به نام پروردگار مهربان

هندسه

ریاضی

دهم

آموزش به سبک لقمه

احسان لعل

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فصل اول

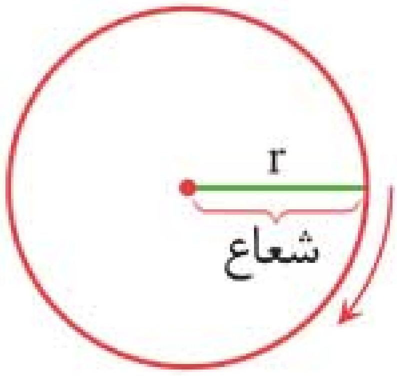
ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

وعدهٔ ۱
دایره

◂ **دایره:** دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (به نام مرکز) به فاصله‌ای ثابت (که به این فاصلهٔ ثابت شعاع گویند) قرار داشته باشند.

روش رسم دایره



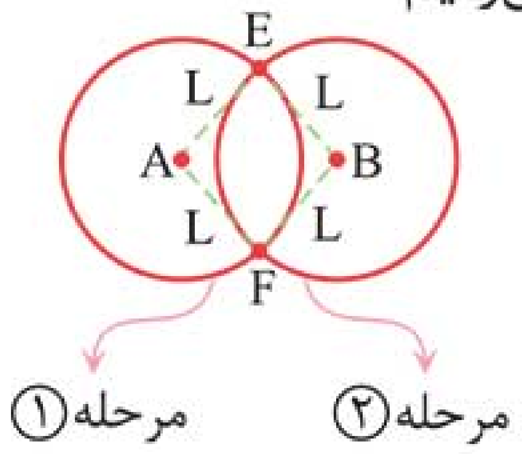
برای رسم دایره به مرکز نقطهٔ ثابت O و به شعاع r کافی است نوک پرگار را روی نقطهٔ O قرار داده و دهانهٔ آن را به اندازهٔ r باز کنیم سپس از یک نقطه شروع کرده و پس از یک دور کامل به نقطهٔ ابتدایی برسیم به شکل حاصل یک دایره گویند.

◂ **در حالتی که دو نقطهٔ ثابت داشته باشیم:** دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه مفروض‌اند، نقاطی که از هر دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ یکسان (مانند L که $L > \frac{AB}{۲}$) باشند به روش زیر رسم می‌شود:

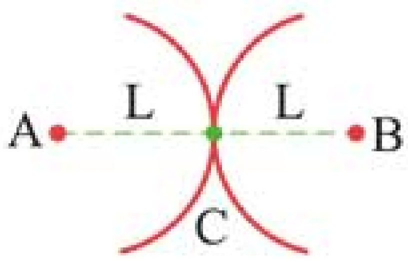
۱ به مرکز نقطهٔ A و به شعاع L کمانی می‌زنیم.

۲ به مرکز نقطهٔ B و به شعاع L کمانی می‌زنیم.

۳ این دو کمان یکدیگر را در دو نقطهٔ E و F قطع می‌کنند که فاصلهٔ هر کدام تا A و B برابر L است. بنابراین E و F نقاط مطلوب هستند.

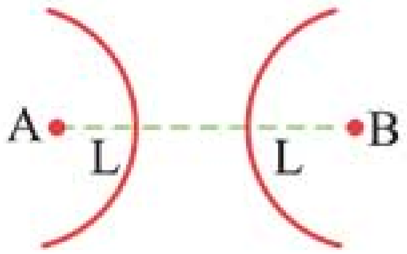


حالت‌های خاص



حالت اول: اگر $L = \frac{AB}{۲}$ باشد، محل برخورد دو کمان در یک نقطه است که وسط پاره‌خط AB قرار دارد و مسئله تنها یک جواب دارد.

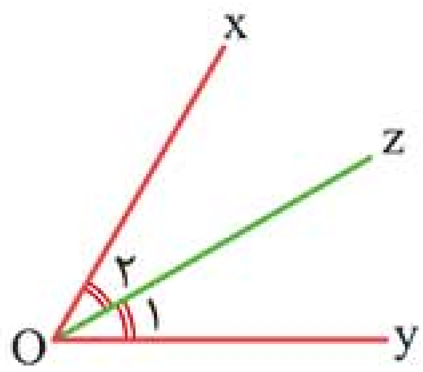
حالت دوم: اگر $L < \frac{AB}{۲}$ باشد، دو کمان یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد.



وعدهٔ ۲

نیمساز

◄ **نیمساز:** نیم‌خطی است که ابتدای آن روی رأس زاویه قراردارد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

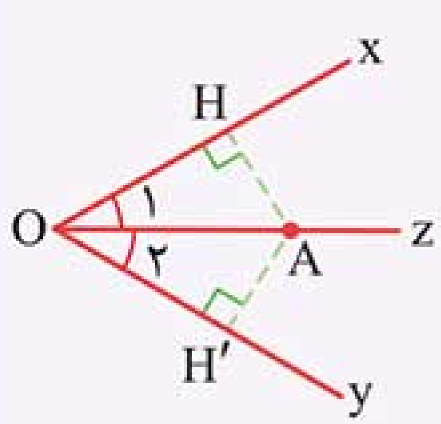


$$\text{نیمساز } Oz \Leftrightarrow \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$$

اثبات کنید: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

نقطهٔ فرضی A را روی نیمساز Oz در نظر بگیرید.

