در حرکت از راست به چپ در ریشه‌های ۲−، ۱، ۳− و ۶− علامت تغییر کرده ولی در عبور از ریشهٔ ۲ علامت تغییر نمی‌کند.

تست: مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲ < \dfrac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴}$ برابر بازهٔ (a,b) می‌باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) $+\infty$

پاسخ گزینهٔ «۲»

چون مخرج کسر مثبت است، می‌توان نامعادله را طرفین وسطین کرد:

$$۳x^۲ - ۲x < ۲x^۲ + ۸ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ < ۰$$

$$\Rightarrow (x-۴)(x+۲) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۴ \\ x_۲ = -۲ \end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۴		$+\infty$
$x^۲-۲x-۸$		+	۰	−	۰	+	

پس: $(-۲\,,\,۴) =$ جواب

بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۶ است.

تست: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(۲x-۳)}{x-۳\sqrt{x}+۲} \geq ۰$ فقط یک بازه باشد.

مقدار m کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) -۱ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\dfrac{۷}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

بهترین روش برای حل این تست دشوار استفاده از گزینه‌هاست.

گزینهٔ ۱:

$$m=-۱\Rightarrow f(x)=\frac{۴\overbrace{(x+۱)}^{\oplus}\underbrace{(۲x-۳)}_{\uparrow}}{\underbrace{(\sqrt{x}-۱)}_{\downarrow}\underbrace{(\sqrt{x}-۲)}_{\downarrow}}$$

$$x=\frac{۳}{۲}\qquad x=۱\qquad x=۴$$

x		۰		۱		۱/۵		۴	
y	//////		−	ت ن	+	○	−	ت ن	+

غ ق ق $m=-۱\Rightarrow$ جواب نامعادله بیش از یک بازه است.

گزینهٔ ۲:

$$m=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=\frac{-۴\overbrace{(x+۳)}^{\oplus}(۲x-۳)^{۲}}{۹(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}$$

x		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
y	//////		−	ت ن	+	○	+	ت ن	−

جواب $=(۱,۴)$

اعداد $m=۱$ و $m=\frac{۷}{۳}$ را اگر دوست داشتید خودتان امتحان کنید.

تست: در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

(ریاضی ۸۹)

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$\frac{S_۶}{S_۳}=\frac{\cancel{a_۱}\,\frac{\overbrace{۱-q^۶}^{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}}{\cancel{۱-q}}}{\cancel{a_۱}\,\frac{۱-q^۳}{\cancel{۱-q}}}=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}\Rightarrow ۱+q^۳=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}$$

$$\Rightarrow q^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{a_۱}{a_۵}=\frac{\cancel{a_۱}}{\cancel{a_۱}q^۴}=\frac{۱}{q^۴}=۱۶$$

تست: با ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب ۸، ۴ و ۱۶ یک دنبالهٔ حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جملهٔ هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی کدام است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۳۲}{۷}$ ۲) $\frac{۶۴}{۷}$ ۳) $\frac{۲۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۵}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\frac{a}{q}, a, aq\Rightarrow \underbrace{\frac{۴a}{q}, ۸a, ۱۶aq}_{\text{حسابی}}\Rightarrow \frac{۴a}{q}+۱۶aq=۲\times ۸a$$

$$\xrightarrow[\times q]{\div ۴a} ۱+۴q^۲=۴q \Rightarrow (۲q-۱)^۲=۰ \Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

جملات هندسی: $۲a\ ,\ a\ ,\ \frac{a}{۲} \Rightarrow ۴a^۲+a^۲+\frac{a^۲}{۴}=۲۴a$

$$\Rightarrow \frac{۲۱}{۴}a^{\cancel{۲}}=۲۴\cancel{a} \Rightarrow a=\frac{۹۶}{۲۱}=\frac{۳۲}{۷}$$

جملات حسابی: $۸a\ ,\ ۸a\ ,\ ۸a$

جملهٔ اول $=۲a=\frac{۶۴}{۷}$

تست: حاصل $\frac{t^۸-t^۷+t^۶-\cdots-t+۱}{t^۶-t^۳+۱}$ **به ازای** $t=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$ **کدام است؟** (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** صورت و مخرج کسر به‌ترتیب حاصل جمع ۹ و ۳ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت‌های $-t$ و $-t^۳$ هستند:

$$\text{صورت کسر}=a_۱(\frac{۱-q^۹}{۱-q})=\frac{۱-(-t)^۹}{۱-(-t)}=\frac{۱+t^۹}{۱+t}$$

$$\text{مخرج کسر}=a_۱(\frac{۱-q^۳}{۱-q})=\frac{۱-(-t^۳)^۳}{۱-(-t^۳)}=\frac{۱+t^۹}{۱+t^۳}$$

$$\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}=\frac{۱+t^۳}{۱+t}=۱+t^۲-t=۱+(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲})^۲-(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲})$$

$$=۱+\frac{۱}{۴}(۱+۱۷+۲\sqrt{۱۷})-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}=۵$$

تست: معادلهٔ $x^{۲}+۳|x|-۴=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۲»

با توجه به $|x|^{۲}=x^{۲}$ می‌توان نوشت:

$$|x|^{۲}+۳|x|-۴=۰\Rightarrow(|x|-۱)(|x|+۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|x|-۱=۰\Rightarrow|x|=۱\Rightarrow x=\pm۱\\|x|+۴=۰\Rightarrow|x|=-۴\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس معادله دارای دو جواب است.

