مقدمهٔ ناشر

سلام

اولین باری که اسم «ریاضیات گسسته» را شنیدید به چه فکری افتادید؟! آدم اولش فکر می‌کند که با ریاضیاتی سروکار دارد که از همه چیز، از دنیا و از عقبا، گسسته است، رفته کناری نشسته و با قضیه‌ها و مسئله‌هایش خوش است. اما خب، اصلاً این‌طور نیست. بحث‌های ریاضیات گسسته نه تنها از دنیا نگسسته، بلکه خیلی هم کاربرد دارد. گراف، ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، احتمال و... همه از ابزارهایی هستند که در خیلی رشته‌های دیگر کاربرد دارند. فکر می‌کنم باور نمی‌کنید، می‌گویید معلم‌ها کم بودند! این نویسنده‌ها و ناشران هم شروع کرده‌اند به نصیحت که ریاضی خیلی کاربرد دارد و به دردتان می‌خورد و ... !

اما بگذارید یک کم توضیح بدهم، شاید علاقه‌مند شدید:

فکر می‌کنم همهٔ شماهایی که این کتاب را می‌خوانید در یکی از شبکه‌های اجتماعی، حالا از نوع وطنی‌اش یا خارجی، عضو هستید. از اَپ، اینترنت و... هم خیلی استفاده می‌کنید. همین موضوع‌هایی که امسال در درس ریاضیات گسسته‌تان می‌خوانید، مثلاً نظریهٔ گراف و ترکیبیات، در طراحی نرم‌افزارها و برنامه‌ریزی این چیزهایی که گفتم خیلی کاربرد دارند. اصلاً اگر این نظریه‌ها نبود، این چیزها این‌قدر که می‌بینید پیشرفت نمی‌کرد. همهٔ موضوع این است که وقتی می‌گوییم کاربرد منظورمان این نیست که بلافاصله بعد از این که درس را خواندید می‌توانید در زندگی به کارش ببرید. برای استفاده از هر کدام از این‌ها کلی سعی دیگر هم لازم است. کار خدا را چه دیده‌اید، شاید هر کدوم از شما در آینده‌ای نزدیک بشوید طراح، سازنده یا برنامه‌ریز یکی از همین‌ها. شاید مستقل از هر رشتهٔ دانشگاهی که می‌خوانید آخرِ سر، کارتان بیفتد به دنیای دیجیتال و اینترنت و... تازه اگر حتی زمینهٔ کارتان این‌ها نباشد احتمالاً برای بازاریابی، تبلیغات و فروش و... باز هم درگیر همین چیزها می‌شوید؛ پس نتیجه می‌گیریم اتفاقاً این ریاضیات گسسته نه تنها گسسته نیست بلکه خیلی هم به ما و زندگی‌مان پیوسته است.

مؤلف خوبمان، آقای دیداری، با دانش ، تجربه و دقتی بی‌نظیر این کتاب را نوشته تا خیالتان از بابت یادگیری این درس راحت باشد. الان که دارم این مقدمه را می‌نویسم از بابت خوب‌بودن کتاب خیالم راحت است اما باز هم، چون نظر شما که از این کتاب استفاده می‌کنید، برایمان بسیار مهم است و اول و آخر کیفیت کتاب به نظر شما برمی‌گردد، لطفاً برایمان بنویسید که چه‌طور بود؟ چه چیزهایی کم دارد؟ چه چیزهایی زیاد دارد و چگونه می‌تواند بهتر شود؟ منتظریم.

خوش باشید

مقدمهٔ مؤلف

چون حسابی درگیر کار بودم وقت نمی‌کردم برم دانشگاه! هر از گاهی سری می‌زدم تا ببینم چه خبر است. درس نظریهٔ اعداد داشتم. آخرهای ترم بود. رفتم دانشگاه و آن ته کلاس نشستم. استاد وسط درس‌دادن یک‌دفعه گفت: «*اون ته کلاس، سینما نیستش‌ها*». راستش را بخواهید خیلی بهم برخورد. بیست دقیقه گذشت. استاد گفت کی فلان قضیه را خوانده است که بیاید سمینار بدهد؟ (*سیستمش بیشتر سمیناری بود و خیلی درس نمی‌داد*) کسی دست بالا نبرد. از شانس، من این قضیه را حدود شش ماه پیش به دلیلی (*یه سری کلاس آمادگی برای المپیاد داشتم تو یه دبیرستانی*) خوانده بودم، ولی خب اثباتش را زیاد یادم نبود! آن حرف استاد هم هنوز توی گوشم بود.گفتم: «*خدایا برم، نرم؟*» از یک طرف اثباتش بود و از یک طرف قصهٔ حال‌گیری! خلاصه دل را به دریا زدم و دست بالا کردم. کمی تعجب کرد. بالأخره اولین جلسهٔ حضور من بود. رفتم آن جلو. نفس عمیقی کشیدم، ولی هر کاری کردم دیدم نه خیر! چیزی یادم نمی‌آید! (*حالا استرس و اینا و ...*) پیش خودم گفتم از این ستون به آن ستون فرج است، فعلاً صورت قضیه را پای تخته بنویسم شاید چیزی یادم آمد! نوشتم و دیدم نه مثل این‌که قضیه جدی است، چیزی یادم نمی‌آید. یک‌دفعه چیزی به ذهنم رسید. کتاب را بستم و گفتم: «**خب ایده بدهید، اثبات که در کتاب هست. من برای شما رونویسی کنم فایده‌ای ندارد**». دانشجوها شروع به اعتراض کردند ولی استاد از این حرف من خوشش آمد و گفت: «خب راست می‌گوید. اگر پای تخته تندتند بنویسد که فایده‌ای ندارد!» خلاصه این‌ها یک چیزی می‌گفتند و من هم کمی بحث می‌کردم و زیر زیرکی هم کتاب را نگاه می‌کردم! بالأخره هر جوری بود اثبات را تمام کردم. (*البته به دلم نچسبید. جلسهٔ بعد یه موضوع دیگه رو خیلی معلمی و به همون صورت بحث دوطرفه با دانشجوها سمینار دادم. استاد هم خیلی حال کرد و وسطش شروع کرد تعریف و تمجید! پایان ترم هم بدون این‌که ورقه‌ام رو تصحیح کنه تنها ۲۰ لیسانسمو داد. بگذریم ...*) غرضم از نقل این خاطره، آن جملهٔ قصاری بود که گفتم! اکثراً می‌پرسید: آقا چه‌جوری باید سؤال‌ها یا تست‌های ریاضی را حل کنیم؟ ببینید اگر توانستید حل کنید که کارتان درست است ولی اگر نشد تکلیف چیست؟ این‌جا نباید سریع جواب را از روی پاسخ‌نامه ببینید. خودتان را دست کم نگیرید. به ذهنتان مهلت بدهید. سعی کنید ارتباطی بین چیزهایی که می‌دانید و چیزهایی که باید به دست آورید برقرار کنید. مثال‌های حل‌شدهٔ جزوهٔ معلم یا درس‌نامهٔ کتاب‌ها را ببینید و راه‌حل را تا جایی که می‌توانید جلو بروید. اگر هنوز به جواب نرسیدید اشکالی ندارد، می‌توانید پاسخ را ببینید. اگر همهٔ این مراحل را طی کرده باشید یک «*آهان اشکالم این‌جا بود*» به خود خواهید گفت. به شما تبریک می‌گویم چون این‌جا یادگیری شما کامل شده است. بچه‌ها با این کارها آن مطلب، وارد حافظهٔ بلندمدت می‌شود و دیگر به این راحتی یادتان نمی‌رود. این است که من همیشه به بچه‌ها می‌گویم: هزار تمرینی که من برای شما حل کنم (*البته که برای یادگیری اولیهٔ لازمه!*) مثل آن یکی که خودتان حل می‌کنید نمی‌شود. آن را خودتان کشف کرده‌اید، جزئی از وجود شما شده است، لذتش هم مال خودتان است. حق ندارید خودتان را از چشیدن این لذت محروم کنید. تمام!

خب چند کلمه هم در مورد این کتاب بگویم. اول از همه این‌که درس‌نامه‌ها را حتماً بخوانید. سعی کرده‌ام با توضیحات کافی (نه اضافه) و تیپ‌بندی‌شده آن‌ها را تنظیم کنم. بعد نوبت به حل تمرین‌ها می‌رسد که الان گفتم چه کنید. مشابه همهٔ تمرین‌ها و مثال‌های درسی و امتحان نهایی‌ها را هم قرار داده‌ام، پس چاره‌ای جز نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی ندارید! در آخر هر فصل یک آزمون جمع‌بندی از مهم‌ترین مباحث اون فصل داریم که خودتون رو محک بزنید. حل ویدئویی این آزمون‌ها رو می‌تونید با اسکن QRcode موجود در شناسنامهٔ کتاب ببینید. دو امتحان ترم اول و چهار امتحان نهایی هم در انتهای کتاب گذاشته‌ام. برای نهایی حتماً حتماً(*دارم می‌گم‌ها*) آن‌ها را حل کنید چون سعی کرده‌ام دوباره تمام تمرین‌های مهم کتاب درسی پوشش داده بشود. خلاصه این‌که بخوانید و حالش را ببرید.

در پایان تشکر می‌کنم از همهٔ خیلی‌سبزی‌ها؛ از دکتر نصری و دکتر اسلامی به خاطر اعتماد دوباره. از ویراستاران محترم سرکار خانم نظری (*انصافاً دقتشون از من بیشتر بود*) خانم بهزادی و آقایان ابراهیم‌نژاد، رحیمی و صارمی و گروه لاپلاس برای ویرایش این کتاب. از همسر خوبم به خاطر همراهی صدباره، از محمدمهدی و تسنیم و حسنا به خاطر شلوغ‌کاری! از خودم به خاطر نوشتن این کتاب، از شما برای خواندن کتاب، از پردیس به خاطر آب‌وهوای خوب (*می‌خوام یه صفحه پر شه چه کنم!*) و از مسئولین محترم که با تلاش‌های شبانه‌روزی نگذاشتند قیمت دلار و سکه و ... افزایش پیدا کند تا من با آرامش خیال برای شما کتاب بنویسم.

دوست‌دار شما، دیداری

۱۴۰۱/۶/۱۵

فهرست

آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل اول

درس ۱ استدلال ریاضی

حتماً از سال گذشته یادتان هست که «به هر جملهٔ خبری که درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم.» خب ما از کجا بفهمیم که درست است یا نادرست؟ در این درس قرار است به این موضوع بپردازیم. درستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض رد می‌کنیم و گزاره‌های درست را هم با چهار روش که در ادامه خواهید دید اثبات می‌کنیم.

- گزاره
  - نادرست ← مثال نقض
  - درست
    - ← اثبات مستقیم
    - ← اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها
    - ← اثبات غیرمستقیم
    - ← اثبات بازگشتی

مثال نقض

مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است.