از A خطی عمود بر Ox و خطی عمود بر Oy رسم می‌کنیم:



فرض: Oz نیمساز　　**حکم:** $AH = AH'$

وعدهٔ ۶

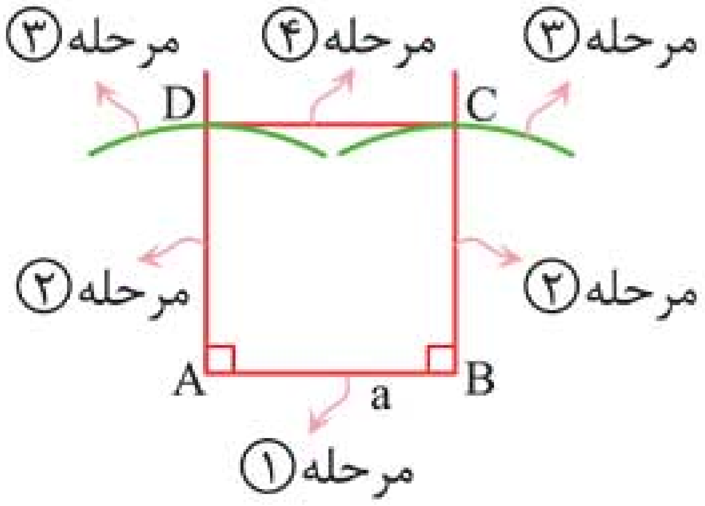
مربع

◂ **مربع:** چهارضلعی است که چهار ضلع آن برابرند و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه است.

رسم مربع به ضلع مشخص (ضلع a)

۱ پاره‌خط AB را به طول a رسم می‌کنیم.

۲ در نقطهٔ A عمودی بر پاره‌خط AB و هم‌چنین در نقطهٔ B عمودی بر پاره AB رسم می‌کنیم.



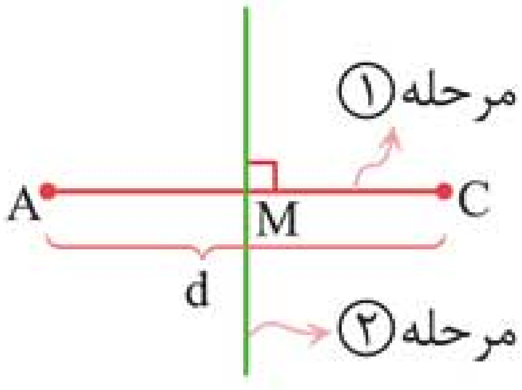
۳ به مرکزهای A و B و شعاع a دو کمان می‌زنیم تا دو خط عمود بر AB را در دو نقطه مانند C و D قطع کنند.

۴ از C به D وصل می‌کنیم، ABCD یک مربع است زیرا چهار ضلع آن برابر و حداقل یک زاویه قائمه دارد.

رسم مربع به قطر d

یادآوری: مربع چهارضلعی است که قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند و دو قطر با هم برابرند.

فرض کنید می‌خواهیم مربعی به قطر d رسم کنیم برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

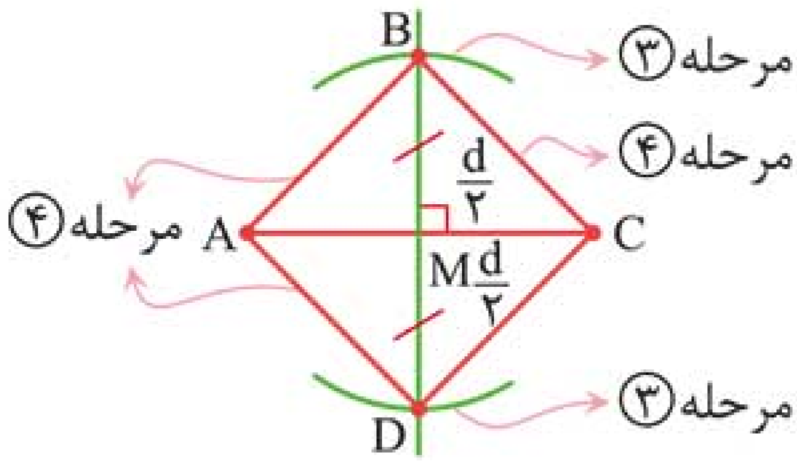


۱ پاره‌خط AC را به طول d رسم می‌کنیم.

۲ عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم.

۳ به مرکز نقطهٔ وسط پاره‌خط AC (M) و به شعاع $\frac{d}{۲}$ کمانی می‌زنیم تا عمودمنصف رسم شده را در دو نقطهٔ B و D قطع کند.

۴ از A به B و D و هم‌چنین از C به B و D وصل می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است، زیرا قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند و قطرها مساوی یکدیگرند.



وعدهٔ ۷ مستطیل

◄ **مستطیل:** چهارضلعی است که هر چهار زاویهٔ آن قائمه باشند.

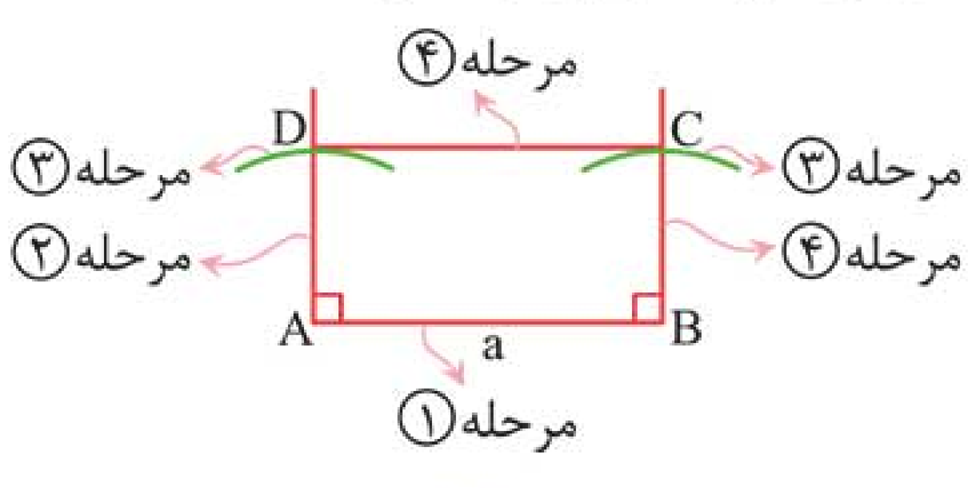
رسم مستطیل با اضلاع مشخص (اضلاع a و b)

۱ پاره‌خط AB را به طول a رسم می‌کنیم.