تست: معادلهٔ $|\frac{۲x-۱}{x+۱}|=|۱-۲x|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۴»

با توجه به $|-x|=|x|$ و ویژگی شمارهٔ ۶ می‌توان نوشت:

$$\frac{|\cancel{۲x-۱}|}{|x+۱|}=|\cancel{۲x-۱}|\Rightarrow\frac{۱}{|x+۱|}=۱$$

$$\Rightarrow|x+۱|=۱\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۱\Rightarrow x=۰\\x+۱=-۱\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

دقت کنید اگر عبارت $|۱-۲x|$ برابر صفر باشد، معادله باز هم برقرار خواهد شد، پس:

$$|۲x-۱|=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه معادله دارای سه جواب است.

چاشنی: ۱ تابع گلدانی دارای محور تقارن $x = \frac{a+b}{۲}$ است.

۲ با توجه به نمودار تابع گلدانی، معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$:

الف اگر $k > |a-b|$ باشد، دارای دو جواب حقیقی است.

ب اگر $k = |a-b|$ باشد، دارای بی‌شمار جواب حقیقی است.

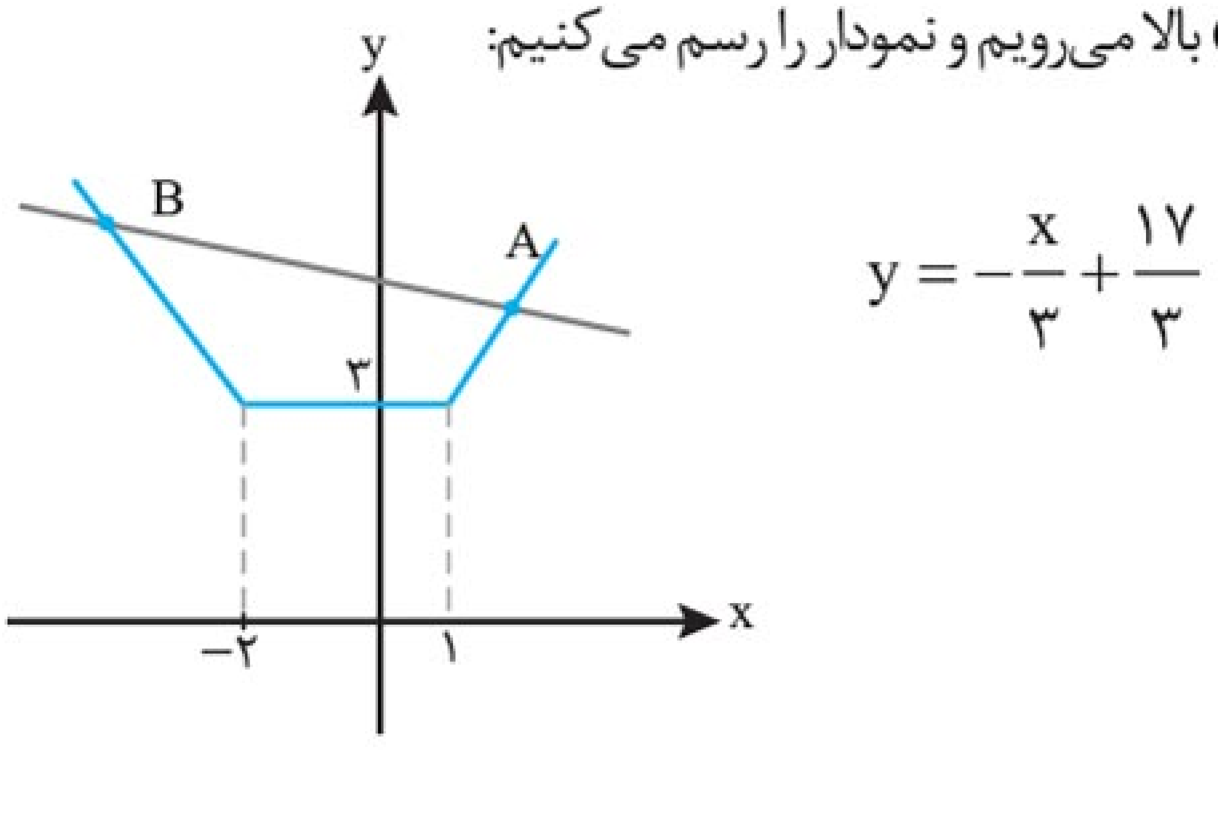
پ اگر $k < |a-b|$ باشد، معادله فاقد جواب حقیقی است.