مثلاً یکی از دوستان! در کشفیات اخیر خودش به این نتیجه رسیده که «عدد $۳ + ۲^n$ به ازای هر عدد طبیعی n، اول است.»
ما می‌خواهیم بگوییم نه آقا داری اشتباه می‌کنی! کافی است $n = ۵$ قرار دهیم، چون $۳۵ = ۳ + ۲^۵$ می‌شود که اول نیست. با این کار، کلیت حرف او رد می‌شود، یعنی او گفته بود برای **هر عدد طبیعی n، $۳ + ۲^n$ اول است** ما می‌گوییم نه خیر! برای هر عدد طبیعی، اول نیست این هم مثال نقضش! نه این‌که هیچ وقت اول نباشد، مثلاً بعضی جاها (مثل $n = ۱,۲,۳,۴$) اول است و بعضی جاها اول نیست. برای این‌که چیزی را در ریاضی رد کنید **باید یک مثال نقض** بیاورید. *(یه دونه کافیه!)*

مثال و پاسخ

مثال **ارزش گزارهٔ «جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است» را تعیین کنید.** *(نهایی خرداد ۹۹)*

پاسخ اگر بخواهیم نشان دهیم که گزاره نادرست است باید دو عدد گنگ پیدا کنیم که جمع آن‌ها گنگ نباشد؛ خب مثلاً $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند، ولی $\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰$ می‌شود که گویا است. حواستان باشد برای این‌که برای گزاره‌های شرطی مثال نقض ارائه کنید، باید مثالی بیاورید که در **فرضیات مسئله، درست دربیاید ولی حکم را نقض کند.**

مثال نشان دهید گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، عدد $2^{2^n}+1$ اول است» نادرست است.

پاسخ باید یک عدد n پیدا کنیم به طوری که به ازای آن $2^{2^n}+1$ اول نباشد. به ازای $n=1,2,3,4$ حاصل $2^{2^n}+1$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ می‌شود که همگی اول هستند، صبر کنید نکند $2^{2^n}=4^n$ بنویسید! نه خیر وقتی پرانتز نداریم باید از توان بالا شروع کنیم مثلاً اگر $n=3$ باشد $2^{2^3}+1=2^8+1=257$ می‌شود. گفتم پیداکردن مثال نقض همیشه کار آسانی نیست! این مسئله یک مسئلهٔ تاریخی است. اصلاً تا مدت‌ها فکر می‌کرده‌اند که این دنباله، همیشه اعداد اول تولید می‌کند. بعد اویلر نشان داد که به ازای $n=5$ حاصل $2^{2^5}+1$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است، یعنی اول نیست. یادتان باشد، مثال نقض این گزاره $n=5$ است.

اثبات مستقیم

آیا جمع دو عدد فرد و زوج، همیشه فرد می‌شود؟ خب اجازه بدهید مثلاً $3=2+1$ یا $11=8+3$ یا $27=15+12$ می‌شود. به نظر می‌رسد که بله این اتفاق می‌افتد! ولی چه‌جوری می‌توانیم مطمئن بشویم؟ آیا با مثال‌آوردن می‌توانیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم؟ مسلماً نه! چون از کجا معلوم، شاید آن گزاره در آن مثال‌هایی که ما زده‌ایم درست درآمده، ولی به ازای برخی از مثال‌های دیگر که به ذهن ما نرسیده غلط باشد! پس باید درستی آن گزاره را در حالت کلی ثابت کنیم تا مطمئن بشویم که درست است نه این‌که عدد امتحان کنیم. خلاصه این‌که با مثال آوردن، چیزی ثابت نمی‌شود فقط این حدس برای ما حاصل می‌شود که گزاره **احتمالاً درست است**.

اما اثبات! خب زوج چیست؟ عددی که بر ۲ بخش‌پذیر است، پس عدد زوج را $2k$ می‌گیریم. عدد فرد هم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس عدد فرد را $2k'+1$ می‌گیریم. چرا $2k+1$ نگرفتم؟ چون خارج قسمت دو عدد در حالت کلی فرق دارند، پس اگر یکی را k گرفتم دیگری را k'. حالا:

$$2k+2k'+1=2(\underbrace{k+k'}_{q})+1=2q+1$$

جمع دو عدد به صورت $2q+1$ درآمد، یعنی فرد است. حالا دیگر مطمئن هستیم که جمع عدد فرد با عدد زوج، همواره فرد می‌شود.

تعریف اثبات مستقیم: روش اثباتی است که در آن به صورت مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.

نکته برای این‌که از اثبات مستقیم استفاده کنیم باید شکل اعداد را به درستی در نظر بگیریم:

دو عدد متوالی	n و $n+1$
دو عدد زوج متوالی	$2n$ و $2n+2$
دو عدد فرد متوالی	$2n+1$ و $2n+3$
عدد گویا	$\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0)$

عدد زوج	$2k$
عدد فرد	$2k+1$
دو عدد زوج	$2k$ و $2k'$
دو عدد فرد	$2k+1$ و $2k'+1$

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.**

پاسخ خب عدد طبیعی اول را n می‌گیریم. بعدی می‌شود $n+1$. بعدی $n+2$ و... پس داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(\underbrace{n+2}_{q})=5q$$

جمع این ۵تا عدد به صورت $5q$ درآمد (*۵ ضرب در یه عدد صحیح*) پس مضرب ۵ است.

مثال **نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.**

پاسخ تفاضل مربعات یعنی تفاضل دوتا مربع! عدد فرد اول را $2k+1$ می‌گیریم. چون گفته فرد متوالی، عدد فرد بعدی (*دوتا بیشتره*) به صورت $2k+3$ می‌شود. حالا داریم:

$$(2k+3)^2-(2k+1)^2=(4k^2+12k+9)-(4k^2+4k+1)=8k+8=8(\underbrace{k+1}_{q})=8q$$

مثال الف) **ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل درمی‌آید.**

ب) **ثابت کنید اگر $4k+1$ مربع کامل باشد، k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است.**

پاسخ **الف** ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت $n(n+1)$ می‌شود. حالا باید ثابت کنیم $4n(n+1)+1$ به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است:

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

بله واقعاً مربع کامل است! کتاب درسی همین حکم را این‌جوری گفته «اگر k، حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است»، فرقی نمی‌کند اثباتش دقیقاً به همین صورت است.

پ) $$۴k+۱=a^۲ \Rightarrow k=\frac{a^۲-۱}{۴}=\frac{a-۱}{۲}\times\frac{a+۱}{۲}$$

$۴k+۱$ فرد است پس $a^۲$ نیز عددی فرد و a هم فرد است پس $a-۱$ و $a+۱$ زوج بوده است. کسرها عددی صحیح هستند، اما $\frac{a+۱}{۲}$ و $\frac{a-۱}{۲}$ دو عدد متوالی هستند؛ چون اختلاف آن‌ها یک واحد است.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم «برای هر عدد طبیعی n، حاصل $n^۲-۳n+۷$ عددی فرد است».

خب باید کاری کنیم که $n^۲-۳n+۷$ به صورت $۲q+۱$ دربیاید. آیا همین‌جوری می‌توانیم با فاکتورگیری یا ... این کار را انجام بدهیم؟ به نظر نمی‌آید که بتوانیم چنین کاری انجام بدهیم. من می‌گویم بالأخره این n از دو حال، خارج نیست *(به اسم روش دقت کن!)* یا فرد است یا زوج. این دو حالت را جداگانه برویم جلو تا در هر کدام به $۲q+۱$ برسیم:

۱) n زوج $\Rightarrow n=۲k \Rightarrow n^۲-۳n+۷=(۲k)^۲-۳(۲k)+۷=۴k^۲-۶k+۶+۱=۲\underbrace{(۲k^۲-۳k+۳)}_{q}+۱=۲q+۱$

۲) n فرد $\Rightarrow n=۲k+۱ \Rightarrow n^۲-۳n+۷=(۲k+۱)^۲-۳(۲k+۱)+۷=۴k^۲+۴k+۱-۶k+۴=۴k^۲-۲k+۴+۱$
$=۲\underbrace{(۲k^۲-k+۲)}_{q}+۱=۲q+۱$

روش اشباع: مسئله را به چند حالت که همهٔ حالت‌ها را پوشش می‌دهد تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

هم‌ارزی روش اشباع: بچه‌ها بیایید کمی منطقی هم صحبت کنیم. زوج‌بودن n را با p و فردبودن را با q و فردبودن $n^۲-۳n+۷$ را با r نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر p یا q برقرار باشد به r می‌رسیم یعنی: $p\vee q \Rightarrow r$. به جای آن، ثابت کردیم هم از p به r می‌رسیم و هم از q به r؛ یعنی: $(p \Rightarrow r)\wedge(q \Rightarrow r)$. تعجب نکنید با استفاده از جدول ارزش یا جبر گزاره‌ها می‌توانید ثابت کنید: $\boxed{p\vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r)\wedge(q \Rightarrow r)}$

نکته در حالت کلی برای این‌که حکم q را ثابت کنید، می‌توانید فرض را به n گزارهٔ $p_۱, p_۲, \dots, p_n$ تقسیم کرده و ثابت کنید:

$$p_۱\vee p_۲\vee\dots\vee p_n \Rightarrow q$$

از طرفی:
$$(p_۱\vee p_۲\vee\dots\vee p_n) \Rightarrow q\equiv(p_۱ \Rightarrow q)\wedge(p_۲ \Rightarrow q)\wedge\dots\wedge(p_n \Rightarrow q)$$

یعنی به جای آن، ثابت کنید از هر p_i (در هر حالت) می‌توانیم حکم q را نتیجه بگیریم.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید: الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است. ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.** *(نهایی خرداد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)*

پاسخ الف) باید ثابت کنیم $n(n+۱)$ همیشه زوج است. دو حالت می‌گیریم:

۱) n زوج $\Rightarrow n=۲k \Rightarrow n(n+۱)=۲\underbrace{k(۲k+۱)}_{q}=۲q$

۲) n فرد $\Rightarrow n=۲k+۱ \Rightarrow n(n+۱)=(۲k+۱)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}=۲\underbrace{(۲k+۱)(k+۱)}_{q}=۲q$

در هر دو حالت شد $۲q$، پس n چه زوج باشد چه فرد، $n(n+۱)$ زوج می‌شود.

ب) عدد فرد را $۲k+۱$ می‌گیریم:

گفته ثابت کنید مربع این عدد به صورت $۸q+۱$ درمی‌آید: $(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}+۱=۴(۲q)+۱=۸q+۱$

بچه‌ها این نتیجه را حفظ باشید. بعداً خیلی به دردتان می‌خورد. البته در درس بعدی آن را یک‌جور دیگر هم ثابت می‌کنیم.

