط، همیشه ازش استفاده کرد

و مشکلی پیش نمیاد. در واقع باید ازش استفاده کرد چون فقط داشتن نقطه $B(1, 2)$ برای محاسبه شیب و معادله خط، کافی نیست. ■

📌 تذکر: چون $g(0) = \frac{0}{2} = 0$ هست، پس در تابع $(\frac{f}{g})(x)$ مقدار $x = 0$ در دامنه نیست، به همین علت نقطه $(0, 0)$ تو خالی رسم شده است. البته شما

الان قرار نیست کاری کنید فقط اینو گفتم که بدونید. ■

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

روش‌های مختلف نمایش تابع

تساوی دو زوج مرتب

۲۴۴. اگر زوج‌های مرتب $(a-b, 13)$ و $(2, 2a+b)$ با هم برابر باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۳ (۴)

۸ (۳)

صفر (۲)

۵ (۱)

۲۴۵. می‌خواهیم سه زوج مرتب $(n-2, 3m)$, $(m-1, 6)$, $(-4, 6)$ را به دو زوج مرتب تبدیل کنیم، حاصل $m+n$ کدام است؟ $(m, n \in \mathbb{N})$

۵ (۴)

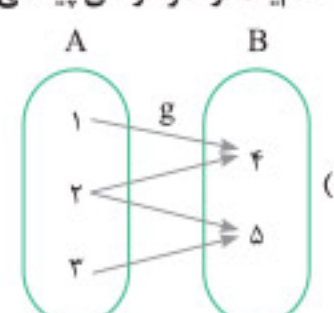
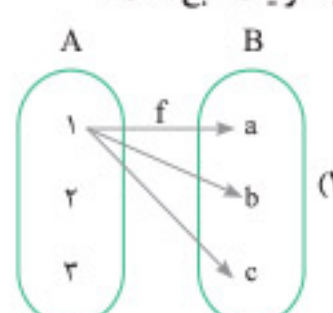
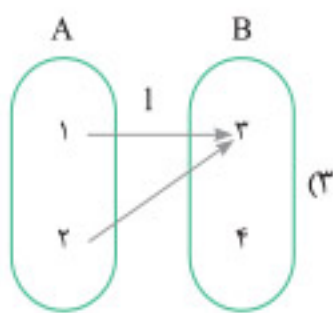
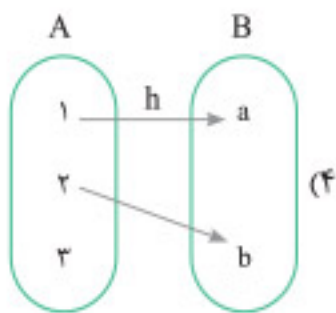
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تابع به شکل نمودار پیکانی

۲۴۶. کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر، بیانگر یک تابع است؟



۲۴۷. اگر نمودار پیکانی مقابل، مربوط به یک تابع باشد، حاصل $n+m$ کدام است؟

صفر (۱)

-۴ (۲)

۴ (۳)

هیچ وقت تابع نیست. (۴)

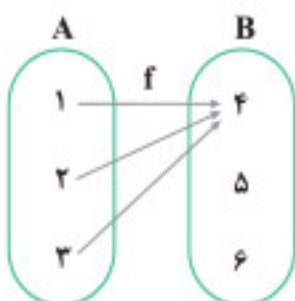
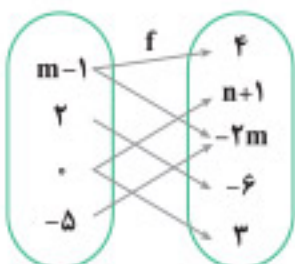
۲۴۸. با توجه به نمودار پیکانی (نمودار ون) مقابل، دامنه و برد کدام است؟

$R_f = \{4, 5, 6\}, D_f = \{1, 2, 3\}$ (۱)

$R_f = \{4\}, D_f = \{1, 2, 3\}$ (۲)

$R_f = \{1, 2, 3\}, D_f = \{4, 5, 6\}$ (۳)

$R_f = \{1, 2, 3\}, D_f = \{4\}$ (۴)



تابع به شکل زوج مرتب

۲۴۹. کدام یک از مجموعه‌های (رابطه‌ها) زیر، بیانگر یک تابع نیست؟

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (1, 4)\} \quad (1)$$

$$g = \{(1, 4), (2, 5)\} \quad (2)$$

$$h = \{(1, 2), (3, 5), (1, 2)\} \quad (3)$$

$$i = \{(1, 2)\} \quad (4)$$

۲۵۰. با توجه به تابع $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 7), (5, 5)\}$ دامنه و برد کدام است؟

$$R_f = \{1, 2, 3, 5\}, D_f = \{2, 4, 7\} \quad (1)$$

$$R_f = \{3, 5, 7\}, D_f = \{1, 2, 4\} \quad (2)$$

$$R_f = \{1, 2, 4\}, D_f = \{3, 5, 7\} \quad (3)$$

$$R_f = \{2, 4, 5, 7\}, D_f = \{1, 2, 3, 5\} \quad (4)$$

۲۵۱. اگر مجموعه $f = \{(1, 2a-5), (1, 1-a), (\frac{a}{4}, b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

$$-1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۲۵۲. به ازای کدام مقدار m ، رابطه $R = \{(2, m^2), (2, 1), (-4, m), (1, m+2), (m, 5)\}$ یک تابع است؟

$$-1 \quad (1) \quad \pm 2 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad \pm 1 \quad (4)$$

(سراسری ۱۴۰۱)

۲۵۳. اگر $f = \{(1, x-2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^2 + y^2$ چند برابر $-x - 4y$ است؟

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

(دی ۱۴۰۱)

۲۵۴. رابطه $f = \{(a, x+y), (b, m^2), (a, m^2-1), (b, x-y), (a, 4)\}$ یک تابع است. مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

$$2/5 \quad (1) \quad 20/5 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 42 \quad (4)$$

۲۵۵. به ازای کدام مقدار m ، رابطه $\{(1, m^2), (3, m^2), (4, 9)\}$ یک تابع است؟

$$1 \quad (1) \quad \pm 2 \quad (2) \quad \text{فقط } 3 \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

(سراسری ۹۸)

۲۵۶. اگر رابطه $\{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

۲۵۷. به ازای چند مقدار حقیقی برای a ، رابطه $f = \{(1, 3a^2), (a+1, 1), (-1, 1-\sqrt{3}a), (a^2-3, 2), (1, a^2)\}$ یک تابع است؟

$$3 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

(سراسری ۱۴۰۰)

۲۵۸. فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2) | a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد. تعداد عناصر f ، کدام است؟

$$8 \quad (1) \quad 9 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۲۵۹. در تابع $f = \{(2, 5), (3, 1), (4, 2), (1, 4)\}$ مقدار $2f(1) - f(2)$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۲۶۰. با توجه به رابطه $f = \{(1, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ زیرمجموعه‌ای از آن که به صورت یک تابع با برد $\{2, 1\}$ باشد، دارای چه دامنه‌ای است؟

$$\{2, 3\} \quad (1) \quad \{1, 3\} \quad (2) \quad \{1, 1\} \quad (3) \quad \{1, 2\} \quad (4)$$

۲۶۱. اگر در تابع $f = \{(1, a-1), (2, 3), (b+2, 7)\}$ ، $D_f = \{1, 2, 5\}$ و $R_f = \{3, 7, -1\}$ باشد، $2a+b$ کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

۲۶۲. اگر مجموع اعضای برد تابع $f = \{(a-2, a+1), (2a+1, a^2), (a^2-3, 1-2a)\}$ برابر با ۴ باشد، مجموع اعضای دامنه کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad -8 \quad (2) \quad -5 \quad (3) \quad 10 \quad (4)$$

۲۶۳. اگر $f = \{(2, x-y), (2, -3), (4x+y, -3)\}$ تابعی باشد که دامنه آن فقط یک عضو داشته باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$$-5 \quad (1) \quad -\frac{1}{5} \quad (2) \quad -14 \quad (3) \quad -\frac{1}{14} \quad (4)$$

تابع به شکل جدول

۲۶۴. در تابع مقابل x متغیر مستقل و y متغیر وابسته می‌باشد. مقدار $m-n$ کدام است؟

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 0 & -1 & 2\sqrt{2} & -1^3 & \sqrt{8} \\ y & 6 & m-n & n-2m & 2m & 4 \end{array}$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad -\frac{8}{3} \quad (3) \quad \frac{8}{3} \quad (4)$$

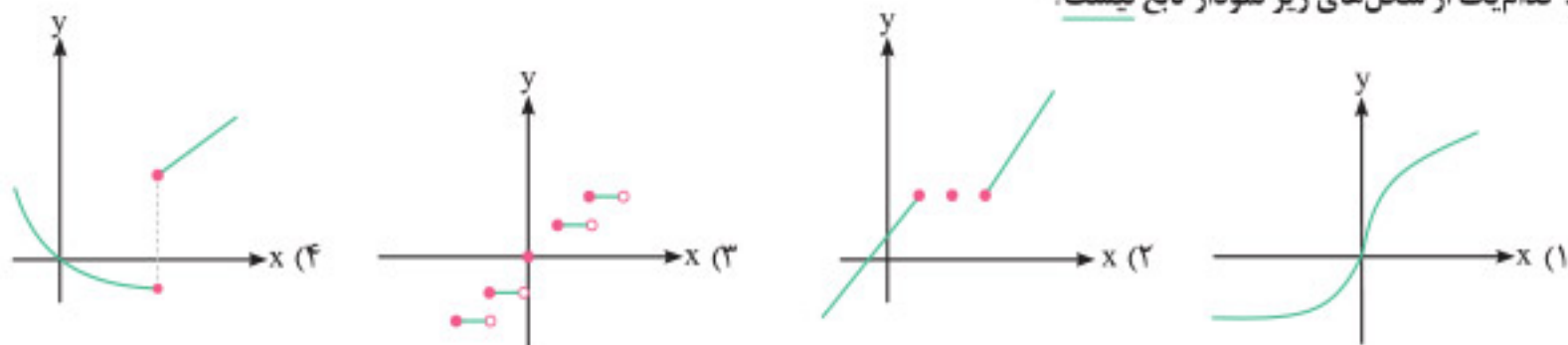
۲۶۵. در جدول مقابل به جای a یا b یا c چه عددی قرار دهیم تا g تابع نباشد؟

$$g: \begin{array}{c|cccc} x & -3 & (-2)^2 & -1 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ y & 4 & 9 & c & a^3 & 5 & a^2 & 7b \end{array}$$

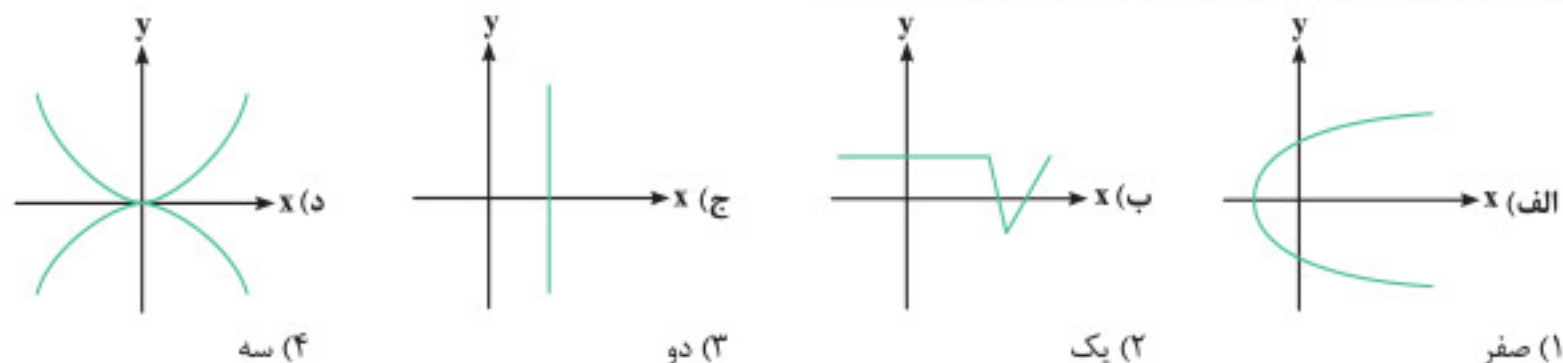
$$a=2 \quad (1) \quad b=\frac{4}{7} \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad \text{به ازای هر مقدار } a, \text{ رابطه } g \text{ تابع است.} \quad (4)$$

تابع به شکل نمودار هندسی

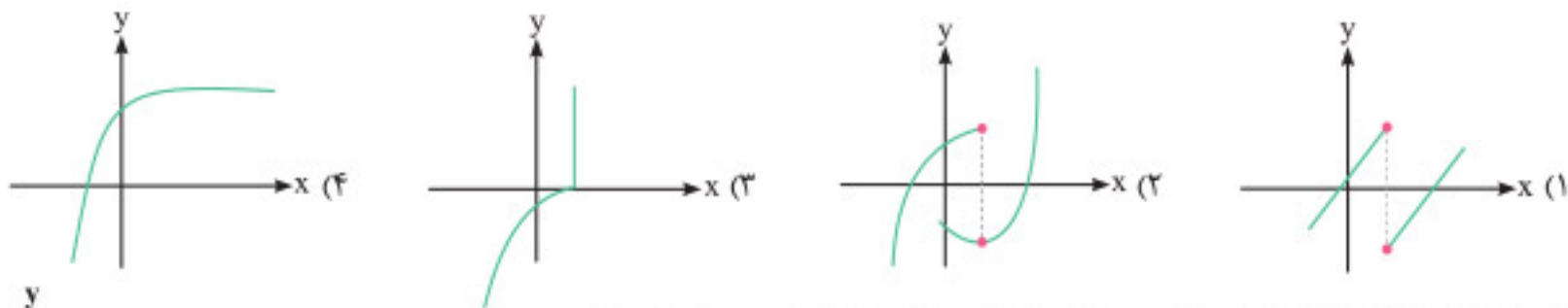
۲۶۶. کدام یک از شکل‌های زیر نمودار تابع نیست؟



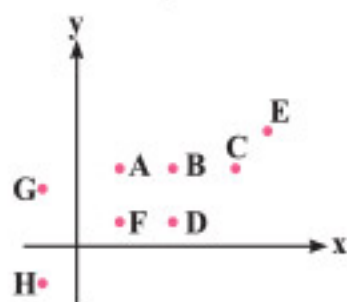
۲۶۷. چه تعداد از نمودارهای زیر تابع هستند؟ (x متغیر مستقل است.)



۲۶۸. کدام نمودار نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟ (x متغیر مستقل است.)

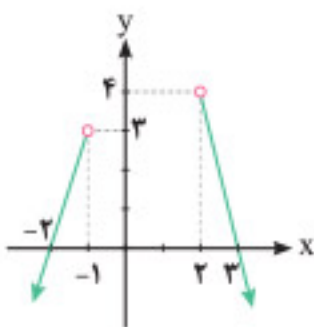


۲۶۹. با حذف کدام نقطه‌ها از نمودار مقابل، می‌توان یک تابع ساخت؟ (x متغیر مستقل است.)



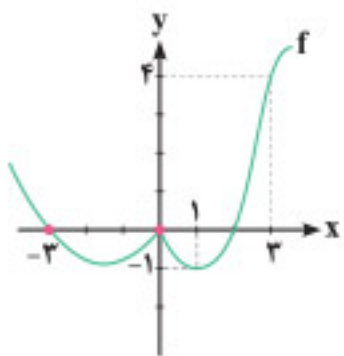
- (۱) A, B, C
- (۲) G و F, B
- (۳) E و F, D
- (۴) H و E, A

۲۷۰. با اضافه کردن کدام گزینه زیر به نمودار مقابل، تابع بودن آن، منتفی نمی‌شود؟



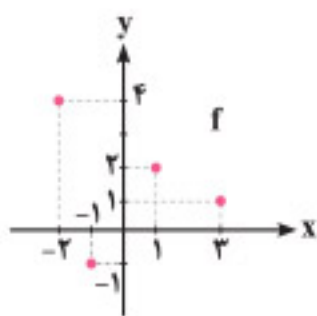
- (۱) نقطه $A(3, 4)$
- (۲) نقطه $B(-\frac{3}{2}, 0)$
- (۳) پاره‌خط به معادله $y = 3$ با دامنه $-1 \leq x \leq 2$
- (۴) پاره‌خط به معادله $y = 4$ با دامنه $-2 < x < 3$

۲۷۱. با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f(-3) - f(1) + f(3) + f(0)$ کدام است؟



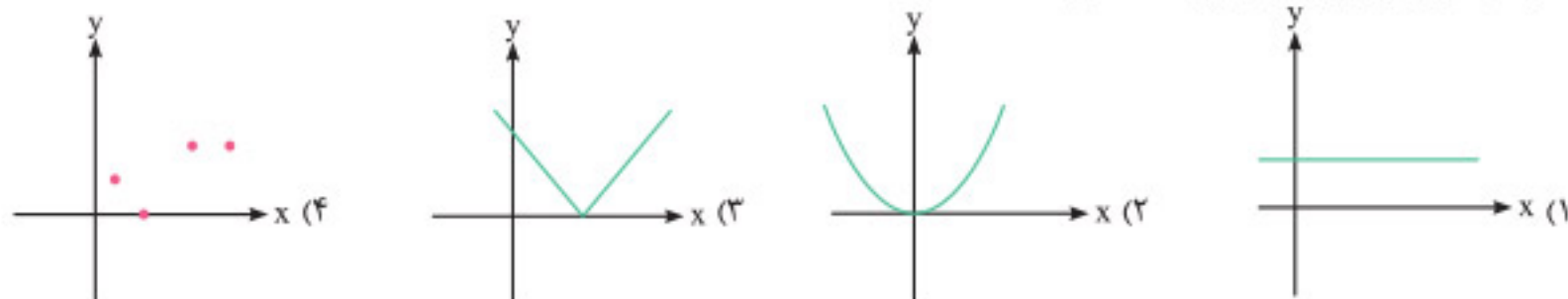
- (۱) ۲
- (۲) ۵
- (۳) ۳
- (۴) -۳

۲۷۲. با توجه به نمودار تابع، کدام یک از گزینه‌های زیر، دامنه و برد آن را نشان می‌دهد؟