۲ در نقطهٔ A عمودی بر پاره‌خط AB و هم‌چنین در نقطهٔ B عمودی بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم.

۳ به مراکز A و B و به شعاع b دو کمان می‌زنیم تا دو عمود رسم‌شده را در دو نقطهٔ C و D قطع کنند.

۴ از C به D وصل می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است.



رسم مستطیل به قطر مشخص (قطر d)

یادآوری: مستطیل چهارضلعی است که قطرهایش برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

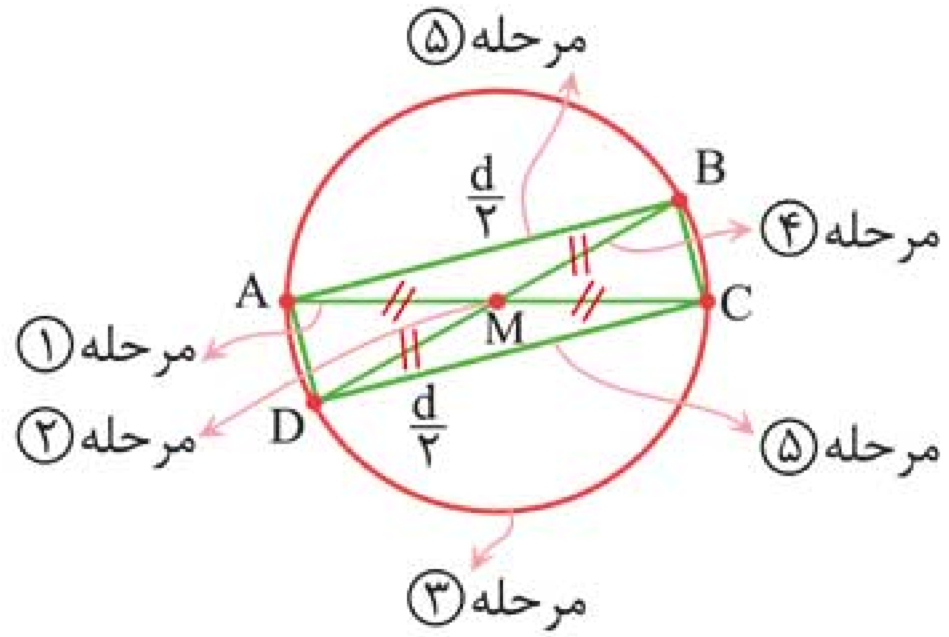
۱ پاره‌خط AC به طول d را رسم می‌کنیم.

۲ وسط پاره‌خط AC را (به کمک رسم عمودمنصف) می‌یابیم نقطهٔ M می‌نامیم.

۳ به مرکز M و به شعاع $\frac{d}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

۴ یک قطر دلخواه به جز قطر AC از این دایره را رسم می‌کنیم، نقاط تقاطع قطر با دایره را B و D می‌نامیم.

۵ از A به B و D و هم‌چنین از C به B و D وصل می‌کنیم.



چاشنی: با توجه به این که قطر BD از مستطیل ABCD می‌تواند هر قطر دلخواهی به‌جز AC باشد پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

رسم مستطیل با قطر و یک ضلع مشخص (ضلع a و قطر d)

۱ پاره‌خط AC به طول d را رسم می‌کنیم.

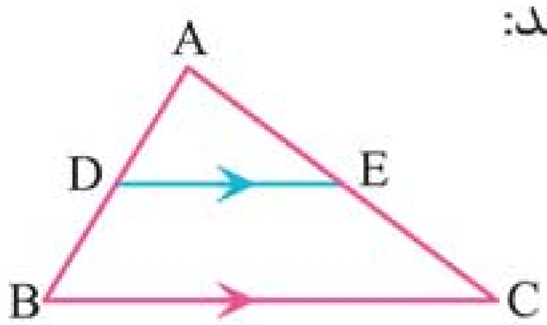
۲ وسط پاره‌خط AC را (به کمک رسم عمودمنصف) می‌یابیم و نقطهٔ M می‌نامیم.

درس ۲ قضیهٔ تالس و کاربردهای آن

وعدهٔ ۴

قضیهٔ تالس

اگر خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط متناسب تشکیل می‌دهد:

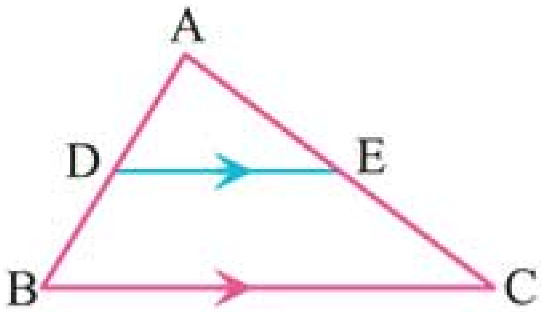


$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

به تناسب بالا، تناسب جزءبه‌جزء می‌گوییم.

تعمیم قضیهٔ تالس

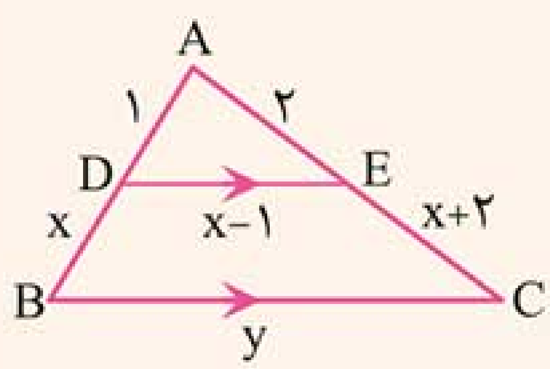
اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است.



