فهرست

فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

فصل اول

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

۱- گزینهٔ ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:
$$\begin{cases}a+2b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینهٔ ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=2$ و $a-b=6$ که نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-2$. بنابراین $ab=-8$.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(3,4)$ و $(3,m^2)$ نتیجه می‌شود $m^2=4$، پس $m=\pm2$. با توجه به زوج‌های مرتب $(4,m+n)$ و $(4,2n+1)$ نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$، پس $n=m-1$. اگر $m=2$، آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3,4),(3,2),(4,3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(3,4)$ و $(3,2)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$، آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3,4),(-9,-2),(4,-5)\}$. بنابراین رابطهٔ f، تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد ۶، $3m$ و $2m+n$ یکسان باشند:
$$3m=6\Rightarrow m=2,\quad 2m+n=6\xrightarrow{m=2}4+n=6\Rightarrow n=2$$
بنابراین $mn=4$.

۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که
$$f(x)=4x+4\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4\\f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4\end{cases}$$
بنابراین $f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x$.

۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$، آن‌گاه $t\neq0$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$. پس $x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t}$. به این ترتیب
$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=t+1$$
بنابراین اگر $x\neq0$، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینهٔ ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم:
$$2<4\Rightarrow f(2)=k\times2+4=2k+4,\quad 4\geq4\Rightarrow f(4)=\frac{2}{5}\times4=\frac{8}{5}$$
بنابراین
$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5}\Rightarrow 2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow 2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$
پس $2k=-2$، یعنی $k=-1$.

۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(1)=2$، پس $\begin{cases}a-b=2\\3a-7b=2\end{cases}$. بنابراین $a=3$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=4$.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-4)=x-4$. بنابراین
$$(2a-7)x+b+1=x-4\Rightarrow\begin{cases}2a-7=1\Rightarrow a=4\\b+1=-4\Rightarrow b=-5\end{cases}$$
در نتیجه $f(a+b)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آید
$$f(-\frac{7}{2})=(2a-7)\times\frac{1}{2}+b+1\Rightarrow-\frac{7}{2}=a-\frac{7}{2}+b+1\Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:
$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$
برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس
$$a+1=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$$
در نتیجه $f(1)=3-b+b=3$.

۱۱- گزینهٔ ۲ مقادیر $x=3$، $x=2$ و $x=0$ را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:
$$f(3)=9a+3b+c,\quad f(2)=4a+2b+c,\quad f(0)=c$$
بنابراین
$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینهٔ ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x\times f(x)-12$ می‌نویسیم. در نتیجه $(4x-1)\times f(x)=2x+12$، پس $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$.

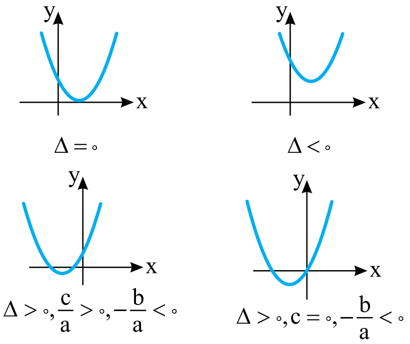
۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، $x=-\frac{b}{2a}$ است. بنابراین طبق معادلهٔ داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس $\frac{-2}{2a}=1$ و در نتیجه $a=-1$. مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس
$$-1=a+2+b\xrightarrow{a=-1}-1=-1+2+b\Rightarrow b=-2$$
بنابراین $ab=2$.

۱۴- گزینهٔ ۱ چون سهمی در نقاطی به طول ۱- و ۵ محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادلهٔ محور تقارن به‌صورت $x=\frac{5-1}{2}=2$ است که نقاط $(-1,0)$ و $(5,0)$ نسبت به آن قرینهٔ یکدیگرند.

۱۵- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2}$ است، پس $-\frac{b}{2}=-2$. بنابراین $b=4$، در نتیجه $b-c=-1$.

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=-\frac{b}{۲a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{۲a}>۰$ و در نتیجه محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=۰$، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به‌صورت گزینهٔ (۳) باشد.

۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد:



بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=m^۲-۴(۴-m^۲)=۵m^۲-۱۶$. اکنون توجه کنید که

$$\text{حالت‌های اول و دوم}: \Delta\le ۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶\le ۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{حالت‌های سوم و چهارم}: \begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m<-\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } m>\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\ge ۰\Rightarrow ۴-m^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le m\le ۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -m<۰\Rightarrow m>۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}} \frac{۴}{\sqrt{۵}}<m\le ۲$$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در همهٔ حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le ۲$$

۱۸- گزینهٔ ۲ محیط شکل برابر است با

$$۴x+۴y=۴۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S=۲xy+xy=۳xy=۳x(۱۰-x)=-۳x^۲+۳۰x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجهٔ دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. بنابراین

$$S_{max}=-\frac{۹۰۰}{۴(-۳)}=۷۵$$

۱۹- گزینهٔ ۳ اعدادی که جواب معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S=-\frac{b}{a}=۳$ است.

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^۲+kx+۱=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\Delta=k^۲-۴<۰$$

$$k^۲<۴\Rightarrow |k|<۲\Rightarrow -۲<k<۲$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\{x|۹-x^۲\ge ۰, x^۲-۱>۰\}$$

$$۹-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۹\Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

$$x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f=[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$. پس عددهای صحیح ±۳ و ±۲ در دامنهٔ تابع هستند.

۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از $-۴\le x\le ۴$ نتیجه می‌گیریم $-۸\le -۲x\le ۸$، پس $-۵=۳-۸\le ۳-۲x\le ۳+۸=۱۱$. بنابراین برد تابع f بازهٔ $[-۵,۱۱]$ است.

راه‌حل دوم چون $f(x)=-۲x+۳$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(۴),f(-۴)]$ است که برابر $[-۵,۱۱]$ می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^۲+۲x-۲=(x+۱)^۲-۳$.
از طرف دیگر، اگر $x\in[-۴,۵]$، آن‌گاه

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۳\le x+۱\le ۶\Rightarrow ۰\le (x+۱)^۲\le ۳۶\Rightarrow -۳\le (x+۱)^۲-۳\le ۳۳$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینهٔ ۴ در مورد گزینهٔ (۴)، $D_f=D_g=[۰,۱]$ و اگر $x\in[۰,۱]$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x)\ne g(x)$.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=\mathbb{R}$, $f(x)=|x|, g(x)=x\Rightarrow f(x)\ne g(x)$

گزینهٔ (۳) $D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty), D_g=[۱,+\infty)\Rightarrow D_f\ne D_g$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S=\pi r^۲$ و در نتیجه $r=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$. بنابراین

$$P=۲\pi r=۲\pi(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}})\Rightarrow P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}=۲\sqrt{\pi S}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ و محیط مربع برابر $۴a$ می‌شود. بنابراین

$$P=۴a\Rightarrow a=\frac{P}{۴}, \quad \text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^۲}{۴}, \quad \text{مساحت مربع}=a^۲$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^۲-\frac{\pi a^۲}{۴}=a^۲(\frac{۴-\pi}{۴})$$

$$=\frac{P^۲}{۱۶}(\frac{۴-\pi}{۴})=(\frac{۴-\pi}{۶۴})P^۲$$

۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\xrightarrow{y\ge ۰} y=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنابراین طول مستطیل $۲x$ و عرض آن $\sqrt{۱-x^۲}$ می‌شود و محیط آن برابر است با $P(x)=۲(۲x+\sqrt{۱-x^۲})=۴x+۲\sqrt{۱-x^۲}$.

۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{matrix}(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=-۱-۲=-۳\\ (f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-(-۱)=۳\end{matrix}\Rightarrow \frac{(f+g)(۲)}{(f-g)(۱)}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x|x\in D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq ۰\}=\{۱,۲,۳\}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۶}{-۱}=-۶,\quad (\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۰}{۹}=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر -۳ است.

۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲+۳x+۲)-(x^۲+۲x+۱)=x+۱$$

بنابراین $(f-g)(x-۱)=x-۱+۱=x$.

راه‌حل دوم چون $f(۱)=۶$ و $g(۱)=۴$، پس $(f-g)(۱)=۶-۴=۲$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-۱)$ به‌جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(۱)$ به‌دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینهٔ (۱)، با قرار دادن $x=۲$، حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}۸-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۸\\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳\end{cases}\Rightarrow ۳<x\leq ۸\Rightarrow D_f=(۳,۸]$$

دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

x	$-\infty$		۳		۵		$+\infty$
$\frac{x-۳}{۵-x}$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

$$\Rightarrow D_g=[۳,۵)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۳,۸]\cap[۳,۵)=(۳,۵)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنهٔ تابع $f\times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=۶$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=۶$ در دامنهٔ تابع g نیست و در نتیجه در دامنهٔ $f\times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=|x-۱|=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۱\\ -x+۱ & x<۱\end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-۱-(x-۱) & x\geq ۱\\ ۳x+۱-(-x+۱) & x<۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x & x\geq ۱\\ ۴x & x<۱\end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$
$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۳۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^۲+۴=۱۳\ ,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(a)=f(g(a))=f(۳a-۲)=۲(۳a-۲)+۳=۶a-۱$$
$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۲a+۳)=۳(۲a+۳)-۲=۶a+۷$$

بنابراین معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۶a-۱+۶a+۷=۲a\Rightarrow ۱۰a=-۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۲x)=a(x^۲+۲x)+۱=ax^۲+۲ax+۱$$

بنابراین باید مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+۲ax+۱=۲$ دوعضوی باشد.

یعنی باید Δ ی معادلهٔ $ax^۲+۲ax-۱=۰$ مثبت باشد:

$$\Delta=(۲a)^۲-۴a(-۱)=۴a^۲+۴a>۰\Rightarrow ۴a(a+۱)>۰\Rightarrow a>۰ \text{ یا } a<-۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$
$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳)\ \text{تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),(-۲,۲),(-۱,\sqrt{۳})\}$.

۳۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۲,-۱\leq ۵-۲x\leq ۳\}$$

از نامعادلهٔ $-۱\leq ۵-۲x\leq ۳$ نتیجه می‌شود $-۶\leq -۲x\leq -۲$ پس $۱\leq x\leq ۳$.

بنابراین $D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۲,۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۲]$.

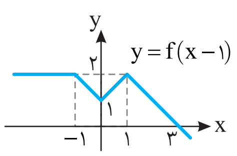
۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌ترتیب $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. بنابراین

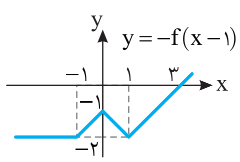
$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x|\ x\geq ۱,-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}\}$$

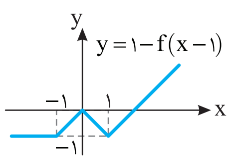
از نامعادلهٔ $-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}$ نتیجه می‌شود $x-۱\leq ۳$ پس $x\leq ۴$.

بنابراین $D_{gof}=\{x|x\geq ۱,\ x\leq ۴\}=[۱,۴]$.

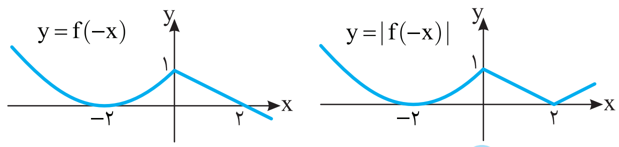
۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۱-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



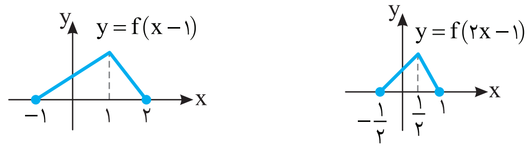




۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

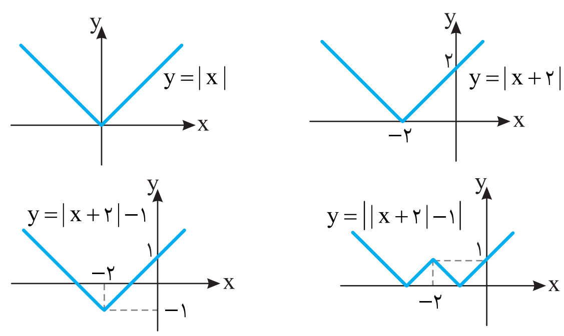


۴۲- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



۴۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x-۱))-۱$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(۲x-۱))-۱=f(۴x-۲)-۱$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲(f(۴x-۲)-۱)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=۲f(۴x-۲)-۲$ است.

۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|$ به‌دست آید. این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|-۱$ رسم شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=||x+۲|-۱|$ رسم شود.



۴۵- گزینهٔ ۳ در تابع $\{(۱,۳),(۲,۴),(۵,۷),(۶,۱)\}$ هر مؤلفهٔ دوم متناظر دقیقاً یک مؤلفهٔ اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ دوم یکسان ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینهٔ ۲ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(a,۱)$ و $(۴-a,۱)$ یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند.

$$۴-a=a\Rightarrow a=۲$$

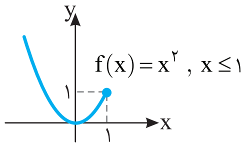
به همین ترتیب باید مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب $(۱۰,۳)$ و $(۱+b,۳)$ برابر باشند.

$$۱۰=۱+b\Rightarrow b=۹$$

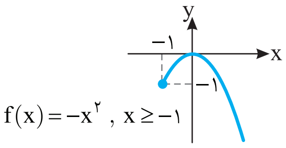
بنابراین $a+b=۱۱$.

۴۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع $f(x)=۱-x^۲, x\le ۰$ یک‌به‌یک است.

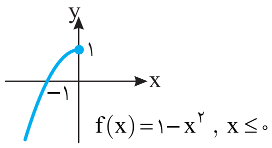
گزینهٔ (۱)



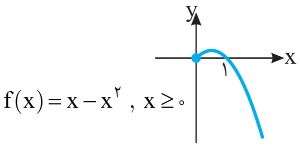
گزینهٔ (۲)



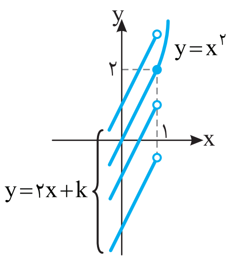
گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=۲x+k$ به ازای $x<۱$ نباید از ۲ بیشتر باشد، پس

$$۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$$

راه‌حل دوم اگر $x\ge ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=x^۲+۱$ یک‌به‌یک است و $R_g=[۲,+\infty)$ و اگر $x<۱$، آن‌گاه تابع $h(x)=۲x+k$ یک‌به‌یک است و $R_h=(-\infty,۲+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید $R_g\cap R_h=\varnothing$، پس $۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$

۴۹- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۳<-۱$، اما $f(-۳)<f(-۱)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $۰<۱$، اما $f(۰)=f(۱)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-۳<-۱<۱$ و $f(-۳)>f(-۱)>f(۱)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۲<-۱$، اما $f(-۲)=f(-۱)$.

۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $۱<۲<۳$، پس

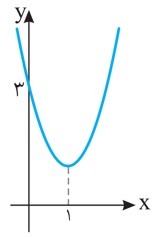
$$f(۱)\ge f(۲)\ge f(۳)\Rightarrow ۲a+۱\ge a-۲\ge ۲-a$$

اکنون توجه کنید که

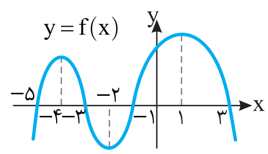
$$۲a+۱\ge a-۲\Rightarrow a\ge -۳ \quad (۱), \quad a-۲\ge ۲-a\Rightarrow a\ge ۲ \quad (۲)$$

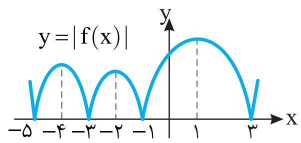
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge ۲$.

۵۱- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=۲x^۲-۴x+۳$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=۱$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ و هر زیر مجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۲)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

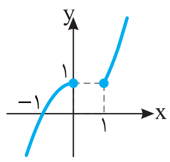


۵۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-۲,-۱)$ اکیداً نزولی است.



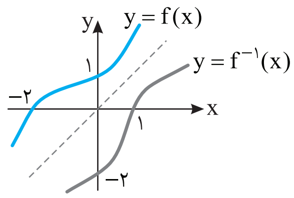


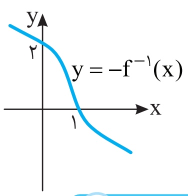
۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



۵۴- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد. تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۲$. تابع گزینهٔ (۲) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۲)=f(۵)=۳$. تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، زیرا $f(۱)=-۱$ ، $f(۲)=-۲$ ، $f(۳)=-۴$ و $f(۴)=-۵$ ، بنابراین مقادیر تابع f متمایزند. تابع گزینهٔ (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۰$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور x رسم کنیم.





۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)(۲)=f^{-۱}(g(۲))=f^{-۱}(۱)=۴$$

$$(g^{-۱}of)(۳)=g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=۳$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱)=۲$ ، پس $f^{-۱}(۲)=۱$. به این ترتیب، $f(۱)+f^{-۱}(۲)=۳$.

۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(x-۲)^۲-۴$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲=y+۴\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{y+۴}\xrightarrow{x<۲}$$

$$۲-x=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۳,۲۱)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۲۱,-۳)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

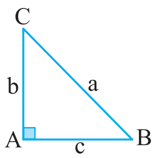
گزینهٔ (۱) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳$

گزینهٔ (۲) $f^{-۱}(۲۱)=-۲+\sqrt{۲۵}=۳$

گزینهٔ (۳) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۱۷}$

گزینهٔ (۴) $f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۱۷}$

۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل،



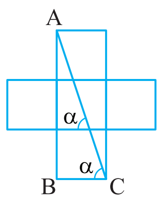
$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+(\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a)^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+\frac{۲۴}{۴۹}a^۲$$

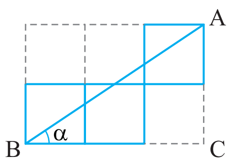
$$\frac{۲۵}{۴۹}a^۲=۲۵\Rightarrow a^۲=۴۹\Rightarrow a=۷$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه،



$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل را به‌صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AB^۲=AC^۲+BC^۲=۲^۲+۳^۲=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$

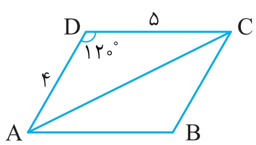
در نتیجه، $\triangle ABC:\ \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$.

۶۲- گزینهٔ ۴ صورت کسر برابر است با

$$۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳-۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

بنابراین $A=۰$.

۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



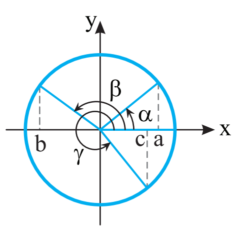
$$S_{ABCD}=۲S_{ADC}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}DC\times AD\times\sin\hat{D})$$

$$=۵\times۴\times\sin۱۲۰^\circ=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<۰$ و $a>c$. بنابراین $a>c>b$.



۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha>0$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha<0$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha<0,\quad \cos\alpha<0,\quad \cot\alpha>0$$

۶۷- گزینهٔ ۱ چون $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$، پس $0\le\sin\alpha\le1$ و در نتیجه

$$0\le\frac{m}{2}-1\le1\Rightarrow1\le\frac{m}{2}\le2\Rightarrow2\le m\le4$$

۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-1\le\sin x\le1$، بنابراین $0\le\sin^2x\le1$، پس $0\le3\sin^2x\le3$ و در نتیجه $2\le2+3\sin^2x\le5$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویهٔ مثلثاتی 30° تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan30^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(6,\sqrt{3})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times6+b\Rightarrow b=-\sqrt{3}$$

پس معادلهٔ خط $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$ یا همان $x-\sqrt{3}y-3=0$ است.

۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1-\tan x}{\tan x}=2\Rightarrow1-\tan x=2\tan x\Rightarrow\tan x=\frac{1}{3}$$

بنابراین $\cot x=\frac{1}{\tan x}=3$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x-1}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$.

۷۱- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha\cot\alpha=1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2)=1\Rightarrow2m-1=m+2\Rightarrow m=3$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac{1}{5}$ و $\cot\alpha=5$ و در نتیجه

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=\frac{1}{25}+25=\frac{626}{25}$$

۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$$

با توجه به اینکه $90^\circ<\alpha<180^\circ$، مقدار $\cos\alpha$ باید منفی باشد، پس $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، به‌دست می‌آید $\tan\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$. بنابراین $\tan\alpha-\cos\alpha=-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{1}{20}$.

۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ و $1+\cot^2x=\frac{1}{\sin^2x}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\tan^2x}{\frac{1}{\cos^2x}}+\frac{\cot^2x}{\frac{1}{\sin^2x}}=\tan^2x\cos^2x+\cot^2x\sin^2x$$

$$=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\times\cos^2x+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\times\sin^2x=\sin^2x+\cos^2x=1$$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}=\frac{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta$$

راه‌حل دوم اگر در عبارت داده شده به‌جای θ مقدار 30° را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $\frac{1}{\frac{1}{16}}-\frac{1}{\frac{1}{4}}-9=16-4-9=3$. اگر در گزینه‌ها به‌جای θ مقدار 30° را قرار دهیم، فقط $\cot^2\theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=3$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha=9$.

چون $\tan\alpha\cot\alpha=1$، پس

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2=9\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=7$$

۷۶- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3+\frac{2\cos x}{\sin x}=\frac{3}{\sin x}\Rightarrow3+2\cot x=\frac{3}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$9+12\cot x+4\cot^2x=\frac{9}{\sin^2x}=9(1+\cot^2x)$$

$$9+12\cot x+4\cot^2x=9+9\cot^2x\Rightarrow5\cot^2x-12\cot x=0$$

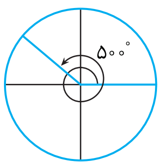
$$\cot x=0\ ,\ \cot x=\frac{12}{5}$$

چون $\cos x\neq0$، پس $\cot x\neq0$ و در نتیجه $\cot x=\frac{12}{5}$.

۷۷- گزینهٔ ۴ در تساوی $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=75^\circ$:

$$\frac{75^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{5\pi}{12}$$

۷۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** 500° را می‌توان ۵ تا 90° به علاوهٔ 50° در نظر گرفت. ۵ تا 90° یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ 500° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.



راه‌حل دوم $500^\circ=360^\circ+140^\circ$ و $90^\circ\le140^\circ\le180^\circ$، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی 500° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

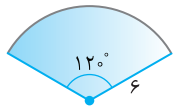
$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{20^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{9}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l=r\times\theta\Rightarrow\widehat{AB}=36000\times\frac{\pi}{9}=4000\pi\ \text{کیلومتر}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ناحیهٔ مورد نظر قطاعی از دایرهٔ به شعاع ۶ است، که اندازهٔ زاویهٔ قطاع برحسب درجه ۱۲۰° است. ابتدا اندازهٔ زاویهٔ قطاع را برحسب رادیان حساب می‌کنیم. اگر این اندازه θ باشد، آن‌گاه

$$\frac{120^\circ}{180^\circ}=\frac{\theta}{\pi}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$$



مساحت قطاعی که در آن $r=6$ و $\theta=\frac{2\pi}{3}$ برابر است با

$$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2\pi}{3}=12\pi\ m^2$$

۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

بنابراین

$$A=\frac{-2\sin\alpha-4\sin\alpha}{-3\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{-6\sin\alpha}{-2\cos\alpha}=3\tan\alpha$$

۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{-2\cos\alpha}{-2\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\frac{\sin135^\circ-\cos120^\circ}{\sin135^\circ+\cos120^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$$

۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$
$$\cot\frac{7\pi}{4}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=-\frac{1}{2}\times1-1\times\frac{1}{2}=-1$.

۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{8}=-\cos\frac{7\pi}{8}$$
$$\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{8}=-\cos\frac{5\pi}{8}$$

بنابراین

$$\cos^3\frac{\pi}{8}+\cos^3\frac{3\pi}{8}+\cos^3\frac{5\pi}{8}+\cos^3\frac{7\pi}{8}$$
$$=-\cos^3\frac{7\pi}{8}-\cos^3\frac{5\pi}{8}+\cos^3\frac{5\pi}{8}+\cos^3\frac{7\pi}{8}=0$$

۸۶- گزینهٔ ۱ از رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos20^\circ\cos40^\circ-\sin20^\circ\sin40^\circ}{\sin20^\circ\cos40^\circ+\sin40^\circ\cos20^\circ}=\frac{\cos(20^\circ+40^\circ)}{\sin(20^\circ+40^\circ)}=\cot60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

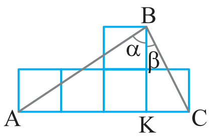
۸۷- گزینهٔ ۴ چون $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، پس

$$\sin3x\cos2x+\cos3x\sin2x=\sin(3x+2x)=\sin5x$$

بنابراین مقدار عددی عبارت مورد نظر به ازای $x=\frac{\pi}{15}$ برابر می‌شود با

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸۸- گزینهٔ ۲ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. در این صورت، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle AKB: AB^2=AK^2+BK^2=3^2+2^2=13\Rightarrow AB=\sqrt{13}$$
$$\triangle BKC: BC^2=BK^2+CK^2=2^2+1^2=5\Rightarrow BC=\sqrt{5}$$

اکنون توجه کنید که $A\hat{B}C=\alpha+\beta$، در نتیجه

$$\cos(A\hat{B}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2}{\sqrt{13}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}-\frac{3}{\sqrt{65}}=\frac{1}{\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{65}$$

۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin25^\circ+\cos25^\circ=\sqrt{2}\sin(25^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin70^\circ$$

در نتیجه، چون $\sin70^\circ=\cos20^\circ$، پس

$$\frac{\sin25^\circ+\cos25^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin70^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=\sqrt{2}$$

۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin15^\circ+\frac{1}{2}\cos15^\circ)$$
$$=2(\cos30^\circ\sin15^\circ+\sin30^\circ\cos15^\circ)$$
$$=2\sin(30^\circ+15^\circ)=2\sin(45^\circ)=\sqrt{2}$$

۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1}{3}=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow2\sin^2\alpha=\frac{2}{3}$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$. پس

$$\frac{1-2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}=\frac{\cos2(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=2\sin x$$

۹۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sin^2 15^\circ}+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}$$
$$=\frac{1}{(\sin 15^\circ\cos 15^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 30^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{4})^2}=16$$

۹۴- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان، نصف $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است،

در تساوی $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ و در نتیجه

$$\cos(2\times\frac{3\pi}{8})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{4}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$
$$\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$
$$2\cos^2\frac{3\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos^2\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$
$$\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

بنابراین

$$3\cos^2 105^\circ+\sin^2 105^\circ=3\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$$
$$=2\sin^2 15^\circ+(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)=2\sin^2 15^\circ+1$$
$$=1-\cos(2\times 15^\circ)+1=2-\cos 30^\circ=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ}-\frac{\cos 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ}=\frac{\sin^2 22.5^\circ-\cos^2 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ\times\cos 22.5^\circ}$$
$$=\frac{-\cos(2\times 22.5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 22.5^\circ)}=\frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ}=-2$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، بنابراین

$$\tan 22.5^\circ-\cot 22.5^\circ=-(\cot 22.5^\circ-\tan 22.5^\circ)$$
$$=-2\cot 45^\circ=-2$$

۹۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{1}{\cos^2 15^\circ}}=\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، پس

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$$

۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)=7\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=7\Rightarrow\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=7$$
$$1+\tan x=7-7\tan x\Rightarrow 8\tan x=6\Rightarrow\tan x=\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}$$

پس

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{\sin x}{\frac{4}{5}}\Rightarrow\sin x=\frac{3}{5}$$

۹۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(180^\circ+105^\circ)=\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$$
$$=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}$$
$$=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $\alpha=a-b$ و $\beta=a+b$. در این صورت $2b=\beta-\alpha$ و در نتیجه

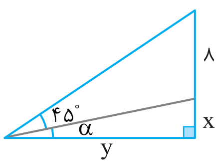
$$\tan 2b=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3+4}{1-12}=-\frac{7}{11}$$

پس $\cot 2b=-\frac{11}{7}$.

۱۰۱- گزینهٔ ۲ چون $\tan(\alpha+35^\circ)=\frac{1}{2}$، پس

$$\tan(10^\circ-\alpha)=\tan(45^\circ-(\alpha+35^\circ))=\frac{\tan 45^\circ-\tan(\alpha+35^\circ)}{1+\tan 45^\circ\tan(\alpha+35^\circ)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل،



$\tan\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ و

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{8+x}{y}$$

از طرف دیگر،

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\alpha}{1-\tan 45^\circ\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

بنابراین

$$\frac{8+x}{y}=3\ ,\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x$$

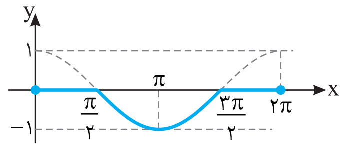
در نتیجه

$$\frac{8+x}{2x}=3\Rightarrow 6x=8+x\Rightarrow x=\frac{8}{5}=1.6$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos x}{2} & \cos x\geq 0\\[2mm] \dfrac{\cos x+\cos x}{2} & \cos x<0\end{cases}=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\ \text{یا}\ \dfrac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\\[2mm] \cos x & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

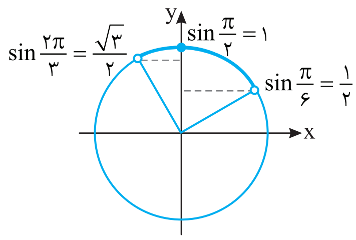
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

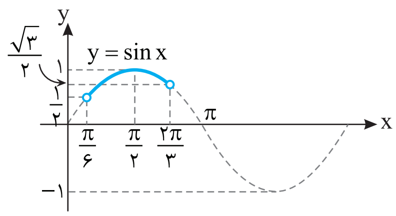


۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\sin x\leq 1$ و می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\leq 1\Rightarrow 2<m-1\leq 4\Rightarrow 3<m\leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.





۱۰۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و $T_g=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$. بنابراین

$$T_f=2T_g\Rightarrow 4=\frac{4\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

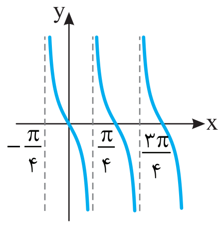
۱۰۶- گزینهٔ ۱ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\sin^2 x+12=\frac{1-\cos 2x}{2}+12=\frac{25-\cos 2x}{2}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$.

نکته دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^2(bx+c)$ و $y=a\cos^2(bx+c)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۱۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(-\frac{\pi}{4})<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<\tan x<1$$

$$-1<\frac{2m-3}{5}<1\Rightarrow -1<m<4$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-x\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت $\tan(x-\frac{\pi}{6})=\tan 2x$ می‌نویسیم و جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x=k\pi+x-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم. به دو روش می‌توان این کار را انجام داد.

راه‌حل اول

k	۰	۱	۲	-۱
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{7\pi}{6}$ (غ.ق.ق)

راه‌حل دوم

$$-\pi<k\pi-\frac{\pi}{6}<\pi\Rightarrow -\frac{5\pi}{6}<k\pi<\frac{7\pi}{6}\Rightarrow -\frac{5}{6}<k<\frac{7}{6},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,1\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دو جواب دارد.

۱۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$ ، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{۶}-۲x)=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{۶}-۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}, & k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{۶}-۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-k\pi-\frac{\pi}{۱۲}, & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{(۲k+۱)}{۲}\pi+\frac{\pi}{۴}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳\tan^۲x=۱\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $x=k\pi-\frac{\pi}{۶}$ هستند.

۱۱۳- گزینهٔ ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y=-۱$ را قطع می‌کند، $f(x)=-۱$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi\Rightarrow ۲x=-k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$x=-\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$-\frac{۳\pi}{۸}$	$-\frac{۷\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$

بنابراین نمودار تابع خط $y=-۱$ را در پنج نقطه از بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ قطع می‌کند.

۱۱۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

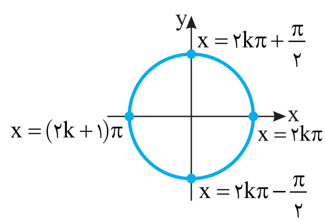
$$\sin^۳x-\sin x=۰\Rightarrow\sin x(\sin^۲x-۱)=۰$$

$$\sin x(\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^۳x-\sin x=۰\Rightarrow\sin x(\sin^۲x-۱)=۰\Rightarrow-\sin x\cos^۲x=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به‌صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هستند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,k\in\mathbb{Z}$ نوشت.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^۲x)+۵\cos x=۴\Rightarrow ۲\cos^۲x-۵\cos x+۲=۰$$

$$(\cos x-۲)(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow\cos x=۲,\cos x=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ $\cos x=۲$ جواب ندارد، پس $\cos x=\frac{۱}{۲}$. جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow ۲\sin x\cos^۲x=\sin x$$

$$\sin x(۲\cos^۲x-۱)=۰\Rightarrow\sin x\cos ۲x=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از π ، $\frac{\pi}{۴}$ ، $\frac{۳\pi}{۴}$ ، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی محذوف ۱، مقادیر f منفی هستند. بنابراین در این همسایگی $|f(x)|=-f(x)$ ، پس

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)}{-f(x)}=-۱$$

۱۱۸- گزینهٔ ۴ اگر $x\to۱^+$ ، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^+}f(f(x))=\lim_{t\to(-۱)^-}f(t)=۲$$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۳+۲x)=۸+۴=۱۲$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x^۲-۳x)=۴-۶=-۲$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در $x=۲$ ، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{۳x+a}{۲x-۳}=\frac{۳\times۲+a}{۲\times۲-۳}=۶+a$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+ax+b)=۲^۲+a(۲)+b=۴+۲a+b$$

چون $\lim_{x\to۲}f(x)=۴$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases}۶+a=۴\\ ۴+۲a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۲$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x\to -۱} f(x)$ وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۱}(x^۲-x+۱-xf(x))=۶\Rightarrow(-۱)^۲-(-۱)+۱-(-۱)\lim_{x\to -۱}f(x)=۶$$

پس $\lim_{x\to -۱}f(x)=۳$.

۱۲۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to ۲^+$، آن‌گاه $\sqrt{۲x}\to ۲\sqrt{۲}^+$. در نتیجه $[\sqrt{۲x}]=۲$. پس $\lim_{x\to ۲^+}(x[\sqrt{۲x}])=\lim_{x\to ۲^+}(۲x)=۴$.