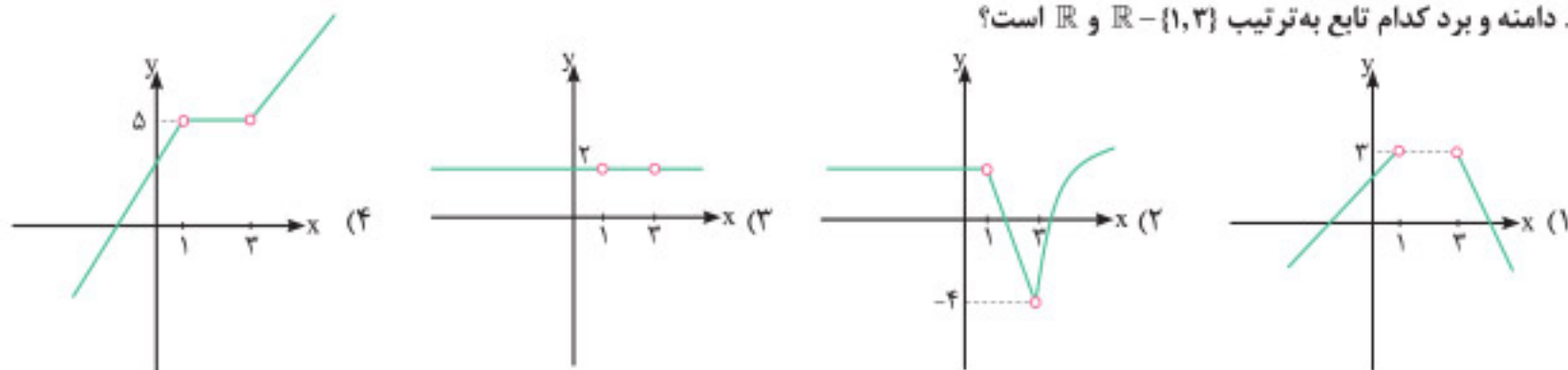


- (۱) $R_f = \{-2, -1, 1, 3\}, D_f = \{-1, 1, 2, 4\}$
- (۲) $R_f = \{-1, 1, 2, 4\}, D_f = \{-2, -1, 1, 3\}$
- (۳) $R_f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- (۴) $R_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

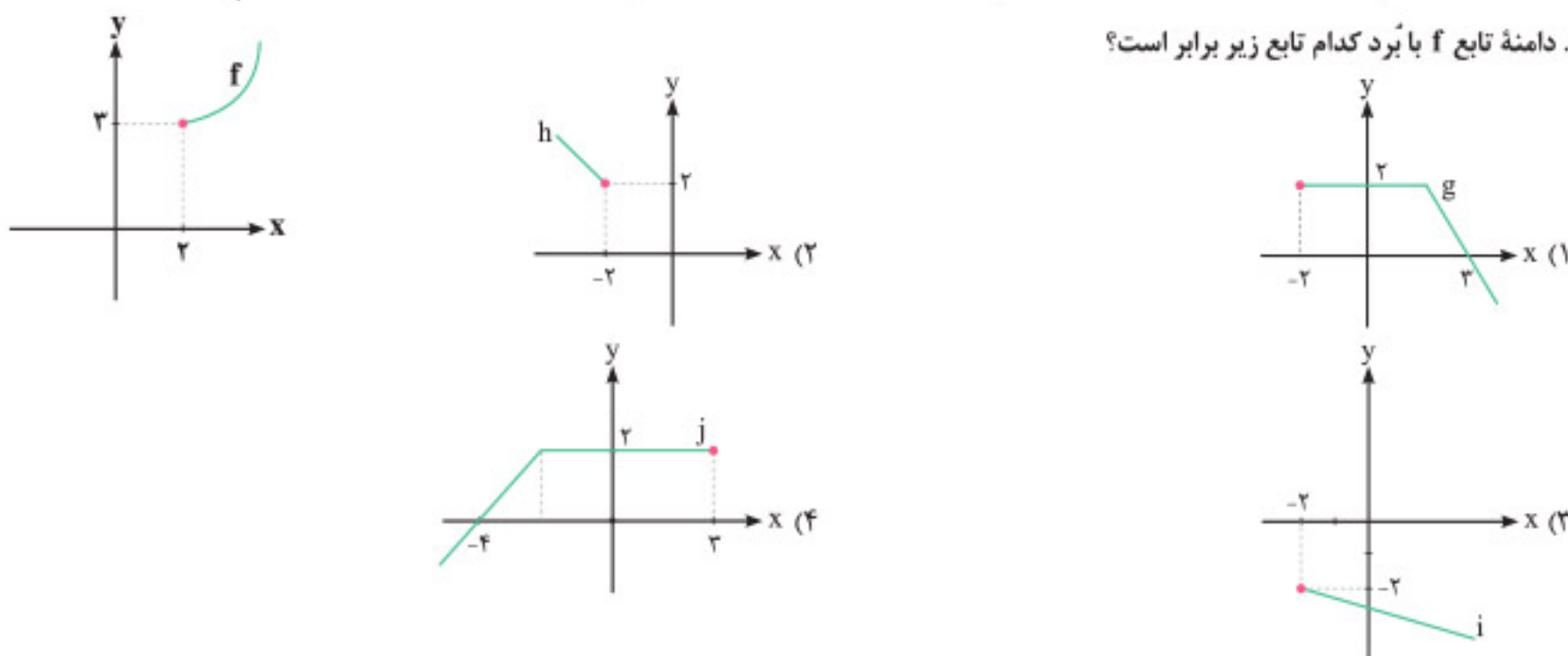
۲۷۳. در نمودارهای زیر، برد کدام تابع تک‌عضوی است؟



۲۷۴. دامنه و برد کدام تابع به ترتیب $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ و \mathbb{R} است؟



۲۷۵. دامنه تابع f با برد کدام تابع زیر برابر است؟



تابع به شکل ضابطه و توصیف کلامی

۲۷۶. ضابطه تابع جدول مقابل، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۲	۵	۱۰	۱۷

$y = x^2 + 1$ (۲)

$y = 2x^2 + 1$ (۴)

$y = x + 1$ (۱)

$y = 2x + 1$ (۳)

۲۷۷. تابع f به هر عدد حقیقی، سه برابر مجموع آن عدد و مربعش را نسبت می‌دهد. ضابطه f کدام است؟

$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = 3x + x^2 \end{cases}$ (۴)

$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2(x + x^2) \end{cases}$ (۳)

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2(x + x^2) \end{cases}$ (۲)

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + x^2 \end{cases}$ (۱)

۲۷۸. کدام توصیف کلامی، برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3}$ مناسب است؟

(۱) تابع f به هر عدد طبیعی، جذر ثلث تفاضل آن عدد از یک را نسبت می‌دهد.

(۲) تابع f به هر عدد طبیعی، ثلث جذر تفاضل آن عدد از یک را نسبت می‌دهد.

(۳) تابع f به هر عدد طبیعی، جذر ثلث تفاضل عدد ۱ از آن عدد را نسبت می‌دهد.

(۴) تابع f به هر عدد طبیعی، ثلث جذر تفاضل عدد ۱ از آن عدد را نسبت می‌دهد.

۲۷۹. در یک سری از مستطیل‌ها، طول از ۳ برابر عرض، ۴ واحد بیشتر است. اگر طول را با x نمایش دهیم تابع f که مساحت این مستطیل‌ها را بر حسب طول

آن‌ها بیان می‌کند کدام است؟ (\mathbb{R}^+ یعنی اعداد حقیقی مثبت)

$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x}{3} \end{cases}$ (۴)

$\begin{cases} f: \{x > 4\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x}{3} \end{cases}$ (۳)

$\begin{cases} f: \{x > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 4x \end{cases}$ (۲)

$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = x^2 - 4x \end{cases}$ (۱)





۲۸۰. ماشین f هر عدد حقیقی که به آن وارد شود را به توان ۲ رسانده و سپس ۵ برابر x را از جواب کم می کند. با توجه به شکل مقابل، مجموع مقادیر قابل قبول برای x کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶

(خارج ۹۲)

۲۸۱. اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x + 2}$ باشند، مقدار $f(\frac{1}{4}) + g(\frac{1}{4})$ چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۲۸۲. کدام گزینه می تواند ضابطه تابع $f = \{(1, 3), (2, -4), (3, 9), (4, -8)\}$ باشد؟

- (۱) $f(x) = 3x$
(۲) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{اعداد طبیعی فرد} \\ -2x & \text{اعداد طبیعی زوج} \end{cases}$
(۳) $f(x) = -2x$
(۴) $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x > 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$

(سراسری ۹۷)

۲۸۳. اگر $f(x) = \sqrt{|2x - 5|}$ باشد، مقدار $f(-2) + 2f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

(خارج ۹۷)

۲۸۴. اگر $f(x) = x\sqrt{2+|x|}$ باشد، مقدار $f(2) + 4f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

۲۸۵. اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax + 1$ از نقطه $(2, 3)$ عبور کند، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۱
(۳) ۵
(۴) -۱

۲۸۶. در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ ، تساوی های $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ برقرار است. مقدار b کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) ۱

(سراسری ۹۵)

۲۸۷. اگر $f(x) = |2x - 5|$ باشد، مقدار $f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $4\sqrt{2} - 4$
(۳) ۳
(۴) $2\sqrt{2} + 2$

(سراسری ۹۲)

۲۸۸. در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ ، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲۸۹. عبارت ذکر شده در کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می تواند داشته باشد.
(۲) دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می تواند داشته باشد.
(۳) در رابطه $h(x) = |x^2 - 3x|$ متغیر x متغیر وابسته و $h(x)$ متغیر مستقل است.
(۴) برد یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می تواند داشته باشد.

۲۹۰. با توجه به تابع $f(x) = 2x - 1$ ، اگر $R_f = \{1, 3, 5\}$ باشد، دامنه تابع کدام خواهد بود؟

- (۱) $D_f = \{1, 3, 5\}$
(۲) $D_f = \{-1, -3, -5\}$
(۳) $D_f = \{1, 2, 3\}$
(۴) $D_f = \{-1, -2, -3\}$

۲۹۱. اگر برد تابع $f(x) = x^2 - 5x + 1$ برابر $R_f = \{1\}$ باشد، تابع f به صورت زوج مرتب کدام می تواند باشد؟

- (۱) $f = \{(0, 1), (4, 1)\}$
(۲) $f = \{(4, 1)\}$
(۳) $f = \{(0, 1), (5, 1)\}$
(۴) $f = \{(1, 1), (5, 1)\}$

۲۹۲. با توجه به تابع $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ و $A = \{0, -1, 8, 3\}$ ، برد تابع f کدام است؟

- (۱) $R_f = \{0, 1, -2, -1\}$
(۲) $R_f = \{0, -1, 2, 1\}$
(۳) $R_f = \{0, 1, 2\}$
(۴) $R_f = \{0, -1, -2\}$

۲۹۳. در تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ اگر $f(a) = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط -۳
(۲) فقط ۱
(۳) ۱ و -۳
(۴) ۳

۲۹۴. اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x}$ چهارعضوی و برد آن $\{0, 1\}$ باشد، مجموع عضوهای دامنه کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) صفر
(۴) ۱

۲۹۵. کدام یک از رابطه های زیر، تابع نیست؟

- (۱) رابطه بین هر مسلمان و قبله او
(۲) رابطه بین هر فرد و شماره ملی او
(۳) رابطه بین مساحت هر مربع و ضلع آن
(۴) رابطه بین هر شهر و سوغاتی آن شهر

۲۹۶. کدام گزینه بیانگر یک تابع نیست؟

- (۱) رابطه ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.
(۲) رابطه ای که به هر فرد، نام خانوادگی اش را نسبت می دهد.
(۳) رابطه ای که به هر شخص، نام والدین او را نسبت می دهد.
(۴) رابطه ای که به هر شخص، رنگ پوستش را نسبت می دهد.

خطوط عمود و خطوط موازی

۳۲۶. خط $2y = -4x + 3$ با کدام خط زیر موازی است؟

$$y = -x \quad (۴) \quad 2x + y = 10 \quad (۳) \quad 3x - 4y = 5 \quad (۲) \quad x + y = 2 \quad (۱)$$

۳۲۷. معادله خطی که نمودار آن از نقطه $A(2, 6)$ گذشته و با خط $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ موازی باشد کدام است؟

$$y = 6 + x \quad (۴) \quad y = 6 - x \quad (۳) \quad y = 8 + x \quad (۲) \quad y = 8 - x \quad (۱)$$

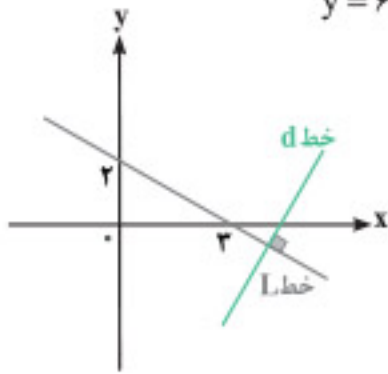
۳۲۸. با توجه به شکل داده شده، شیب خط d کدام است؟

$$4/5 \quad (۱)$$

$$3/5 \quad (۲)$$

$$2/5 \quad (۳)$$

$$1/5 \quad (۴)$$



تلاقی خط و محورهای مختصات - تلاقی دو خط با هم

۳۲۹. نمودار تابع خطی $f(x) = (3k - 1)x + 2m$ از نقطه $(3, -2)$ عبور کرده و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. مقدار $3k + m$ کدام است؟

$$7 \quad (۴) \quad -\frac{3}{2} \quad (۳) \quad -\frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{3}{2} \quad (۱)$$

۳۳۰. خط d از نقطه $A(-2, 4)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $2x + y = 5$ و $3y - x + 6 = 0$ گذشته است. شیب خط d کدام است؟ (سراسری ۹۷)

$$2 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad -2 \quad (۱)$$

۳۳۱. خط به معادله $\frac{y - 3x}{5} - \frac{x}{2} = 3$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر مبدأ مختصات را O بنامیم، مساحت مثلث OAB کدام است؟

$$\frac{45}{11} \quad (۴) \quad \frac{17}{3} \quad (۳) \quad \frac{31}{5} \quad (۲) \quad \frac{11}{7} \quad (۱)$$

۳۳۲. تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد. اگر $f(2) = 2a - 1$ و $f(1 - a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲)

$$8 \quad (۴) \quad 11 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 5 \quad (۱)$$

کاربرد توابع خطی در حل مسائل توصیفی

۳۳۳. رابطه بین ارتفاع از سطح زمین (x) و دما (y) رابطه‌ای خطی است. در سطح زمین دما برابر ۲۴ درجه سانتی‌گراد و در ارتفاع ۲۰۰۰ متری از سطح دریا

دما برابر ۴ درجه است. دما در ارتفاع ۱۴۰۰ متری از سطح دریا چند درجه سانتی‌گراد است؟

$$14 \quad (۴) \quad 12 \quad (۳) \quad 10 \quad (۲) \quad 8 \quad (۱)$$

۳۳۴. وقتی هیچ وزنه‌ای به یک فنر آویزان نباشد، طول آن ۳۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱ کیلوگرم وزنه‌ای که به آن متصل شود، ۳ سانتی‌متر به طول فنر اضافه

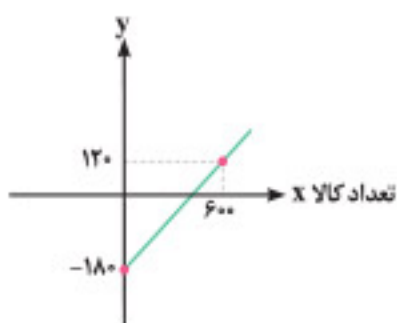
می‌شود. با فرض آنکه f طول فنر بر حسب سانتی‌متر و x مقدار وزنه بر حسب کیلوگرم باشد، مقدار $\frac{f(h) - f(h+1)}{h}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{h} \quad (۴) \quad \frac{2}{h} \quad (۳) \quad -\frac{3}{h} \quad (۲) \quad \frac{3}{h} \quad (۱)$$

۳۳۵. نمودار تابع مقابل، نمودار سود یک کارخانه بر حسب تعداد کالا می‌باشد. با تولید چه تعداد کالا، سوددهی

(مشابه تمرین کتاب درسی)

شروع می‌شود؟



$$358 \quad (۱)$$

$$359 \quad (۲)$$

$$360 \quad (۳)$$

$$361 \quad (۴)$$

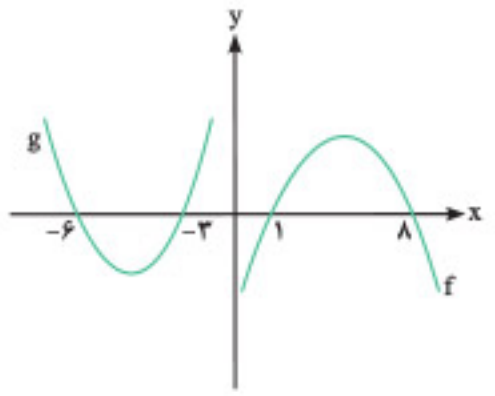
۳۳۶. رابطه بین دما بر حسب سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم ۳۰ درجه سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن

بر حسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

$$64 \quad (۴) \quad 54 \quad (۳) \quad 40 \quad (۲) \quad 30 \quad (۱)$$

۳۳۷. اگر به سه برابر دمای جسمی بر حسب سانتی‌گراد (C) ، ۲۰ واحد اضافه شود، دمای آن بر حسب فارنهایت (F) به دست می‌آید، درجه حرارت این جسمچند درجه سانتی‌گراد است؟ $(F = 1/8C + 32)$