مثال **نشان دهید اگر $S=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ ، $A=\{۳,۴,۷\}$ ، $n\in S$ و عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، آن‌گاه $n\in A$.**

پاسخ خب بالأخره کل اعدادی که n می‌تواند باشد از ۲ تا ۷ است؛ پس بیایبم این‌ها را امتحان کنیم تا ببینیم چه موقع $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج می‌شود:

$$n=۲ \Rightarrow \frac{۴\times۹}{۴}=۹ \ \times \qquad n=۵ \Rightarrow \frac{۲۵\times۳۶}{۴}=۲۲۵ \ \times$$

$$n=۳ \Rightarrow \frac{۹\times۱۶}{۴}=۳۶ \ \checkmark \qquad n=۶ \Rightarrow \frac{۳۶\times۴۹}{۴}=۹\times۴۹ \ \times$$

$$n=۴ \Rightarrow \frac{۱۶\times۲۵}{۴}=۱۰۰ \ \checkmark \qquad n=۷ \Rightarrow \frac{۴۹\times۶۴}{۴}=۱۶\times۴۹ \ \checkmark$$

پس می‌بینید اگر $n=۳,۴,۷$ باشد، عبارت داده‌شده زوج می‌شود؛ یعنی $n\in A$.

نکته اگر عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، $n=۴k$ یا $n=۴k+۳$. (دقت کنید اعداد ۳ و ۷ به صورت $۴k+۳$ و عدد ۴ به صورت $۴k$ است.)

مثال **ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.**

پاسخ سه عدد طبیعی متوالی را می‌توانیم n، $n+۱$ و $n+۲$ بگیریم. باید ثابت کنیم $n(n+۱)(n+۲)=۳q$. خب n چه حالت‌هایی می‌تواند داشته باشد؟ اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر ۰، ۱ یا ۲ می‌تواند داشته باشد، پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $n=۳k$ باشد. در این حالت:
$$n(n+۱)(n+۲)=۳\underbrace{k(۳k+۱)(۳k+۲)}_{q}=۳q$$

۲) $n=۳k+۱$ باشد. این‌جا هم:
$$n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۱)(۳k+۲)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}=۳\underbrace{(۳k+۱)(۳k+۲)(k+۱)}_{q}=۳q$$

۳) $n=۳k+۲$ باشد. این‌جا هم:
$$n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۲)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}(۳k+۴)=۳\underbrace{(۳k+۲)(k+۱)(۳k+۴)}_{q}=۳q$$

پس ضرب سه عدد متوالی، همیشه مضرب ۳ است. در مثال قبلی ثابت کردیم مضرب ۲ هم است، پس ضرب ۳ عدد متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است. اگر سه عدد طبیعی متوالی را به صورت $n-۱,n,n+۱$ نمایش می‌دادیم، می‌شد:
$(n-۱)(n)(n+۱)=n^۳-n$ همیشه بر ۶ بخش‌پذیر است. این هم تو کتاب درسی است. اگر گفتند این را اثبات کنید دقیقاً مثل همین کارهایی است که انجام دادیم. بد نیست بدانید حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متوالی، همیشه بر $n!$ بخش‌پذیر است. *(البته اثباتش با اطلاعات فعلی شما دشواره!)*

مثال **ثابت کنید اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه $a^۲=۳q+۱$. سپس نتیجه بگیرید به ازای هر دو عدد صحیح x,y عبارت $xy(x^۲-y^۲)$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.**

پاسخ با روش اشباع برویم. در مثال قبلی گفتیم a سه حالت می‌تواند داشته باشد، ولی چون گفته a مضرب ۳ نیست، پس فقط دو حالت می‌ماند:

۱) $a=۳k+۱$ باشد:
$$a^۲=(۳k+۱)^۲=۹k^۲+۶k+۱=۳\underbrace{(۳k^۲+۲k)}_{q}+۱=۳q+۱$$

۲) $a=۳k+۲$ باشد:
$$a^۲=(۳k+۲)^۲=۹k^۲+۱۲k+\overset{۳+۱}{۴}=۳\underbrace{(۳k^۲+۴k+۱)}_{q}+۱=۳q+۱$$

پس اگر a مضرب ۳ نباشد، $a^۲$ به صورت $۳q+۱$ است. حالا اگر از x,y حداقل یکی بر ۳، بخش‌پذیر باشد که $xy(x^۲-y^۲)$ بر ۳ می‌خورد، اما اگر هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، طبق چیزی که الان ثابت کردیم مربع هر دو به صورت $۳q+۱$ هستند؛ پس:

$$xy(x^۲-y^۲)=xy(۳q+۱-(۳q'+۱))=xy(۳(q-q'))=۳t$$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

گفتیم که هر گزاره یا درست است یا نادرست. حالا اگر من به شما بگویم یک گزاره نمی‌تواند نادرست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ خب نتیجه می‌گیریم درست است. این اساس روش برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم است. روش کار به این صورت است که:

۱) خلاف حکم (*دقت کردی خلاف حکم*) را در نظر می‌گیریم. **یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.**

۲) با قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به **یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض** می‌رسیم.

۳ فرضِ نادرست‌بودن حکم باطل بوده و درستی خود حکم ثابت می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر $\underbrace{\text{r عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد}}_{\text{فرض}}$، $\underbrace{\text{آن‌گاه rx گنگ است}}_{\text{حکم}}$

۱ خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی فرض کنیم rx گویا باشد، پس $rx = a$ که a گویا است.

۲ $x = \frac{a}{r}$ اما تقسیم دو عدد گویا $(\frac{a}{r})$ که مخرج هم صفر نیست گویا است، پس x گویا است.

۳ به تناقض رسیدیم (ثابت کردیم x گویا است در صورتی که x گنگ بود)، پس خلاف حکم، باطل و خود حکم درست است.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.**

پاسخ فرض کنید a عددی گویا و x عددی گنگ باشد. گفته ثابت کنید $a + x$ گنگ است (حکم). باید خلاف حکم را در نظر بگیریم. یعنی «$a + x$ گنگ نیست، یعنی گویا است» حالا باید این را به تناقض برسانیم.

$a + x$ گویا است، پس برابر با عدد گویایی مثل b می‌شود. حالا: $a + x = b \Rightarrow x = b - a$

با اثبات مستقیم به راحتی ثابت می‌شود جمع و تفریق و ضرب و تقسیم *(مخرج صفر نباشه)* دو عدد گویا، گویا است *(جمع دو تا کسر گویا، کسر گویا میشه)* پس $b - a$ گویا است. از طرفی x گنگ بود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و در نتیجه خود حکم درست است. **معمولاً برای اثبات گنگ‌بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم.**

نکته در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب اعداد داریم:

	جمع و تفریق (نوع اثبات)	ضرب
هر دو گویا	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ	گنگ (برهان خلف)	(اگر عدد گویا صفر باشد، صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)
هر دو گنگ	ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا

مثال و پاسخ

مثال **نشان دهید اگر $n^۲$ فرد باشد، آن‌گاه n هم فرد است.**

پاسخ اگر بخواهیم به صورت مستقیم اثبات کنیم باید از $n^۲ = ۲k + ۱$ به $n = ۲q + ۱$ برسیم، ولی خب شما را نمی‌دانم ایده‌ای به ذهن من نمی‌رسد! به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت کنیم خیلی راحت می‌شود. خلاف حکم می‌شود «n فرد نیست»، یعنی n زوج است؛ پس:

$$n = ۲k \Rightarrow n^۲ = ۴k^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲)}_{q} = ۲q$$

این آخری می‌گوید $n^۲$ زوج است در صورتی که فرض می‌گوید $n^۲$ فرد است، پس به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و خود حکم درست است.

مثال **a, b, c, d چهار عدد طبیعی فرد هستند. نشان دهید معادلهٔ $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d} = ۱$ جواب ندارد.**

پاسخ فرض کنیم معادله، دارای جواب باشد، یعنی اعداد فرد a, b, c, d وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند.

با مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = ۱ \Rightarrow bcd + acd + abd + abc = abcd$$

چون a, b, c, d فرد هستند $abcd$ فرد می‌شود. از طرفی عبارت‌های سمت چپ نیز همگی فرد هستند، اما جمع چهار عدد فرد، زوج می‌شود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم چون سمت راست فرد ولی سمت چپ عددی زوج است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و معادله در اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

مثال **نشان دهید اگر $a^۲ + b^۲$ فرد باشد آن‌گاه a فرد است یا b فرد است.**

پاسخ حکم گفته «a فرد یا b فرد». اگر بخواهیم با برهان خلف برویم خلاف حکم با استفاده از قانون دمورگان می‌شود «a زوج و b زوج»، *(یادتونه دیگه $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$)* حالا:

$$a = ۲k, b = ۲k' \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۴k^۲ + ۴k'^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۲k'^۲)}_{q} = ۲q$$

این یعنی $a^۲ + b^۲$ زوج می‌شود در صورتی که فرض می‌گوید فرد است. تناقض حاصل، می‌گوید فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

مثال و پاسخ

مثال a_1، a_2 و a_3 عددهای صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری هستند. ثابت کنید $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$ زوج است.

پاسخ فرض کنیم $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$ زوج نباشد، یعنی فرد باشد. خب ضرب ۳ عدد، فرد شده است، پس هر سه تا فرد بوده‌اند، یعنی a_1+b_1، a_2+b_2 و a_3+b_3 همگی فرد بوده‌اند. جمع سه عدد فرد، فرد می‌شود، یعنی $A=a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$ فرد است.

از طرفی $A=a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)$ و $b_1+b_2+b_3=a_1+a_2+a_3$ می‌شود، پس $A=2(a_1+a_2+a_3)$ شده، یعنی A زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل و $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$ عددی زوج است.

نکته دقیقاً با همین روش می‌توانستیم ثابت کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ نیز زوج است. برای ایجاد تناقض $A=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ عددی فرد است، اما: $A=(a_1+a_2-a_3)-(b_1+b_2+b_3)=0$

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزارهٔ هم‌ارز: دو گزارهٔ P و Q را هم‌ارز گوییم هرگاه ارزش یکسانی (هر دو درست یا هر دو نادرست) داشته باشند.

ترکیب دوشرطی: ترکیب دوشرطی دو گزاره را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم. این گزاره وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. به عبارت دیگر ارزش‌های یکسانی داشته باشند.