۱۲۳- گزینهٔ ۲ عامل $x-۳$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x}{x+۳}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۴- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۱۶}{x^۳-۶۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۴)}{(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x+۴}{x^۲+۴x+۱۶}=\frac{۴+۴}{۴^۲+۴\times ۴+۱۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $۳x-۴$ از سمت چپ به -۱ نزدیک می‌شود، پس $[۳x-۴]=-۲$. از طرف دیگر وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $|x-۱|=-(x-۱)$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۱^-}([۳x-۴]+\frac{|x-۱|}{x-۱})=\lim_{x\to ۱^-}(-۲+\frac{-(x-۱)}{x-۱})=-۲-۱=-۳$$

۱۲۶- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج، $x-۹=(\sqrt{x})^۲-۳^۲=(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)}=\lim_{x\to ۹}\frac{۱}{\sqrt{x}+۳}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۳+۳}=\frac{۱}{۶}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۷}\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹}=\lim_{x\to ۷}(\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۲}{x^۲-۴۹}\times\frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴})$$

$$=\lim_{x\to ۷}(\frac{x+۱-۸}{(x-۷)(x+۷)}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴})$$

$$=\lim_{x\to ۷}\frac{۱}{(x+۷)(\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۱}+۴)}=\frac{۱}{۱۴(۴+۴+۴)}=\frac{۱}{۱۶۸}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۲\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۲\pi}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۲\pi}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۲\pi}(۱+\cos x)=۱+۱=۲$$

راه‌حل دوم اگر $x-۲\pi=t$، آن‌گاه $x=۲\pi+t$. همچنین اگر $x\to ۲\pi$، آن‌گاه $t\to ۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin^۲(۲\pi+t)}{۱-\cos(۲\pi+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin^۲ t}{۱-\cos t}=\lim_{t\to ۰}\frac{t^۲}{\frac{t^۲}{۲}}=۲$$

۱۲۹- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}}(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\sqrt{۲}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to \pi}\frac{۱-\cos ۲x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to \pi}\frac{۱-(۱-۲\sin^۲ x)}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to \pi}\frac{۲\sin^۲ x}{\sin^۲ x}=۲$$

۱۳۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+\sin ۲x}{x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۲\frac{\sin ۲x}{۲x}}{۱-\frac{\sin^۲ x}{x}}=\frac{۰+۲\times ۱}{۱-۰}=۲$$

۱۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x^۲-۴)}{x^۴-۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x^۲-۴)}{(x^۲-۴)(x^۲+۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x^۲-۴)}{x^۲-۴}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x^۲+۴}=۱\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۸}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^۲}{۲}-۱+\frac{(۲x)^۲}{۲}}{x(x)}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^۲}{۲}+۲x^۲}{x^۲}=-\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $۴x-\pi=t$. در این صورت $x=\frac{\pi+t}{۴}$ و اگر $x\to\frac{\pi}{۴}$، آن‌گاه $t\to ۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{۴x-\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos ۲(\frac{\pi+t}{۴})}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{t}{۲})}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin\frac{t}{۲}}{t}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۲)=۱$ و

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x-\frac{x-۲}{x-۲})=۲-۱=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+\frac{x-۲}{x-۲})=۲+۱=۳$$

بنابراین تابع در $x=۲$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع در نقطهٔ ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(16-ax^2)=16-9a$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x+a)=6+a$$

بنابراین $16-9a=6+a$ و در نتیجه $a=1$. به این ترتیب

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 3\\ 16-x^2 & x<3\end{cases}$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(16-x^2)=16-1^2=15$.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^2-2mx+m+6=0$ منفی باشد

$$\Delta=(-2m)^2-4(m+6)<0 \Rightarrow 4m^2-4(m+6)<0$$
$$m^2-m-6<0 \Rightarrow (m-3)(m+2)<0 \Rightarrow -2<m<3$$

بنابراین تابع f به ازای چهار مقدار صحیح ۱−، ۰، ۱ و ۲ برای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳۸- گزینهٔ ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{1}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{1}{x}]$ ناپیوسته است. این نقاط به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{x}=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{1}{k}$$

در بازهٔ $(\frac{1}{10},1)$، $\frac{1}{10}<\frac{1}{k}<1 \Rightarrow 1<k<10 \Rightarrow 2\leq k\leq 9$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به ۲− نزدیک می‌شود، $x+2$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$$

۱۴۰- گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^-} 0=0$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 3$، آن‌گاه $(x-3)^2\to 0^+$، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to 3}(ax^3+3)<0 \Rightarrow 27a+3<0 \Rightarrow a<-\frac{1}{9}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to 2^-$ و $x\to 2^+$، باید $f(x)\to-\infty$. فقط در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$$

۱۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$ و اگر $x\to 1^+$، مقادیر $x-1$ مثبت‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$.

همین‌طور $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$ و اگر $x\to 1^-$، مقادیر $x-1$ منفی‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$. به این ترتیب، نمودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=1$ به شکل گزینهٔ (۳) است.

۱۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 1^+$، پس

$$t=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\Rightarrow t\to 2^+$$

پس $\lim\limits_{x\to 1^-} f(\frac{x+1}{x})=\lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=+\infty$.

۱۴۵- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{\pi}{2})^+$، آن‌گاه $\tan x\to-\infty$. همچنین چون $4x\to(2\pi)^+$، پس $\cos 4x\to 1^-$، و در نتیجه $(\cos 4x-1)\to 0^-$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\tan x}{\cos 4x-1}=+\infty$.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 2} x=2$ و چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر $+\infty$ است، باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. به عبارت دیگر مخرج باید به صورت $(x-2)^2$ باشد. زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=2$ هم‌علامت خواهند بود. پس

$$x^2+2ax+b=(x-2)^2 \Rightarrow x^2+2ax+b=x^2-4x+4 \Rightarrow a=-2\ ,\ b=4$$

پس $a+b=2$.

۱۴۷- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر را تجزیه، سپس کسر را ساده می‌کنیم: $f(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$. پس $x=1$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ در حالتی که مخرج ریشهٔ مضاعف دارد، نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-8m=0 \Rightarrow m=0, m=8$$

در حالت $m=0$، تنها مجانب قائم $x=0$ و در حالت $m=8$، تنها مجانب قائم $x=2$ است. همچنین اگر $x=3$ ریشهٔ مخرج باشد، مخرج عامل $x-3$ دارد که با صورت کسر ساده می‌شود. در این‌صورت مخرج درجهٔ اول است و تنها یک ریشه دارد. در نتیجه نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$2(3)^2-3m+m=0 \Rightarrow m=9\ ,\quad f(x)=\frac{x-3}{(x-3)(2x-3)}=\frac{1}{2x-3}$$

پس $x=\frac{3}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع است. بنابراین به‌ازای سه مقدار m، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ مخرج توابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ و $y=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ ریشه ندارد، پس نمودار این توابع مجانب قائم ندارد. همچنین ریشهٔ مخرج تابع $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$، $x=0$ است که تابع در اطراف آن تعریف نشده است. پس نمودار این تابع نیز مجانب قائم ندارد. $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ است:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}=+\infty$$

۱۵۰- گزینهٔ ۲ ریشه‌های مخرج در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{۵\pi}{۴}$ که $x=\frac{۵\pi}{۴}$ ریشهٔ صورت کسر نیست، پس خط $x=\frac{۵\pi}{۴}$ مجانب قائم نمودار تابع است. با اینکه $x=\frac{\pi}{۴}$ ریشـهٔ صورت نیز هست، ولی خط $x=\frac{\pi}{۴}$ مجانب قائم نمودار تابع است، زیرا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{۴x-\pi}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{۴x-\pi}}{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{۴x-\pi}}{\sqrt{۲}(x-\frac{\pi}{۴})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{۴}(x-\frac{\pi}{۴})^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{۲}(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt{۲}(x-\frac{\pi}{۴})^{\frac{۲}{۳}}}=+\infty$$

پس نمودار تابع f دو مجانب قائم دارد.

۱۵۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}=\tan\frac{x}{۲}$$

بنابراین خط‌های $\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

پس خط‌های $x=۲k\pi+\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار این تابع هستند.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$.

۱۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^+}(fof)(x)=\lim_{x\to۱^+}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=۲$$

۱۵۴- گزینهٔ ۴ بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+۱)^۲$ برابر $x^۲$ است. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+۱)^۳$ و $(x-۱)^۳$ برابر $x^۳$ است. پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x(x+۱)^۲}{(x+۱)^۳+(x-۱)^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{۲x^۳}=۱$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+۱$ و $۳-x$ به‌ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+۱|+۳x-۱}{|۳-x|+ax-۱۵}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-۱)+۳x-۱}{۳-x+ax-۱۵}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+۳)x-a-۱}{(a-۱)x-۱۲}=\frac{۳-a}{a-۱}$$

در نتیجه $\frac{۳-a}{a-۱}=۲$، بنابراین $a=\frac{۵}{۳}$.

۱۵۶- گزینهٔ ۳ بـرای آنکـه حـد مـورد نظـر برابـر صفـر شـود، بایـد درجهٔ مخرج بیشـتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases}a-۱=۰\Rightarrow a=۱\\ ۲a-b=۰\Rightarrow ۲a=b\end{cases}\Rightarrow b=۲$$

بنابراین $a+b=۳$.

۱۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow[\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}]=[۰]=۰$$

از طـرف دیگر، اگـر $x\to-\infty$، آن‌گاه $-۱<\frac{۱}{x}<۰$، بنابراین $[\frac{۱}{x}]=-۱$، پس $\lim_{x\to-\infty}[\frac{۱}{x}]=\lim_{x\to-\infty}(-۱)=-۱$. بنابرایـن حاصـل عبارت مورد نظر برابر -۱ است.

۱۵۸- گزینهٔ ۲ چـون خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f اسـت، پس $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$ یا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۱}{(a-۱)x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(a-۱)x}=\frac{a}{a-۱}$$

(همین‌طور وقتی که $x\to-\infty$)

بنابرایـن $\frac{a}{a-۱}=۲$، پـس $a=۲$ و در نتیجه $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$. بنابراین $x=۲$ ریشهٔ مخرج و خط $x=۲$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

۱۵۹- گزینهٔ ۴ چون

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲+x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع f است. برای پیدا کردن محل برخورد نمودار تابع با مجانب افقی آن، باید معادلهٔ $f(x)=۲$ را حل کنیم:

$$\frac{۲x^۲}{x^۲+x+۱}=۲\Rightarrow۲x^۲=۲x^۲+۲x+۲\Rightarrow x=-۱$$

چون $f(-۱)=۲$، پس نقطهٔ مورد نظر $(-۱,۲)$ است.

۱۶۰- گزینهٔ ۱ خـط $y=-۱$ مجانـب افقـی نمـودار تابع $y=\frac{-x+۱}{x+۱}$ اسـت. بـرای یافتـن رفتار ایـن تابع در اطـراف مجانب افقـی بایـد ببینیم وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع بیشتر از -۱ هستند یا کمتر از آن:

$$y=\frac{-x+۱}{x+۱}=\frac{-(x+۱)+۲}{x+۱}=-۱+\frac{۲}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-۱\\ x\to-\infty\Rightarrow y<-۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت

$$f(x)=\frac{x^۲-۴x+۷}{x^۲-۴}=۱+\frac{-۴x+۱۱}{x^۲-۴}$$

می‌نویسیم تا بتوان آن را راحت‌تر بررسی کرد. پس وقتی $x\to+\infty$،

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱,\quad f(x)<۱$$

و وقتی $x\to-\infty$،

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۱,\quad f(x)>۱$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۲- گزینهٔ ۳ شـیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۳$ برابر $f'(۳)=۲$ اسـت. پس شـیب خط عمود بر این خط، که همـان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-۱$ است، برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. پس $f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}$.

۱۶۳- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطهٔ $x=b$ منفی و در نقطهٔ $x=d$ مثبت است.