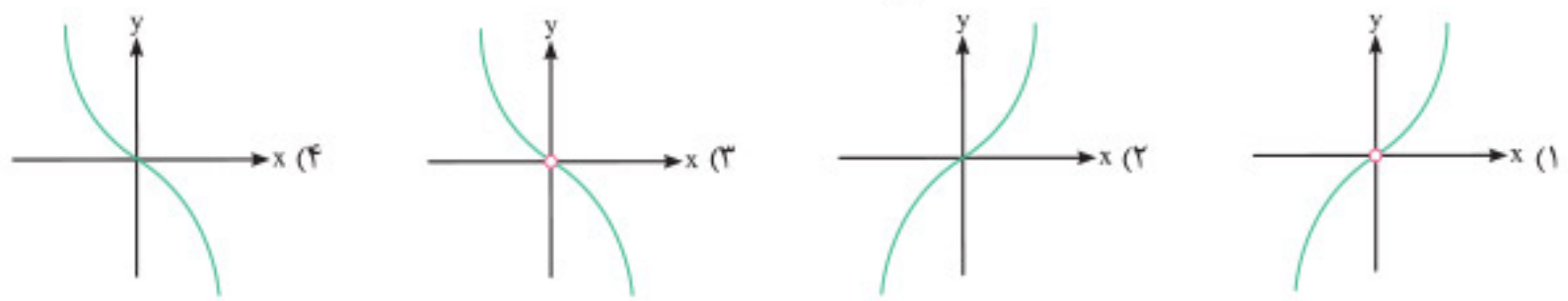
$$35 \quad (۴) \quad 10 \quad (۳) \quad 25 \quad (۲) \quad 20 \quad (۱)$$



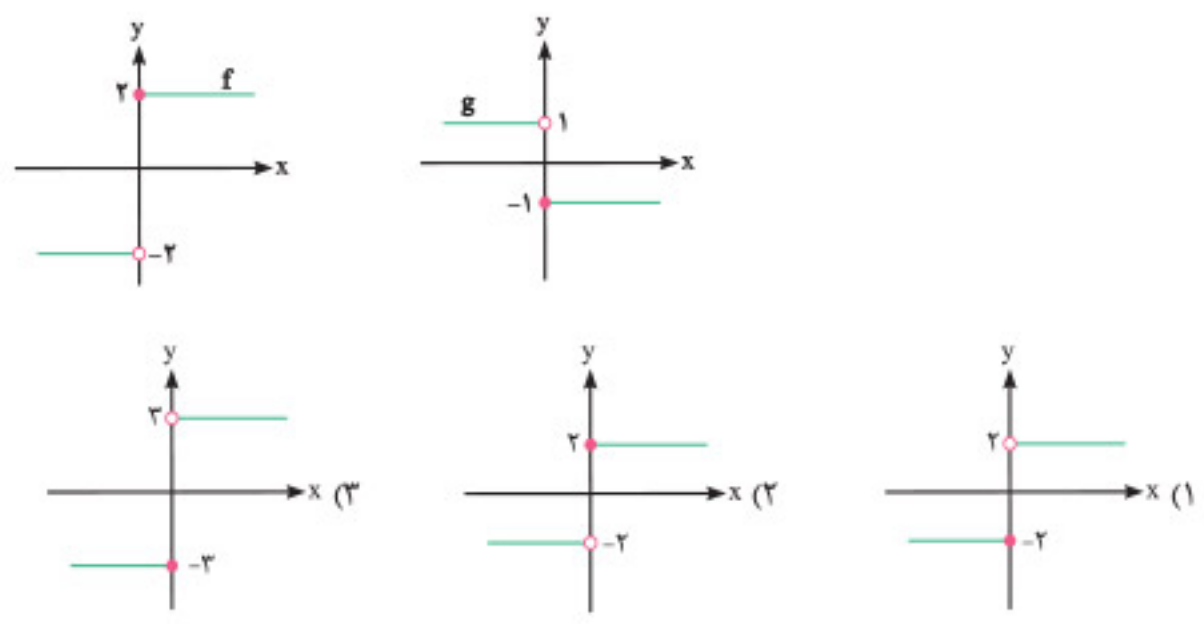
۵۵۲. با توجه به شکل روبه‌رو، دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R}
- (۲) $\mathbb{R} - \{1, 8\}$
- (۳) $\mathbb{R} - \{-3, -6\}$
- (۴) $\mathbb{R} = \{-6, -3, 1, 8\}$

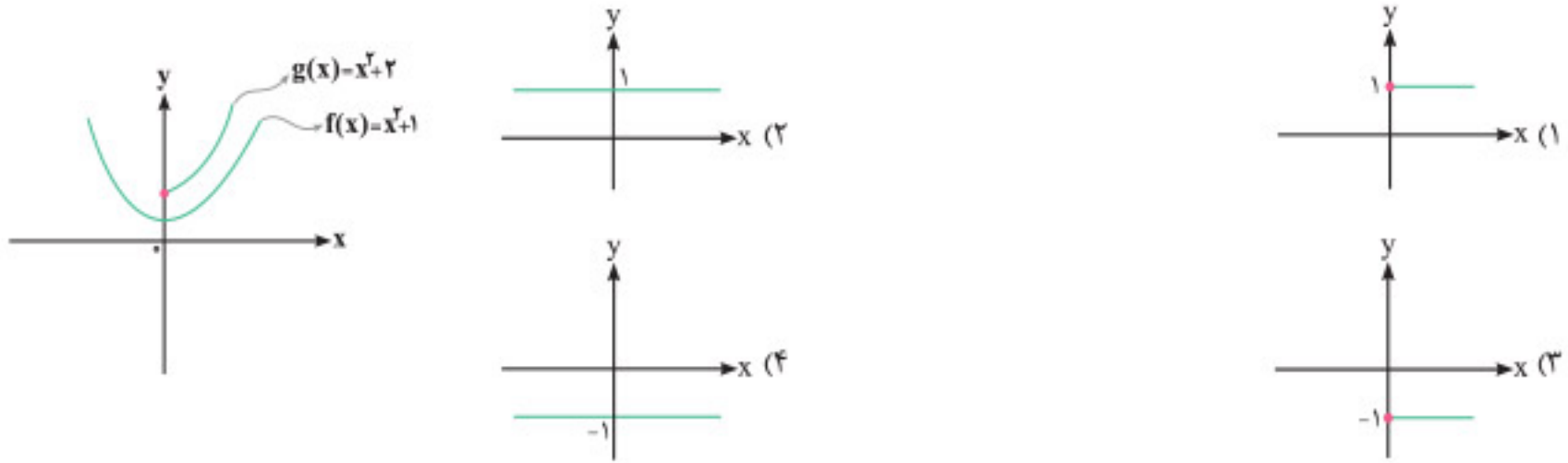
۵۵۳. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشند، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟



۵۵۴. با توجه به نمودارهای زیر، نمودار $(f-g)$ کدام است؟



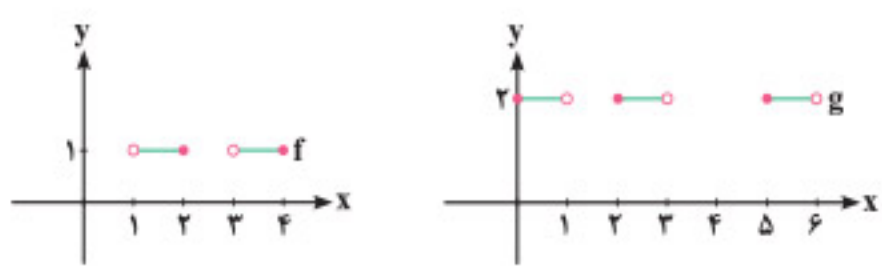
۵۵۵. اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشند، نمودار تابع $g-f$ کدام است؟



۵۵۶. اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، تابع $f+g$ شامل چند نقطه است؟

- (۱) بی‌شمار
- (۲) یک
- (۳) دو
- (۴) سه

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۵۵۷. اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = [x]$ باشند، نمودار تابع $(f.g)(x)$ در فاصله $0 < x \leq 2$ از دو خط با کدام شیب‌ها تشکیل شده است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱، ۲
- (۲) ۲، ۳
- (۳) ۱/۵، ۰/۵
- (۴) ۱/۵، ۲

فصل ۲

آزمون ۵

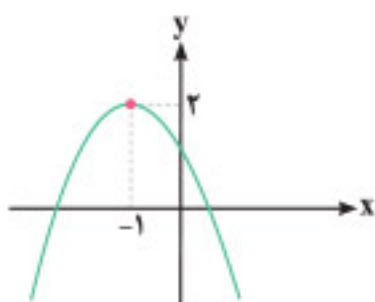
تابع - آزمون اول

۵۶۴. اگر مجموعه $\{(1, 2), (-1, m-1), (m, -2), (-1, 2m)\}$ یک تابع باشد، m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) $\frac{1}{2}$

۵۶۵. اگر سهمی $y = a(x+h)^2 + 2k$ به صورت مقابل باشد $h+k$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۵۶۶. تابع f به هر عدد حقیقی مربع ثلث همان عدد، به علاوه Δ را نسبت می‌دهد. f کدام تابع است؟

- (۱) $f(x) = (\frac{x}{3})^2 + \Delta$ (۲) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \Delta$ (۳) $f(x) = (\frac{x+\Delta}{3})^2$ (۴) $f(x) = \frac{(x+\Delta)^2}{3}$

۵۶۷. اگر در تابع $f(x) = ax^2 + bx^2$ مقدار $f(1) - f(-1) = -4$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -4 (۳) -2 (۴) ۴

۵۶۸. نمودار مختصاتی تابع $x - 2y + 1 = 0$ ، از کدام ناحیه‌ها می‌گذرد؟

- (۱) اول، دوم و چهارم (۲) اول، سوم و چهارم (۳) اول، دوم و سوم (۴) دوم، سوم و چهارم

۵۶۹. اگر $1 \leq x < \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $[x] + [2x]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷۰. نمودار $y = |x|$ را دو واحد به راست و سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم. تابع جدید کدام است؟

- (۱) $y = |x+2| + 3$ (۲) $y = |x+2| - 3$ (۳) $y = |x-2| + 3$ (۴) $y = |x-2| - 3$

۵۷۱. اگر $f = \{(3, 4), (5, 7), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, 7), (-1, 4), (3, 5)\}$ باشند، حاصل $[\frac{f}{g}(3)]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)

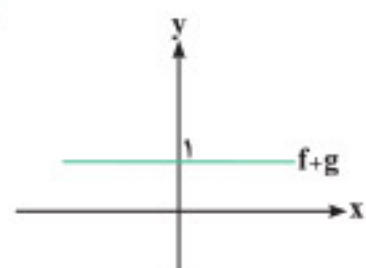
- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) -1

۵۷۲. اگر $f(1) = 5$ و نقطه $(1, 1)$ عضوی از تابع $f \times g$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -1 (۴) -2

۵۷۳. اگر $f(x) = x$ و نمودار $f+g$ به صورت مقابل باشد، تابع $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $g(x) = x + 1$ (۲) $g(x) = -x + 1$ (۳) $g(x) = x - 1$ (۴) $g(x) = -x - 1$



فصل ۲

آزمون ۶

تابع - آزمون دوم

۵۷۴. طول رأس سهمی $y = -(3-x)^2 + 4$ برابر با عرض رأس سهمی $y = 2x^2 - 4x - m$ است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -5 (۳) ۳ (۴) -3

۵۷۵. معادله $\frac{-x}{|x|} - 2x = 4$ چند جواب دارد؟

- (۱) هیچ (۲) سه (۳) دو (۴) یک

۵۷۶. اگر تابع f همانی بوده و رابطه $f(x^2 - x) = 4 - x$ برقرار باشد، حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -4 (۳) ۸ (۴) -8

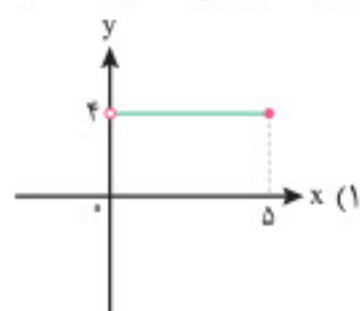
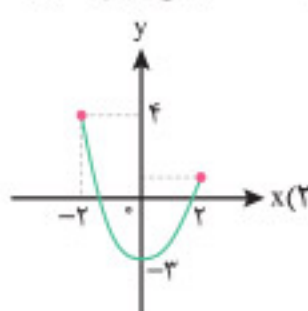
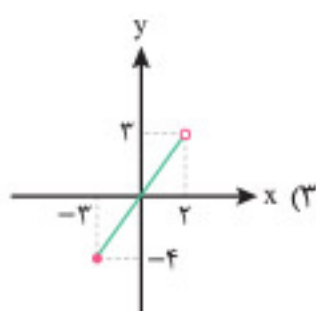
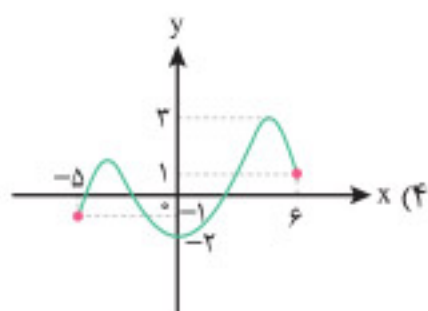
۵۷۷. در یک شرکت اگر x مقدار کالاها و p قیمت هر واحد کالا باشد، رابطه $2x = 100 - 2p$ برقرار است. بیشترین درآمد شرکت کدام است؟

- (۱) ۳۱۵ (۲) ۴۱۵ (۳) ۶۲۵ (۴) ۸۲۵

۵۷۸. اگر $f(x) = 10$ ، $f(x+3) = 2$ و تابع خطی f از مبدأ بگذرد حاصل $\frac{[f(3)]}{[f(-1)]}$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) ۳ (۳) -2 (۴) ۲

۵۷۹. برد کدام تابع، شامل تعداد بیشتری اعداد طبیعی مربع کامل است؟



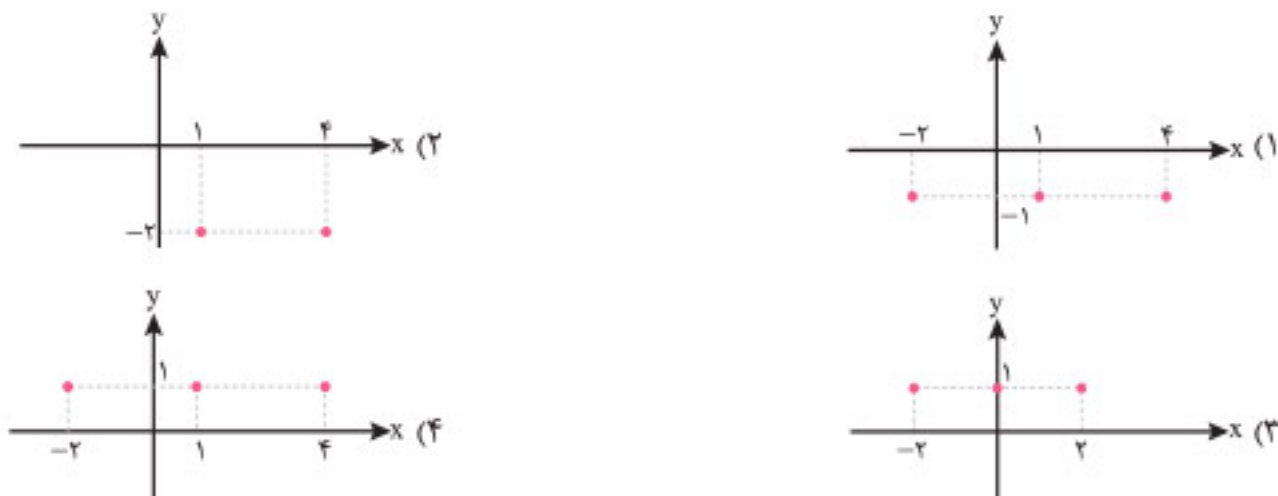
آزمون ۹ (دشوار)

تابع - آزمون پنجم

۶.۴ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{2-x} & ; |x| > 2 \\ \frac{x-2}{|2-x|} & ; |x| < 2 \end{cases}$ با کدام تابع برابر است؟

$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 2 \\ -1 & ; x < 2 \end{cases}$ (۲)
 $f(x) = \begin{cases} x & ; x > 2 \\ -x & ; x < 2 \end{cases}$ (۱)

۶.۵ اگر $f = \{(4, 0), (-2, 6), (1, 8), (2, 9)\}$ و $g = \{(-2, -6), (1, 0), (4, 1), (5, 10)\}$ باشند، نمودار تابع $\frac{f^2 - g^2}{(g-f)(g+f)}$ کدام است؟



۶.۶ اگر $f(x - [x]) = [-x] - x$ یک تابع همانی باشد، نمایش تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها کدام است؟

$f = \{(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (1, 1)\}$ (۲)
 $f = \{(0, 0), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ (۱)

$f = \{(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ (۴)
 $f = \{(0, 0), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})\}$ (۳)