خب حالا یک سؤال: اگر $p \Leftrightarrow q$ درست و q هم درست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ معلوم است که p هم باید درست باشد. اگر $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s$ درست و s هم درست باشد چه‌طور؟ نتیجه می‌گیریم r، q و p هم‌ارزش و چون s درست است پس r، q و p هم درست می‌شوند. اساس کار اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (یا اثبات بازگشتی) همین است. مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم:

«برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$» (همین دو بار تا حالا تو نهایی اومده)

یک مخرج‌مشترک می‌گیریم: $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$. ببینید الان ترکیب دوشرطی $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ba}\geq 2$ درست است؛ چون هر طرف که درست باشد نتیجه می‌شود طرف دیگر هم درست است (و نادرست هم باشه اون طرف نادرسته!). چون $ab>0$، با ضرب دو طرف در آن داریم $a^2+b^2\geq 2ab$ و با بردن $2ab$ به طرف دیگر: $a^2+b^2-2ab\geq 0$. خب $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ پس می‌شود $(a-b)^2\geq 0$. پس تا این‌جا شد:

$$\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{a^2+b^2}{ba}\geq 2}_{q} \xleftrightarrow{ab>0} \underbrace{a^2+b^2\geq 2ab}_{r} \Leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2-2ab\geq 0}_{s} \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$

دوباره به سؤالی که در بالا جواب دادید دقت کنید. $(a-b)^2\geq 0$ همواره درست است. تمام ترکیب‌های دوشرطی هم درست هستند پس تمام گزاره‌های s، r، q و p هم درست هستند. حکم هم همان p بود که درستی آن ثابت شد.

روش اثبات حکم p با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی): سعی می‌کنیم با اعمال دوطرفهٔ ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، ترکیب‌های درست دوشرطی $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ بسازیم تا جایی که به یک رابطهٔ همواره درست برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب‌های دوشرطی هم درست هستند. پس هم گزاره‌ها هم‌ارزش بوده و هم حکم p هم درست می‌شود (یعنی ثابت می‌شه).

نکته درستی نامساوی‌ها معمولاً به روش گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی) ثابت می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$. *(نهایی دی ۹۷ و شهریور ۹۸)*

پاسخ از گزاره‌های هم‌ارز کمک می‌گیریم و سعی می‌کنیم حکم را به یک عبارت همواره درست برسانیم. عبارت‌های همواره درستی که در این‌جا ظاهر می‌شوند معمولاً به صورت جمع چند عبارت درجه‌دوم است. در اتحاد مربع، $2ab$ ظاهر می‌شود پس ضرب دو طرف در ۲، ایدهٔ خوبی می‌تواند باشد:

$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b \xleftrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2\geq 2ab+2a+2b \Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+1+1-2ab-2a-2b\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2\geq 0$$

این آخری همواره درست است، پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم ثابت می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال فرض کنید a,b,c سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید: $(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})\geq ۹$

پاسخ آن پرانتزهای سمت چپ را ضرب کرده و ساده می‌کنیم تا ببینیم چه درمی‌آید:

$$(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})\geq ۹ \Leftrightarrow ۱+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+۱+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+۱\geq ۹$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-۲)+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-۲)+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-۲)\geq ۰ \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^۲}_{\text{(باز کن ببین همون میشه)}}+(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}})^۲+(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}})^۲\geq ۰$$

آخرین رابطه همواره درست بوده و همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

مثال a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}}$.

پاسخ a,b هر دو مثبت هستند، پس $\sqrt{ab}$ تعریف‌شده و مثبت است. حالا:

$$\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b}}_{\sqrt{ab}}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \xleftrightarrow{\times\sqrt{ab}} \sqrt{b}+\sqrt{a}\geq\sqrt{a+b}$$

حالا چون هر دو طرف مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم ($a,b>۰: a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ *یادته؟*)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b}+\sqrt{a})^۲\geq\sqrt{a+b}^۲ \Leftrightarrow b+a+۲\sqrt{a}\sqrt{b}\geq a+b \Leftrightarrow ۲\sqrt{a}\sqrt{b}\geq ۰ \text{ همواره برقرار}$$

این آخری همواره درست است. همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند پس حکم ثابت می‌شود.

مثال آیا ترکیب $a^۲<b^۲ \Leftrightarrow a<b$ درست است؟ a,b چه شرطی داشته باشند تا این ترکیب دوشرطی درست باشد؟ *(نهایی شهریور ۹۹ با تغییر)*

پاسخ اگر $a<b$ باشد می‌توانیم الزاماً بگوییم $a^۲<b^۲$؟ خب نه! مثلاً $-۳<۱$ است، ولی $۹ \not< ۱$.

پس $a<b \Rightarrow a^۲<b^۲$ نادرست است. برعکس هم در حالت کلی نادرست است. اما اگر a,b هیچ‌کدام منفی نباشند، این ترکیب دوشرطی درست است. خلاصه این‌که اگر $a,b\geq ۰$ باشند: $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ درست است.

خوب است یک جمع‌بندی روی چهار روش اثبات داشته باشیم:

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها	n را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر n می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ‌بودن اعداد ـ هرجا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطهٔ همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها

سؤال‌های امتحانی

۱- جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

الف) برای اثبات نادرستی یک گزاره از .... استفاده می‌کنیم.

ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی .... است. (گویا / گنگ) *(نهایی دی ۱۴۰۰)*

پ) میانگین حسابی دو عدد x و y برابر .... و میانگین هندسی دو عدد x و y برابر .... است.

ت) اگر $۷ab$ عددی فرد باشد، حاصل $a^۲+b^۲$ عددی .... است.

ث) در روش برهان خلف از خلاف .... به .... می‌رسیم.

۲- گزاره‌های زیر را با ارائهٔ مثال نقض مناسب رد کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است. *(نهایی شهریور ۹۸)*

ب) معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

پ) ضرب دو عدد گنگِ غیرمساوی، عددی گنگ است.

ت) ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ می‌شود.

۳- نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $\alpha+\beta$ گنگ باشد، $\alpha-\beta$ هم گنگ است.

ب) اگر α,β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ گنگ است.

پ) اگر a,b دو عدد حقیقی باشند که $ab=0$، آن‌گاه $a=0 \wedge b=0$.

ت) اگر $A\cap B=A\cap C$ باشد، آن‌گاه $B=C$.

ث) برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x,y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. (نهایی شهریور ۹۹)

۴- درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. ☑ ☒

الف) اگر a و b دو عدد حقیقی باشد و $ab=0$، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$. ☐ ☐ (نهایی شهریور ۹۹)

ب) هیچ دو عدد صحیحی مانند y و x وجود ندارند که رابطهٔ $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشد. ☐ ☐ (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

پ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است. ☐ ☐ (نهایی دی ۹۷)

۵- درستی گزاره‌های زیر را به صورت مستقیم ثابت کنید.

الف) جمع دو عدد گویا، گویا است. (مشابه تمرین کتاب)

ب) اگر n عددی فرد باشد، مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش‌پذیر است.

پ) میانگین هفت عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی می‌شود. (مشابه تمرین کتاب)

ت) اگر a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $a(a+3)$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

ث) اگر مربع عددی فرد را با ۳ برابر عددی زوج جمع کنیم، حاصل فرد می‌شود.

ج) برای هر عدد طبیعی زوج n، n^2-5n+7 عددی فرد است. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

۶- گزاره‌های زیر را ثابت کرده یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) به ازای هیچ دو عدد اول a,b، عدد $a+b$ اول نمی‌شود.

ب) اگر از مکعب عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل عددی زوج می‌شود.

پ) مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین کتاب)

ت) اگر a,b,c سه عدد طبیعی باشند، $a\sqrt{bc}$ گنگ است.

ث) ضرب ۳ عدد زوج متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

ج) اگر a,b دو عدد صحیح و $3ab$ عددی فرد باشد، a^2+b^2 عددی زوج است. (مشابه تمرین کتاب)

۷- ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی که عدد وسطی فرد است بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۸- گزاره‌های زیر را ثابت کنید. (به روش اشباع)

الف) برای هر عدد طبیعی n، عبارت n^2+5n-7 عددی فرد است. (مشابه تمرین کتاب)

ب) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد n^2+2 بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

پ) اگر n عددی طبیعی و $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد، $n=4q$ یا $n=4q+3$.

۹- گزارهٔ «اگر $(a-1)b=0$ باشد، آن‌گاه $a=1$ یا $b=0$» را ثابت کنید. (مشابه تمرین کتاب)

۱۰- فرض کنیم $A=\{3,4,5\}$ و $S=\{2,3,4,5,6\}$، اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج باشد و $n\in S$، ثابت کنید $n\in A$. (مشابه تمرین کتاب)

۱۱- ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۱۲- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt[3]{\sqrt{2}+2}$ نیز گنگ است.

۱۳- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ نیز عددی گنگ است.

۱۴- فرض کنید n عددی طبیعی و $3n-2$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n نیز فرد است.

۱۵- ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۱۶- الف) فرض کنید α,β دو عدد گنگ باشند به طوری که $\alpha+\beta$ گویا باشد. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. (نهایی دی ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

ب) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است. (نهایی دی ۹۷)

۱۷- فرض کنید a عدد گویای غیرصفر و x عددی گنگ باشد. ثابت کنید ax گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۱۸- b^2 و a دو عدد گنگ هستند به طوری که ab عددی گویا است. ثابت کنید $\frac{a}{b}$ گنگ است.

۱۹- نشان دهید اگر ضرب دو عدد طبیعی a,b زوج باشد، آن‌گاه a زوج یا b زوج بوده است.

۲۰- الف) همهٔ جواب‌های معادلهٔ $(a+b)^2=a^2+b^2$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب)

ب) همه جواب‌های طبیعی معادلهٔ $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب)

۲۱- a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 عددهای صحیح هستند. b_1، b_2، b_3، b_4 و b_5 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند.
(مثلاً ۱,۲,۳,۴,۵ و ۳,۲,۱,۵,۴) ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_5-b_5)$ عددی زوج است. *(مشابه تمرین کتاب)*

۲۲- کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ چرا؟ *(مشابه تمرین کتاب)*

الف) n^2 زوج است اگر و فقط اگر n زوج باشد.

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

پ) $x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$.

ت) $x \le 1 \Leftrightarrow x^3 \le x^2$.

۲۳- احکام زیر را ثابت کنید.

الف) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. *(نهایی خرداد ۹۸ و شهریور ۹۹)*
(به $\frac{x+y}{2}$ میانگین حسابی دو عدد و به $\sqrt{xy}$ میانگین هندسی دو عدد می‌گوییم.)

ب) اگر $a < 0$ باشد، آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \le -2$. *(مشابه نهایی دی ۹۸)*

پ) a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $3 + a^2 + b^2 + c^2 \ge 2(a+b+c)$ *(مشابه تمرین کتاب)*

ت) a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$.

ث) x,y دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $x^2y^2 \le (\frac{x^2+y^2}{2})^2$.

۲۴- احکام زیر را ثابت کنید.

الف) a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$. *(مشابه تمرین کتاب)*

ب) برای اعداد حقیقی ناصفر و هم‌علامت a,b ثابت کنید: $\frac{-4a-5b}{2a} \ge \frac{5a-3b}{b}$.

پ) برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید: $a^2 - ab + b^2 \ge 0$. *(مشابه تمرین کتاب)*

۲۵- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌هاست. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

۲۶- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x,y داریم: $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) \ge 4$.