۱۶۴- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+2}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(-2)=-1$$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))=4\times 3\times 2\times 1=24$$

۱۶۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ مقدار $f'(1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}=\frac{\cos^3\pi}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$$

۱۶۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$. بنابراین

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{h}$$
$$=\frac{1}{3}(2-(-2))f'(2)=\frac{4}{3}f'(2)$$

۱۶۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$
$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{x^2+1}=-1$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۶۹- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های ۳-، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های ۱- و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های ۲- و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۷۰- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. بنابراین

$$g(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases}f(x)=x^3+x-1\\ f'(x)=3x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=-3\\ f'(-1)=4\end{cases}$$
$$\begin{cases}g(x)=x^4+1\\ g'(x)=4x^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(-1)=2\\ g'(-1)=-4\end{cases}$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{4\times 2-(-4)(-3)}{(2)^2}=-1$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x(x^4-1)(x^4+1)$$
$$=x(x^8-1)=x^9-x$$

بنابراین $f'(x)=9x^8-1$. پس $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8-1=0$.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x-x^2$ در اطراف نقطهٔ $x=-2$ منفی است و مقدار عبارت $x+1$ هم در اطراف $x=-2$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x-x-1=x^2-5x-1$$
$$f'(x)=2x-5\Rightarrow f'(-2)=-9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$ مقدار عبارت‌های $4x-x^2$ و $x+1$ به‌ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x+x+1=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3\Rightarrow f'(5)=7$$

در نتیجه $f'(5)+f'(-2)=-2$.

۱۷۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x-\sin x)(x\cos x-\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$
$$-\frac{(\cos x-x\sin x-\cos x)(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$
$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)+x\sin x(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{(-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$.

۱۷۵- گزینهٔ ۳ در نقطهٔ $x=\pi$، عبارت $\sin x$ عامل صفرکننده است، بنابراین کافی است فقط مشتق آن را در نقطهٔ $x=\pi$ حساب کنیم و در بقیهٔ عبارت ضرب کنیم:

$$f'(\pi)=\cos(\pi)\times\cos^8(\pi)=\cos^9(\pi)=-1$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4(2x^2+3)'(2x^2+3)^{4-1}=4(4x)(2x^2+3)^3=16x(2x^2+3)^3$$

بنابراین $f'(-1)=16(-1)(2(-1)^2+3)^3=-16\times 5^3$.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۳\times۴}{۲\sqrt{۹}}=۲$$

۱۷۸- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

۱۷۹- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-۳x+۵)'f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴$$

$$-۳f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴\xrightarrow{x=۱}-۳f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱۰}{۳}$$

۱۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲x)g'(f(۲x))=\frac{۱}{۲}(g(f(۲x)))'=(\frac{۱}{۲}g(f(۲x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))=\frac{۱}{۲}g(۸x^۳+۱)=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۱-(۸x^۳+۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{-۸x^۳}=-x$$

در نتیجه $y'=-۱$.

۱۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^۲)'=۲g'g$. بنابراین

$$f'(x)=۲(\tan x)'(\tan x)=۲(۱+\tan^۲x)(\tan x)$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{۳})=۲(۱+۳)(\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$

۱۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$. بنابراین

$$f'(x)=۳(\sin x^۲)'\sin^۲x^۲=۳(x^۲)'\cos x^۲\times\sin^۲x^۲$$

$$=۳(۲x)\cos x^۲\times\sin^۲x^۲=۶x\sin^۲x^۲\cos x^۲$$

در نتیجه $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{۲})=۶\times\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۲\pi}$

۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\\ ۳x^۲+۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین $f'(-۱)+f'(۲)=-۳+۱۴=۱۱$.

۱۸۴- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

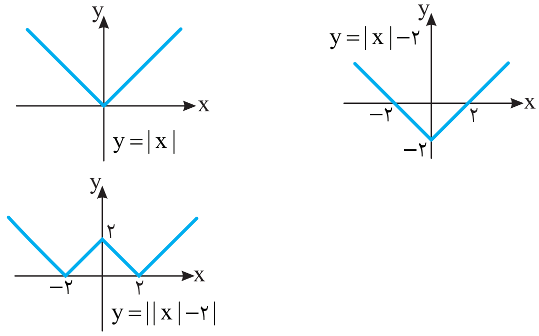
$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)\Rightarrow a+۲=۱+۲b\Rightarrow a-۲b=-۱$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۲ & x>۱\\ ۳x^۲+۲b & x<۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+۲=۳+۲b\Rightarrow ۲a-۲b=۱$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۱\\ ۲a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۷}{۲}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۲\}$.

۱۸۶- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است: $۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$
بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ -۲ علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۸۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۱)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۱$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۱)=-۱$.

۱۸۸- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-۲)$ است:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(-۲)=۲$$

از طرف دیگر $f(-۲)=۴$، پس خط مماس از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد.
بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۴=۲(x+۲)\Rightarrow y=۲x+۸$$

۱۸۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=x+۵$ است. بنابراین

$$y'=۴x-۴\Rightarrow ۴x_۰-۴=۱\Rightarrow x_۰=\frac{۵}{۴}$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی سهمی $y=۲x^۲-۴x+۶$ است، پس

$$y_۰=۲x_۰^۲-۴x_۰+۶=۲\times(\frac{۵}{۴})^۲-۴\times\frac{۵}{۴}+۶=\frac{۳۳}{۸}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{۵}{۴},\frac{۳۳}{۸})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به‌صورت $y-\frac{۳۳}{۸}=x-\frac{۵}{۴}$، یعنی $۸y-۸x-۲۳=۰$ است.

۱۹۰- گزینهٔ ۲ نقطهٔ تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-\frac{۱}{\sqrt{a}}=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}(x-a)$ است.

نقطهٔ $(۳,۰)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۰-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\frac{-۱}{۲a\sqrt{a}}(۳-a)\Rightarrow ۲a=۳-a\Rightarrow a=۱$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۹۱- گزینهٔ ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ $=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۳}=-\frac{۱}{۶}=A_۱$

آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۴,۴/۴۱]$ $=\frac{f(۴/۴۱)-f(۴)}{۴/۴۱-۴}$

$$=\frac{\frac{۱}{۲/۱}-\frac{۱}{۲}}{۰/۴۱}=\frac{\frac{۲-۲/۱}{۴/۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}}=\frac{-\frac{۱}{۴۲}}{\frac{۴۱}{۱۰۰}}=-\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱}=A_۲$$

بنابراین $\frac{A_۱}{A_۲}=\frac{-\frac{۱}{۶}}{-\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱}}=\frac{۴۱\times۲۱}{۶\times۵۰}=\frac{۴۱\times۷}{۲\times۵۰}=\frac{۲۸۷}{۱۰۰}=۲/۸۷$.

۱۹۲- گزینهٔ ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[۱,۲]$ حساب می‌کنیم:

آهنگ تغییر متوسط $=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{۱-(-۱)}{۱}=۲$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$f'(x)=۱+\frac{۲}{x^۲}=۲\Rightarrow\frac{۲}{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=-\sqrt{۲}$ (غ.ق.ق) , $x=\sqrt{۲}$

۱۹۳- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=-۳x^۲+۶x-۶$. بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c\ (a<۰)$ برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، پس بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با $-\frac{۳۶-۴(-۳)(-۶)}{۴(-۳)}=-۳$.

۱۹۴- گزینهٔ ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=۲ax+b\Rightarrow f''(x)=۲a$$

بنابراین

$$f''(۲)=-۲\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$f'(۲)=-۲\Rightarrow ۴a+b=-۲\Rightarrow b=۲$$

در نتیجه $a-b=-۳$.

۱۹۵- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۲\Rightarrow f''(x)=۱۲x+۶$$

بنابراین

$$f''(a)=۰\Rightarrow ۱۲a+۶=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۱۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^۳}\Rightarrow f''(-۱)=-۲$$

۱۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲\cos ۲x\Rightarrow f''(x)=-۴\sin ۲x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۱۲})=-۴(\frac{۱}{۲})=-۲$$

۱۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=۱-\sin ۲x$. بنابراین

$$f'(x)=-۲\cos ۲x\Rightarrow f''(x)=-۲(-۲\sin ۲x)=۴\sin ۲x$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۲x^۳-۳x^۲+۵}{x^۳+۳x^۲-۲}=\lim_{x\to-۱}\frac{۶x^۲-۶x}{۳x^۲+۶x}=\frac{۶+۶}{۳-۶}=-۴$$

۲۰۰- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۳}\frac{\sqrt{۳x}-x}{x^۲-۷x+۱۲}=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}-۱}{۲x-۷}=\frac{\frac{۳}{۲\times۳}-۱}{۶-۷}=\frac{۱}{۲}$$

۲۰۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to۰^+}\frac{f'(۱+h)+f'(۱-h)}{۱}=f'_+(۱)+f'_-(۱)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases}۳x^۲ & x>۱\\ ۴x^۳ & x<۱\end{cases}$.

واضح است که $f'_+(۱)=۳$ و $f'_-(۱)=۴$، بنابراین $L=۳+۴=۷$.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{۴x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x+\sin x}{۴}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $f'(x)\ge۰$ و نقاطی که $f'(x)=۰$، تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ نمودار تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطهٔ $x=۱$ و $x=۳$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازهٔ $(-\infty,۳]$ اکیداً صعودی است.

بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^۲-۱$، پس

$$f'(x)\ge۰\Rightarrow x^۲-۱\ge۰\Rightarrow x\le-۱ \text{ یا } x\ge۱$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی نیست.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=-۳x^۲+۲x=x(-۳x+۲)$.

بنابراین

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

در نتیجه تابع f روی بازهٔ $(۰,\frac{۲}{۳})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۰۶- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^3+mx^2-12x+1\Rightarrow f'(x)=-3x^2+2mx-12$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x)\le 0$، در نتیجه $-3x^2+2mx-12\le 0$.

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta\le 0\Rightarrow 4m^2-144\le 0\Rightarrow m^2\le 36\Rightarrow -6\le m\le 6$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$. از طرف دیگر،

$$x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})\Rightarrow 2x\in(2\pi,3\pi)\Rightarrow \sin 2x>0$$

$$x\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})\Rightarrow 2x\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})\Rightarrow \sin 2x<0$$

$$x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\Rightarrow 2x\in(\frac{\pi}{3},\pi)\Rightarrow \sin 2x>0$$

$$x\in(-\frac{5\pi}{8},-\frac{7\pi}{12})\Rightarrow 2x\in(-\frac{5\pi}{4},-\frac{7\pi}{6})\Rightarrow \sin 2x>0$$

بنابراین f' فقط روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$ اکیداً نزولی است.

۲۰۸- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=-6x^2+6x=0\Rightarrow x=0,\ x=1$$

پس $(0,0)$ و $(1,1)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ است.

۲۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4-x^2 & x\ge -2\\ -2x-4-x^2 & x<-2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2-2x & x>-2\\ -2-2x & x<-2\end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=-2$ مشتق ندارد، پس نقطهٔ به طول -2 نقطهٔ بحرانی تابع است. از طرف دیگر،

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2-2x=0\Rightarrow x=1\\ -2-2x=0\Rightarrow x=-1 \quad (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ به طول ۱ نقطهٔ بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-2)+f(1)=-4+5=1$.

۲۱۰- گزینهٔ ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{(x^2-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6x^2+x^2-4}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند (دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[1,3]$ و

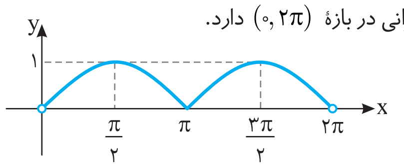
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

تابع f در نقاط $x=1$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{3-x}\Rightarrow x-1=3-x\Rightarrow x=2$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{1,2,3\}$ است که دارای سه عضو است.

۲۱۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ مشتق تابع f برابر صفر است و در $x=\pi$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای). پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.