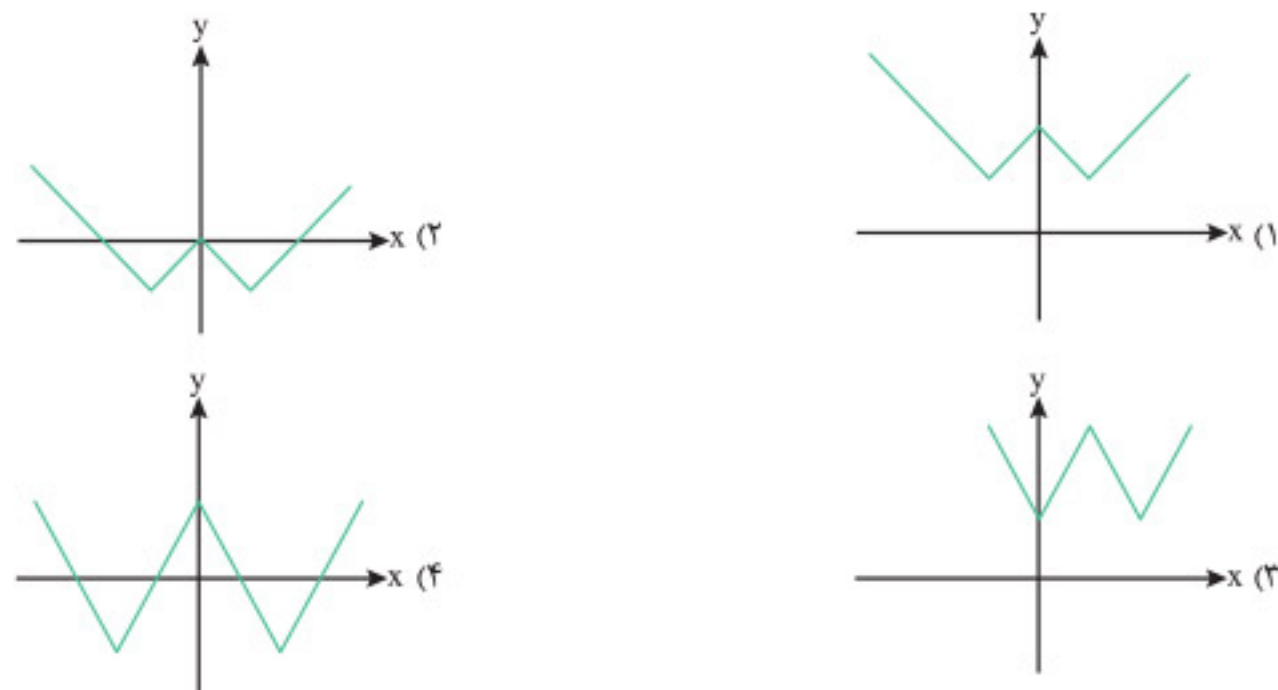
۶.۷ اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2cx[x+2] & ; 1 \leq x < 2 \\ g(x)+1 & ; 0 \leq x < 1 \\ a\frac{|x|}{x} - 2bx & ; x < 0 \end{cases}$ نیمساز ربع اول و سوم باشد، حاصل $a+b+c+g(0)$ کدام است؟

$\frac{31}{14}$ (۴)
 $\frac{-31}{14}$ (۳)
 $\frac{25}{18}$ (۲)
 $\frac{-25}{18}$ (۱)

۶.۸ اگر رابطه $f = \{(a+1, 4a), (\sqrt[4]{a^4}, a+b), (a, \frac{b}{4}), (|a|, a^2+b-a)\}$ تابع باشد، میانگین اعضای بُرد f کدام است؟

4 یا 2 (۴)
 2 یا 1 (۳)
 1 یا 0 (۲)
 3 یا 0 (۱)

۶.۹ نمودار $f(x) = 2 + |3 - |x||$ کدام است؟



تابع - آزمون ششم

آزمون ۳ - پلاس ۱۴۰۴

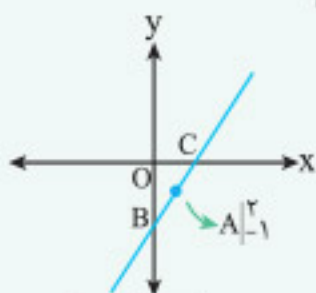


۶۱۴. اگر $\text{sign}(|x|+2) = \frac{x}{y} - 3$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $[-3x+30]$ کدام است؟ ([نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۲۱ (۲) ۳۰ (۳) ۴۱ (۴) ۵۰

۶۱۵. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ باشند، دامنه تابع $f \times g$ کدام است؟

- (۱) $\{2 \leq x < 3\}$ (۲) $\{x \geq 2\}$ (۳) $\{x \geq 0\}$ (۴) $\{x < 3\}$



۶۱۶. با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث OBC بر حسب شیب خط (m) کدام است؟

(۱) $S = \frac{(m+1)^2}{m}$ (۲) $S = (m+1)^2$

(۳) $S = \frac{(2m+1)^2}{2m}$ (۴) $S = (2m+1)^2$

۶۱۷. سهمی $y = x^2 + x - 2k$ با نیمساز ربع اول و سوم دو نقطه برخورد دارد و با نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه برخوردی ندارد. حدود k کدام است؟

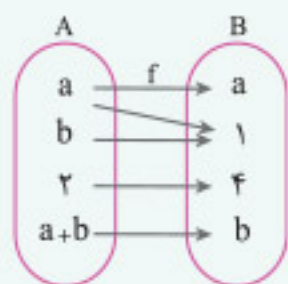
- (۱) $k > 0$ (۲) $k < -\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4} < k < 0$ (۴) هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

۶۱۸. اگر دامنه و برد تابع $f = \{(3, b), (a, 3), (4, c)\}$ با هم برابر باشند و ضمناً رابطه $f(4) = f(a)$ برقرار باشد، مقدار $(a+b+c)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۷

۶۱۹. اگر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از نقاط $A(m-2, \sqrt{2n})$ ، $B(m, -3)$ و $C(m+2, \sqrt{2n})$ بگذرد و ضمناً خط $y = k$ سهمی را در دو نقطه قطع کند، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای k کدام است؟

- (۱) $k > 0$ (۲) $k > -3$ (۳) $k < 0$ (۴) $k < -3$



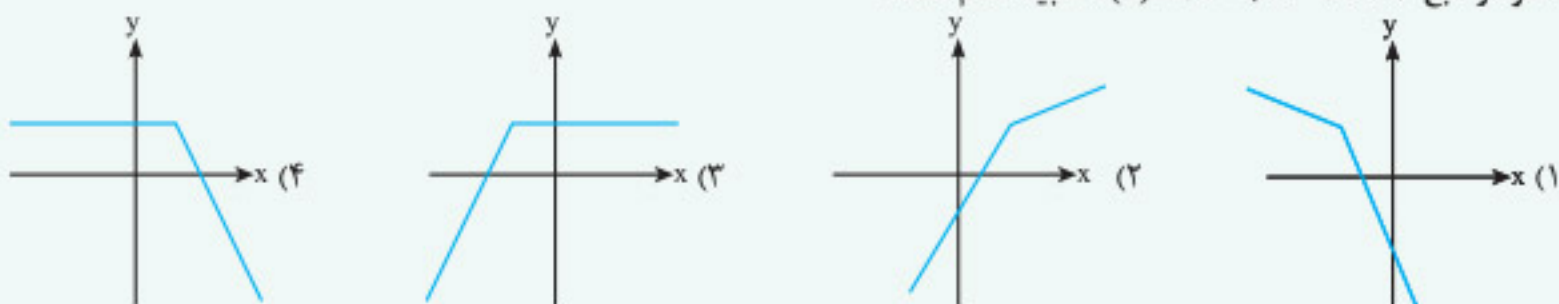
۶۲۰. اگر نمودار پیکانی زیر تابع باشد b چند مقدار را نمی پذیرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

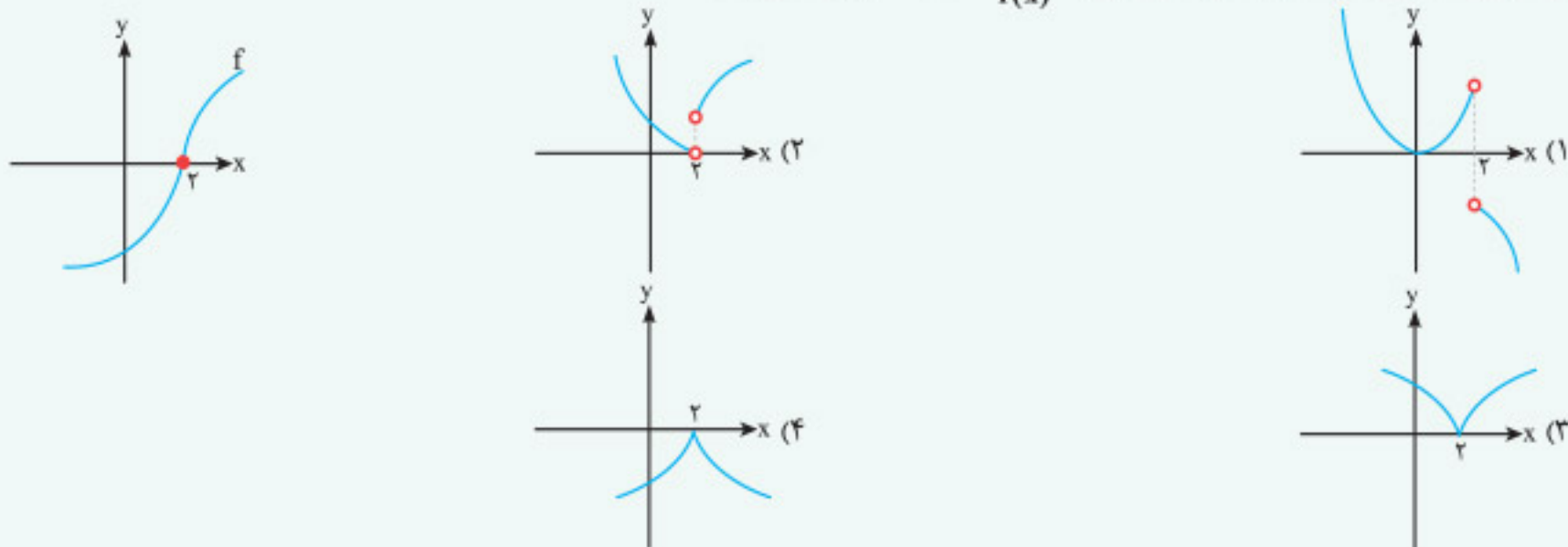
۶۲۱. اگر $f = \left\{(-3, 8), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشند، آن گاه تابع $\left(\frac{f-g}{f+g}\right)^2$ کدام است؟

- (۱) $\left\{(-\frac{1}{2}, 25), \left(\frac{1}{2}, 625\right)\right\}$ (۲) $\{(0, 4), (4, 100)\}$ (۳) $\left\{(-3, 81), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$ (۴) $\left\{(-3, \frac{81}{625}), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

۶۲۲. نمودار تابع $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ شبیه کدام است؟

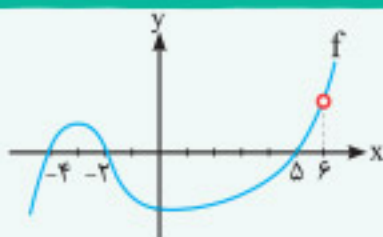


۶۲۳. با توجه به نمودار f در شکل مقابل، نمودار تابع $g(x) = -x^2 \times \frac{|f(x)|}{f(x)}$ کدام است؟





تابع - آزمون هفتم



۶۲۴. اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{3x-1}{f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-4, 6\}$
- (۲) $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$
- (۳) $\mathbb{R} - \{-4, -2, 5, 6\}$
- (۴) $\mathbb{R} - \{6\}$

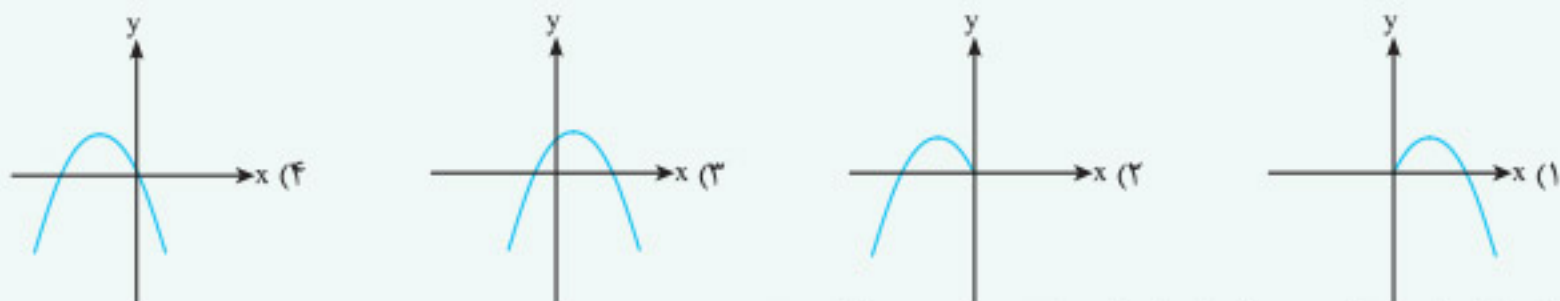
۶۲۵. نمودار تابع $f(x) = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را f واحد به طرف x های منفی و 1 واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-3/5$
- (۲) -3
- (۳) $-2/5$
- (۴) -2

۶۲۶. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x+1} & x \neq -1 \\ \frac{c}{x+3} & x = -1 \end{cases}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $ab+c$ کدام است؟

- (۱) 2
- (۲) -2
- (۳) -3
- (۴) 3

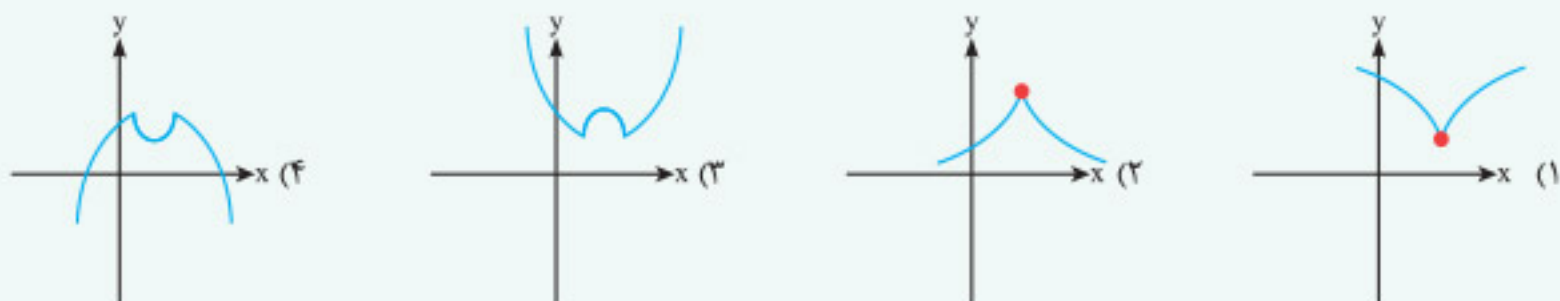
۶۲۷. اگر $f(x) = \sqrt{x} + x$ و $g(x) = \sqrt{x} - x$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y = (f \cdot g)(x)$ کدام است؟



۶۲۸. کدام یک از روابط زیر، معرف یک تابع است؟ (x متغیر مستقل است.)

- (۱) $x^2 + y^4 = 1$
- (۲) $y^2 + \sqrt{x+x^2} = 0$
- (۳) $|x| = |y|$
- (۴) $(-1)^x = (-1)^y$

۶۲۹. نمودار $y = |1 - (x-2)^2| + 3$ شبیه کدام است؟



۶۳۰. کدام یک از توابع زیر، نمایش یک تابع ثابت نیست؟ (تمام عبارات‌ها تعریف شده‌اند و $x \neq 0$)

- (۱) $y = \left[\frac{y^4}{x^4 + x^2} \right]$
- (۲) $y = \left[\frac{3x^2}{\sqrt{x^6}} \right]$
- (۳) $y = \left[\frac{x}{1+x} \right]$
- (۴) $y = \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]$

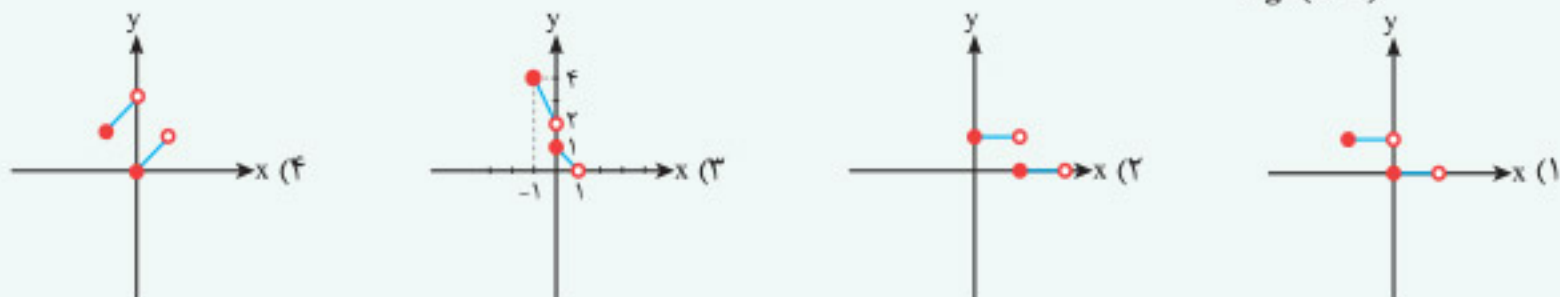
۶۳۱. مجموعه جواب معادله $[x-1] = \text{sign}(x-4) + 3$ به صورت $(a \leq x \leq b) \cup (c \leq x < d)$ می‌باشد. حاصل $\frac{a+b}{c+d}$ کدام است؟ ($a < b < c < d$)

- (۱) $\frac{7}{10}$
- (۲) $\frac{3}{10}$
- (۳) $\frac{7}{11}$
- (۴) $\frac{1}{11}$

۶۳۲. اگر نمودار تابع $f(x) = |x-a| + b$ دقیقاً از سه ناحیه صفحه مختصات عبور کند، کدام گزینه در مورد نمودار تابع $g(x) = |x-2b| - 2b$ درست است؟

- (۱) از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.
- (۲) حداقل از ۳ ناحیه می‌گذرد.
- (۳) دقیقاً از ۲ ناحیه می‌گذرد.
- (۴) دقیقاً از ۳ ناحیه می‌گذرد.