$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

به تناسب بالا، تناسب جزء به کل می‌گوییم.

مثال: **در شکل زیر اگر دو پاره‌خط DE و BC موازی باشند، مقدار x و y را بیابید.**



پاسخ با توجه به موازی بودن دو خط DE و BC نسبت جزء به کل را در مثلث می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{x+۱} = \frac{۲}{x+۴}}_{۱} = \frac{x-۱}{y} \xrightarrow{۱} x+۴ = ۲(x+۱)$$

$$\Rightarrow x+۴ = ۲x+۲ \Rightarrow x = ۲$$

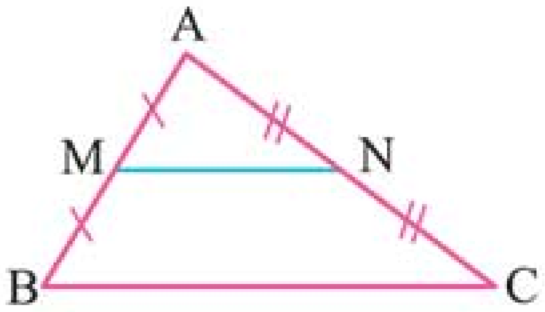
$$\frac{۲}{x+۴} = \frac{x-۱}{y} \xrightarrow{x=۲} \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{y} \Rightarrow y = ۳$$

عکس قضیهٔ تالس

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و بر روی آن دو ضلع چهار پاره‌خط متناسب پدید آورد، آن‌گاه موازی با ضلع سوم مثلث است.

حالت خاص قضیهٔ تالس

پاره‌خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی با ضلع سوم و مساوی با نصف اندازهٔ آن ضلع است.

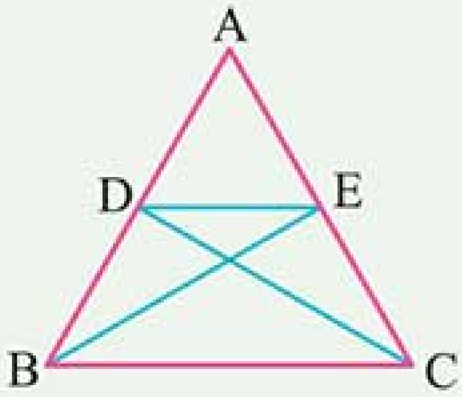


$$\begin{cases} AM = MB \\ AN = NC \end{cases} \Rightarrow (MN \parallel BC\ ,\ MN = \frac{۱}{۲}BC)$$

اثبات کنید: قضیهٔ تالس را اثبات نمایید.

مثلث ABC را در نظر بگیرید که درون آن پاره‌خط DE موازی ضلع BC رسم شده است از D به C و از E به B وصل می‌کنیم.

در ایـن حالت خط DE مـوازی BC و مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشـترک‌اند، بنابرایـن ارتفاع وارد بـر قاعدهٔ این دو مثلث از رأس D مسـاوی هـم بـوده و می‌توان گفت:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{DAE}}}{S_{\overset{\triangle}{DEC}}}=\frac{AE}{EC} \quad ①$$

هم‌چنین مثلث‌های DAE و DEB در رأس E مشترک هستند پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{DAE}}}{S_{\overset{\triangle}{DEB}}}=\frac{AD}{DB} \quad ②$$

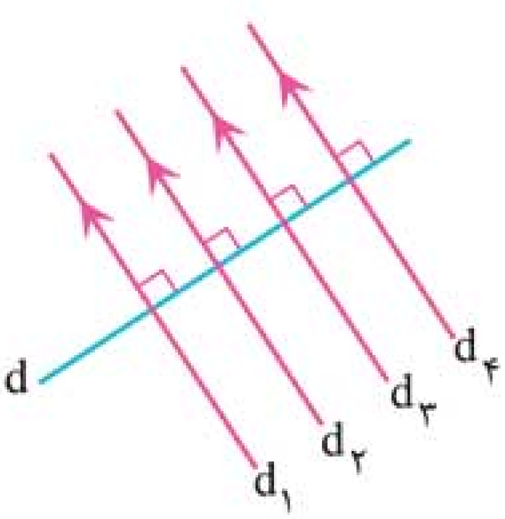
چون مثلث‌های DEC و DEB هم‌مساحت هستند لذا از ① و ② می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

وعدهٔ ۵

قضیهٔ خطوط موازی و مورب

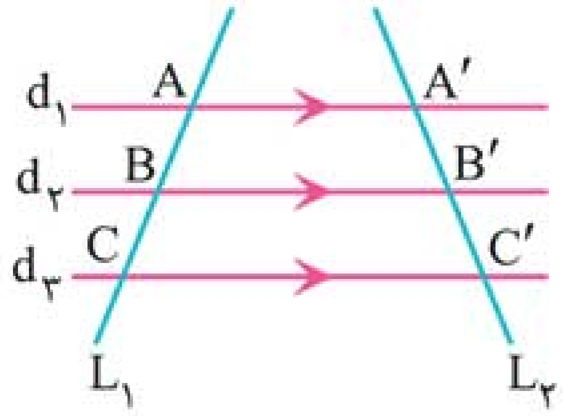
در صفحه هرگاه چند خط بر یک خط عمود باشند آن‌گاه با هم موازی هستند، برعکس هرگاه از چند خط موازی یکی بر یک خط عمود باشد، آن‌گاه تمام خط‌های دیگر نیز بر آن خط عمود هستند.