۲۷- برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2$.

۲۸- گزاره‌های درست را ثابت کرده و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^4 + 1 \ge x^3 + x$.

ب) اگر x گنگ باشد، $3x^2 + 18x + 4$ نیز گنگ است.

پ) ضرب هر چهار عدد طبیعی متوالی از مربع کامل یک واحد کم‌تر است.

۲۹- ثابت کنید $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$. *(مشابه تمرین کتاب)*

۳۰- ثابت کنید اگر x، y و $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ گویا باشند، آن‌گاه $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ هر دو گویا هستند.

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح - بخش اول

رابطهٔ عادکردن (شمردن)

عدد ۶ را در نظر بگیرید. ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است. چرا؟ چون عددی صحیح، مثل ۳ وجود دارد که $6 = 3 \times 2$ می‌شود. این را این‌جوری می‌نویسیم $2|6$ و می‌خوانیم «عدد ۲، عدد ۶ را عاد می‌کند یا می‌شمرد یا ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است» یا مثلاً $7|-14$ چون $-14 = (-2) \times 7$ می‌شود، ولی $2 \nmid 5$ چون عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شده و حاصل برابر ۵ شود. در حالت کلی داریم:

تعریف رابطهٔ عادکردن: a و b دو عدد صحیح هستند؛ می‌گوییم، عدد a، عدد b را عاد می‌کند (می‌شمرد) و می‌نویسیم $a|b$ هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد که $aq = b$. به زبان ریاضی: $a|b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}\,;\, aq = b$

تذکر همهٔ اعدادی مثل a، b و x و ... که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم، صحیح هستند.

- $1|17$ چون $17 = 1 \times 17$. شبیه همین $-1|17$ چون $17 = (-17) \times -1$. اصلاً یک چیزی ± 1 همهٔ اعداد را عاد می‌کنند. پس $\boxed{\pm 1|a}$.
- $3|3$ یا $-7|7$ در حالت کلی هر عددی، خودش و قرینه‌اش را عاد می‌کند یعنی $\boxed{\pm a|\pm a}$.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) مثال نقض

ب) ضرب عدد گویای ناصفر در عدد گنگ، گنگ است.

پ) $\sqrt{xy}-\frac{x+y}{۲}$

ت) $۷ab$ فرد باشد، b و a فرد پس $b^۲$ و $a^۲$ هم فرد ولی $a^۲+b^۲$ زوج است.

ث) حکم ـ خلاف فرض یا امر بدیهی

۲- الف) اگر $n=۴$ بگیریم، $۲^۴-۱=۱۵$ می‌شود که اول نیست.

ب) معکوس عدد ۳ برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌شود، اما $۳\not\leq\frac{۱}{۳}$.

پ) دو عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۸}$ بگیریم، اما $۴=\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ می‌شود که عددی گویا است.

ت) عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ می‌گیریم. $۰\times\sqrt{۲}=۰$ می‌شود که عددی گویا است.

۳- در گزاره‌های شرطی باید مثالی بزنیم که در فرض درست دربیاید ولی در حکم غلط باشد تا ترکیب شرطی نادرست باشد.

الف) $\alpha=\beta=\sqrt{۲}$ بگیریم $\alpha+\beta=۲\sqrt{۲}$ گنگ می‌شود، ولی $\alpha-\beta=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰$ گنگ نبوده و گویا است.

ب) اول دقت کنید که $\frac{۱}{۲}+\frac{\alpha}{۲\beta}=\frac{\alpha+\beta}{۲\beta}$ می‌شود. اگر $\alpha=\sqrt{۸}$ و $\beta=\sqrt{۲}$ بگیریم داریم:

$$\frac{\alpha}{۲\beta}+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$ (که گویا شد)

پ) اگر $a=۰$ و $b=۱$ بگیریم $ab=۰$ می‌شود، ولی $a=۰\wedge b=۰$ نادرست است. چرا؟

ترکیب عطفی وقتی درست می‌شود که هر دو درست باشند. در این مثالی که زدیم $a=۰$ درست است ولی $b=۰$ نه! توجه کنید که اگر این‌جوری نوشته بود «$ab=۰ \Rightarrow a=۰\vee b=۰$» درست می‌شد، یعنی اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، نتیجه می‌گیریم **حداقل یکی برابر صفر است، یعنی اولی صفر بوده است یا دومی.**

ت) اگر $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۱,۳\}$ و $C=\{۱,۴\}$ بگیریم $\underbrace{A\cap B}_{\{۱\}}=\underbrace{A\cap C}_{\{۱\}}$ می‌شود ولی $B\neq C$.

ث) کافی است $x=۹, y=۴$ بگیریم $\sqrt{۱۳}=\sqrt{۹+۴}\neq\sqrt{۹}+\sqrt{۴}=۳+۲=۵$.

۴- الف) درست است. با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها حکم را ثابت می‌کنیم. دو حالت داریم، بالأخره $a=۰$ یا $a\neq۰$:

۱) اگر $a=۰$ باشد که حکم ثابت شده است.

۲) اگر $a\neq۰$ باشد، با ضرب دو طرف رابطهٔ $ab=۰$ در $\frac{۱}{a}$ داریم: $ab=۰\xrightarrow{\times\frac{۱}{a}}b=۰$

پس باز هم حکم نتیجه می‌شود.

ب) نادرست است. $x=y=۰$ وجود دارد.

پ) درست است. اگر $k=n(n+۱)$ بگیریم، داریم: $۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$

۵- الف) مجموعهٔ اعداد گویا به صورت $Q=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq۰\}$ تعریف می‌شود، یعنی مجموعهٔ اعداد گویا شامل کسرهایی هستند که صورت و مخرج عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. فرض کنیم $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ گویا باشند. $(d,b\neq۰)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

چون a,b,c,d صحیح هستند، صورت و مخرج صحیح هستند و چون b و d هیچ‌کدام صفر نیستند $bd\neq۰$، پس $\frac{ad+bc}{bd}$ حتماً عددی گویا است.

ب) n عدد طبیعی متوالی را $n,n+۱,n+۲,\dots,n+(n-۱)$ می‌گیریم. حالا: (چرا تا $n-۱$ رفت؟ ببین از $n+۰$ رفت تا $n+(n-۱)$)

$$n+(n+۱)+(n+۲)+\cdots+n+(n-۱)=n\times n+(\underbrace{۱+۲+\cdots+n-۱}_{\text{(مجموع n-۱ جملهٔ دنبالهٔ حسابی)}})=n^۲+\frac{(n-۱)(n)}{۲}$$

n عددی فرد است، پس $n-۱$ زوج بوده یعنی $q=\frac{n-۱}{۲}$؛ پس: $n^۲+q(n)=n(\underbrace{n+q}_{q'})=nq'$

پ) هفت عدد طبیعی را به صورت $n,n+۱,n+۲,\underline{n+۳},n+۴,n+۵,n+۶$ در نظر می‌گیریم. میانگین این‌ها می‌شود:

$$\frac{n+n+۱+n+۲+n+۳+n+۴+n+۵+n+۶}{۷}=\frac{۷n+۲۱}{۷}=n+۳$$

یعنی میانگین برابر عدد وسطی می‌شود. در حالت کلی میانگین تعداد فردی عدد، که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، برابر همان عدد وسطی می‌شود.

ت) گفته a مضرب ۳ باشد، پس $a=۳k$ می‌گیریم.

$$a(a+۳)=۳k(۳k+۳)=۳k(۳(k+۱))=۹\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}=۹(۲q)=۱۸q$$

ث) عدد فرد را $۲k+۱$ و عدد زوج را $۲q$ می‌گیریم. حالا داریم:

$$(۲k+۱)^۲+۳(۲q)=۴k^۲+۴k+۱+۶q=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k+۳q)}_{q'}+۱=۲q'+۱$$

ج)

$$n=۲k \Rightarrow (۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱=۲\underbrace{(۲k^۲-۵k+۳)}_{q}+۱=۲q+۱$$

۶- الف) اگر بخواهیم این را رد کنیم باید دو عدد اول پیدا کنیم که جمع آن‌ها اول بشود. خب خیلی ساده $a=۲$ و $b=۳$ می‌گیریم. (پس دو عدد اول a,b وجود دارد به طوری که $a+b$ هم اول بشود).

ب) عدد فرد به هر توانی برسد، فرد می‌شود حالا اگر یک واحد کم کنیم زوج می‌شود. این را ثابت می‌کنیم:

$$(۲k+۱)^۳-۱=۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱-۱=۲\underbrace{(۴k^۳+۶k^۲+۳k)}_{q}=۲q$$

پ) اولین عدد طبیعی فرد اول را $۲k+۱$ می‌گیریم. بعدی دو واحد بیش‌تر است پس عدد فرد بعدی $۲k+۳$ و بعدی $۲k+۵$ می‌شود. حالا:

$$۲k+۱+۲k+۳+۲k+۵=۶k+۹=۳\underbrace{(۲k+۳)}_{q}=۳q$$

ت) کافی است $a=۱$ و $b=c=۲$ بگیریم تا $a\sqrt{bc}=۲$ بشود. این مثال نقض یعنی چیزی که گفته غلط است.

ث) به نظر می‌رسد که درست باشد (*چندتا عدد امتحان کنین!*) اولین زوج اول را $۲k$، بعدی را $۲k+۲$ و بعدی را $۲k+۴$ می‌گیریم. حالا:

$$(۲k)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}\overbrace{(۲k+۴)}^{۲(k+۲)}=۸\underbrace{k(k+۱)(k+۲)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۶ و در نتیجه مضرب ۳ است.}}=۸(۳q)=۲۴q$$

ج) گفته $۳ab$ عددی فرد باشد، پس a,b باید عددی فرد باشند (*تا ضربشون فرد بشه*)، یعنی $a=۲k+۱$ و $b=۲q+۱$. حالا:

$$a^۲+b^۲=(۲k+۱)^۲+(۲q+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴q^۲+۴q+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k+۲q^۲+۲q+۱)}_{t}=۲t$$

۷- عدد فرد وسطی را $۲k+۱$ می‌گیریم. یکی بیش‌تر $۲k+۲$ و یکی کم‌تر $۲k$ می‌شود. حالا داریم:

$$(۲k)(۲k+۱)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}=۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}(۲k+۱)=۴(۲q)(۲k+۱)=۸q(۲k+۱)$$

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. پس ضرب این سه عدد هم مضرب ۳ بوده و هم مضرب ۸، یعنی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۸- الف) دو حالت در نظر می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

۱) $n=۲k$، پس:

$$n^۲+۵n-۷=(۲k)^۲+۵(۲k)-۷=۴k^۲+۱۰k-۷=۴k^۲+۱۰k-۸+۱$$

$$=۲\underbrace{(۲k^۲+۵k-۴)}_{q}+۱=۲q+۱ \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

۲) $n=۲k+۱$، پس:

$$n^۲+۵n-۷=(۲k+۱)^۲+۵(۲k+۱)-۷=۴k^۲+۴k+۱+۱۰k+۵-۷$$

$$=۴k^۲+۱۴k-۱=۴k^۲+۱۴k-۲+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۷k-۱)}_{q}+۱=۲q+۱ \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

پس در دو حالت، حاصل عددی فرد است، این یعنی به ازای هر عدد طبیعی n، حاصل فرد می‌شود.