تست: نمودارهـای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطـهٔ A و B متقاطـع هسـتند. انـدازهٔ پاره‌خـط AB کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

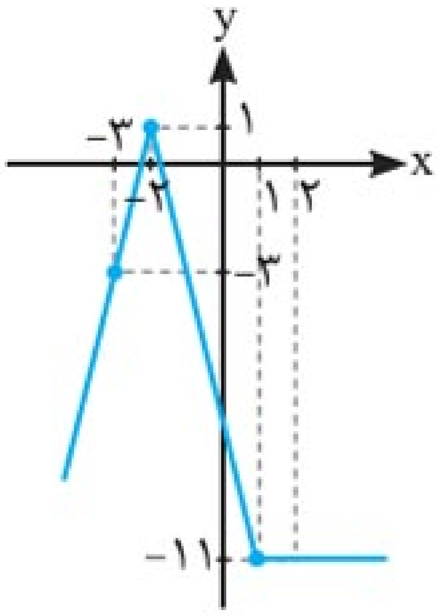
۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

برای رسم نمودار تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$، ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق $(x=۱ , x=-۲)$ را روی محور x ها مشخص می‌کنیم که بین این دو ریشه تابع ثابت است؛ پس به اندازهٔ اختلاف این دو ریشه (۳ واحد) بالا می‌رویم و نمودار را رسم می‌کنیم:



پاسخ گزینهٔ «۱»



ریشه‌های قدرمطلق، اعداد ۱ و ۲− هستند. مقدار تابع را به ازای آن‌ها و نیز به ازای عددی بزرگ‌تر از ۱ و عددی کوچک‌تر از ۲− به‌دست می‌آوریم.

$$f(-۳) = -۳\ ,\ f(-۲) = ۱\ ,$$
$$f(۱) = -۱۱\ ,\ f(۲) = -۱۱$$

پس: $R_f = (-\infty\ ,\ ۱]$

وعدهٔ ۵

معادلات قدرمطلقی

برای حل معادلات قدرمطلقی معمولاً از سه روش زیر استفاده می‌شود:

۱ **استفاده از تعریف و خواص قدرمطلق:** جواب‌های معادلهٔ $|f(x)| = |g(x)|$، همان جواب‌های معادله‌های $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ هستند.

۲ **روش هندسی:** با کمک رسم نمودار می‌توان جواب‌های معادلات قدرمطلقی را یافت.

۳ **به توان رساندن طرفین** (برای از بین بردن علامت قدرمطلق)

تست: در معادلهٔ $(x - ۴)|x| = ۲x - ۵$ مجموع جواب‌های معادله کدام است؟ (ریاضی ۹۱ با کمی تغییر)

۱) ۸ ۲) $۷ - \sqrt{۶}$ ۳) ۶ ۴) $۷ + \sqrt{۶}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x^{2}-4x=2x-5 \Rightarrow x^{2}-6x+5=0 \\ \quad \Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=1, x=5 \\ x<0 \Rightarrow -x^{2}+4x=2x-5 \Rightarrow x^{2}-2x-5=0 \\ \quad \Rightarrow (x-1)^{2}=6 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{6} & \text{غ ق ق} \\ x=1-\sqrt{6} & \text{ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های قابل قبول معادله برابر است با:

$$1+5+1-\sqrt{6}=7-\sqrt{6}$$

تست: اگر $f(x)=\max\{x^{2}, |x-\frac{3}{4}|\}$، کمترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

ابتدا نمودار توابع داخل آکولاد را رسم می‌کنیم و در هر بازه تابعی که نمودار آن بالاتر قرار می‌گیرد را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم. ابتدا محل برخورد نمودار دو تابع $y_1=x^{2}$ و $y_2=|x-\frac{3}{4}|$ را پیدا می‌کنیم:

$$y_1=y_2 \Rightarrow |x-\frac{3}{4}|=x^{2}$$

قدر مطلق

تست: به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$ برابر ۲ است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۴»

فرض کنید α و β جواب‌های معادله باشند:

$$S=\frac{m+۱}{۲}\,,\,P=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=۴$$

$$\Rightarrow S+۲\sqrt{P}=۴$$

$$\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴$$

$$\Rightarrow m+۲=۸\Rightarrow m=۶$$

چاشنی: تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\cdot\beta$ باشد، آن‌گاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۳+kx^۲-۹x-۲=۰$ و $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۲$ باشد، مقدار k چه‌قدر است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۵}$ ۳) -۳ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=۱\\ \alpha\cdot\beta=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰$$

$$\to x=-۱\xrightarrow{\text{صدق در معادلهٔ اصلی}}-۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow k=-۳$$

$$\to x=-\frac{c}{a}=۲$$

وعدهٔ ۲

تشکیل معادلهٔ درجه ۲ جدید

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دوم جدیدی بنویسیم که جواب‌هایش با جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ رابطه‌ای مشخص داشته باشد، معمولاً می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد:

روش اول: تشکیل S و P برای معادلهٔ جدید با توجه به رابطهٔ داده‌شده و در دست داشتن S و P معادلهٔ $x^{۲}-Sx+P$ را تشکیل دهیم.