$$\begin{cases} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \\ d \perp d_1 \end{cases} \Rightarrow d \perp d_2 \,,\, d \perp d_3 \,,\, d \perp d_4$$

قضیهٔ اساسی خطوط موازی و مورب

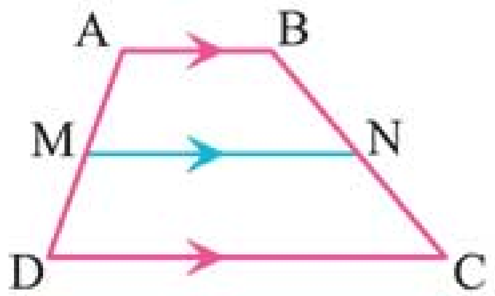
هـر گاه دو خـط دلخـواه L_1 و L_2 بیش از دو خط مـوازی را قطع کنند بـر روی ایـن دو خط پاره‌خط‌های متناسـب ایجـاد می‌کنند.
بـه عنـوان نمونـه در شـکل زیـر d_1، d_2 و d_3 مـوازی و خطوط L_1 و L_2 مورب‌انـد.



$$\begin{cases} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} \\ \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'} \end{cases}$$

قضیهٔ تالس در ذوزنقه

اگـر خطـی مـوازی با دو قاعـدهٔ ذوزنقه، سـاق‌های آن را قطـع نماید، بر روی سـاق‌ها چهـار پاره‌خط متناسـب پدید مـی‌آورد و برعکس.



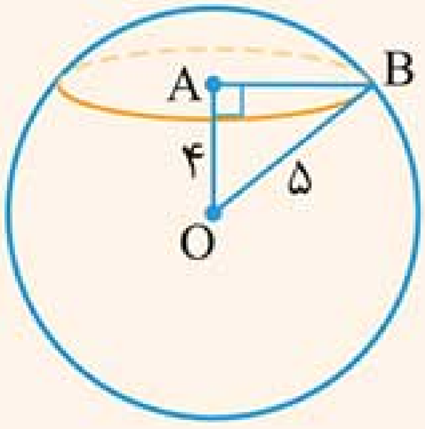
$$MN \parallel AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

بـه تناسـب بـالا، تناسـب جـزء به جـزء گوینـد. تناسـب جزء‌بـه کل به صـورت زیر اسـت:

$$MN \parallel AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$$

مثال: **صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصلهٔ O از صفحه ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع را بیابید.**

پاسخ این صفحه کره را در فاصلهٔ ۴ سانتی‌متری قطع می‌کند، می‌دانیم مقطع حاصل یک دایره است. مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} OA = ۴cm \\ OB = ۵cm \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{OAB} \text{ قائم‌الزاویه } \Rightarrow AB^۲ + OA^۲ = OB^۲ \Rightarrow AB = ۳cm$$

مساحت دایره با شعاع $۳cm$ برابر است با:

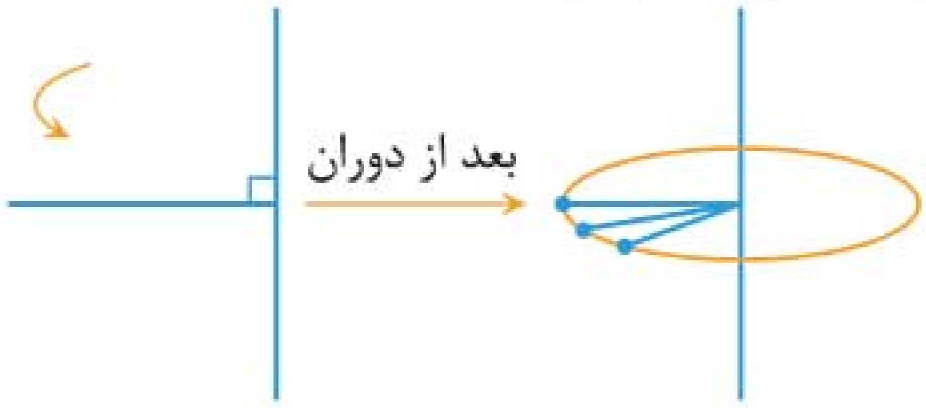
$$S = \pi r^۲ = \pi(۳)^۲ = ۹\pi$$

وعدهٔ ۱۰

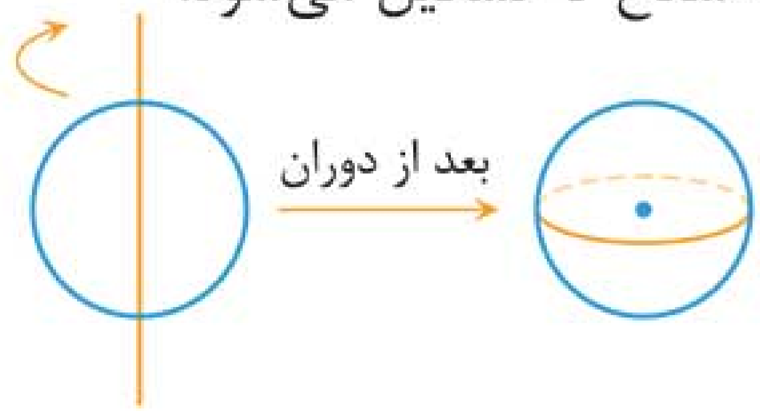
دوران حول محور

از دوران دادن شکل‌های مختلف هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های متفاوتی را تصور کرد.