ب) دو حالت در نظر می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

$$۱)\ n=۲k \Rightarrow n^۲+۲=(۲k)^۲+۲=۴k^۲+۲=۴q+۲$$

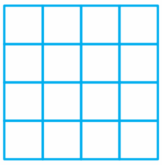
$$۲)\ n=۲k+۱ \Rightarrow n^۲+۲=(۲k+۱)^۲+۲=۴k^۲+۴k+۳=۴\underbrace{(k^۲+k)}_{q}+۳=۴q+۳$$

پس در هیچ‌کدام از دو حالت، n به صورت $۴q$ درنمی‌آید (باقی‌مانده دارد)، پس هیچ گاه $n^۲+۲$ بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود.

پ) دو حالت در نظر می‌گیریم:

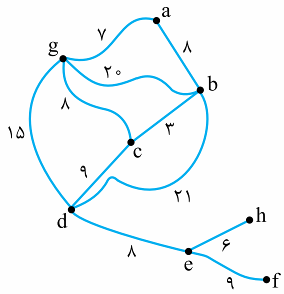
$$۱)\ \text{زوج } n \Rightarrow n=۲k \Rightarrow A=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۲k(۲k+۱)}{۲}=k(۲k+۱)\xrightarrow[\text{زوج باشد k باید زوج باشد.}]{\text{۲k+۱ فرد است، پس برای این‌که A}}k=۲q$$

$\Rightarrow n=۲k=۴q$ (*پس این‌جا حکم نتیجه می‌شه!*)



۷۴- با ذکر دلیل، ثابت کنید همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۴×۴ مقابل با دو وزیر احاطه می‌شود.

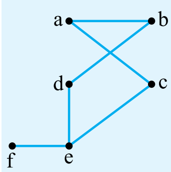
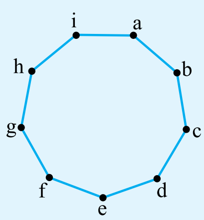
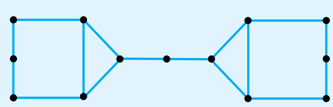
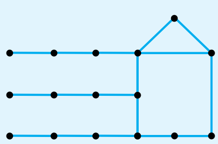
۷۵- گراف $5k$ رأسی که $\gamma(G)=2k$ باشد رسم کنید که $\delta=2$ باشد.



۷۶- نقشهٔ مقابل، نقشهٔ چند منطقه و جاده‌های بین آن‌ها است که مسافت بین مناطق در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان طوری احداث کنیم که فاصلهٔ هر منطقه تا بیمارستان از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد. حداقل تعداد بیمارستان و محل احداث آن‌ها را به وسیلهٔ گراف مشخص کنید. *(مشابه کتاب)*

۷۷- n کارمند از یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محل بروند و هر ۴ نفر به یک تاکسی نیاز دارند. حداقل چند تاکسی مورد نیاز است؟ *(مشابه کتاب)*

آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی	رشتهٔ ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) گراف سادهٔ ۶رأسی با دقیقاً ۵ رأس ایزوله وجود ندارد. ب) گراف غیرتهی منتظم از مرتبهٔ ۱۱ حداقل ۱۱ یال دارد. پ) گراف C_n مثال نقض رابطهٔ $\gamma(C_n)=\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ است. ت) گراف همبند از مرتبهٔ $p=9$ و $\Delta=5$ حداقل ۹ یال دارد.				۱
۲	گراف G به صورت مقابل را در نظر گرفته و جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) اگر $N_G(e)=\{c,d,x\}$ باشد، x همان .... است. ب) یک $e-d$ مسیر به طول ۴ به صورت .... است. پ) گراف $\bar{G}$ تعداد .... یال دارد.				۱
۳	در یک جمع ۷ نفر حضور دارند. می‌دانیم هر فرد حداقل با ۴ نفر دیگر دست داده است. ثابت کنید امکان ندارد که دقیقاً یک نفر با ۵ نفر دست داده باشد.				۱
۴	در یک گراف k– منتظم تعداد یال‌ها هفت‌تا بیشتر از تعداد رأس‌ها است. k را به دست آورده و یک نمونه از گراف رسم کنید.				۱
۵	مرتبهٔ یک گراف کامل از ربع اندازهٔ گراف، ۱۴ واحد کم‌تر است. مرتبه، اندازه و درجهٔ رأس‌ها در این گراف را به دست آورید.				۱
۶	با اضافه‌کردن فقط دو یال، کاری کنید که گراف مقابل فقط دورهایی به طول ۴، ۵، ۶، ۷ و ۹ داشته باشد؛ سپس این دورها را بنویسید.				۱/۵
۷	عدد احاطه‌گری، گراف‌های زیر را به دست آورید. (با ذکر دلیل) الف)  ب) 				۱
۸	در گراف G از مرتبهٔ ۹ برای هر رأس V_i مجموعهٔ $N_G[V_i]$ سه عضو دارد. با ذکر دلیل مشخص کنید عدد احاطه‌گری گراف چه مقادیری ممکن است داشته باشد.				۱/۵
۹	همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برای گراف P_6 را بنویسید. (گراف P_6 را رسم و نام‌گذاری کنید.)				۱
	جمع نمرات				۱۰

ترکیبیات (شمارش)

درس ۱ مباحثی در ترکیبیات - بخش اول

در سال‌های قبل با چند روش مهم شمارش مثل اصل ضرب، اصل جمع، تبدیل و ترکیب آشنا شدید. در این درس می‌خواهیم چند روش مهم دیگر بیان کنیم که با استفاده از آن‌ها می‌توانید حالت‌های انجام کارهای پیچیده‌تری را شمارش کنید.

مروری بر روش‌های مقدماتی شمارش

قبل از این‌که بخواهیم مطالب این درس را با هم بررسی کنیم، خوب است یک مروری روی اصل ضرب، جمع، جایگشت و ... (که در سال دهم آن‌ها را خوانده‌اید) داشته باشیم.

خب یک کاری دارید که از دو قسمت تشکیل شده است، مثلاً می‌خواهید دوستتان را آبمیوه و غذا مهمان کنید. دقت کردید؟ آبمیوه و غذا یعنی می‌خواهید حاتم طایی بشوید و او را به هر دوتا جا ببرید. مثلاً ۴ نوع آبمیوه و ۳ نوع غذا داریم. اصل ضرب می‌گوید به $۴\times۳=۱۲$ روش می‌توانید این کار را انجام دهید.

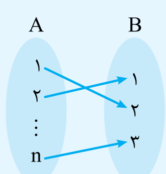
اصل ضرب: فرض کنید کاری از دو قسمت تشکیل شده باشد (برای انجام کار باید هر دو قسمت را انجام دهیم). اگر قسمت اول به n روش و قسمت دوم به m روش قابل انجام باشد، کل کار به $n\times m$ روش می‌تواند صورت بگیرد.

مثال و پاسخ

مثال **چند عدد چهاررقمی به صورت $\overline{abcd}$ وجود دارد؟**

پاسخ هر کدام از ارقام d، c و b، ۱۰ حالت دارند *(از صفر تا ۹)* ولی a، ۹ حالت دارد *(صفر نمی‌شود)*؛ پس تعداد اعداد چهاررقمی می‌شود: $۹\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۹۰۰۰$

مثال **چند تابع f از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,\dots,n\}$ به مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳\}$ وجود دارد؟ در چندتا از آن‌ها عدد ۱، عضو برد تابع نیست؟**



پاسخ از هر عضو A دقیقاً یک فلش باید خارج شده و به یک عضو B نظیر شود. عدد $۱\in D_f$ را در نظر بگیرید، خب می‌تواند به ۱ یا ۲ یا به ۳ برود، یعنی ۳ حالت دارد. ۲ چه‌طور؟ آن هم ۳ حالت دارد، خلاصه این‌که $\underbrace{۳\times۳\times\cdots\times۳}_{n\text{ بار}}=۳^n$ تابع به دست می‌آید. حالا اگر ۱ عضو برد نباشد، یعنی هیچ کدام از عضوهای A نمی‌توانند به ۱ بروند، پس هر عضو دامنه، دو حالت داشته و ۲^n تابع این‌جوری به دست می‌آید.

نکته تعداد تابع‌ها از مجموعهٔ mعضوی A به مجموعهٔ kعضوی B برابر است با: k^m (دومی به توان اولی).

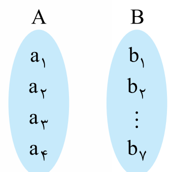
مثال و پاسخ

مثال به چند حالت می‌توانیم ۴ جایزهٔ مختلف را بین ۷ نفر توزیع کنیم، به طوری که به هر نفر حداکثر یک جایزه برسد (یعنی هیچ‌کس بیشتر از یک جایزه نگیرد!)؟

پاسخ جایزهٔ اول را در نظر بگیرید. این را می‌توانیم به هر کدام از ۷ نفر بدهیم. جایزهٔ دوم را به هر کدام از ۶ نفر باقی‌مانده، جایزهٔ سوم را به هر کدام از ۵ نفر باقی‌مانده و جایزهٔ آخر را به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده! خلاصه طبق اصل ضرب تعداد راه‌های توزیع جوایز، برابر $۴\times۵\times۶\times۷$ می‌شود. (اگر از سال دهم یادتان باشد، این عدد همان جایگشت ۴ شیء از ۷ شیء است که برابر $\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷!}{(۷-۴)!}$ می‌شود.)

همین مسئله با یک ادبیات دیگر هم می‌تواند مطرح بشود: «چند تابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴عضوی به مجموعهٔ ۷عضوی وجود دارد؟» اول تعریف را یادآوری می‌کنیم:

تعریف تابع یک‌به‌یک: تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو منحصربه‌فرد از B نظیر شود، یعنی دوتا عضو از A به یک عضو B نظیر نشوند؛ به زبان دیگر به هیچ عضو B دو تا فلش وارد نشده باشد.



خب برای $a_۱$، ۷ حالت داریم، برای $a_۲$، ۶ حالت و ...

نکته در حالت کلی تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ mعضوی A به مجموعهٔ kعضوی B که $m\le k$ برابر است با:

$$\boxed{P(k,m)=(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}=(k)(k-۱)\cdots(k-(m-۱))}$$

نکته با همین فرمول نتیجه می‌شود تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ mعضوی به مجموعهٔ mعضوی برابر $m!$ می‌شود.