روش دوم: جواب معادلهٔ جدید را y و جواب معادلهٔ داده‌شده را x فرض‌کرده و رابطهٔ بین x و y را می‌نویسیم و x را برحسب y یافته و در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم. پس از ساده‌سازی به معادلهٔ خواسته‌شده خواهیم رسید.

چاشنی: معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید:

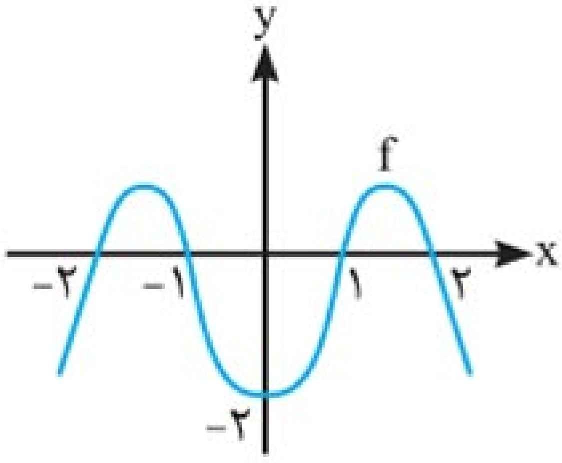
۱ جواب‌های معادلهٔ زیر، قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ بالا است:

$$ax^{۲}-bx+c=۰$$

۲ جواب‌های معادلهٔ زیر، معکوس جواب‌های معادلهٔ بالا است:

$$cx^{۲}+bx+a=۰$$

تست: نمودار تابع درجهٔ چهار $f(x)$ داده شده است. اگر این تابع را به فرم $y = at^۲ + bt + c$ بنویسیم، حاصل $a + b + c$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۲

۳) -۱

۴) ۱

پاسخ گزینهٔ «۱»

تابع دارای ۴ صفر به طول‌های ۲−، ۱−، ۱ و ۲ است، پس:

$$f(x) = a(x+۲)(x+۱)(x-۱)(x-۲)$$

$$f(x) = a(x^۲-۴)(x^۲-۱)$$

$$f(\circ) = -۲ \Rightarrow a(-۴)(-۱) = -۲ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

لذا:

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}(x^۴ - ۵x^۲ + ۴)$$

اگر قرار دهیم $x^۲ = t$، داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}t^۲ + \frac{۵}{۲}t - ۲$$

$$\Rightarrow a + b + c = \circ$$

تست: معادلهٔ $(x^۲ - ۲x)^۲ - (x^۲ - ۲x) = ۲$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۳»

با استفاده از تغییر متغیر $x^۲ - ۲x = t$ داریم:

$$t^{۲}-t-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۱\Rightarrow x^{۲}-۲x=-۱\\ \qquad\Rightarrow (x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=۱\\ t=۲\Rightarrow x^{۲}-۲x=۲\\ \qquad\Rightarrow x^{۲}-۲x-۲=۰\\ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{دو جواب حقیقی دارد.}\ (x\neq ۱)\end{cases}$$

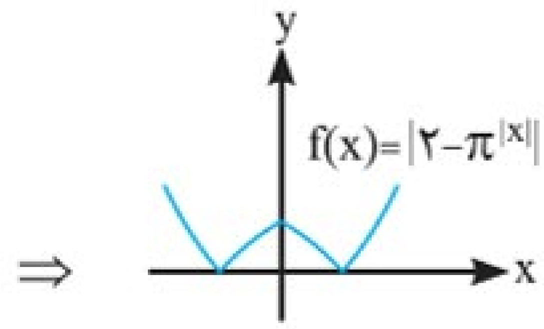
پس معادله سه جواب حقیقی دارد.

تست: اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۴}-۷x^{۲}-۵=۰$ به‌ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^{۲}-۳SP+۲S$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

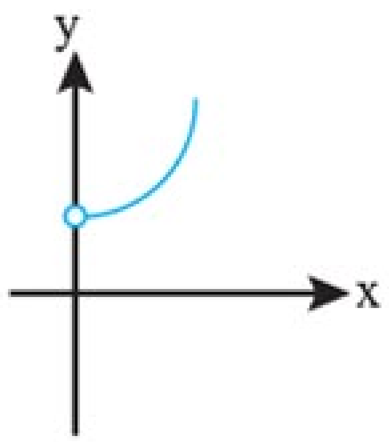
۱) $۵۹-۷\sqrt{۶۹}$
۲) $۷+\sqrt{۶۹}$
۳) ۵۰
۴) $۵۹+۷\sqrt{۶۹}$