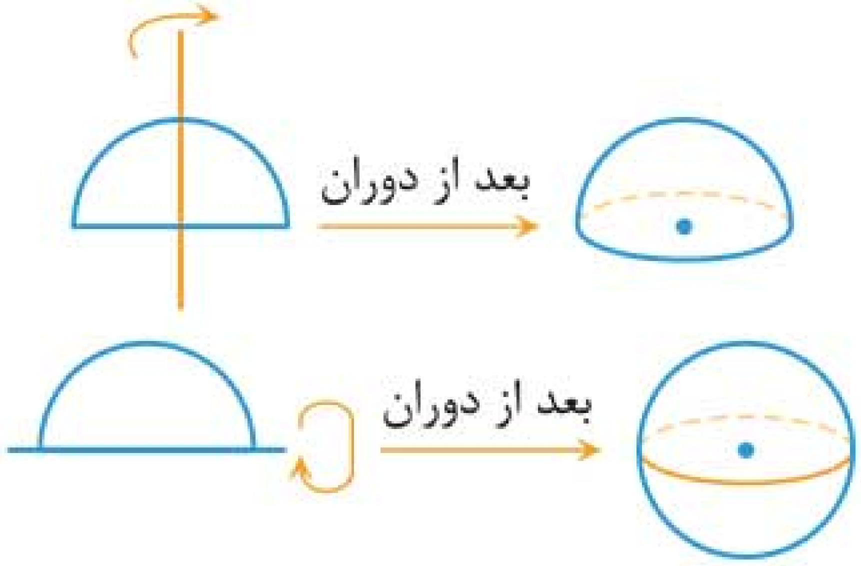
۱ اگر دو پاره‌خط بر هم عمود باشند و یکی را حول دیگری دوران دهیم، یک دایره تشکیل می‌شود.



۲ اگر دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران دهیم، یک کره به شعاع r تشکیل می‌شود.



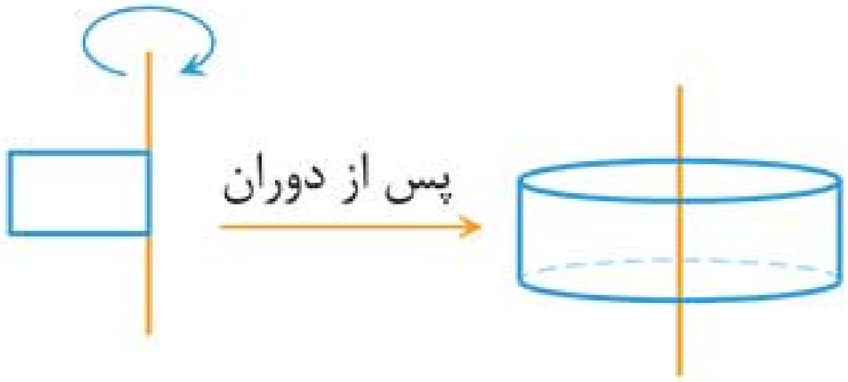
۳ اگر نیم‌دایره‌ای را حول قطر دوران دهیم، کره و اگر حول شعاع عمود بر قطر دوران دهیم، نیم‌کره تشکیل می‌شود.



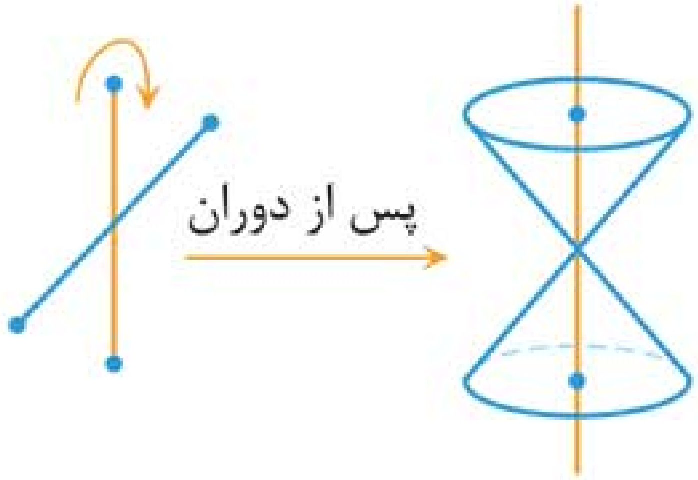
۴ اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، یک نیم‌کره تشکیل می‌شود.

۵ اگر یکی از دو خط موازی را حول دیگری دوران دهیم، یک استوانه تشکیل می‌گردد.

۶ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، استوانه تشکیل می‌شود.



۷ اگر یکی از دو پاره‌خط متقاطع را حول دیگری دوران دهیم، دو مخروط تشکیل می‌شود.

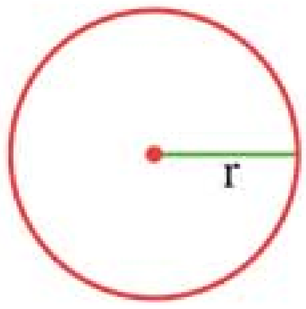


پیوست ۱

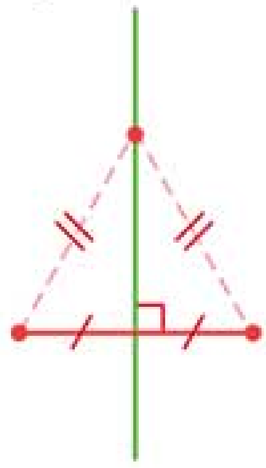
فرمول‌نامه

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

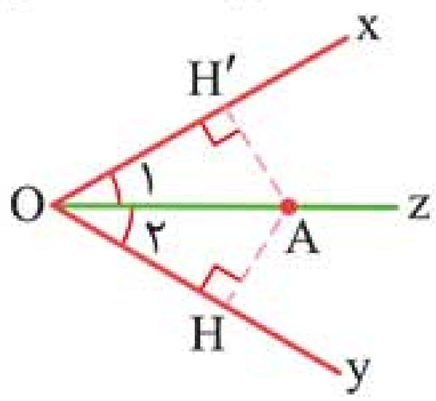
◂ **دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز) به یک فاصله‌ای ثابت (شعاع) قرار دارند.