۶۳۳. نمودار تابع $f(x) = \frac{[x-1] \times |x-1|}{\text{sign}(x-1)}$ در محدوده $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟



۱ آزمون پایه دهم

۲۱۵۴. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشه معادله $(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24 = 0$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

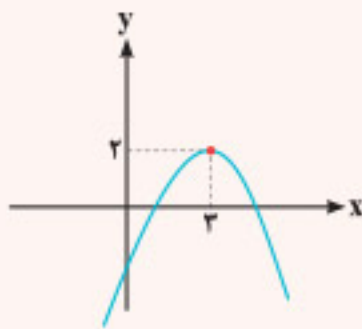
۲۱۵۵. نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $|a| = 1$ است، به صورت روبه‌رو می‌باشد. $f(1)$ کدام است؟

۶ (۱)

۱۱ (۲)

-۲ (۳)

-۲۳ (۴)

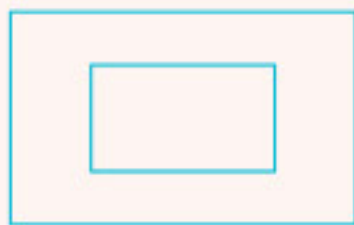


۲۱۵۶. مطابق شکل مقابل محیط مستطیل بزرگ ۱۲ و طول و عرض مستطیل کوچک نصف طول و عرض مستطیل بزرگ

است. اگر مساحت بین دو مستطیل ۶ باشد، عرض مستطیل کوچک کدام است؟

۲ (۱)

۱ (۳)



۲۱۵۷. نوع و مقیاس کدام متغیر زیر، کمی فاصله‌ای است؟

(۱) مدت زمان پیاده‌روی

(۲) سال تولد افراد

(۳) تعداد لامپ‌ها

(۴) درآمد افراد

۲۱۵۸. قرار است پولی را بین چند نفر به صورت مساوی تقسیم کنیم، سپس دو نفر به جمع آن‌ها اضافه می‌شود. در این صورت از سهم هر یک $\frac{1}{24}$ کم می‌شود.

در ابتدا چند نفر بوده‌اند؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)

۲۱۵۹. رابطه هزینه شرکتی به صورت $C(x) = -\frac{11}{4}x + 15$ و رابطه درآمد آن برابر $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$ واحد است. با تولید چندمین کالا سوددهی آغاز می‌شود؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۲۱۶۰. اگر جواب معادله $\frac{1}{x} - \frac{2-x}{x+2} = \frac{4}{x^2+2x}$ برابر با طول رأس سهمی $y = 2x^2 - ax + 1$ باشد، مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۸ (۱)

-۴ (۲)

۴ (۳)

-۸ (۴)

۲۱۶۱. رابطه $f = \{(2, 2m^2), (4, 6), (6, 3), (2, m+1), (2m+2, 3)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

$-\frac{1}{4}, 1$ (۱)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

۱ (۳)

\emptyset (۴)

۲۱۶۲. ماشینی f به عنوان ورودی، اعداد حقیقی مثبت را قبول می‌کند و پس از دریافت عدد از سه برابر جذرش چهار واحد کم می‌کند، سپس نصف حاصل را

حساب کرده و به عنوان خروجی معرفی می‌کند. اگر خروجی ۴ باشد، ورودی کدام است؟

۱ (۱)

۴ (۲)

۹ (۳)

۱۶ (۴)

۲۱۶۳. اگر $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax - 3$ یک تابع خطی باشد و $f(m+1) = 11$ ، مقدار m کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۷ (۴)

۲۱۶۴. اگر $f(x) = 7x - 11$ و $-4 \leq y < 10$ باشد، دامنه تابع f کدام است؟

$-17 \leq x < 59$ (۱)

$-1 \leq x < 2$ (۲)

$-39 \leq x < 59$ (۳)

$1 \leq x < 3$ (۴)

۲۱۶۵. چه تعداد از روابط زیر تابع است؟ (x متغیر مستقل است.)

(الف) $|x| + |y| = 1$

(ب) $x^2 + y^2 = 4$

(ج) $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x & x \leq 1 \end{cases}$

(و) $(-1)^y = x$

(ه) $y = 2$

(د) $x = 1$

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۲۱۶۶. بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{6}$ مربع عددی از ۱۰ برابر آن کدام است؟

۱۰۰ (۱)

۴۵۰ (۲)

۵۰ (۳)

۱۵۰ (۴)

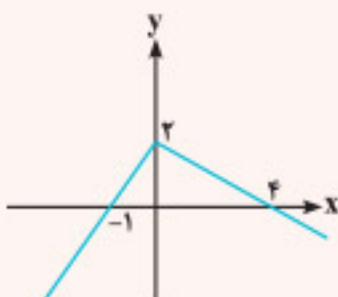
۲۱۶۷. شکل تابع f به صورت مقابل می‌باشد. حاصل $\frac{f(5)}{f(-2)}$ کدام است؟

۱ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۲)

-۲ (۳)

-۴ (۴)



فصل دوم: تابع

۲۴۴. ۳

به مطلب زیر توجه کنید.

راهنمایی: برای حل یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول کافیست ضرایب یک مجهول (a) یا (b) در دو معادله، با هم قرینه باشند که این کار رو همیشه با ضرب هر یک از معادلات در عددی مناسب انجام داد. سپس دو طرف دو معادله رو با هم جمع کرده تا یکی از مجهول‌ها حذف بشه و معادله، تبدیل به یک معادله درجه اول یک مجهولی بشه.

دو زوج مرتب با هم مساوی هستن، پس عضوهای اولشون با هم و عضوهای دومشون هم، با هم برابرین. در یک دستگاه a و b رو به دست میاریم.

$$(2, 2a + b) = (a - b, 13) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + b = 13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع می‌کنیم}} \begin{cases} a - b = 2 \\ 3a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \frac{4a = 15}{3} \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5$$

$$a - b = 2 \xrightarrow{a=5} 5 - b = 2 \Rightarrow -b = 2 - 5 = -3 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow a + b = 5 + 3 = 8$$

۲۴۵. ۴

زوج مرتب‌ها رو دو به دو با هم مساوی قرار میدیم:

$$(n - 2, 3m) = (m - 1, 6) \Rightarrow \begin{cases} n - 2 = m - 1 \\ 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

حالا به جای m در رابطه بالا عدد ۲ رو قرار میدیم:

$$n - 2 = m - 1 \xrightarrow{m=2} n - 2 = 2 - 1 \Rightarrow n = 3$$

$$\text{حالت دوم: } (n - 2, 3m) = (-4, 6) \Rightarrow \begin{cases} n - 2 = -4 \Rightarrow n = -2 \quad \times \\ 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\text{حالت سوم: } (m - 1, 6) = (-4, 6) \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = -4 \Rightarrow m = -3 \quad \times \\ 6 = 6 \end{cases}$$

m و n اعداد طبیعی هستن پس فقط جواب‌های حالت اول، قابل قبول هستن. پس داریم: $m + n = 2 + 3 = 5$

۲۴۶. ۳

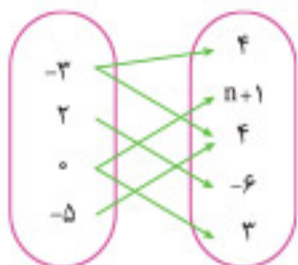
اگر رابطه بین مجموعه A و مجموعه B رو با نمودار پیکانی نمایش بدیم، در صورتی این رابطه تابع هست که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج بشه. **بررسی گزینه‌ها:** ۱ تابع نیست، زیرا از عدد ۲، دو پیکان خارج شده است. ۲ تابع نیست، زیرا از عدد ۱، سه پیکان خارج شده و از دو عضو دیگه یعنی ۲ و ۳ عضوی خارج نشده است. ۳ تابع است. ۴ تابع نیست، زیرا از عضو ۳، پیکانی خارج نشده است.

۲۴۷. ۱

باید از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج بشه، پس اگر از عضوی دو پیکان خارج شده باشه، باید عضوهای مربوط به اون‌ها در مجموعه دوم با هم برابر باشن:

$$(m - 1, 4) = (m - 1, -2m) \Rightarrow 4 = -2m \Rightarrow m = -2$$

پس نمودار به صورت مقابل درمیداد:



دو تا -۳ در مجموعه اول داریم ولی هر دو به سمت ۴ رفته‌اند و در واقع عضو (-۳, ۴) تکراریه و مشکلی ایجاد نمی‌کنه.

اما باز از صفر دو پیکان خارج شده است. دو زوج مرتب

(0, 2) و (0, n+1) عضوهای اول تکراری دارن، پس عضوهای دوم اون‌ها نیز باید با هم برابر باشن. $n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow n + m = (1) + (-2) = -1$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + x^2 + 6x + 9 = 99$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 972 \Rightarrow x^2 = 324 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 18$$

$$\xrightarrow{x \text{ طبیعی است}} x = 18 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 15 \\ x = 18 \\ x + 3 = 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع سه عدد} = 15 + 18 + 21 = 54$$

۲۴۰. ۱

مجموع دو عبارت نامتفی برابر با صفر شده، پس تک تک اون‌ها باید صفر باشن:

$$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow [|xy|] = [\sqrt{2} \times \sqrt{3}] = [\sqrt{6}] = [2/\dots] = 2$$

لازم نیست مقدار دقیق $\sqrt{6}$ رو بلد باشین فقط باید بدونین که حاصلش ۲ و خورده‌های همیشه.

۲۴۱. ۳

$$x^2 - (m^2 + m)x + m^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x - m^2)(x - m) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m \Rightarrow m = 3 - 2\sqrt{2} \\ x = m^2 \Rightarrow m^2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \\ \Rightarrow m = \pm(\sqrt{2} - 1) \xrightarrow{m > 0} m = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر مثبت } m = (3 - 2\sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

۲۴۲. ۱

$$5x^2 + 5x + 5c = 0 \xrightarrow{+5} x^2 + x + c = 0 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow 1^2 - 4(1)(c) \geq 0 \Rightarrow 1 - 4c \geq 0 \Rightarrow 4c \leq 1 \Rightarrow c \leq \frac{1}{4}$$

حالا بررسی می‌کنیم به ازای $c \leq \frac{1}{4}$ دلتای کدوم معادله نامتفی میشه:

$$x^2 + 3x + c + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4(1)(c + 1)$$

$$= 9 - 4c - 4 = 5 - 4c$$

شما هر عدد دلخواهی از محدوده $c \leq \frac{1}{4}$ رو به c بدین حاصل (5 - 4c) مثبت میشه پس همین گزینه، جواب این سؤاله.

۲۴۳. ۲

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(-1) = 40$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha + \beta|} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{|S|} = \frac{\sqrt{40}}{1} = \frac{\sqrt{40}}{6}$$

$$\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 = -1$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{40}}{6}\right)^2 + 6(-1) = \frac{40}{36} - 6 = \frac{10}{9} - 6$$

$$= \frac{10 - 54}{9} = \frac{-44}{9}$$

حالا دستگاه رو حل می‌کنیم، برای این کار معادله $m + n = 0$ رو در یک منفی

ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} -m - n = 0 \\ n - 2m = 4 \end{cases}$$

$$-3m = 4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

$$m + n = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{4}{3} \Rightarrow m - n = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

۱. ۲۶۵

می‌دونیم در یک تابع، اگه عضوهای اول، مساوی باشن. عضوهای دوم هم باید مساوی باشن. به‌ازای $b = \frac{4}{y}$ ی‌های مربوط به عدد $x = -3$ با هم مساوی میشن و g تابع خواهد بود. به‌ازای $c = 5$ هم ی‌های مربوط به $x = -1$ مساوی میشن ولی به‌ازای $a = 2$ ، ی‌های مربوط به $x = 4$ مساوی نمیشن پس g تابع نخواهد بود.

۴. ۲۶۶

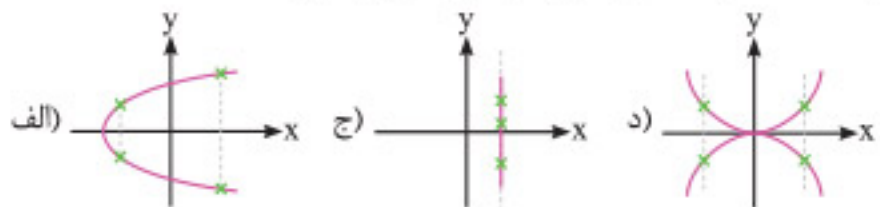
به کادر زیر که درباره گزینه «۴» است، توجه کنید.

دام آموزشی: نقاط توخالی جزء نمودار حساب نمیشن، ولی نقاط توپر جزئی از نمودار هستن.

می‌دونیم هر خط موازی با محور عرض‌ها نمودار تابع رو حداکثر توی یک نقطه قطع می‌کنه. در نمودار گزینه «۴»، دو نقطه توپر، زیرهم هستن یعنی اون خط عمودی، نمودار رو در دو نقطه قطع می‌کنه، پس تابع نیست.

۲. ۲۶۷

خطی موازی محور ی‌ها همیشه رسم کرد که نمودارهای «الف»، «ج» و «د» رو در بیش از یک نقطه قطع کنه، پس هیچ‌کدومشون تابع نیستن.



بنابراین فقط یک نمودار (نمودار ب) تابع هست.

۴. ۲۶۸

فقط در نمودار «۴» هر خط موازی با محور ی‌ها، نمودار رو حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنه و تابع داریم.

۲. ۲۶۹

با توجه به شکل، هیچ دو نقطه‌ای نباید زیر هم باشن (روی خطی موازی محور ی‌ها). اگه نقاط B ، F و G حذف بشن یک تابع ایجاد خواهد شد.

۳. ۲۷۰

هر خط عمودی که رسم می‌کنیم باید نمودار تابع رو حداکثر در یک نقطه قطع کنه، پس فقط می‌تونیم پاره خط $y = 3$ با دامنه $-1 \leq x \leq 2$ رو به شکل اضافه کنیم.

۲. ۲۷۱

با توجه به نمودار تابع، مقدار تابع در هر نقطه به طول x برابر با عرض همون نقطه خواهد بود:

$$\left. \begin{matrix} f(-3) = 0 \\ f(1) = -1 \\ f(3) = 4 \\ f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(-3) - f(1) + f(3) + f(0) = 0 - (-1) + 4 + 0 = 5$$

۳. ۲۵۹

با توجه به تابع داده‌شده، $f(1) = 4$ و $f(2) = 5$ است، بنابراین:

$$2f(1) - f(2) = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$$

۱. ۲۶۰

در سؤال از ما خواسته شده که از رابطه f اعضایی رو انتخاب کنیم که عضوهای دومشون ۱ و ۲ باشن. بنابراین باید زوج مرتب‌های $(2, 1)$ و $(3, 2)$ رو برداریم که عضوهای اولشون ۲ و ۳ هستن.

۲. ۲۶۱

چون دامنه $\{1, 2, 5\}$ است، پس نتیجه می‌گیریم که:

$$b + 2 = 5 \Rightarrow b = 5 - 2 = 3$$

و چون برد $\{3, 7, -1\}$ است، پس:

$$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = 2(0) + 3 = 3$$

۲. ۲۶۲

$$\text{مجموع اعضای برد} = a + 1 + a^2 + 1 - 2a = 4 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 2$$

حالا باید بررسی کنیم که کدوم جواب قابل قبوله:

اگه $a = 2$ باشه:

$f = \{(0, 3), (5, 4), (1, -3)\}$
 f تابع است؛ پس $a = 2$ قابل قبوله و مجموع اعضای دامنه در این حالت برابر با ۶ است.

اگه $a = -1$ باشه:

$f = \{(-3, 0), (-1, 1), (-4, 3)\}$
 f تابع هست پس $a = -1$ قابل قبوله.
 مجموع اعضای دامنه در این حالت:

$$-3 + (-1) + (-4) = -8$$

۴. ۲۶۳

اولاً f تابع هست پس اگه دو زوج مرتب، عضو اولشون مساوی باشن باید عضوهای دومشون هم مساوی باشن. الان دو زوج داریم که با ۲ شروع میشن، پس:

$$x - y = -3$$

ثانیاً گفته شده دامنه فقط یک عضو داره که می‌دونیم $\{2\}$ است، پس حاصل $4x + y$ هم فقط باید ۲ باشه چون اگه ۲ نباشه دامنه دو عضوی میشه:

$$4x + y = 2$$

اکنون دو معادله داریم با دو تا مجهول، پس باید دستگاه حل کنیم:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

$$5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$4x + y = 2 \xrightarrow{x = -\frac{1}{5}} 4(-\frac{1}{5}) + y = 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{14}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{14}{5}} = -\frac{1}{14}$$

۳. ۲۶۴

می‌دونیم که: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ و $-1^2 = -1$ پس در ردیف بالای جدول ۴ خارج میشه

(ها) x دوتا (-1) و دوتا $(2\sqrt{2})$ مشاهده می‌کنیم لذا y هاشون رو با هم مساوی قرار میدیم:

$$2m - m + n = 0 \xrightarrow{\text{می‌بریم به راست}} m - n = 2m \text{ برای } (-1) \text{ ها}$$

$$\Rightarrow m + n = 0$$

$$n - 2m = 4 \text{ برای } (2\sqrt{2}) \text{ ها}$$

۲۸۵. ۲

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax + 1 \\ f(2) = 3 \Rightarrow \text{تابع از نقطه } (2, 3) \text{ عبور میکند} \\ \Rightarrow f(2) = 2^2 + 2a + 1 = 3 \Rightarrow 2a + 5 = 3 \\ \Rightarrow 2a = 3 - 5 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{2} \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

حالا $a = -1$ رو در ضابطه تابع قرار میدیم و بعدش $f(1)$ رو به دست میاریم:
 $a = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$

$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

۲۸۶. ۱

با توجه به اینکه $f(1) = -3$ است، آگه به جای x ها عدد ۱ رو قرار بدیم، حاصل باید -3 بشه، همچنین با توجه به اینکه $f(3) = 7$ است، آگه به جای x ها، عدد ۳ رو قرار بدیم، حاصل باید ۷ بشه، پس:

$$f(1) = -3 \xrightarrow{f(x) = ax^2 + bx - 2} a(1)^2 + b(1) - 2 = -3$$

$$\Rightarrow a + b - 2 = -3 \Rightarrow a + b = -1$$

$$f(3) = 7 \xrightarrow{f(x) = ax^2 + bx - 2} a(3)^2 + b(3) - 2 = 7$$

$$\Rightarrow 9a + 3b - 2 = 7 \Rightarrow 9a + 3b = 9$$

حالا دو معادله رو در یک دستگاه قرار میدیم تا مقدار b رو به دست بیاریم:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (-1) \\ \text{معادله اول} \end{matrix}} \begin{cases} -9a - 9b = 9 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow -6b = 18 \Rightarrow b = \frac{18}{-6} = -3$$

۲۸۷. ۱

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x - 5| \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} f(2+\sqrt{2}) = |2(2+\sqrt{2}) - 5| \\ &= |4 + 2\sqrt{2} - 5| = |\underbrace{2\sqrt{2} - 1}_{\text{مثبت}}| = 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x - 5| \xrightarrow{x=1+\sqrt{2}} f(1+\sqrt{2}) = |2(1+\sqrt{2}) - 5| \\ &= |2 + 2\sqrt{2} - 5| = |\underbrace{2\sqrt{2} - 3}_{\text{منفی}}| = -(2\sqrt{2} - 3) = -2\sqrt{2} + 3 \end{aligned}$$

$$f(2+\sqrt{2}) + f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 3 = 2$$

۲۸۸. ۳

در تابع $f(x)$ به جای x ها، عدد $(2 - \sqrt{3})$ رو قرار میدیم:

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{3}) &= \sqrt{-2(2 - \sqrt{3})^2 + 8(2 - \sqrt{3}) + 7} \\ &= \sqrt{-2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 8(2 - \sqrt{3}) + 7} \\ &= \sqrt{-8 + 8\sqrt{3} - 6 + 16 - 8\sqrt{3} + 7} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

۲۸۹. ۲

دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری هست که یک متغیر مستقل می تونه اختیار کنه و برد تابع، مجموعه مقادیری هست که یک متغیر وابسته می تونه داشته باشه. در گزینه ۳، متغیر x ، متغیر مستقل و متغیر $h(x)$ ، متغیر وابسته است.