۲۱۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطه‌های -1 و ۲ مینیمم نسبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۲۱۴- گزینهٔ ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=-2$ دارد.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

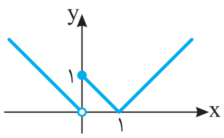
۲۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=8x^3-3x^2=x^2(8x-3)$.

بنابراین جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

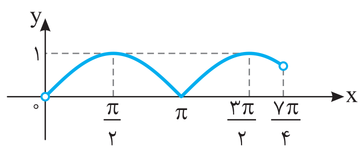
x	$-\infty$		0		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	min نسبی	↗	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=\pi$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=1-2\cos x$

$$f'(x)=0\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

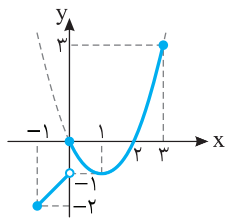
بنابراین تابع f در نقاط $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=4x-8$. بنابراین

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که چون $f(0)=1$، $f(2)=-7$ و $f(5)=11$. پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به‌ترتیب برابر ۱۱ و -7 و اختلاف آن‌ها برابر $11-(-7)=18$ است.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر −۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۲۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲},\quad x>۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

از طرف دیگر، $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=۰$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(۱)=\frac{۱}{۲}$.

۲۲۲- گزینهٔ ۲ نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-۲\sin ۲x+۲\cos x=۰\Rightarrow -۴\sin x\cos x+۲\cos x=۰$$

$$۲\cos x(۱-۲\sin x)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}\,,\,x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

اکنون مقادیر تابع در نقاط زیر را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{\pi}{۲})=۱\,,\quad f(\frac{\pi}{۶})=\frac{۳}{۲}\,,\quad f(\frac{۵\pi}{۶})=\frac{۳}{۲}\,,\quad f(۰)=۱\,,\quad f(\pi)=۱$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۲۲۳- گزینهٔ ۳ چون $y=۲x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(۲x-a)=۲x^۲-ax$$

$$A'(x)=۰\Rightarrow ۴x-a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $۲(\frac{a}{۴})^۲-a\times\frac{a}{۴}=-\frac{a^۲}{۸}$.

۲۲۴- گزینهٔ ۱ طول اضلاع قائمهٔ مثلث را a و b فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S=\frac{۱}{۲}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^۲+b^۲=۱۶$. پس $b=\sqrt{۱۶-a^۲}$، در نتیجه

$$S(a)=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۱۶-a^۲}$$

$$S'(a)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-a^۲}-\frac{a^۲}{۲\sqrt{۱۶-a^۲}}\Rightarrow S'(a)=۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})\sqrt{۸}=۴$.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ نقطهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. بنابراین

$$d(x)=AB=\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+۲x+۹}=\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}$$

$$d'(x)=\frac{۲x-۶}{۲\sqrt{x^۲-۶x+۲۵}}\,,\quad d'(x)=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

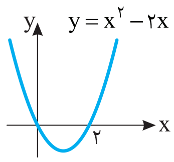
۲۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با $(۳x-۱)(۱-۲x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=(۳x-۱)(۱-۲x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

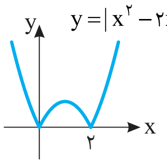
$$f'(x)=۳(۱-۲x)+(۳x-۱)(-۲)=-۱۲x+۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۱۲x+۵=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x=\frac{۵}{۱۲}$ به‌دست می‌آید، که برابر است با $\frac{۱}{۲۴}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.

۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ رو به بالا، روی بازهٔ $(۰,۲)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ رو به بالاست. پس دوبار جهت تقعر نمودار تابع f تغییر کرده است.





۲۲۸- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+x-۱\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x+۱\Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع رو به پایین باشد، باید علامت مشتق دوم تابع منفی باشد:

$$۱۲x^۲-۱۲<۰\Rightarrow x^۲<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-۱,۱)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $۱-(-۱)=۲$.

۲۲۹- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۱۲)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(x^۲+۱۲)^۲+۸x^۲(x^۲+۱۲)}{(x^۲+۱۲)^۴}=\frac{۶x^۲-۲۴}{(x^۲+۱۲)^۳}$$

پس $f''(x)=۰\Rightarrow x=\pm۲$

با توجه به جدول زیر، جهت تقعر f روی بازهٔ $(-۲,۲)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	−	۰	+	

۲۳۰- گزینهٔ ۱ باید مشتق دوم تابع روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد. پس

$$f'(x)=۸x^۳-۶mx^۲+۶x$$

$$f''(x)=۲۴x^۲-۱۲mx+۶=۶(۴x^۲-۲mx+۱)\ge۰$$

در نتیجه باید

$$\Delta\le۰\Rightarrow ۴m^۲-۱۶\le۰\Rightarrow m^۲\le۴\Rightarrow -۲\le m\le۲$$

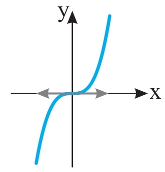
۲۳۱- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\sqrt{x^3}-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 8\sqrt{x^3}=1\Rightarrow x^3=(\frac{1}{8})^2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

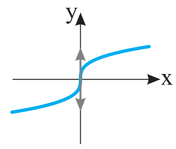
چون مخرج کسر $f''(x)$ روی بازهٔ مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین روی بازهٔ $(0,\frac{1}{4})$، $f''(x)<0$ و روی بازهٔ $(\frac{1}{4},1)$، $f''(x)>0$. پس جهت تقعر نمودار تابع f ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۲۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار توابع به شکل زیر است:



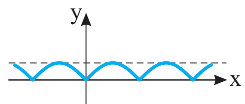
$y=x^3$

در $x=0$ نقطهٔ عطف دارد.



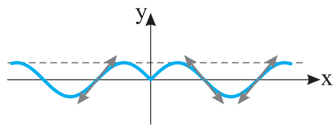
$y=\sqrt[3]{x}$

در $x=0$ نقطهٔ عطف دارد.



$y=|\sin x|$

نقطهٔ عطف ندارد.



$y=\sin|x|$

در تمام نقاط برخورد با محور طول‌ها به جز $x=0$ نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۳- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=x^4-x^3\Rightarrow f''(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=0,\frac{3}{4}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	−	0	+	
f		∩		∩	نقطهٔ عطف	∪	

مشتق دوم در $x=\frac{3}{4}$ تغییر علامت می‌دهد و تابع در این نقطه مشتق دارد، یعنی خط مماس دارد. پس $x=\frac{3}{4}$ طول تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع است.

۲۳۴- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		−	ت‌ن	+	0	−	ت‌ن	+	
$f(x)$		∩		∪	نقطهٔ عطف	∩		∪	

جهت تقعر نمودار در $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ تغییر می‌کند ولی فقط در نقطهٔ $x=0$ خط مماس وجود دارد. پس نمودار تابع فقط یک نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۵- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y'=4x^3+3ax^2+12x\Rightarrow y''=12x^2+6ax+12=6(2x^2+ax+2)$$

برای اینکه نمودار تابع نقطهٔ عطف نداشته باشد، باید مشتق دوم تغییر علامت ندهد، یعنی معادلهٔ $2x^2+ax+2=0$ نباید ریشهٔ ساده داشته باشد. پس

$$\Delta\le 0\Rightarrow a^2-4\times2\times2\le0\Rightarrow a^2\le16\Rightarrow -4\le a\le4$$

۲۳۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=3ax^2+2x+b\Rightarrow f''(x)=6ax+2$$

در نقطهٔ $x=1$ که طول نقطهٔ عطف نمودار تابع است، مقدار مشتق دوم موجود و برابر صفر است. پس

$$f''(1)=0\Rightarrow 6a+2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند. پس

$$f(1)=1\Rightarrow -\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2+b+1=1\Rightarrow -\frac{1}{3}+1=-b\Rightarrow b=-\frac{2}{3}$$

۲۳۷- گزینهٔ ۳ نمودار در نقطهٔ $x=-1$ بر محور طول‌ها مماس شده است. پس در این نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع هر دو صفر هستند:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+2\Rightarrow f(-1)=-1+a-b+2=0$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(-1)=3-2a+b=0$$

$$\begin{cases}a-b=-1\\-2a+b=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}\Rightarrow ab=20$$

۲۳۸- گزینهٔ ۳ مجانب‌های نمودار تابع $x=-2$ و $y=\frac{a}{2}$ هستند. پس محل برخورد آن‌ها نقطهٔ $(-2,\frac{a}{2})$ است که مختصات آن در معادلهٔ خط $y=2x+1$ صدق می‌کنند:

$$\frac{a}{2}=2(-2)+1\Rightarrow a=-6$$

۲۳۹- گزینهٔ ۳ مجانب قائم تابع $x=a$ است که نباید در بازهٔ $(2,+\infty)$ قرار بگیرد. پس $a\le2$. از طرف دیگر، مشتق تابع باید منفی باشد تا تابع اکیداً نزولی باشد:

$$f'(x)=\frac{-2a-a-3}{(x-a)^2}<0\Rightarrow -3a-3<0\Rightarrow a>-1$$

بنابراین $-1<a\le2$. توجه کنید که اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=2$. این تابع نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۴۰- گزینهٔ ۴ طبق نمودار $f(0)=\frac{1}{2}$، چون $f(0)=\frac{b}{2}$، پس $b=1$. در نتیجه $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+2}$. از اینکه نمودار بر محور x (در قسمت $x<0$) مماس است، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $x^2+ax+1=0$ ریشهٔ مضاعف منفی دارد:

$$\Delta=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm2\xrightarrow{\text{ریشهٔ منفی}}a=2\Rightarrow a+b=3$$

۲۴۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس $f(0)=0$، در نتیجه $a=0$. همچنین $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع است و چون $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$، پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین،

$$2x^2+bx+c=2(x-1)^2=2x^2-4x+2\Rightarrow b=-4,\ c=2$$

پس $f(x)=\frac{x}{2x^2-4x+2}$، در نتیجه $f(2)=1$.

۲۴۲- گزینهٔ ۱ خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع است، پس درجهٔ صورت باید کمتر از درجهٔ مخرج باشد. بنابراین $a=۰\Rightarrow f(x)=\frac{bx+۱}{x^۲+۱}$

تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد و مشتق آن در این نقطه صفر است:

$$f'(x)=\frac{b(x^۲+۱)-۲x(bx+۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-bx^۲-۲x+b}{(x^۲+۱)^۲}$$

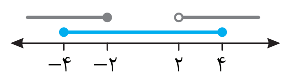
$$f'(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow -\frac{b}{۴}-۱+b=۰\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}$$

۲۴۳- گزینهٔ ۱ تابع در $x=-۱$ و $x=۱$ تعریف نشده است. پس این اعداد باید ریشهٔ مخرج باشند: $\begin{cases}۱+b+c=۰\\ ۱-b+c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۰\\ c=-۱\end{cases}$. در $x=۱$ حفره وجود دارد، پس باید صورت کسر هم در این نقطه صفر باشد:

$$۱+a-۲=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow a+b+c=۰$$

۲۴۴- گزینهٔ ۲ در نقطه‌ای که f ناپیوسته است، f' تعریف نمی‌شود. پس گزینهٔ (۴) نادرست است. اگر نقطهٔ ناپیوستگی f را $x=a$ بنامیم، نمودار f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است، پس f' روی این بازه منفی است و گزینهٔ (۱) نادرست است. در نقطه‌ای از بازهٔ $(-\infty,a)$ جهت تقعر نمودار f تغییر می‌کند (از رو به بالا به رو به پایین)، پس نمودار f' در این نقطه باید از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر کند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۴۵- گزینهٔ ۲ به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A=[-۴,-۲]\cup(۲,۴]$. بنابراین اعداد صحیح ۴-، ۳-، ۲-، ۳ و ۴ در مجموعهٔ A قرار دارند.