◂ **عمودمنصف یک پاره‌خط:** خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.



◂ **نیمساز یک زاویه:** نیم‌خطی که زاویه را نصف می‌کند هر نقطه‌ای که روی نیمساز قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.



◂ **شرط وجود مثلث:** سه پاره‌خط a ، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند، هرگاه:

$$\begin{cases} |b-a|<a<b+c \\ |a-c|<b<a+c \\ |a-b|<c<a+b \end{cases}$$

۷ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

۸ $\frac{a}{d-a}=\frac{c}{d-c}$

۹ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

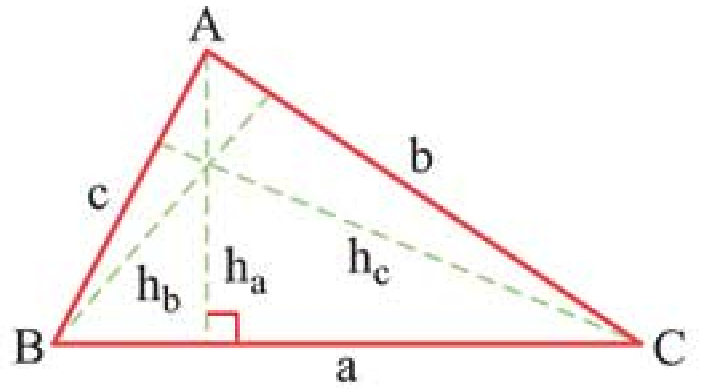
تعمیم ویژگی ۹:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{ka_1+ka_2+\cdots}{kb_1+kb_2+\cdots}$$

◂ **واسطهٔ هندسی:** عدد b واسطهٔ هندسی a و c است. اگر و تنها اگر:

$$b^2=a\cdot c$$

◂ **کاربرد نسبت و تناسب در مساحت مثلث‌ها:**

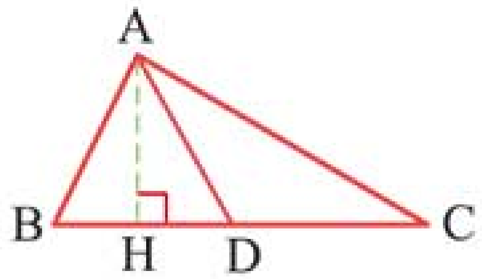


$$S=\frac{a.h_a}{2}=\frac{b.h_b}{2}=\frac{c.h_c}{2}$$

۱ در هر مثلث:

کوتاه‌ترین ارتفاع (نیمساز، میانه) آن است که بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می شود و بزرگ‌ترین ارتفاع (میانه، نیمساز) آن است که بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود.

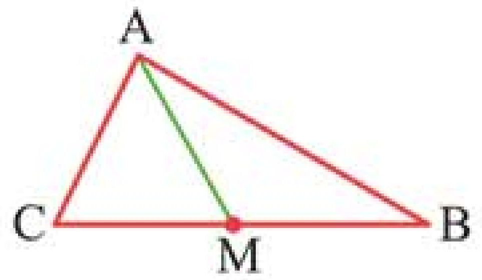
۲ در شکل زیر می‌توان گفت:



ارتفاع مشترک $AH \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}$

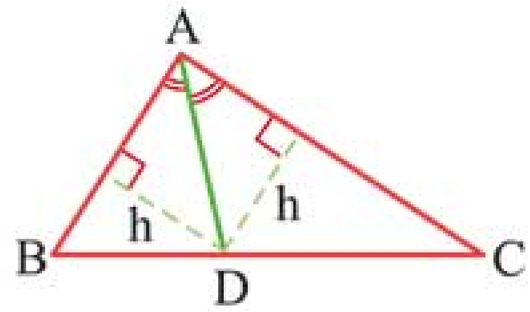
فرمول‌نامه

۳ میانهٔ هر مثلث آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.



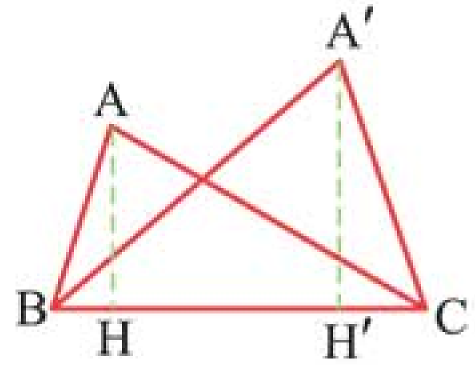
میانه $AM \Rightarrow S_{AMC} = S_{AMB}$

۴ با رسم نیمساز AD داریم:



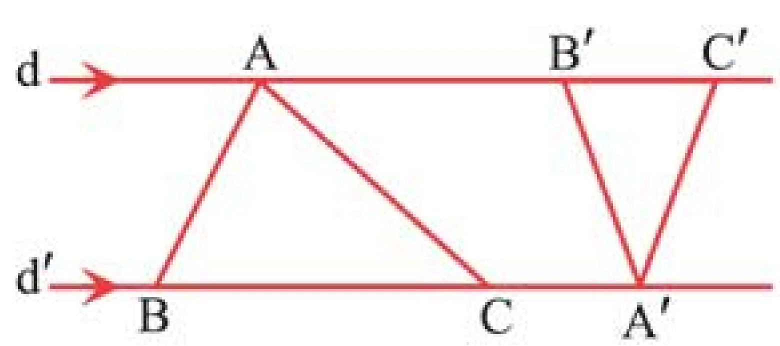
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$$