۲۹۰. ۳

برای به دست آوردن دامنه با استفاده از برد، کافیه که مقادیر موجود در برد رو به جای $f(x)$ (یا همون y) قرار بدیم و x مورد نظر رو به دست بیاریم:

R_f	$f(x) = 2x - 1$
۱	$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$
۳	$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3\}$
۵	$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

۲۹۱. ۳

چون برد $\{1\}$ است، پس به جای y یا $f(x)$ عدد ۱ رو قرار میدیم:

$$x^2 - 5x + 1 = 1 \quad \text{الان ریشه های این معادله رو به دست میاریم:}$$

$$x^2 - 5x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

بنابراین تابع f می تونه از دو زوج مرتب $(0, 1)$ و $(5, 1)$ یا یکی از این دو زوج مرتب، تشکیل شده باشه. با توجه به گزینه ها داریم: $f = \{(0, 1), (5, 1)\}$

۲۹۲. ۲

در ضابطه تابع $(f(x) = \sqrt{x+1} - 1)$ به جای x مقادیر $\{0, -1, 8, 3\}$ رو قرار میدیم تا برد به دست بیاد.

x	$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$
۰	$f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$
-۱	$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = \sqrt{0} - 1 = -1$
۸	$f(8) = \sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{9} - 1 = 2$
۳	$f(3) = \sqrt{3+1} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 1$

$\Rightarrow R_f = \{0, -1, 2, 1\}$

۲۹۳. ۲

وقتی گفته میشه $f(a) = 3$ یعنی هر جا x دیدیم به جاش a میذاریم و هر جا y دیدیم به جاش ۳ رو قرار میدیم: $f(a) = 3 \Rightarrow a^2 + 2a = 3 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (a-1)(a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a+3=0 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

ولی طبق فرض $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده یعنی دامنه f برابر اعداد طبیعی هست؛ بنابراین a نمی تونه -3 باشه و فقط $a = 1$ قابل قبوله.

۲۹۴. ۱

برد تابع $R = \{0, 1\}$ هست، پس در ضابطه تابع، یک بار به جای y عدد صفر و بار دیگه عدد ۱ رو قرار میدیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)=0}{3x} \rightarrow \frac{x^2-4}{3x} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \frac{f(x)=1}{3x} \rightarrow \frac{x^2-4}{3x} = 1 \Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \\ \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

پس دامنه برابر $\{-2, -1, 2, 4\}$ بوده و مجموع عضوهای دامنه برابر $3 = (-2) + (-1) + 2 + 4$ میشه.

۲۹۵. ۴

رابطه بین دو مجموعه A و B یعنی رابطه $A \rightarrow B$ وقتی تابع خواهد بود که به هر عضو x از مجموعه A ، دقیقاً یک عضو مانند y از مجموعه B رو نسبت بدیم. **بررسی گزینه ها:** ۱ برای هر مسلمان فقط یک قبله داریم، پس تابع است.

۲ متناظر با هر فرد فقط یک شماره ملی داریم، پس تابع است. ۳ برای مساحت هر مربع فقط یک ضلع داریم که برابر با جذر مساحته، پس تابع است. ۴ ممکنه شهری مانند مشهد چند سوغاتی داشته باشه، پس متناظر با هر شهر، ممکنه بیش از یک سوغاتی داشته باشیم. بنابراین گزینه ۴ تابع نیست.

۲۹۶. ۳

در گزینه ۳، به ازای یک شخص، دو تا نام والدین (پدر و مادر) وجود داره، پس تابع نداریم.

امادر گزینه های دیگه به ازای یک شخص فقط یک شماره ملی، یک نام خانوادگی و یک رنگ پوست وجود داره و همگی تابع هستن.

$$\begin{aligned} \frac{(a,b)}{m=1} \rightarrow b &= \left(\frac{1-1}{2}\right)a - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ b &= \frac{a+1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a+1 = -1 \Rightarrow a = -2 \\ \Rightarrow \frac{a}{b} &= \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4 \end{aligned}$$

۱. ۳۱۵

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-4}{a+2}x + b \\ f(1) &= 2a-1 \Rightarrow \frac{-4}{a+2} + b = 2a-1 \quad (1) \\ f\left(-\frac{a}{2}\right) &= 2 \Rightarrow \frac{-4}{a+2}\left(-\frac{a}{2}\right) + b = 2 \Rightarrow \frac{2a}{a+2} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{2a}{a+2} \\ \text{جای گذاری در (1)} &\rightarrow -\frac{4}{a+2} + \left(2 - \frac{2a}{a+2}\right) = 2a-1 \\ \Rightarrow -\frac{4}{a+2} - \frac{2a}{a+2} - 2a &= -3 \Rightarrow \frac{-4-2a-2a^2-4a}{a+2} = -3 \\ \text{ضرب همه جملات} &\rightarrow -2a^2 - 6a - 4 = -3a - 6 \Rightarrow -2a^2 - 3a + 2 = 0 \\ \text{در (a-2)} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 9 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25 \\ \begin{cases} a_1 = \frac{3+5}{-4} = -2 \Rightarrow b = 2 - \frac{-4}{-2} = 0 \\ a_2 = \frac{3-5}{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{8}{5} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \frac{\frac{8}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3\frac{2}{5} \end{aligned}$$

۴. ۳۱۶

در این سؤال، نیازی نیست که حتماً شیب و عرض از مبدأ رو به دست بیاریم فقط کافیست دو نقطه داده شده رو به هم وصل کنیم و علامت شیب و عرض از مبدأ رو از روی شکل، بررسی کنیم؛ با توجه به شکل، میشه گفت شیب خط مثبت و همچنین خط، محور عرض هارو پایین مبدأ قطع کرده پس عرض از مبدأ خط منفیه.

۲. ۳۱۷

این تابع، یک تابع درجه اول است برای همین مشابه دنباله حسابی است و دنباله حسابی یعنی الگوی خطی. دقت کنید که:

$$\begin{aligned} \text{در دنباله حسابی میانگین همه جمله‌ها همان میانگین جمله اول و آخر است:} \\ \begin{cases} f(-99) = \frac{99}{2} + 4 \\ f(100) = \frac{-100}{2} + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \frac{99}{2} + 4 - \frac{100}{2} + 4 = \frac{15}{2} \\ \text{میانگین} = \frac{15}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \end{aligned}$$

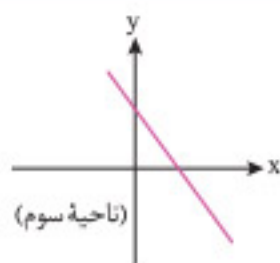
۲. ۳۱۸

در توابع خطی، برای یافتن برد، نیازی به رسم نمودار نیست بلکه می‌تونیم ابتدا و انتهای دامنه رو به جای x های تابع قرار بدیم تا y ها به دست بیان:

$$f(x) = y = -4x + 1 \begin{cases} x = -3 \rightarrow y = -4(-3) + 1 = 13 \\ x = 6 \rightarrow y = -4(6) + 1 = -23 \end{cases}$$

پس برد تابع برابر میشه با: $-23 < y \leq 13$ حالا چرا مساوی رو فقط برای 13 قرار دادیم؟ علت اینه که $x = -3$ متعلق به دامنه است ولی $x = 6$ جزء دامنه نیست، پس برای $y = 13$ که جواب $f(-3)$ بود مساوی گذاشتیم.

۳. ۳۰۸



m مثبت هست پس حاصل $-2m$ عددی منفی خواهد شد. از طرفی گفته شده n که همون عرض از مبدأ خط هست، مثبت پس نمودار تقریبی خط به شکل مقابل خواهد بود: پس نمودار از ناحیه سوم نمی‌گذره.

۴. ۳۰۹

ابتدا شیب خط رو به دست آورده و برابر با عدد 1 قرار میدیم:

$$\frac{a-3}{1-a} = 1 \Rightarrow a-3 = 1-a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

مقدار a رو در معادله خط جای گذاری می‌کنیم: $y-2 = 1(x-1) \Rightarrow y = x+1$

۴. ۳۱۰

شیب گذرنده از دو نقطه به صورت $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ تعریف میشه، بنابراین داریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 1 = \frac{k+2-7}{-3-(2k-1)} \Rightarrow 1 = \frac{k-5}{-3-2k+1} \Rightarrow 1 = \frac{k-5}{-2-2k}$$

طرفین وسطین $\rightarrow k-5 = -2-2k \Rightarrow k+2k = -2+5 \Rightarrow 3k = 3 \Rightarrow k = 1$

۲. ۳۱۱

مختصات دو نقطه داده شده رو در معادله خط قرار میدیم و دستگاه حاصل رو حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ay + 4x &= 4b \xrightarrow{(1,4)} a(4) + 4(1) = 4b \Rightarrow 4a - 4b = -4 \\ ay + 4x &= 4b \xrightarrow{(-1,2)} a(2) + 4(-1) = 4b \Rightarrow 2a - 4b = +4 \end{aligned}$$

عدد به راست / مجهول به چپ

حالا به دلخواه معادله اول رو در (-1) ضرب می‌کنیم تا $4b$ و $-4b$ با هم حذف بشن:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -4a + 4b = 4 \\ 2a - 4b = 4 \end{cases} \\ -2a = 8 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{2a-4b=+4} 2(-4) - 4b = +4 \\ \Rightarrow -4b = 12 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a + b = -7 \end{aligned}$$

۳. ۳۱۲

چون نقطه A روی محور طول‌ها قرار داره، پس عرض اون برابر صفره:

$$y_A = 0 \Rightarrow A(3, 0)$$

حالا نقطه A رو در معادله خط جای گذاری می‌کنیم:

$$A(3, 0) \xrightarrow{\text{معادله خط}} 3m(3) - (2m-2)(0) - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 9m - 0 - 18 = 0 \Rightarrow 9m = 18 \Rightarrow m = 2$$

با جای گذاری $m = 2$ در معادله خط، رابطه اصلی معادله خط به دست میاد. برای به دست آوردن شیب، معادله خط رو استاندارد می‌کنیم (y در یک طرف تنها بشه):

$$-2y = -6x + 18 \xrightarrow{+(-2)} y = 3x - 9$$

بنابراین شیب خط 3 است.

۲. ۳۱۳

چون تابع خطی به ازای هر مقدار m از نقطه (α, β) می‌گذره، پس:

$$m = \frac{(\alpha, \beta)}{2} \rightarrow \beta = (1-2x)\alpha - \frac{2x\alpha + 3}{2} \Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{3}{2}$$

۳. ۳۱۴

چون تابع خطی به ازای تمام مقادیر از نقطه (a, b) می‌گذره، پس به ازای

$$\begin{aligned} m = 0, 1 \text{ نیز از } (a, b) \text{ می‌گذره. پس داریم:} \\ f(x) &= \left(\frac{1-m}{2}\right)x - m + \frac{1}{2} \\ \frac{(a,b)}{m=0} \rightarrow b &= \frac{1}{2}a - 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a+1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{فرض سؤال: } f\left(-\frac{\Delta}{4}\right) = g(-\Delta) \Rightarrow \frac{\Delta}{4}m - h = -\Delta a + h$$

$$\xrightarrow{\times 4} \Delta m - 4h = -20a + 4h \Rightarrow \Delta m - 8h + 20a = 0$$

$$\Delta\left(\frac{h+3}{2}\right) - 8h + 20\left(\frac{h-3}{2}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} \Delta h + 15 - 16h + 20h - 60 = 0 \Rightarrow 9h = 45 \Rightarrow h = 5$$

$$\Rightarrow m = \frac{h+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4, a = \frac{h-3}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

۳۳۳

در تابع خطی نباید x^2 داشته باشیم پس باید اون رو نابود کنیم، لذا ضرب

$$x^2 \text{ رو مساوی با صفر قرار میدیم: } 2k - 5 = 0 \Rightarrow 2k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

حالا در تابع g به جای k عدد $\frac{5}{2}$ رو قرار میدیم:

$$g(x) = 2x - k^2 = 2x - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2x - \frac{25}{4}$$

$$\xrightarrow{x=1} g(1) = 2(1) - \frac{25}{4} = \frac{12-25}{4} = \frac{-13}{4}$$

۳۳۴

تابع داده شده، ظاهراً خطی نیست ولی با انتخاب یک مقدار مناسب برای m به تابعی خطی تبدیلش می‌کنیم. در این گونه مسائل، همون طور که در درسنامه هم

گفتیم باید ریشهٔ مخرج رو در صورت قرار بدیم و صورت رو مساوی صفر بذاریم:

$$\text{ریشهٔ مخرج: } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

حالا این عدد رو در صورت کسر قرار میدیم.

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow x^2 + mx + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{x=-1} (-1)^2 + m(-1) + 5 = 0 \Rightarrow 1 - m + 5 = 0 \Rightarrow m = 6$$

حالا این مقدار m رو در تابع قرار میدیم:

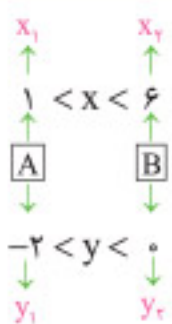
تجزیه با جمله مشترک

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{x+1} = \frac{(x+5)(x+1)}{x+1} = x+5$$

$$f(2) = 2+5 = 7 \Rightarrow \frac{f(2)}{m} = \frac{7}{6}$$

۳۳۵

الان باید در دو حالت، مسئله رو حل کنیم.