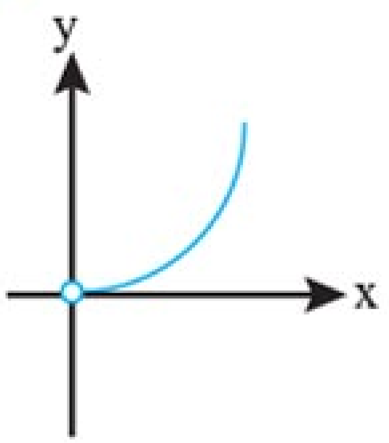
پاسخ گزینهٔ «۴» بدیهی است که اگر $x_۰$ جواب معادله باشد، $-x_۰$ هم جواب است (زیرا در $x^{۲}$ و $x^{۴}$ با تبدیل x به $-x$ تابع عوض نمی‌شود.)، پس مجموع جواب‌ها صفر است. $S=۰$

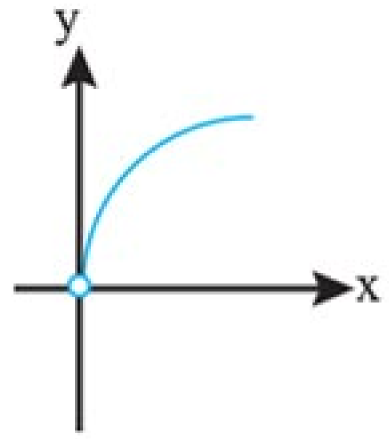
$$x^{۲}=t\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=\sqrt{t_{۱}}\\ x_{۲}=-\sqrt{t_{۱}}\end{cases}\Rightarrow x_{۱}x_{۲}=-t_{۱}\\ P^{۲}=t^{۲}=\dfrac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}\xrightarrow{\times ۲}۲P^{۲}=۵۹+۷\sqrt{۶۹}\\ t=\dfrac{۷-\sqrt{۶۹}}{۲}<۰\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

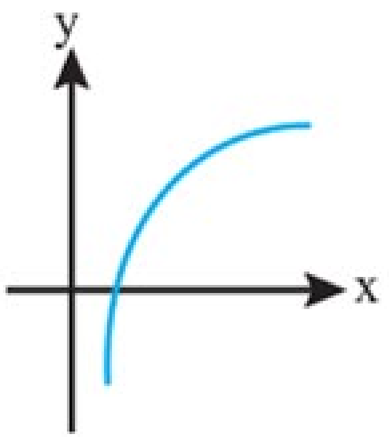


تست: نمودار تابع $f(x) = ۹^{\log_۳ x}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) 

۲) 

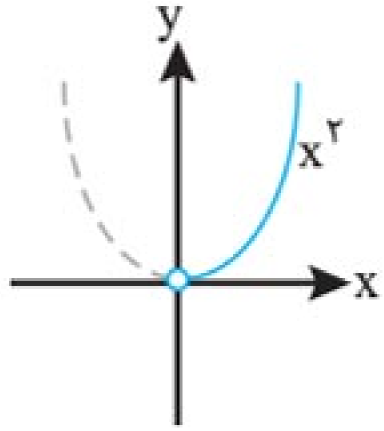
۳) 

۴) 

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

حواستان باشد دامنهٔ تابع $x > ۰$ است:

$$۹^{\log_۳ x} = ۳^{۲\log_۳ x} = ۳^{\log_۳ x^۲} = x^۲$$



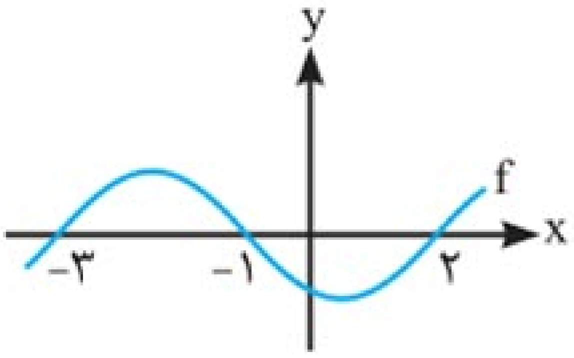
۳ دامنهٔ توابع رادیکالی:

الف فرجهٔ فرد: دامنه تابع، همان دامنهٔ تابع زیر رادیکال است:

$$y = \sqrt[2n+1]{f(x)} \quad ; \quad D_y = D_f$$

ب فرجهٔ زوج: دامنهٔ تابع عبارت است از x هایی که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد.

تست: شکل زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است، دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) $[-3, 2]$

۲) $[-1, +\infty)$

۳) $(-\infty, -1]$

۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$

پاسخ گزینهٔ «۴»

جدول تعیین علامت یک سطری را برای یافتن دامنهٔ تابع تشکیل می‌دهیم، دقت کنید که $x = -1$ هم ریشهٔ $f(x) = 0$ و هم ریشهٔ $x + 1$ است، یعنی ریشهٔ مضاعف است.

x	$-\infty$	-3		-1		2	$+\infty$
$(x+1)f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

$$D = (-\infty - 3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$$

$$\xrightarrow{\text{تابع غیرنقطه‌ای}} D = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

۴ دامنهٔ توابع لگاریتمی:

$$y = \log_{g(x)} f(x)$$

$$\Rightarrow D_y = \{x \mid f(x) > 0 , g(x) > 0 , g(x) \neq 1\}$$

تست: اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-2, 4]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = 2f(2x-2)+1$ کدام است؟