نکته اگر تعداد عضوهای A بیشتر از B باشد، تابع یک‌به‌یک از A به B وجود ندارد *(وقتی سمت راست بیشتره حتماً به بعضی عضوهای B بیشتر از یک دونه فلش وارد می‌شه).*

حالا فرض کنید که جیبِ مبارک اجازه نمی‌دهد که دوستتان را به هر دو تا جا ببرید، یعنی می‌خواهید او را به آبمیوه فروشی **یا** رستوران ببرید. این‌جا در واقع مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنید. هر کدام که انجام بشود کار صورت گرفته است و این‌ها با هم اتفاق نمی‌افتند. آبمیوه ۴ حالت، رستوران ۳ حالت! اصل جمع می‌گوید $۷=۳+۴$ حالت برای انجام این کار وجود دارد.

نکته اصل جمع در واقع همان تقسیم‌بندی مسئله، به چند حالت است (که اشتراکی با هم ندارند) و هر کدام که انجام بگیرد کار انجام شده است. حتماً این را هم فهمیدید که برای اصل ضرب «**و**» می‌آید و برای اصل جمع «**یا**».

اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به چند روش مجزا انجام داد. اگر روش اول به $n_۱$ طریق، روش دوم به $n_۲$ طریق و ... و روش k ام به n_k طریق قابل انجام باشد، کل کار به $n_۱+n_۲+\cdots+n_k$ روش قابل انجام است.

مثال و پاسخ

مثال در چند عدد سه‌رقمی دقیقاً یک رقم ۴ دیده می‌شود؟

پاسخ عدد سه‌رقمی را به صورت $\overline{abc}$ می‌گیریم. من می‌گویم سه حالت مجزا وجود دارد.

حالت اول $a=۴$ باشد، این‌جا داریم: $\underset{\{۴\}}{\underline{۱}}\times\underset{\text{به‌جز ۴}}{\underline{۹}}\times\underset{\text{به‌جز ۴}}{\underline{۹}}=۸۱$

حالت دوم $b=۴$ باشد، این‌جا داریم: $\underset{\text{به‌جز ۴ و صفر}}{\underline{۸}}\times\underset{\{۴\}}{\underline{۱}}\times\underset{\text{به‌جز ۴}}{\underline{۹}}=۷۲$

حالت سوم $c=۴$ باشد. این‌جا داریم: $\underset{\text{به‌جز ۴ و صفر}}{\underline{۸}}\times\underset{\text{به‌جز ۴}}{\underline{۹}}\times\underset{\{۴\}}{\underline{۱}}=۷۲$

پس طبق اصل جمع $۸۱+۷۲+۷۲=۲۲۵$ عدد سه‌رقمی که دقیقاً یک رقم آن برابر ۴ باشد وجود دارد. حالا اگر همین مسئله را تبدیل کنیم به «حداقل یک رقم ۴» داشته باشد، دیگر به این سادگی به دست نمی‌آید. چرا؟ چون حالت‌های اشتراک پیدا می‌کنند. این چیزی است که در این درس به حساب آن می‌رسیم!

سؤال‌های امتحانی

۱۷- تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=16$ را در هر کدام از شرایط زیر به دست آورید.

الف) جواب‌ها صحیح نامنفی باشند. **ب) جواب‌ها طبیعی باشند.**

پ) جواب‌ها صحیح نامنفی بوده و $x_1>1$ و $x_4\geq 3$ باشد. **ت) $x_i\geq 2$ که $1\leq i\leq 4$ است.**

ث) جواب‌ها طبیعی بوده و $x_2=3$ باشد. **ج) جواب‌ها صحیح و نامنفی بوده و $x_1\leq 4$ باشد.**

۱۸- معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1>2$ و $x_4\geq 4$ باشد؟ *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

۱۹- با استفاده از گل‌های مریم، رز و میخک چند دسته گل شامل ۸ شاخه می‌توان درست کرد به طوری که: *(مشابه تمرین کتاب)*

الف) محدودیتی در استفاده از هر نوع گل نداشته باشیم؟

ب) از هر ۳ نوع حتماً استفاده شود؟

پ) حداقل دو شاخه میخک و دقیقاً یک شاخه رز استفاده شود؟

۲۰- به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد، اگر بخواهیم از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم؟ *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

۲۱- به چند روش می‌توانیم:

الف) ۹ توپ متمایز را درون ۳ سبد متمایز توزیع کنیم؟ **ب) ۹ توپ یکسان را درون ۳ سبد متمایز توزیع کنیم؟**

۲۲- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=10$ با شرط $i=2,3,4,5$ و $x_i>0$ را محاسبه کنید. *(نهایی خرداد ۹۸)*

۲۳- ۱۲ نفر می‌خواهند به ۳ نفر رأی بدهند. تعداد رأی‌های کاندیداها، چند حالت ممکن است داشته باشند؟ (هر فرد دقیقاً به یک کاندید رأی می‌دهد.)

۲۴- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد به طوری که مجموع رقم‌ها برابر ۷ باشد؟

۲۵- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلهٔ $x_1+x_2+x_3\leq 7$ چندتا است؟ تعداد جواب‌های طبیعی نامعادلهٔ $x_1+x_2+x_3<7$ چه‌طور؟

۲۶- دستگاه $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7\\ y_1+y_2=6\end{cases}$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۲۷- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هر معادله را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب)*

الف) $x_1^3+x_2+x_3=20$ **ب)** $\frac{10}{x_1}+x_2+x_3=10$ **پ)** $x_1+3x_2+x_3+x_4=9$ **ت)** $x_1+x_2+\sqrt{x_3}+x_4=4$

درس ۱ مباحثی در ترکیبیات - بخش سوم

مربع‌های لاتین

	۱۵–۱۷	۱۷–۱۹	۱۹–۲۱
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

سه فیلم ۱،۲ و ۳ را می‌خواهیم در روزهای شنبه، یکشنبه و دوشنبه و در سه سانس به نمایش دربیاوریم. برای این‌که عدالت رعایت بشود می‌خواهیم هر فیلم در هر روز و در هر سانس دقیقاً یک بار پخش شود. برای برنامه‌ریزی چه پیشنهادی دارید؟ خب مثلاً یکی از برنامه‌ها می‌تواند به صورت مقابل باشد:

حتماً فهمیدید تعبیر چیزهایی که گفتیم این می‌شود: «باید اعداد ۳، ۲ و ۱ را در یک جدول 3×3 طوری قرار دهیم که هر عدد در هر سطر و هر ستون دقیقا یک بار بیاید به عبارت دیگر در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم». به این جدول یک مربع لاتین 3×3 می‌گوییم. حالا چرا مربع‌های لاتین؟ چون اویلر که کارهای زیادی در این زمینه انجام داده به جای اعداد از حروف لاتین استفاده می‌کرده است. (کمی تأمل کنید و این مثال را خوب درک کنید. در هر روز، عدد تکراری نداریم (یعنی ۱ تا ۳ را داریم) و در هر سانس هم عدد تکراری نداریم (یعنی ۱ تا ۳ را داریم))

> **تعریف مربع لاتین $n\times n$:** یک جدول مربعی $(n\times n)$ که هر سطر و هر ستون با اعداد ۱، ۲، ۳، ...، n به گونه‌ای پر شده باشد که در هیچ سطر آن و هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک مربع لاتین می‌گوییم. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین، یک درایه (شبیه ماتریس) می‌گوییم.

خب حالا که فهمیدید مربع لاتین چگونه مربعی است، بگویید ببینم آیا مربع لاتین از هر مرتبه‌ای (مثلاً 4×4، 5×5 یا ...) وجود دارد یا نه؟

بیایید یکی دوتا امتحان کنیم. مثلاً مربع لاتین 5×5 بسازیم. من می‌گویم سطر اول را ۱ تا ۵ بگذاریم. برای سطر دوم، اعداد سطر اول را یکی به راست ببریم. رقم ۵ هم اِنگار می‌چرخد و می‌آید در خانهٔ اول سطر دوم! *(به اصطلاح ماتریسی درایه a_{21} می‌شه).* برای سطر سوم هم همین‌طور، سطر دوم را یکی به راست ببریم و با همین کار بقیهٔ سطرها را هم به دست آوریم تا مربع لاتین مقابل به دست آید. شبیه همین به راحتی می‌توانیم مربع لاتین از هر مرتبه‌ای به دست آوریم.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

مربع لاتین چرخشی: مربع لاتین به صورت مقابل را مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ n می‌گوییم:

$$\begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & n \\ n & ۱ & ۲ & \cdots & n-۱ \\ n-۱ & n & ۱ & \cdots & n-۲ \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ ۲ & ۳ & \cdots & \cdots & ۱ \end{array}$$

(مثلاً مربع لاتین بالا چرخشی از مرتبهٔ ۵ بود. در واقع اعداد ۱ تا n را در سطر اول می‌نویسیم. در سطر بعدی اعداد را یکی به راست می‌بریم و آخری هم می‌چرخد و در ستون اول قرار می‌گیرد و همین‌طور سطرهای بعدی.)

مثال و پاسخ

مثال چند مربع لاتین به صورت مقابل وجود دارد؟

۳		
		۱

پاسخ خب از کجا شروع کنیم؟ من می‌گویم آن دو مربع که با یک فلش دارد علامت زده‌ام، قطعاً باید ۲ باشند. چرا؟ چون در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداریم، ۳ و ۱ نمی‌تواند باشد پس باید ۲ باشد. بقیه‌اش دیگر کاری ندارد. آن‌هایی که دو فلش دارند برابر ۱ می‌شوند و شبیه همین بقیه هم به دست می‌آیند. پس فقط یک مربع لاتین وجود دارد که درایه‌های $a_{۱۱}$ و $a_{۳۳}$ آن به ترتیب ۳ و ۱ باشند.

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

ساخت مربع لاتین از روی مربع لاتین دیگر

خیالتان تا این‌جا راحت شد که مربع لاتین $n\times n$ برای هر عدد طبیعی n وجود دارد. حالا فرض کنید یک مربع لاتین داریم. مثلاً همان مربع لاتین ۳×۳ که برنامهٔ فیلم‌ها بود خیلی خوب است. من می‌گویم از روی این مربع لاتین، مربع لاتین‌های زیاد دیگری، می‌توانیم بسازیم.

۱ در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداریم، پس اگر جای دو سطر را عوض کنیم باز هم به یک مربع لاتین می‌رسیم. مثلاً اگر در مربع لاتین ۳×۳ فیلم‌ها، جای سطر اول و سوم را عوض کنیم، مربع لاتین مقابل به دست می‌آید:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

⇒

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شبیه همین می‌توانیم جای دو ستون را عوض کنیم. مثلاً اگر ستون اول و دوم را عوض کنیم داریم:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

⇒

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۲ بیایید یک کار دیگر بکنیم. یک جایگشت روی ۱,۲,۳ اعمال کنیم!