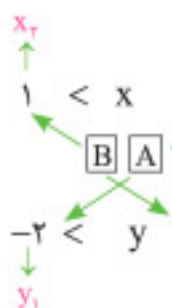
$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-2)}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

حالت اول:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{5}(x - 1)$$

$$\xrightarrow{x=4} y + 2 = \frac{2}{5} \times 3 \Rightarrow y = \frac{6}{5} - 2 = \frac{-4}{5}$$

حالت دوم:



$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 + 2}{1 - 6} = -\frac{2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 6)$$

$$\xrightarrow{x=4} y + 2 = -\frac{2}{5} \times (-2) \Rightarrow y = \frac{4}{5} - 2 = \frac{-6}{5}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جوابها} = \left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{12}{25}$$

۳۱۹

ضابطهٔ f به ما داده نشده ولی می‌دونیم که خطی هست پس اون رو به شکل $f(x) = mx + n$ در نظر می‌گیریم. حالا نقاط داده شده رو در این ضابطه قرار میدیم:

$$y = mx + n \xrightarrow{\text{مبدأ A}} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = m(0) + n \Rightarrow n = 0$$

$$y = mx + n \xrightarrow{\text{B}} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \end{matrix} \begin{matrix} -6 \\ 2 \end{matrix} = m(-6) + 0 \Rightarrow -6m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x) = -\frac{1}{3}x$ است. حالا $f(0/3)$ و $f(-0/3)$ رو حساب می‌کنیم:

$$f(0/3) = -\frac{1}{3} \times 0/3 = -\frac{1}{3} \times \frac{0}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$f(-0/3) = -\frac{1}{3} \times (-0/3) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{0}{10}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow f(0/3) - f(-0/3) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{-2}{10} = -0/2$$

۳۲۰

خودمون فرمول تابع f رو به شکل $f(x) = mx + n$ در نظر می‌گیریم:

$$f(1) = m(1) + n = m + n$$

$$f(4) = m(4) + n = 4m + n$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه } 10} 2f(1) - f(4) = 10 \text{ می‌ذاریم} \Rightarrow 2(m+n) - (4m+n) = 10$$

$$\Rightarrow 2m + 2n - 4m - n = 10 \Rightarrow -2m + n = 10$$

از طرفی گفته شده نمودار خط از نقطهٔ $(0, 4)$ عبور می‌کنه، پس مختصات این نقطه

$$\text{رو در تابع قرار میدیم: } y = mx + n \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=4}} 4 = m(0) + n \Rightarrow n = 4$$

$$-2m + n = 10 \xrightarrow{n=4} -2m + 4 = 10$$

$$\Rightarrow -2m = 6 \Rightarrow m = -3$$

حالا این m و n رو که به دست آوردیم، در ضابطهٔ f قرار میدیم:

$$f(x) = -3x + 4 \xrightarrow{x=100} f(100) = -3(100) + 4 = -296$$

۳۲۱

دو علامت مساوی دامنه و برد، مربوط به یک نقطه هستن که این نقطه به صورت

$(-4, 10)$ است، دو عدد دیگر دامنه و برد هم که علامت مساوی ندارند مربوط

به یک نقطهٔ دیگر خط هستن که مختصات این نقطه $(1, 12)$ است. حالا با

داشتن دو نقطه از خط، شیب و معادلهٔ خط رو می‌نویسیم:

$$\left(A \begin{matrix} -4 \rightarrow x_1 \\ 10 \rightarrow y_1 \end{matrix}, B \begin{matrix} 1 \rightarrow x_2 \\ 12 \rightarrow y_2 \end{matrix} \right) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 10}{1 - (-4)} = \frac{2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = \frac{2}{5}(x + 4)$$

$$\xrightarrow{\text{به جای } x \text{ عدد صفر رو میناریم}} y - 10 = \frac{2}{5}(4) \Rightarrow y = 4 + 10 = 14$$

۳۲۲

نکته: اگر نمودار تابع f از نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ عبور کنه به این معناست که $y_1 = f(x_1)$ یعنی مختصات نقطهٔ A را در ضابطهٔ f قرار میدیم تا مجهول خواسته شده به دست بیاد.

$$f(x) = -mx - h \xrightarrow{\text{A}} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix} = 2m - h = 3 \Rightarrow m = \frac{h+3}{2}$$

$$g(x) = ax + h \xrightarrow{\text{A}} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix} = -2a + h = 3 \Rightarrow a = \frac{h-3}{2}$$

۳۴۲. ۲

$$y - 2 = -2(x + a)^2 + b \xrightarrow[\text{به راست}]{-2 \text{ رو می‌بریم}} y = -2(x + a)^2 + b + 2$$

طول رأس $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$

از طرفی در متن سؤال گفته شده که طول رأس ۲ و عرض رأس ۵ هست؛ بنابراین داریم:

$$x = -a \xrightarrow[\text{طبق فرض } x=2]{x=2} -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$y = b + 2 \xrightarrow[\text{طبق فرض } y=5]{y=5} b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a \times b = (-2)(3) = -6$$

۳۴۳. ۲

محور تقارن $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ است:

$$y = ax^2 + 3x + c \Rightarrow \text{محور تقارن} = x = \frac{-3}{2a} = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

عرض رأس سهمی $y = 1$ است؛ پس $S(-1, 1)$ در تابع صدق می‌کند:

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 3x + c \xrightarrow{S(-1,1)} 1 = \frac{3}{2} - 3 + c \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

$$ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۳۴۴. ۲

تابع $y = ax^2 + bx + c$ دارای ماکزیمم است. اگر $a < 0$ و طول آن $x = \frac{-b}{2a}$ است.

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{-\lambda(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16m^2 - 36m + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (4m - 6)(4m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو مقدار بزرگ‌تر از $\frac{1}{18}$ هستند و قابل پذیرش‌اند.

۳۴۵. ۴

$$\left. \begin{aligned} y = ax + b &\Rightarrow \text{شیب} = a \\ y = cx + d &\Rightarrow \text{شیب} = c \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\text{روش اول}} a = -1/5c$$

محل برخورد دو خط، نقطه $A(-2, 0)$ است، پس این نقطه رو در هر دو معادله خط قرار میدیم:

$$y = ax + b \xrightarrow{A(-2,0)} a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{a=-1/5c} -2(-1/5c) + b = 0 \Rightarrow 2c + b = 0 \Rightarrow c = \frac{-b}{2}$$

$$y = cx + d \xrightarrow{A(-2,0)} c(-2) + d = 0 \Rightarrow c = \frac{d}{2} \quad (2)$$

مقدار c به دست آمده از دو رابطه رو با هم مساوی قرار میدیم:

$$\frac{-b}{2} = \frac{d}{2} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 2b = -2d \Rightarrow b = \frac{-2}{2}d$$

حال تابع $t(x)$ رو نوشته و ضابطه اون رو تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$t(x) = \left(\frac{c}{2}x + d\right)^2 - (ax + b)^2 = \frac{c^2 x^2}{4} + cdx + d^2 - a^2 x^2 - 2abx - b^2$$

$$= \left(\frac{c^2}{4} - a^2\right)x^2 + (cd - 2ab)x - d^2 - b^2$$

$$\text{محور تقارن: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(cd - 2ab)}{2\left(\frac{c^2}{4} - a^2\right)}$$

$$= \frac{-\left(\frac{d}{2}\right)(d) + 2\left(-1/5 \frac{d}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}d\right)}{2\left(\frac{d^2}{16} - \left(-1/5 \frac{d}{2}\right)^2\right)} = \frac{-\frac{d^2}{2} + \frac{3/5 d^2}{2}}{\frac{d^2}{8} - \frac{2 \times 2/5 d^2}{4}}$$

$$= \frac{d^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3/5}{2}\right)}{d^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{2/5}{4}\right)} = \frac{3/5}{-1} = \frac{-3}{5}$$

۳۳۵. ۴

ابتدا به کمک دو نقطه از خط، معادله خط رو به دست میاریم:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -180 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 600 \\ 120 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{120 - (-180)}{600 - 0} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 180 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 180$$

باید نقطه سر به سر رو پیدا کنیم یعنی جایی که مقدار سود برابر صفر هست:

$$\text{سود} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 180 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 180 \Rightarrow x = 2 \times 180 = 360$$

پس با تولید کالای ۳۶۱، سوددهی آغاز میشه.

۳۳۶. ۳

در این مدل سؤال‌ها کافیست ضریب C یعنی عدد $\frac{9}{5}$ رو در مقدار افزایش یا کاهش دما

برحسب سانتی‌گراد ضرب کنیم: $\frac{9}{5} \times 30 = 9 \times 6 = 54$ جواب مطلوب

۳۳۷. ۳

با توجه به فرض سؤال، اگر به ۳ برابر دمای جسم برحسب سانتی‌گراد ۲۰ واحد

اضافه بشه، دمای جسم برحسب فارنهایت به دست میاد، یعنی: $F = 2C + 20$.

از طرفی می‌دونیم که $F = 1/8C + 32$ است، حال این دو رابطه رو با هم برابر

قرار میدیم تا دمای جسم رو برحسب سانتی‌گراد بیابیم:

$$1/8C + 32 = 2C + 20 \Rightarrow 1/8C - 2C = 20 - 32$$

$$\Rightarrow -1/2C = -12 \Rightarrow C = \frac{-12}{-1/2} = \frac{12}{1/2} = 24$$

۳۳۸. ۱

در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a}$

بوده و برای به دست آوردن عرض رأس سهمی کافیست که طول به دست آمده رو در

تابع جای گذاری کنیم (عرض رأس) $(f(\text{طول رأس}))$: $y = 2x^2 - 4x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طول رأس: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1 \\ \text{عرض رأس: } y = f(\text{طول رأس}) = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1 \end{cases}$$

بنابراین مختصات رأس سهمی، نقطه $S(1, -1)$ است.

۳۳۹. ۲

در هر سهمی به فرم کلی $f(x) = a(x - m)^2 + n$ نقطه (m, n) رأس

سهمی است (m ریشه داخلی پیرانتزه)؛ در تابع $y = \frac{-1}{2}(x + 2)^2 + 5$ ریشه

داخل پیرانتزه -2 بوده و در نتیجه رأس سهمی نقطه $(-2, 5)$ است.

۳۴۰. ۳

می‌دونیم محور تقارن هر سهمی، خطی به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ است، بنابراین:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \text{محور تقارن: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow x = 3$$

۳۴۱. ۱

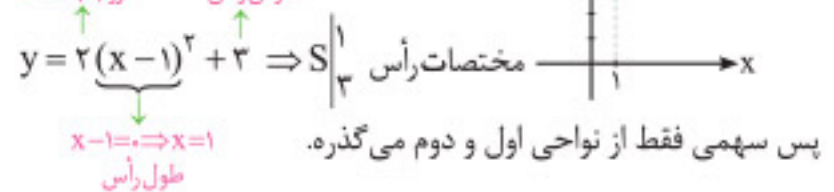
اگر معادله سهمی به شکل $y = a(x - h)^2 + k$ باشه ریشه داخلی پیرانتزه،

طول رأس خواهد بود $(x - h = 0 \Rightarrow x = h)$ ضمناً عددی که پیرانتزه با اون

جمع یا تفریق میشه عرض رأس خواهد بود (که در اینجا برابر $k +$ هست)

علامت a هم نشون میده سهمی رو به بالاست یا پایین. اگر $a > 0$ باشه، سهمی

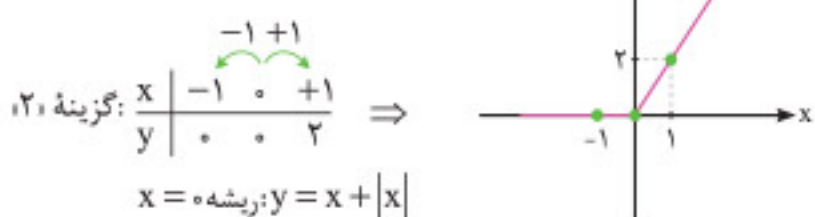
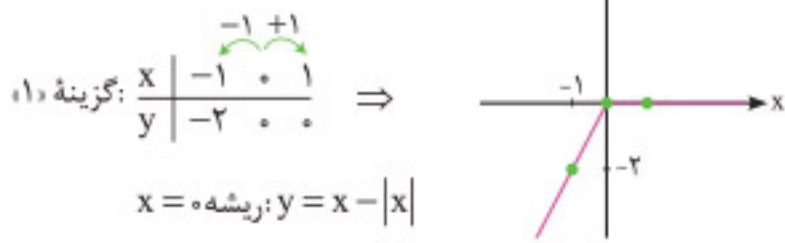
رو به بالا و اگر $a < 0$ باشه، سهمی رو به پایین.



پاسخنامه

۵۰۱. ۲

کافی به کمک نقطه‌یابی نمودار گزینه‌ها رو رسم کنیم. البته گزینه‌های ۳، ۴ و همون اول حذف میشن چون X در اون‌ها فقط داخل قدرمطلقه پس نمودارشون باید شکل V یا ۸ باشه. ولی نمودارهای گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به شکل ۸ یا V نیستن چون X هم داخل قدرمطلقه هم بیرونش:



۵۰۲. ۱

با توجه به شکل، مختصات رأس برابر $A(-4, 2)$ است، پس (-4) ریشه داخل قدرمطلق بوده و ضمناً $3b$ هم باید برابر با ۲ باشه:

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow -4 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow -8 - a = 0 \Rightarrow a = -8$$

$$3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = |x - \frac{-8}{2}| + 2(\frac{2}{3}) = |x + 4| + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(a) = f(-8) = |-8 + 4| + \frac{4}{3} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

۵۰۳. ۱

راهنمایی: در مواردی که X در ضابطه تابع هم در صورت کسره و هم در مخرج و هم قدرمطلق هم مشاهده می‌کنیم باید حتماً تابع رو دوضابطه‌ای کنیم؛ یعنی داخل قدرمطلق رو مساوی صفر قرار میدیم تا ریشه اون به دست بیاد، بعد با توجه به این عدد، تابع رو دوضابطه‌ای می‌کنیم، به طور مثال داریم:

$$y = \frac{|x-2|}{x-1} \begin{cases} \text{داخل قدرمطلق رو } x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{x-1} & x \geq 2 \\ \text{مساوی صفر قرار می‌دیم} & x < 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-1} & \end{cases}$$

حالا سراغ تابع متن سؤال میریم، ریشه داخل قدرمطلق‌ها $x=0$ است. پس داریم:

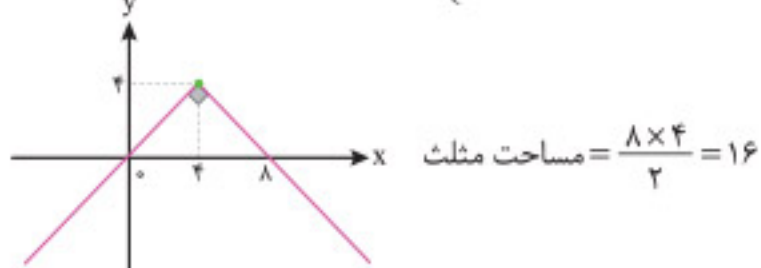
$$x > 0 \Rightarrow y = x - \frac{x}{x} = x - 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = -x - \frac{-x}{x} = -x + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

۵۰۴. ۱

نمودار تابع رو رسم کرده و ضمناً محل برخوردش با محور X ها رو پیدا می‌کنیم. $y = -|x-4| + 4 \xrightarrow{y=0} -|x-4| + 4 = 0 \Rightarrow -|x-4| = -4$

$$\Rightarrow |x-4| = 4 \Rightarrow x-4 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 4 \Rightarrow x = 8 \\ x-4 = -4 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

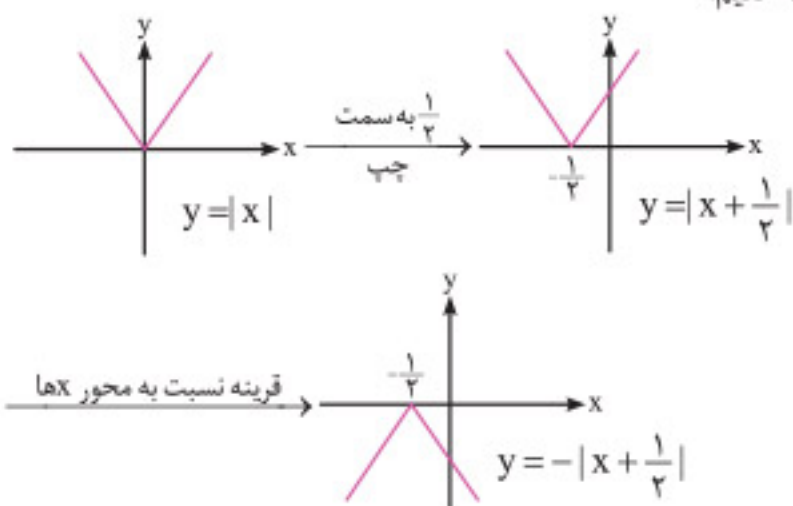


۴۹۷. ۴

قطعاً یکی از ضابطه‌های گزینه‌های ۱، ۴ و درست هستن چون در اون‌ها X فقط داخل قدرمطلقه و نمودارشون به شکل V یا ۸ است؛ الان شکل داده شده V است پس بدون هیچ حلی می‌گیریم جواب میشه گزینه ۴، چون علامت پشت قدرمطلق، مثبت.

۴۹۸. ۱

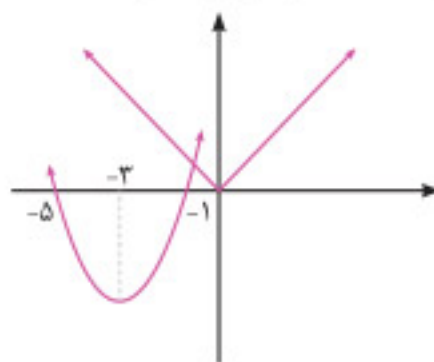
عدد $\frac{1}{4}$ که در پشت قدرمطلق قرار داده رو در داخل قدرمطلق ضرب می‌کنیم: $y = \frac{-1}{4}|2x+1| = -|\frac{1}{4}(2x+1)| = -|x + \frac{1}{4}|$ ریشه داخل قدرمطلق $x = -\frac{1}{4}$ است، پس باید نمودار $y = |x|$ رو به اندازه $\frac{1}{4}$ واحد به سمت چپ انتقال بدیم، ضمناً چون پشت قدرمطلق علامت منفی وجود داره، پس باید نمودار $|x + \frac{1}{4}|$ رو نسبت به محور X قرینه کنیم.



۴۹۹. ۴

$$y = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow y = (x+3)^2 - 4$$

هر دو نمودار رو در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



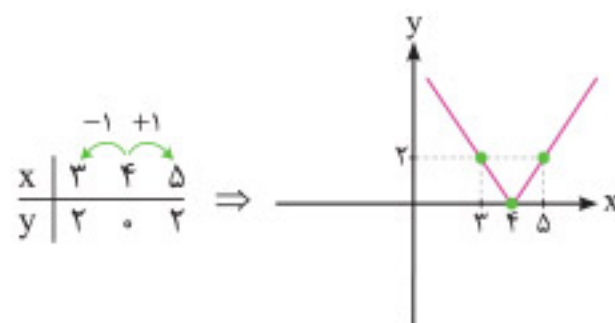
اگر نمودار رو به اندازه ۵ واحد به سمت راست انتقال دهیم، توابع در $x=0$ دارای تقاطع میشن و به مطلوب سؤال می‌رسیم.

۵۰۰. ۴

ابتدا ریشه داخل قدرمطلق رو پیدا می‌کنیم:

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

حالا به کمک دو نقطه کمکی، نمودار رو رسم می‌کنیم:



البته روش دیگه اینه که تابع رو دوضابطه‌ای کنیم ولی روش زمان‌بری هست.