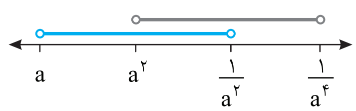
۲۴۶- گزینهٔ ۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$۲a\le ۲\Rightarrow a\le ۱,\quad ۲<۳+a\Rightarrow a>-۱$$

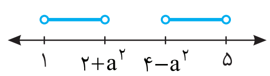
بنابراین $-۱<a\le ۱$ و در نتیجه $a\in(-۱,۱]$.

۲۴۷- گزینهٔ ۴ چون $-۱<a<۰$، پس $a<a^۲<\frac{۱}{a^۲}<\frac{۱}{a^۴}$. بنابراین با توجه به شکل زیر،

$$(a,\frac{۱}{a^۲})\cap(a^۲,\frac{۱}{a^۴})=(a^۲,\frac{۱}{a^۲})$$



۲۴۸- گزینهٔ ۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس $۴-a^۲\ge ۲+a^۲\Rightarrow a^۲\le ۱\Rightarrow -۱\le a\le ۱$

یعنی $a\in[-۱,۱]$

۲۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم. توجه کنید برای آنکه $\frac{۱۰}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰$ است. بنابراین $A=\{\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعهٔ B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعهٔ B تهی است. بنابراین مجموعهٔ B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۵۰- گزینهٔ ۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعهٔ نامتناهی A را که در مجموعهٔ متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

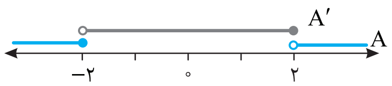
بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$، آنگاه $A-B=\{۰\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{۱\}$، آنگاه $A-B=\mathbb{Z}-\{۱\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینهٔ (۳) اگر $A=\{\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\mathbb{Z}$، آنگاه $A-B=\varnothing$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، $A'=(-۲,۲]$. بنابراین اعداد صحیح ۱-، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



۲۵۲- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=۳۰$، $n(B)=۳۵$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A\cup B)=۴۰$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۴۰=۳۰+۳۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۲۵$$

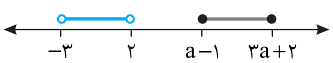
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۵۳- گزینهٔ ۲

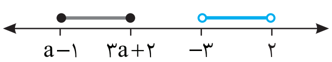
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$$

$$۲۰-۴=n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=۱۶$$

۲۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-۱\ge ۲\Rightarrow a\ge ۳$$



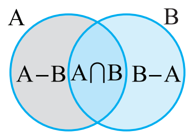
$$۳a+۲\le -۳\Rightarrow a\le -\frac{۵}{۳}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-۱,۳a+۲]$ بازه باشد باید $a-۱<۳a+۲$ و در نتیجه $a>-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$a\in([۳,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{۵}{۳}])\cap(-\frac{۳}{۲},+\infty)$$

اگر $a\ge ۳$، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.

۲۵۵- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$ ، $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



۲۵۶- گزینهٔ ۱ توجه‌کنید که در شکل اول، ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم، ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم، 4×2 دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل nاُم، $4\times(n-1)$ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم، $a_n=6+4(n-1)=4n+2$ (توجه کنید که شکل nاُم، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20}=4\times 20+2=82$$

۲۵۷- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases}t_4=16\\ t_{16}=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=16\\ 16a+b=28\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $a=1$ و $b=12$. بنابراین

$$t_n=n+12\Rightarrow t_2=14$$

۲۵۸- گزینهٔ ۲ شکل nاُم از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $2(n+2)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $2(n+2)-1=2n+3$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(20)^2$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۵۹- گزینهٔ ۳ بایـد ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{4n-3}{n+3}=3$ برقرار می‌شود. پس $4n-3=3n+9\Rightarrow n=12$
بنابراین جملهٔ دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۶۰- گزینهٔ ۴ عدد آخر دستهٔ اول 2^2، عدد آخر دستهٔ دوم 4^2، عدد آخر دستهٔ سوم 6^2 و ... عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

۲۶۱- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-1}-3$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن -3 با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت -3 و جملهٔ اول -4 داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{20}=a_1+19d=-4+19(-3)=-61$.

۲۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید جملهٔ اول این دنباله، a_1 و قدرنسبت آن d باشد. در این‌صورت

$$a_4=5\Rightarrow a_1+(4-1)d=5\Rightarrow a_1+3d=5\qquad(1)$$

$$a_9=30\Rightarrow a_1+(9-1)d=30\Rightarrow a_1+8d=30\qquad(2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید $5d=25$، پس $d=5$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=-10$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n=a_1+(n-1)d=-10+(n-1)(5)=5n-15$$

۲۶۳- گزینهٔ ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{994-105}{7}+1$ است که برابر است با ۱۲۸.

۲۶۴- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{1}{2}$ واسطهٔ حسابی $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ است، پس

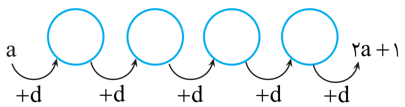
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\Rightarrow 1=\frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

در نتیجه

$$x^2+2x=2x+2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

۲۶۵- گزینهٔ ۲ چون $a>0$، پس $2a+1>a$. اکنون قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم $d=\frac{2a+1-a}{4+1}=\frac{a+1}{5}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر $3d$ است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5}=9\Rightarrow 3a+3=45\Rightarrow 3a=42\Rightarrow a=14$$



۲۶۶- گزینهٔ ۳ جملات دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-d, a, a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها $3a$ است. پس $3a=21$ و در نتیجه $a=7$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=168\Rightarrow 7(49-d^2)=168$$

$$49-d^2=24\Rightarrow d^2=25\Rightarrow d=\pm 5\Rightarrow 2,7,12\ \text{ یا }\ 12,7,2$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۶۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد $(r>0)$. در این‌صورت

$$a_1+a_5=30\Rightarrow a_1+a_1r^4=30\Rightarrow a_1(1+r^4)=30\qquad(1)$$

$$a_3+a_7=120\Rightarrow a_1r^2+a_1r^6=120\Rightarrow a_1r^2(1+r^4)=120\qquad(2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $r^2=4$؛ پس $r^4=16$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=\frac{30}{17}$.

۲۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $3+9=5+7=4+8$ پس

$$a_3a_9=a_5a_7=a_4a_8$$

در نتیجه $a_3a_5a_7a_9=(a_4a_8)^2=9$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_4=a_1r^3,\quad a_8=a_1r^7\Rightarrow a_4a_8=a_1^2r^{10}=3$$

پس

$$a_3a_5a_7a_9=a_1r^2a_1r^4a_1r^6a_1r^8=a_1^4r^{20}=(a_1^2r^{10})^2=9$$

۲۶۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_1a_2\cdots a_8=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow 81=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow a_1a_8=\pm 3$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8\Rightarrow a_2a_7=a_1a_8\ ,\quad 4+5=1+8\Rightarrow a_4a_5=a_1a_8$$

پس $a_2a_4a_5a_7=(a_2a_7)(a_4a_5)=(a_1a_8)^2=9$.

۲۷۰- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم به‌ترتیب $a+d$ ، $a+3d$ و $a+8d$ هستند. پس $a+3d$ واسطهٔ هندسی $a+d$ و $a+8d$ است و درنتیجه

$$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)\Rightarrow a^2+6ad+9d^2=a^2+9ad+8d^2$$

$$d^2=3ad\Rightarrow d=3a$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۳ برابر جملهٔ اول آن است.

۲۷۱- گزینهٔ ۴ در این دنباله $a_1=-7$ و $d=2$، بنابراین

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times(-7)+9\times2)=20$$

۲۷۲- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=300\Rightarrow a_1+7d=20$$

بنابراین $a_8=a_1+7d=20$.

۲۷۳- گزینهٔ ۳ جملهٔ اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times9+8(n-1))=\frac{n}{2}(18+8n-8)=4n^2+5n$$

در نتیجه $4n^2+5n=636\Rightarrow 4n^2+5n-636=0$

$$(4n+53)(n-12)=0\Rightarrow n=-\frac{53}{4}\ (\text{غ.ق.ق}),\ n=12$$

بنابراین باید دوازده جملهٔ نخست دنباله را جمع کنیم.

۲۷۴- گزینهٔ ۲ با قرار دادن $n=1$ جملهٔ نخست به‌دست می‌آید

$$a_1=S_1=5-4=1$$

با قرار دادن $n=2$ مجموع جمله‌های اول و دوم به‌دست می‌آید، سپس جملهٔ دوم را حساب می‌کنیم:

$$S_2=a_1+a_2=5\times2^2-4\times2=12\Rightarrow a_2=12-a_1=12-1=11$$

بنابراین $d=a_2-a_1=11-1=10$

۲۷۵- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_3=a_1\frac{q^3-1}{q-1}=195\Rightarrow 135(q^3-1)=195(q-1)$$

$$135(q-1)(q^2+q+1)=195(q-1)\Rightarrow 9q^2+9q+9=13$$

$$9q^2+9q-4=0\Rightarrow(3q-1)(3q+4)=0\Rightarrow q=\frac{1}{3},\ q=-\frac{4}{3}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. در این دنباله $a_1=\frac{2}{9}$ و $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}=-\frac{3}{2}$. بنابراین

$$S_n=\frac{55}{72}\Rightarrow\frac{55}{72}=\frac{2}{9}\times\frac{(-\frac{3}{2})^n-1}{-\frac{3}{2}-1}\Rightarrow(-\frac{3}{2})^n=-\frac{243}{32}=(-\frac{3}{2})^5$$

بنابراین $n=5$. یعنی باید پنج جملهٔ نخست دنبالهٔ موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود.

۲۷۷- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_5=5a_1\Rightarrow a_1\frac{q^5-1}{q-1}=5a_1\Rightarrow q^5-1=5(q-1)\qquad(1)$$

$$S_{15}=100\Rightarrow a_1\frac{q^{15}-1}{q-1}=100\Rightarrow a_1(q^{15}-1)=100(q-1)\qquad(2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15}-1)}{q^5-1}=\frac{100(q-1)}{5(q-1)}\Rightarrow\frac{a_1(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)}{q^5-1}=20$$

پس $a_1q^{10}+a_1q^5+a_1=20$، بنابراین $a_1+a_6+a_{11}=20$.

۲۷۸- گزینهٔ ۲ چون $x<0$، پس $\sqrt[4]{x^4}=|x|=-x$. در نتیجه

$$3\sqrt[3]{x^3}+2\sqrt[4]{x^4}=3x+2(-x)=x$$

۲۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6}-a=0\Rightarrow b|a|-a=0\Rightarrow b|a|=a$$

بنابراین اگر $a>0$، $b=1$ و اگر $a<0$، $b=-1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{b^6}=|a|+|b|=|a|+1$ که اگر a مثبت باشد برابر با $1+a$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1-a$ است.

۲۸۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2^n}}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}\Rightarrow\sqrt[4\times2\times2]{2^n}=\sqrt[3\times4\times2]{8}\Rightarrow 2^{\frac{n}{4\times2\times2}}=2^{\frac{3}{3\times4\times2}}$$

$$2^{\frac{n}{16}}=2^{\frac{1}{8}}\Rightarrow\frac{n}{16}=\frac{1}{8}\Rightarrow n=2$$

۲۸۱- گزینهٔ ۳ از $a>\sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a>1$. بنابراین $a^2<a^3$ و در نتیجه $\sqrt[3]{a^2}<\sqrt[3]{a^3}$. یعنی $\sqrt[3]{a^2}<a$. همچنین $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ پس

$$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}>\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نابرابری داده شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{3}{5}}=16\Rightarrow(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}=16^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=16^{\frac{5}{3}}$$

بنابراین $a^{\frac{3}{4}}=(16^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{4}}=(2^4)^{\frac{5}{4}}=2^5=32$.