۱) $[0, 3]$ ۲) $[-2, 4]$ ۳) $[-2, 0]$ ۴) $[0, 4]$

پاسخ گزینهٔ «۱»

اگر دامنهٔ تابع f برابر با $[-2,4]$ باشد، در این‌صورت هر ورودی که بخواهد وارد تابع شود باید در این بازه باشد، پس:

$$-2 \le 2x-2 \le 4 \xrightarrow{+2} 0 \le 2x \le 6 \xrightarrow{\div 3} 0 \le x \le 3$$

یعنی دامنهٔ تابع g عبارت است از $[0,3]$ (دقت کنید که ضریب f، یعنی عدد ۲ و عدد ثابت ۱ در دامنهٔ g تأثیری ندارند بلکه در بُرد تابع g مؤثر هستند).

تست: اگر $f(x)=\begin{cases}-1; & x<-1\\ x\ ; & -1\le x\le 1\\ 1\ ; & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، ماکزیمم مقدار تابع $gof - fog$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ گزینهٔ «۴»

بزرگ‌ترین مقدار گزینه‌ها عدد ۱ است. حال تلاش می‌کنیم تا با دادن ورودی مناسب این خروجی را تولید کنیم. اگر موفق شدیم ماکزیمم مقدار، عدد ۱ خواهد بود.

$$x=10:(gof)(10)-(fog)(10)=g(\underbrace{f(10)}_{1})-f(\underbrace{g(10)}_{-99})$$

یا هر عدد بزرگ دیگری

$$g(1)=0\,,\ f(-99)=-1 \Rightarrow 0-(-1)=1$$

پس ماکزیمم مقدار تابع ۱ است.

تست: اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، در این صورت حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) $x^2 - 1$ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ «۴»

ابتدا ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \Rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 4y^2 + x^2 - 4xy = x^2 + 4 \Rightarrow x = y - \frac{1}{y}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x} \\ f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - x \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) - f^{-1}(\frac{1}{x}) = 0$$

نکته:

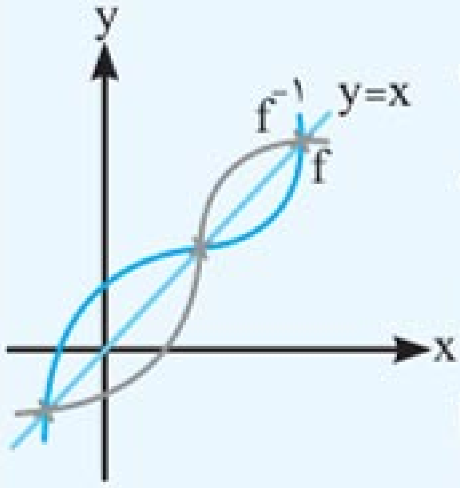
۱
$$\begin{cases} (fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1} \\ (fof^{-1})(x) = x \ (x \in D_{f^{-1}}) \\ (f^{-1}of)(x) = x \ (x \in D_f) \end{cases}$$

۲ محل تلاقی تابع $f(x)$ با خط $y = x$، نقطهٔ تلاقی نمودارهای f و f^{-1} نیز خواهد بود ولی لزوماً نقاط برخورد نمودار دو تابع $f(x)$ و

$f^{-1}(x)$ روی $y=x$ قرار ندارند. (برای یافتن نقاط برخورد دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ باید معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کنیم.)

۳ در تابع وارون‌پذیر $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc\neq 0)$ اگر $a+d=0$، آن‌گاه $f(x)=f^{-1}(x)$.

۴ اگر f تابعی **اکیداً صعودی** باشد، نقاط تلاقی f و f^{-1} حتماً روی خط $y=x$ قرار دارند، یعنی به جای حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ می‌توان معادلهٔ $f(x)=x$ یا $f^{-1}(x)=x$ را حل کرد.



تست: فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{3}$　　۲) $\sqrt{3}$　　۳) $2\sqrt{2}$　　۴) $\sqrt{2}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

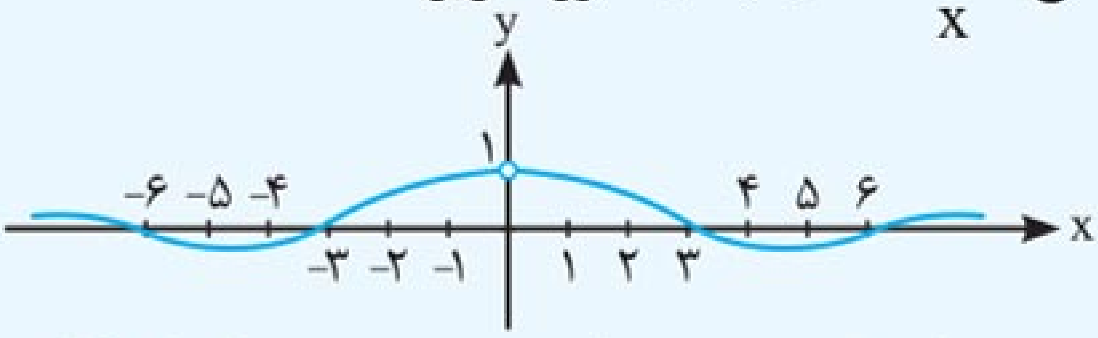
تابع x^3 و $3x$ اکیداً صعودی هستند؛ پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است؛ پس تابع داده‌شده اکیداً صعودی است، محل برخورد نمودارهای f و f^{-1} حتماً روی $y=x$ قرار دارد.