آزمون ۳ پلاس ۱۴۰۴

۱. ۶۱۴

عدد $(|x|+2)$ همیشه مثبت، پس $\text{sign}(|x|+2)$ برابر با ۱ همیشه و داریم:

$$\left[\frac{x}{4}-3\right]=1 \xrightarrow{\text{تعریف برآکت}} 1 \leq \frac{x}{4}-3 < 2$$

$$\xrightarrow{+3} 4 \leq \frac{x}{4} < 5 \xrightarrow{\times 4} 16 \leq x < 20$$

حالا باید عبارت خواسته شده رو بسازیم:

$$16 \leq x < 20 \xrightarrow{\times (-2)} -24 \geq -2x \geq -40$$

$$\xrightarrow{+30} 6 \geq -2x+30 \geq 0$$

عبارت $(-2x+30)$ بین صفر و ۶ قرار داره پس برآکتش می تونه ۰، ۱، ۲، ...و ۶ باشه. \Rightarrow مجموع مقادیر ممکن $= 0+1+2+3+4+5+6=21$

۱. ۶۱۵

می دونیم عبارت زیر رادیکال، نمی تونه منفی باشه (چون فرجه رادیکال ها زوج هستن) لذا:

$$D_f: x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

رادیکال در مخرج کسر قرار داره، لذا صفر هم نمی تونه باشه.

$$D_g: 3-x > 0 \Rightarrow x < 3$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{x \geq 2\} \cap \{x < 3\} = \{2 \leq x < 3\}$$

۳. ۶۱۶

به کمک نقطه $A(2, -1)$ و شیب m معادله خط BC رو می نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx - 2m - 1$$

$$\xrightarrow{\text{یافتن طول نقطه } c} \text{یافتن طول نقطه } c \xrightarrow{y=0} mx - 2m - 1 = 0 \Rightarrow mx = 2m + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2m+1}{m}$$

عددی که پیدا کردیم در واقع همون قاعده مثلث هست. حالا عرض نقطه B رو به

$$\text{دست میاریم.} \xrightarrow{\text{یافتن عرض نقطه } B} y = 0 - 2m - 1 \Rightarrow y = -2m - 1$$

باید عدد بالا رو در یک منفی ضرب کنیم، چون ارتفاع مثلث، نمی تونه منفی باشه؛

$$\text{لذا داریم:} \quad S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\left(\frac{2m+1}{m}\right)(2m+1)}{2} = \frac{(2m+1)^2}{2m}$$

۴. ۶۱۷

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2k \\ y = x \end{cases}$$

نیمساز ربع اول و سوم

$$\xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} x^2 + x - 2k = x \Rightarrow x^2 = 2k$$

برای اینکه معادله بالا دو جواب متمایز داشته باشه، باید $2k > 0$ باشه و درنتیجه: $k > 0$

از طرفی گفته شده این سهمی با نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه برخوردی

نداره، پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2k \\ y = -x \end{cases}$$

نیمساز ربع دوم و چهارم

$$\xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} x^2 + x - 2k = -x \Rightarrow x^2 + 2x - 2k = 0$$

برای اینکه معادله بالا جواب نداشته باشه، باید $\Delta < 0$ باشه:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 2^2 - 4(1)(-2k) < 0 \Rightarrow 4 + 8k < 0 \Rightarrow 8k < -4 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (k > 0) \cap (k < -\frac{1}{2}) = \emptyset$$

۱. ۶۱۸

$$f(4) = f(a) \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow D_f = \{a, 3, 4\}, \quad R_f = \{3, b\}$$

چون دامنه و برد مساوی هستن، b حتماً باید ۴ باشه، پس:

$$D_f = \{a, 3, 4\}, \quad R_f = \{3, 4\}$$

حالا میریم سراغ a ، اگه $a = 3$ باشه f تابع نخواهد بود (چون به زوج های $(3, 4)$ و $(3, 3)$ می رسیم.) پس a فقط می تونه ۴ باشه، لذا داریم:

$$a + b + c = 4 + 4 + 3 = 11$$

۲. ۶۱۹

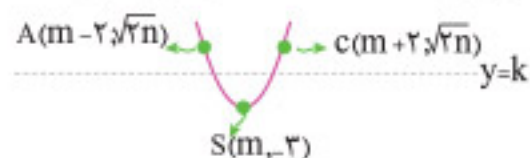
نقاط A و C هم عرض هستن، پس میانگین طول اون ها، همون طول رأس

$$x_S = \frac{m-2+m+2}{2} = m$$

خواهد بود:

از طرفی می دونیم که $B(m, -2)$ هست پس رأس، همین نقطه B هست. ازطرفی گفته شده خط افقی $y = k$ سهمی رو در دو نقطه قطع می کنه ولی باتوجه به اینکه عرض نقاط A و C از عرض رأس بیشتر هستن، پس سهمی \min داره و هر خط افقی $y = k$ که در اون $k > -2$ باشه، نمودار رو در دو نقطه

قطع می کنه.

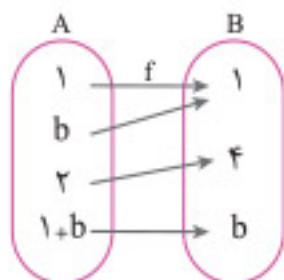
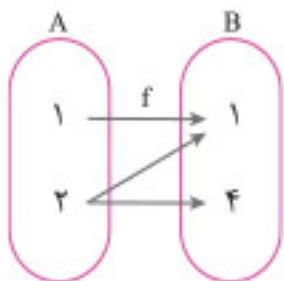
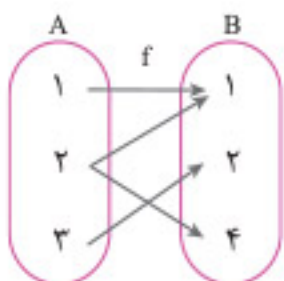
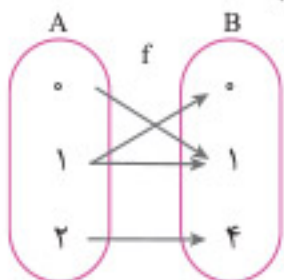


۳. ۶۲۰

از a در مجموعه A دو فلش خارج شده، پس انتهای فلش ها باید با هم برابر

$$a = 1$$

باشن:

حالا $a = 1$ رو در تابع قرار میدیم:اگه $b = 1$ باشه f تابع نخواهد بود:اگه $b = 2$ باشه باز هم f تابع نیست:و در نهایت اگه $b = 0$ باشه باز هم f تابع نخواهد بود:

آزمون پایه دهم

۲۱۵۴

روش اول: فرض می‌کنیم $t = x^2 + 2x$ ، در این صورت داریم:

$$t^2 - 11t + 24 = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} (t-3)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=8 \end{cases}$$

حالا به جای t ، عبارت اصلی‌اش رو قرار میدیم:

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{کوچکترین ریشه} - \text{بزرگترین ریشه} = 2 - (-4) = 6$$

روش دوم: به کمک اتحاد جمله مشترک، عبارت رو تجزیه می‌کنیم.

$$(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24 = ((x^2 + 2x) - 8)((x^2 + 2x) - 3)$$

$$= (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x+4)(x-2)(x+3)(x-1) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x=-4 & x=2 & x=-3 & x=1 \end{matrix}$$

$$\text{کوچکترین ریشه} - \text{بزرگترین ریشه} = 2 - (-4) = 6$$

۲۱۵۵

چون سهمی رویه پایین است، پس باید a منفی باشد. $|a|=1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 & \times \\ a=-1 & \checkmark \end{cases}$

فرمول سهمی رو به شکل $y = ax^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم. با توجه به اینکه $a = -1$ است. این تابع به شکل $y = -x^2 + bx + c$ تبدیل میشه. حالا از نقطه رأس استفاده می‌کنیم تا b و c هم به دست بیان.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-1)} = 3 \Rightarrow b = 6$$

$$y = -x^2 + 6x + c \xrightarrow[\text{رأس}]{\text{نقطه}} 2 = -2^2 + 6(2) + c \Rightarrow c = -7$$

$$f(x) = -x^2 + 6x - 7 \xrightarrow{x=1} f(1) = -1^2 + 6(1) - 7 = -1 + 6 - 7 = -2$$

۲۱۵۶

فرض می‌کنیم a و b به ترتیب طول و عرض مستطیل بزرگ باشد، بنابراین:

$$2a + 2b = 12 \Rightarrow a + b = 6$$

از طرفی:

$$6 = \text{مساحت مستطیل کوچک} - \text{مساحت مستطیل بزرگ}$$

$$ab - \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = 6$$

$$ab - \frac{ab}{4} = 6 \xrightarrow{\times 4} 4ab - ab = 24 \Rightarrow 3ab = 24$$

$$\Rightarrow ab = 8$$

$$a + b = 6 \Rightarrow a = 6 - b \Rightarrow (6-b)(b) = 8$$

$$\Rightarrow 6b - b^2 = 8 \Rightarrow b^2 - 6b + 8 = 0$$

$$(b-4)(b-2) = 0 \Rightarrow b = 4, b = 2$$

$$b = 2 \xrightarrow{a=6-b} a = 4 \checkmark$$

$$b = 4 \xrightarrow{a=6-b} a = 2 \times$$

پس عرض کوچک مستطیل کوچک‌تر $\frac{b}{2} = 1$ است.

۲۱۵۷

اختلاف سال تولد دو نفر، عددی بامعنی است. مثلاً اگر زهرا متولد سال ۷۰ و مریم متولد سال ۸۰ باشد، اختلاف اون‌ها میشه ۱۰ که نشون میده زهرا ۱۰ سال از مریم کوچک‌تره. ولی دوتا سال تولد رو همیشه به هم تقسیم کرد و جوابش بی‌معنیه، پس در گزینه ۲، متغیر کمی فاصله‌ای داریم.

۲۱۵۸

فرض می‌کنیم تعداد اولیه x نفر بوده، پس در ابتدا به هر یک $\frac{1}{x}$ کل پول می‌رسه. حالا با اضافه شدن دو نفر، به هر یک $\frac{1}{x+2}$ کل پول می‌رسه؛ در این صورت داریم:

$$24(x+2) - 24x = x(x+2) \Rightarrow 24x + 48 - 24x = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x+8)(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 & \times \\ x = 6 & \checkmark \end{cases}$$

۲۱۵۹

می‌دونیم که:

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 - \left(-\frac{11}{4}x + 15\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 + \frac{11}{4}x - 15 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - 18$$

$$\text{سود} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - 18 = 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 - 15x + 36 = 0$$

$$(x-3)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=12 \end{cases}$$

اعداد ۳ و ۱۲ نقاط سر به سر هستند. بین این دو عدد سوددهی خواهیم داشت؛ یعنی به ازای ۴، ۵، ... و ۱۱ سوددهی داریم، پس سوددهی با تولید چهارمین کالا شروع میشه.

۲۱۶۰

تمام جملات رو در $x(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$x(x+2)\left(\frac{1}{x} - \frac{2-x}{x+2}\right) = \frac{4}{x(x+2)} \Rightarrow (x+2) - x(2-x) = 4$$

$$\Rightarrow x+2-2x+x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

حال طول رأس سهمی رو به دست میاریم:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{a}{4} = 2 \Rightarrow a = 8$$

$$x = -1 \Rightarrow \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$a = 8 + (-4) = 4$$

۲۱۶۱

طبق تعریف تابع، نباید دو تا زوج مرتب با مؤلفه اول یکسان داشته باشیم مگر اینکه مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم با هم مساوی باشند.

$$\left. \begin{matrix} (2, 2m^2) \in f \\ (2, m+1) \in f \end{matrix} \right\} \xrightarrow{2=2} 2m^2 = m+1 \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9$$

$$m = \frac{+1 \pm 3}{2(2)} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال مقادیر m رو جای گذاری می‌کنیم:

$$m = 1 \Rightarrow \{(2, 2), (4, 6), (6, 3), (2, 2), (4, 3)\}$$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \{(2, \frac{1}{4}), (4, 6), (6, 3), (2, \frac{1}{4}), (3, 3)\}$$

۳. ۲۱۷۹

تابع f برای آنکه همانی باشد باید برابر با x باشد. لذا کل کسر رو مساوی با x

قرار میدیم:
$$\frac{ax^2 + bx - k}{x - 3} = x \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ax^2 + bx - k = x^2 - 3x$$

حالا به دو طرف تساوی نگاه می‌کنیم؛ در سمت چپ ضریب x^2 برابر a و در سمت راست ضریب x^2 برابر 1 است. پس: $a = 1$

در سمت چپ، ضریب x برابر b و در سمت راست، ضریب x برابر -3 است. پس: $b = -3$

در سمت چپ عدد ثابت برابر $(-k)$ و در سمت راست، عدد ثابت صفر است $(-k = 0 \Rightarrow k = 0)$ (چون عدد ثابت نداریم). لذا:

$$\Rightarrow k + a + b = 0 + 1 + (-3) = -2$$

۲. ۲۱۸۰

می‌دانیم با توجه به شکل $f(0) = 3$ و $f(4) = -1$ ، پس:

$$f(a-1) = f(0) + 2f(4) \Rightarrow f(a-1) = 3 + 2(-1)$$

$$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow f(a-1) = 1$$

حالا با توجه به شکل باید نقاطی رو پیدا کنیم که به ازای آن‌ها مقدار تابع صفر میشه که نقاط -1 ، 3 و 5 می‌باشد، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a-1 = -1 \Rightarrow a = 0 \\ a-1 = 3 \Rightarrow a = 4 \\ a-1 = 5 \Rightarrow a = 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع مقادیر ممکن}} 0 + 4 + 6 = 10$$

۳. ۲۱۸۱

تابع f به هر عدد طبیعی کوچک‌تر از 10 تعداد مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، پس:

x	مقسوم‌علیه‌ها	y
۱	۱	۱
۲	۱، ۲	۲
۳	۱، ۳	۲
۴	۱، ۲، ۴	۳
۵	۱، ۵	۲
۶	۱، ۲، ۳، ۶	۴
۷	۱، ۷	۲
۸	۱، ۲، ۴، ۸	۴
۹	۱، ۳، ۹	۳
۱۰	۱، ۲، ۵، ۱۰	۴

اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰

تعداد مقسوم‌علیه‌ها

میانگین‌ها:
$$\bar{y} = \frac{1+2+2+3+2+4+2+4+3+4}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$$

۲. ۲۱۸۲

ابتدا تابع $y_1 = \frac{3x}{x}$ رو به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y_1 = \begin{cases} \frac{3x}{x} & x > 0 \\ -\frac{3x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} 3 & x > 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{x^2 - 2}{3} \Rightarrow x^2 - 2 = 3 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} & \checkmark \\ x = -\sqrt{5} & \times \end{cases}$$

جواب ندارد. $x < 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{x^2 - 2}{-3} \Rightarrow x^2 - 2 = -3 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ پس نمودار دو تابع، فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

۳. ۲۱۷۳

نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:



$$\text{طول جعبه} = 18 \Rightarrow Q_3 - Q_1 = 18 \quad (1)$$

$$\text{دامنه تغییرات} = 29 \Rightarrow 30 - x = 29 \quad (2)$$

$$\text{طول سبیل چپ} = 4 \Rightarrow Q_1 - x = 4 \quad (3)$$

ابتدا معادله (۲) رو حل می‌کنیم:

$$30 - x = 29 \Rightarrow -x = 29 - 30 \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$$

حال $x = 1$ رو در معادله (۳) جای‌گذاری می‌کنیم: $Q_1 - 1 = 4 \Rightarrow Q_1 = 5$ حال با توجه به معادله (۱) داریم:

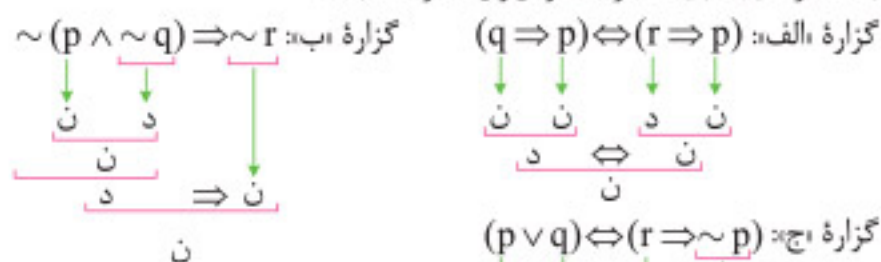
$$Q_3 - Q_1 = 18 \Rightarrow Q_3 - 5 = 18 \Rightarrow Q_3 = 23$$

$$Q_1 + Q_3 = 5 + 23 = 28$$

آزمون پایه یازدهم

۱. ۲۱۷۴

اگر ارزش $[r \Rightarrow (p \vee q)]$ درست باشد پس باید گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست باشد در نتیجه باید r درست و p و q نادرست باشد.



۲. ۲۱۷۵

$2^n =$ تعداد سطرهای جدول ارزش‌گذاری

$$\left. \begin{array}{l} n=5 \rightarrow \text{تعداد سطرها} = 2^5 = 32 \\ n=8 \rightarrow \text{تعداد سطرها} = 2^8 = 256 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جواب} = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

۲. ۲۱۷۶

مساحت زیر نمودار به ازای ساعت خواسته شده برابر مبلغ پرداختی توسط مشتری است:

$$S = 600 + 1000 + \frac{50}{60} \times 1800$$

$$\Rightarrow 600 + 1000 + 1500 = 3100$$

۱. ۲۱۷۷

$$\text{sign}(3 - 2k) = -1 \Rightarrow 3 - 2k < 0 \Rightarrow -2k < -3 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

$$\left[k - \frac{1}{3} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq k - \frac{1}{3} < 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} \leq k < 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq k < \frac{7}{3}$$

 حال اشتراک می‌گیریم:

۴. ۲۱۷۸

f تابعی ثابت است، پس مؤلفه دوم تمام زوج‌های مرتب باید ۱ باشد.

$$a^2 + 2a + 2 = 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0$$

تجزیه با اتحاد اولی: $(a+1)^2 = 0 \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$$\frac{2}{c} = 1 \Rightarrow \frac{2}{c} = \frac{1}{1} \Rightarrow c = 2$$

$$b^2 + 2b + 4 = 1 \Rightarrow b^2 + 2b + 3 = 0$$

تجزیه با جمله مشترک: $(b+3)(b+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ b = -1 \end{cases}$

حال باید $ab = 1$ باشد. با توجه به اینکه $a = -1$ پس: $-b = 1 \Rightarrow b = -1$ پس $b = -3$ غیرقابل قبول است.

$$a = -1, b = -1, c = 2 \Rightarrow (a+b)^c = (-1-1)^2 = (-2)^2 = 4$$

پاسخ‌نامه