۵



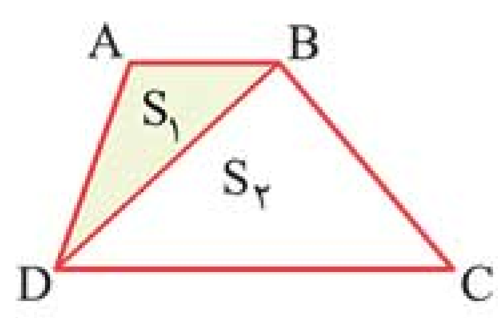
قاعدهٔ مشترک $BC \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{AH}{A'H'}$

۶



$d \parallel d' \Rightarrow$ ارتفاع مشترک $\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{BC}{B'C'}$

۷ در هر ذوزنقه:

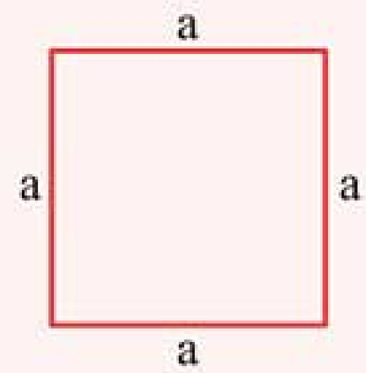
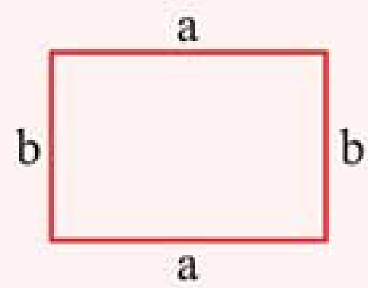
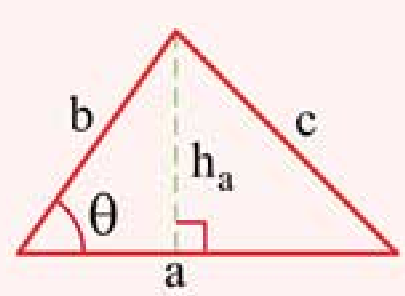
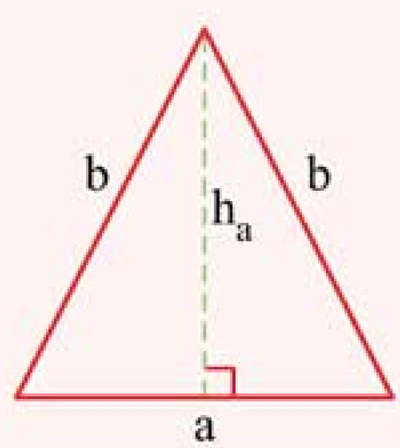


با رسم هر قطر $\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{AB}{DC}$

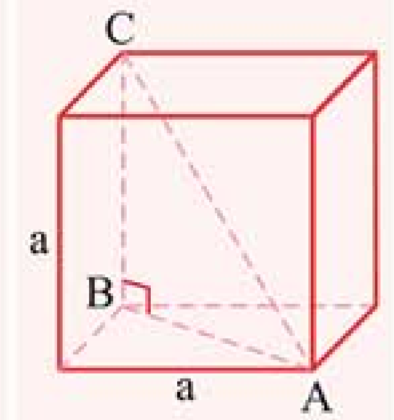
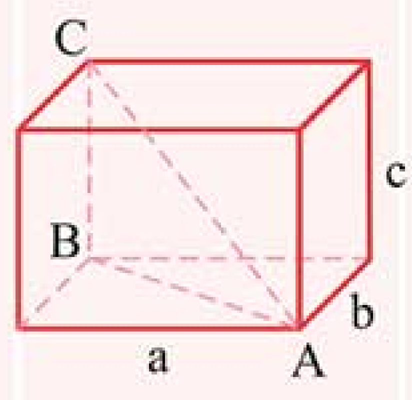
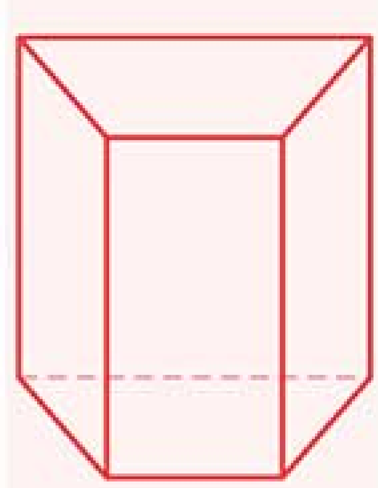
پیوست ۲

حفظیات

الف شکل‌های دوبُعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و محیط آن‌ها را با P نمایش دهیم داریم:

نام شکل	شکل	محیط = P و مساحت = S
مربع		$P = ۴a$ $S = a \times a = a^۲$
مستطیل		$P = ۲(a + b)$ $S = a \cdot b$
مثلث		$P = a + b + c$ $S = \frac{a \cdot h_a}{۲}$ $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\theta}{۲}$
مثلث متساوی‌الساقین		$P = a + ۲b$ $S = \frac{a \cdot h_a}{۲}$

ب شکل‌های سه‌بعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و حجم آن‌ها را با V نمایش دهیم داریم:

نام شکل	شکل	روابط
مکعب		قطر وجه $AB = a\sqrt{۲}$ قطر مکعب $AC = a\sqrt{۳}$ جانبی $S = ۴a^{۲}$ کل $S = ۶a^{۲}$ $V = a^{۳}$
مکعب‌مستطیل		قطر وجه $AB = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ قطر مکعب‌مستطیل $AC = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}$ کل $S = ۲(ab + ac + bc)$ $V = a \cdot b \cdot c$
منشور (شکل روبه‌رو به عنوان نمونه)		ارتفاع × مساحت قاعده = V ارتفاع × محیط قاعده = $S_{\text{جانبی}}$ کل $S = S_{\text{جانبی}} + ۲S_{\text{قاعده}}$

حفظیات