$$x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x=2$$

$$A=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \Rightarrow OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

چاشنی: یک حد مهم: $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ به‌صورت زیر است:



با توجه به نمودار، وقتی ورودی تابع به عدد صفر به اندازهٔ کافی نزدیک می‌شود، خروجی تابع به هر اندازهٔ دلخواه به عدد ۱ نزدیک می‌شود و همواره از ۱ کوچک‌تر است، یعنی:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$ (x بر حسب رادیان)

این حد بیانگر این مطلب است که اگر ورودی تابع مثلثاتی سینوس به صفر میل کند و حاصل آن به همان زاویه (برحسب رادیان) تقسیم شود، حاصل حد برابر با یک خواهد شد، یعنی حاصل تقسیم سینوس یک کمان بر همان کمان شرایطی که آن کمان به صفر میل می‌کند برابر با یک است.

تست: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}([\frac{\sin x}{x}]+۲[\frac{x}{\sin x}])$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) حد ندارد.

پاسخ گزینهٔ «۲»

با توجه به نمودار تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ و مطالب بیان‌شده داریم:

$$\lim_{x\to ۰}([\frac{\sin x}{x}]+۲[\frac{x}{\sin x}])=[۱^-]+۲[۱^+]=۰+۲\times ۱=۲$$

$$\overset{\text{برنولی}}{=\!=\!=} \lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\frac{۹x^۲}{۴})-(۱-\frac{x^۲}{۴})}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{-۲x^۲}{x^۲} = -۲$$

تست: حاصل $\lim_{x\to ۰}([۲x]+[-۲x])\times \frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است) (ریاضی۹۴)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

پاسخ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم:

$$[۲x]+[-۲x]=\begin{cases} ۰ & ; \quad ۲x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ; \quad ۲x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

با استفاده از هم‌ارزی توابع، حد را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۰}(-۱)\times \frac{۳\frac{x^۲}{۲}}{۱-(۱+\frac{x^۲}{۲})} = \lim_{x\to ۰} \frac{-۳\frac{x^۲}{۲}}{-\frac{x^۲}{۲}} = ۳$$

تست: حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳}$ کدام است؟ (ریاضی خارج۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ «۱» حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. اگر در صورت کسر هم‌ارزی‌های توابع $\sin x$ و $\tan x$ را قرار دهیم، خواهیم داشت (در صورت دو جمله از هم‌ارزی‌ها را برداشتیم):

پس:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+c}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots+c'}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & ; \quad m=n\\ ۰ & ; \quad m>n\\ \infty & ; \quad m<n\end{cases}$$

تست: اگر $\lim_{x\to+\infty}[\frac{a-۲x^۳}{x^۳+۱}]=-۳$، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a\geq-۲$ ۲) $a\leq-۲$ ۳) $a>-۲$ ۴) $a<-۲$

پاسخ گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a-۲x^۳}{x^۳+۱}=-۲$$

حال باید عبارت داخل براکت از ۲− کوچک‌تر باشد تا جزء صحیح آن ۳− شود:

$$\frac{a-۲x^۳}{x^۳+۱}<-۲\xrightarrow[\text{ضرب در } x^۳+۱]{x^۳+۱>۰}a-۲x^۳<-۲x^۳-۲$$

پس: $a<-۲$

تست: اگر $\lim_{x\to-\infty}(\frac{۲x^۲+x}{۲x-۱}+ax-b)=۲$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۲−   ۴) ۳−

پاسخ گزینهٔ «۳»

اگر مخرج مشترک بگیریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(۲+۲a)x^{۲}+(۱-a-۲b)x+b}{۲x-۱}=۲$$

چون حاصل حد، عدد حقیقی شده است، پس ضریب $x^{۲}$ باید صفر باشد:

$$\begin{cases}۲+۲a=۰\Rightarrow a=-۱\\ \dfrac{۱-a-۲b}{۲}=۲\Rightarrow b=-۱\end{cases}\Rightarrow a+b=-۲$$

تست: مقـــدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{۱}{x+۱}+\dfrac{۱}{x}}-\sqrt{\dfrac{۱}{x^{۲}}-\dfrac{۱}{x^{۲}+۱}}\right)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۴»

با توجه به مثبت‌بودن x، $\sqrt{x}$ را در پرانتز و رادیکال‌ها ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\underbrace{\frac{x}{x+۱}}_{۱}+\underbrace{\frac{x}{x}}_{۱}}-\sqrt{\underbrace{\frac{x}{x^{۲}}}_{۰}-\underbrace{\frac{x}{x^{۲}+۱}}_{۰}}=\sqrt{۲}$$