مثلاً جایگشت ۳,۱,۲ را بگیریم. یعنی چه؟ ببینید در واقع به جای ۱، سه بگذاریم. به جای ۲، یک و به جای ۳ هم دو بگذاریم. خیلی تابلو است که این هم مربع لاتین می‌شود. چون اگر سطر یا ستون عدد تکراری داشته است با انجام برعکس کارها در مربع لاتین اولیه باید عدد تکراری در همان سطر یا ستون داشته باشیم *(که نداریم چون مربع لاتین است!)* با این کار به مربع لاتین زیر می‌رسیم:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱→۳
۲→۱
۳→۲
⇒

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

عجب داستانی شد! از روی یک مربع لاتین $n\times n$ می‌توانیم با هر جایگشت، مربع لاتین‌های دیگری به دست آوریم.

دو مربع لاتین متعامد

دوباره با آن مثال سینما کار داریم (مربع لاتین A). فرض کنید ۳تا سالن ۱,۲,۳ داریم. باز دوباره می‌خواهیم در هر روز از هر ۳ سالن و در هر سانس نیز از هر ۳ سالن استفاده کنیم. خب یک مربع لاتین دیگر مثل B می‌سازیم. حالا ماجرا کمی پیچیده‌تر می‌شود! می‌خواهیم هر دو کار را با هم انجام دهیم. یعنی:

	۱۵−۱۷	۱۷−۱۹	۱۹−۲۱
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

سالن‌های ۱,۲,۳
مربع لاتین B

	۱۵−۱۷	۱۷−۱۹	۱۹−۲۱
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

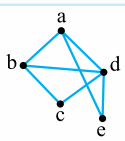
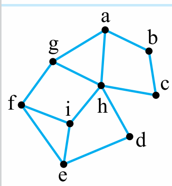
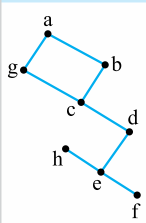
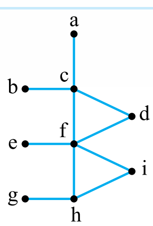
فیلم‌های ۱,۲,۳
مربع لاتین A

الف هر فیلم در هر روز در یک سانس و در یک سالن به نمایش درآید.

ب هر فیلم در هر سالن فقط یک بار به نمایش دربیاید.

نمونهٔ امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ ریاضی	ریاضیات گسسته	
ردیف / امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	ثابت کنید میانگین ۳ عدد طبیعی متوالی برابر عدد وسطی است.	۱
۲	a,b دو عدد حقیقی هستند. نشان دهید اگر $ab=0$، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$.	۱
۳	نشان دهید اگر α,β اعدادی گنگ و $\alpha+\beta$ گویا، آن‌گاه $2\alpha+\beta$ عددی گنگ است.	۱
۴	با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز ثابت کنید اگر a عددی مثبت باشد، $a+\frac{1}{a}\geq 2$.	۱
۵	نشان دهید اگر $a\mid b$ و $b\neq 0$ در این صورت $\|a\|\leq\|b\|$.	۱
۶	اگر a برابر با عددی اول باشد که دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ بر آن بخش‌پذیر باشد، a را به دست آورید.	۱
۷	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $([m^3,m],m^5)$ ب) $[(2m,4m^2),6m^3]$	۱
۸	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۲ و ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵۶ را به دست آورید.	۱
۹	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $38+3^{56}$ را بر ۲۶ به دست آورید.	۱
۱۰	اگر ۷ اردیبهشت چهارشنبه باشد، ۱۱ شهریور چندشنبه است؟	۱
۱۱	به چند طریق می‌توان ۲۳۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟	۱/۵
۱۲	به ازای کدام اعداد طبیعی $m\leq 100$، معادلهٔ هم‌نهشتی $2x\overset{3m+1}{\equiv}1$ دارای جواب است؟	۱/۵
۱۳	گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)=\{ab,ac,af,bd,de,df,fc\}$ را در نظر گرفته و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: الف) $N_G[d]$ را مشخص کنید. ب) دو یال مجاور نام ببرید. پ) گراف مکمل را رسم کنید. ت) یک زیرگراف ۴ رأسی و ۳ یالی از گراف مشخص کنید.	۲
۱۴	آیا ممکن است درجه‌های گرافی از مرتبهٔ ۷ به صورت ۵,۲,۲,۲,۲,۲,۲ باشد؟ چرا؟	۰/۵
۱۵	گراف ۹ رأسی رسم کنید که فقط دورهایی به طول ۹,۶,۵ داشته باشد.	۰/۵
۱۶	گراف‌های C_5 و P_6 را رسم کنید.	۰/۵
۱۷	چند گراف جهت‌دار با پنج رأس a، b، c، d و e می‌توان ساخت؟	۱
۱۸	در یک گراف G از مرتبهٔ ۱۱ و اندازهٔ ۲۳، $\deg_G(a)=6$ است. الف) $q(\bar{G})$ را به دست آورید. ب) $\deg_{\bar{G}}(a)$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۹	فرض کنید G یک گراف ساده است. ثابت کنید اگر $\delta(G)\geq 4$ باشد، مسیری به طول ۴ در گراف وجود دارد.	۱
	جمع نمرات	۲۰

ردیف	نمونهٔ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۱ — امتحان شمارهٔ ۳ — رشتهٔ ریاضی — مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه — ریاضیات گسسته — Kheilisabz.com	نمره
۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a \mid b$ و $b \neq ۰$، در این صورت $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$. ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a \mid c , b \mid c)$ و $(\forall m > ۰; a \mid m , b \mid m \Rightarrow c \leq m)$، آن‌گاه $[a,b]=c$. پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$. ت) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲− برابر ۲− است.	۱
۲	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^{۲}-۵n+۷$ عددی فرد است.	۱
۳	اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۲۸k+۶$.	۰/۷۵
۴	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۲۷^{۲۰}+۱۸$ را بر ۱۳ بیابید.	۱
۵	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید. الف) اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد، آن را رأس .... می‌نامیم. ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد و هیچ یالی نداشته باشد، گراف .... می‌نامیم. پ) تعداد یال‌های گراف $K_{۴}$، برابر با .... است. ت) گراف G را .... می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.	۱
۷	به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید. الف) گراف $C_{۷}$ را رسم کنید، سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید. ب) در گراف شکل مقابل، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. 	۱
۸	الف) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید. ب) برای گراف شکل روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید. 	۱/۲۵
۹	عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید. 	۱/۲۵
۱۰	ابتدا گراف $P_{۹}$ را رسم کنید؛ سپس یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.	۱
۱۱	گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف) یک γـ مجموعه مشخص کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید. 	۱/۵
۱۲	۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.	۱
۱۳	با ارقام ۹، ۷، ۶، ۵، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱ چند عدد ۹رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۴	معادلهٔ $x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}+x_{۵}+x_{۶}=۱۲$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_{۳}=۴$ و $x_{۵}>۲$ باشد؟	۱/۵

پاسخ‌نامه تشریحی امتحان شمارهٔ (۴)

۱- الف) درست (۰/۲۵)   ب) نادرست (۰/۲۵)

۲- الف) عدد a شمارندهٔ عدد b است. (۰/۵)

ب) $|۲m|$ (۰/۲۵)

۳- $xy \le \frac{x^۲+y^۲}{۲}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow ۲xy \le x^۲+y^۲$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy \ge ۰$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-y)^۲ \ge ۰$ (۰/۲۵)

گزاره همواره درست است. (۰/۲۵)

۴-

$p=۴k \ (۱)$

$p=۴k+۱ \ (۲)$

$p=۴k+۲=۲(۲k+۱) \ (۳)$

$p=۴k+۳ \ (۴)$ (۰/۲۵)

در حالت (۱) و(۳)، p عددی زوج (بزرگ‌تر از ۲) است که با اول‌بودن آن تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود. (۰/۲۵)

۵-

$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{(۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \times ۹+۱۱}_{(۰/۲۵)} \overset{۷}{\equiv} ۲$

$\Rightarrow r=۲$ (۰/۲۵)

۶- $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴\times۵+۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{(۷,۴)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۴k+۳$ (۰/۲۵)

۷- الف) $N_G(c)=\{a,e,d\}$ (۰/۷۵)

ب) رأس f و ۵ (۰/۵)

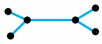
پ) a b e c d a (۰/۵)

ت) خیر (۰/۲۵)

۸- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مجموعهٔ احاطه‌گری است که کم‌ترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد. (هر مورد (۰/۲۵))

۹- $D=\{a,c,i,d\}$ (۱) (در صورتی که مجموعه‌های مشابه که ویژگی مسئله را داشت، نوشتند، نمره داده شود.)

۱۰- طبق قضیه داریم $\gamma(G) \ge ۲ = \left[\frac{۱۰}{۴+۱}\right]$. (۰/۵) از طرفی مجموعهٔ $D=\{e,j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. (۰/۵) لذا $\gamma(G) \le ۲$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G)=۲$. (۰/۲۵)

۱۱- الف) (۰/۷۵)    ب) (۰/۷۵) 

۱۲- الف) $۶! \times ۲!$ (۰/۵)   ب) $۲! \times ۷!$ (۰/۵)

۱۳- $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲,$

$x_۱ \ge ۱, x_۴ > ۳, x_۶=۱$ (۰/۵)

$y_۱=x_۱+۱, y_۱ \ge ۰$ (۰/۲۵)، $y_۴=x_۴+۴, y_۴ \ge ۰$ (۰/۲۵)

$y_۱+۱+x_۲+x_۳+y_۴+۴+x_۵+۱=۱۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+y_۴+x_۵=۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ جواب $= \binom{۱۰}{۴}$ (۰/۵)

۱۴-

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(۰/۲۵) ⇒ B=

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

(۰/۲۵) ⇒

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

(۰/۵)

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دورقمی تکراری داریم. (۰/۵)

۱۵- $|F|=۱۵, |V|=۱۱, |B|=۹, |F\cap V|=۵$

$, |B\cap V|=۶, |F\cap B|=۳, |F\cap B\cap V|=۳$

فقط فوتبال بازی کنند.

$=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|$

$=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$ (۰/۵)

فقط والیبال بازی کنند.

$=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|$

$=۱۱-۵-۶+۳=۳$ (۰/۵)

فقط بسکتبال بازی کنند.

$=|B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|$

$=۹-۳-۶+۳=۳$ (۰/۵)

$\Rightarrow$ ج $=۱۰+۳+۳=۱۶$ (۰/۲۵)

۱۶- الف) $۳^۴-(۳\times۲^۴-۳)=۳۶$ (۰/۵)

ب) $\frac{۸!}{۴!}=۱۶۸۰$ (۰/۵)

۱۷- $k+۱=۵ \Rightarrow k=۴$ (۰/۲۵)

$kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=۵۳$ (۰/۲۵)

$n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$ (۰/۲۵)