چاشنی: چند هم‌ارزی مهم

اگر x به ∞ میل کند، داریم:

۱ $[x]\sim x$

۲ $$\sqrt[n]{ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots+c}\begin{cases}\sim\sqrt[n]{a}\,|x+\dfrac{b}{na}| \quad ; \quad n \text{ زوج}\\ \sim\sqrt[n]{a}(x+\dfrac{b}{na}) \quad ; \quad n \text{ فرد}\end{cases}$$

تست: فرض کنید $f(x)=(x[x^2+\frac{1}{2}])^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) -4 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=g'(\frac{3}{\sqrt{8}})\times f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$$

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}})=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2$$

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow g'(x)=2x\times-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\underset{\cancel{2}\sqrt{2}}{\sqrt{8}}}\times 16=-8\sqrt{2}$$

$$f'(2)=?\ :f(x)=16x^2+1\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=64$$

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=-8\sqrt{2}\times 64=4\times(-128\sqrt{2})$$

بنابراین ۴ برابر $-128\sqrt{2}$ است.

دقت کنید که در محاسبهٔ $f'(2)$ ابتدا تکلیف براکت را در همسایگی ۲ مشخص کرده و عدد ۴ را به جای براکت جایگزین کردیم؛ سپس مشتق گرفتیم.

نکته: شرط وجود مشتق در هر مرتبه این است که علاوه بر پیوستگی، مشتق‌های مرتبهٔ پایین‌تر موجود باشند.

تست: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x)=f(۴-x^۲)$ است. اگر $f'(۱)=-۵$ و $f''(۱)=-۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$ کدام است؟

(ریاضی ۹۷)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$g'(x)=-۲xf'(۴-x^۲)$$

$$\Rightarrow g''(x)=-۲f'(۴-x^۲)+۴x^۲f''(۴-x^۲)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{۳}} g''(\sqrt{۳})=-۲f'(۱)+۴\times۳f''(۱)$$

$$=-۲(-۵)+۱۲(-۱)=-۲$$

تست: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲|x|$ در $x=۰$ ....

۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد.

۲) مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد.

۳) مشتق اول و دوم ندارد.

۴) مشتق اول و دوم دارد.

پاسخ گزینهٔ «۴»

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳ & ; \quad x\geq ۰\\ -x^۳ & ; \quad x<۰\end{cases}, \quad \lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$$

f پیوسته است.

مشتق

تست: در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) -1 ‏ ۲) 1 ‏ ۳) $-\frac{1}{2}$ ‏ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$y=\sin x\cos 2x\Rightarrow y=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi-\cancelto{0}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}$$

$$y=\sin^4 x-\cos^4 x$$

$$\Rightarrow(\sin^2 x-\cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})=-\cos 2x$$

$$y=\frac{-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{+1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

-1 برابر یکدیگر هستند.

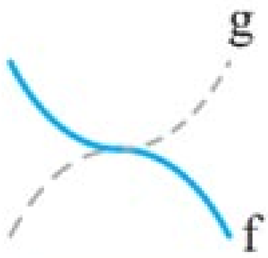
تست: توپی از یک پل به ارتفاع ۲۰ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ توپ از سطح زمین در زمان t است. با توجه به جدول زیر، سرعت توپ پس از گذشت ۰/۵ ثانیه از پرتاب با بهترین تقریب کدام است؟

t (ثانیه)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ (متر)	۲۰	۲۱/۵	۲۲/۱	۲۳/۲	۲۴/۲	۲۵

۱) ۵ ‏ ۲) ۸ ‏ ۳) ۶/۵ ‏ ۴) ۷

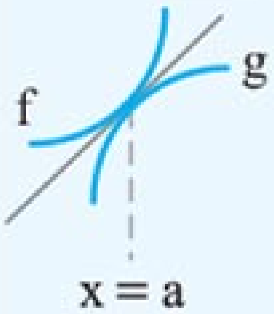
پ اگر معادلهٔ گفته‌شده دارای تنها یک جواب $(x-a)^{2n}$ باشد، نمودارهای f و g بر یکدیگر مماس‌اند.

ت اگر معادلهٔ گفته‌شده دارای جواب مکرر مرتبهٔ فرد $(x-a)^{2n+1}$ باشد، نمودارهای f و g بر یکدیگر مماس‌اند و از یکدیگر عبور نیز می‌کنند.



چاشنی: اگر $x=a$ تنها جواب معادلهٔ $f(x)=0$ باشد، آن‌گاه:
$f(a)=f'(a)=0$

یا اگر نمودار توابع f و g در $x=a$ بر یکدیگر مماس باشند:



$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

تست: خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ و $g(x)=ax^2+bx$ در نقطهٔ $x=2$ مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} f(2)=g(2)\Rightarrow 4=4a+2b \\ f'(2)=g'(2)\Rightarrow -3=4a+b \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} b+2a=2 \\ b+4a=-3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} 2a=-5\Rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow b=2+\cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}\Rightarrow b=7$$