۲۸۳- گزینهٔ ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}}=\sqrt{3\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{3^{\frac{19}{12}}}=3^{\frac{19}{24}}$$

بنابراین $a=\frac{19}{24}$.

۲۸۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $4a^2+\frac{9}{a^2}=(2a+\frac{3}{a})^2-12$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{3}{2a}=4$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $2a+\frac{3}{a}=8$. بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با $8^2-12=52$.

۲۸۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\div\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6-2\sqrt{5}}}\times\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{3^2-(2\sqrt{2})^2}{6^2-(2\sqrt{5})^2}}=\sqrt{\frac{9-8}{36-20}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

۲۸۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab-bc+ca)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $ab+bc-ca=8\Rightarrow -ab-bc+ca=-8$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$36=a^2+b^2+c^2-16\Rightarrow a^2+b^2+c^2=52$$

۲۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ و $(x-4)(x+1)=x^2-3x-4$. بنابراین

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)=(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)$$
$$=(7+2)(7-4)=27$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=x^3-6x^2+12x-8-(8x^3-12x^2+6x-1)$$
$$=-7x^3+6x^2+6x-7$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۶ است.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$
$$=((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$
$$=(x^3-1)(x^3+1)+1=x^6-1+1=x^6$$

حال قرار می‌دهیم $x=\sqrt[12]{2}$ و نتیجه می‌شود $A=(\sqrt[12]{2})^6=\sqrt{2}$.

۲۹۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$x^2-y^2-6x-8y-7=(x^2-6x+9)-(y^2+8y+16)$$
$$=(x-3)^2-(y+4)^2=(x-3-(y+4))(x-3+y+4)$$
$$=(x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2$$
$$=(x^2+2-x)(x^2+2+x)$$

بنابراین x^2-x+2 عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۹۲- گزینهٔ ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^3+3=3(y^3+1)=3(y+1)(y^2-y+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2-y+1)}{y-x}\times\frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)}=3(y+1)$$

۲۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^2+ab+ac+bc=a^2+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c=a+b+c-b=3+2=5$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3\times5=15$.

۲۹۴- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^2)^3-1}{a^2(a^2-1)}=\frac{(a^2-1)((a^2)^2+a^2+1)}{a^2(a^2-1)}$$
$$=\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=\frac{a^4}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1$$
$$=(a-\frac{1}{a})^2+2+1=\sqrt{5}^2+3=8$$

۲۹۵- گزینهٔ ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-5=\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-5=\frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1}-5$$
$$=\frac{10+6\sqrt{3}}{2}-5=5+3\sqrt{3}-5=3\sqrt{3}$$

۲۹۶- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

۲۹۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3})^3-1}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}$$

بنابراین $a=\frac{1}{2}$.

۲۹۸- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر است با $P(2)=2^5-4(2)^3+3(2)^2-2+1=11$.

۲۹۹- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر است با $P(1)=3-4a-5=-4a-2$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a-2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۳۰۰- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با $P(-4)$ است و چون بنابر فرض، این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(-4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5\Rightarrow P(-4)=a(-4)^{13}+b(-4)^{97}-5$$
$$16=-4^{13}a-4^{97}b-5\Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=-21 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(4)=4^{13}a+4^{97}b-5\xrightarrow{\text{بنابر تساوی (1)}}P(4)=-21-5=-26$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -26 است.

۳۰۱- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(4x)$ بر $1-2x$ برابر است با $P(4\times\frac{1}{2})=P(2)=4$.

۳۰۲- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\times13}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

۳۰۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ گزینهٔ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به‌ازای هر m، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^2-x-m=0 \Rightarrow \Delta=1+4m^2>0$$

توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $x^2-2x+m=0 \Rightarrow \Delta=4-4m \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۲) $x^2-x+m^2=0 \Rightarrow \Delta=1-4m^2 \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۴) $mx^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4m \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

۳۰۴- گزینهٔ ۱ باید $\Delta\ge0$، پس

$$x^2-(k+1)x+1=0 \Rightarrow \Delta=(k+1)^2-4\ge0$$

$$(k+1)^2\ge4 \xrightarrow{k>0} k+1\ge2 \Rightarrow k\ge1$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۳۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ $92x^2-167x+75=0$ برابر با صفر است، پس یکی از جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{75}{92}$ است. چون $\frac{75}{92}<1$، پس کوچک‌ترین جواب $\frac{75}{92}$ است.

۳۰۶- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{2})=0 \xrightarrow{x_1<x_2} x_1=\sqrt{3}\,,\quad x_2=2\sqrt{2}$$

بنابراین $x_1^4+x_2^2=(\sqrt{3})^4+(2\sqrt{2})^2=9+8=17$.

۳۰۷- گزینهٔ ۳ این دو عدد فرد را x و x+2 فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^2+(x+2)^2=130 \Rightarrow 2x^2+4x+4=130 \Rightarrow x^2+2x-63=0$$

$$(x+9)(x-7)=0 \Rightarrow x=-9 \ (\text{غ.ق.ق})\,,\ x=7$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر ۴۹−۸۱ یعنی ۳۲ است.

۳۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-1)(4)=-4$.

۳۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8-3\times(-5)\times2=38$$

۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}=-1 \Rightarrow m-1=-2 \Rightarrow m=-1$$

۳۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=-5$ و چون $2x_1-x_2=17$، پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به‌دست می‌آید $x_1=4$. چون x_1 جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$4^2+5(4)-4m+16=0 \Rightarrow m=13$$

۳۱۲- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2-\beta-7=0 \Rightarrow 2\beta^2=\beta+7$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha+2\beta^2=\alpha+\beta+7=\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$.

۳۱۳- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=2-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=5$$

$$P=\alpha\beta=(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-5x+3-\sqrt{3}=0$$

۳۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1+2}{1+1-1}=3$$

$$\frac{1}{x_1+1}\times\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{1}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1}{1+1-1}=1$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^2-3x+1=0$ است.

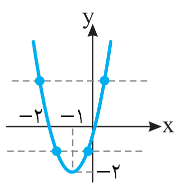
۳۱۵- گزینهٔ ۲ برای اینکه جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ مختلف‌العلامت باشند، کافی است $\frac{c}{a}<0$. توجه کنید که در این حالت $\Delta>0$. بنابراین

$$\frac{m+2}{m}<0 \Rightarrow -2<m<0$$

۳۱۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** برای اینکه معادلهٔ مورد نظر دو جواب منفی داشته باشد، باید $\Delta>0$، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta>0 \Rightarrow 16-4(-2)(a)>0 \Rightarrow a>-2\,,\quad \frac{4}{-2}=-2<0\,,\quad \frac{a}{-2}>0 \Rightarrow a<0$$

بنابراین $-2<a<0$.



راه‌حل دوم ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $2x^2+4x=a$ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+4x$ و خط $y=a$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-2<a<0$، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a>0$، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

توجه کنید که $x=0$ و $x=-2$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-1\,,-2)$ است.

۳۱۷- گزینهٔ ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta=(a+1)^2-64>0 \Rightarrow (a+1)^2>64 \Rightarrow \begin{cases} a+1>8 \Rightarrow a>7 \\ \text{یا} \\ a+1<-8 \Rightarrow a<-9 \end{cases} \qquad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{a+1}{2}$ است. پس $-\frac{a+1}{2}>0 \Rightarrow a+1<0 \Rightarrow a<-1 \quad (2)$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a<-9$.

۳۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:
$$\frac{5(k-2)}{k+6}<0\Rightarrow k\in(-6,2)$$
از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است
$$-\frac{17(k+1)}{k+6}<0\Rightarrow\frac{k+1}{k+6}>0\Rightarrow k\in(-\infty,-6)\cup(-1,+\infty)$$
بنابراین $k\in(-1,2)$.

۳۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=-1$ یک جواب معادله است.
$$(-1)^3-(-1)^2-3(-1)-1=0$$
بنابراین معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم
$$x^3+x^2-2x^2-3x-1=0\Rightarrow x^2(x+1)-(2x^2+3x+1)=0$$
$$x^2(x+1)-(x+1)(2x+1)=0\Rightarrow(x+1)(x^2-2x-1)=0$$
پس جواب‌های دیگر از حل معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-1+(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ چون $x=2$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $8+4a+2+6=0$ پس $a=-4$. چون $x-2$ عاملی از x^3-4x^2+x+6 است، بنابراین $x^3-4x^2+x+6=(x-2)Q(x)$.
برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای x^3-4x^2+x+6 را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x)=x^2-2x-3$. بنابراین
$$x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)=(x-2)(x+1)(x-3)$$
پس به غیر از $x=2$ جواب‌های دیگر معادله -1 و 3 هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها 10 است.

۳۲۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\geq0$، معادله به‌صورت $t^2-3t-1=0$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ است. عدد $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین
$$x^2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$
پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با
$$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}=-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

۳۲۲- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ و $t\geq0$. همچنین معادله به شکل $t^2-2t+m^2-1=0$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در معادلهٔ $t^2-2t+m^2-1=0$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:
$$\Delta>0\Rightarrow4-4(m^2-1)>0\Rightarrow m^2<2\Rightarrow-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$$
$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow2>0\,,\quad\frac{c}{a}>0\Rightarrow m^2-1>0\Rightarrow m<-1$ یا $m>1$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت
$$m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})-[-1,1]$$

۳۲۳- گزینهٔ ۳ معادله را به شکل $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-3=0$ می‌نویسیم. با قرار دادن $x^2-x=t$ به‌دست می‌آید
$$t^2+2t-3=0\Rightarrow t=-3\,,t=1$$
$x^2-x=-3\Rightarrow x^2-x+3=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$x^2-x=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=1$

۳۲۴- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت
$$x\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=0\Rightarrow x\left(\frac{2(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)=0$$
$$x\left(\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\right)=0\Rightarrow\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)}=0$$
جواب‌های این معادله ۰ و ۳− هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها ۳− است.

۳۲۵- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $3(x-3)(x+3)$ است ضرب می‌کنیم:
$$3(x-3)(x+3)\frac{x+3}{x-3}+3(x-3)(x+3)\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}\times3(x-3)(x+3)$$
$$3(x+3)^2+3(x-3)^2=10(x-3)(x+3)$$
$$3(x^2+6x+9)+3(x^2-6x+9)=10(x^2-9)$$
$$6x^2+54=10x^2-90\Rightarrow4x^2=144\Rightarrow x=\pm6$$
چون ۶− و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۳۶− است.

۳۲۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت
$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)}=4\Rightarrow\frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)}=4$$
$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a$$
$$4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$
بنابراین مجموع جواب‌ها $=\frac{4a-9}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow4a-9=-1\Rightarrow a=2$

اگر $a=2$، آن‌گاه معادله به‌صورت $4x^2+x-23=0$ درمی‌آید که چون $\Delta>0$ پس معادله دو جواب دارد. ($x=2$ و $x=-3$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادلهٔ اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادلهٔ بالا نیستند. پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.)

۳۲۷- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم
$$x+a+3x=2x^2+2ax\Rightarrow2x^2+(2a-4)x-a=0$$
برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta\geq0$. پس
$$(2a-4)^2+8a\geq0\Rightarrow4a^2-16a+16+8a\geq0\Rightarrow a^2-2a+4\geq0$$
عبارت a^2-2a+4 همواره مثبت است، پس معادله به‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۲۸- گزینهٔ ۲ سمت راست معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:
$$\frac{15}{x^2+x+1}=2(x^2+x+1)-1$$
اگر فرض کنیم $x^2+x+1=t$، این معادله می‌شود
$$\frac{15}{t}=2t-1\Rightarrow15=2t^2-t\Rightarrow2t^2-t-15=0\Rightarrow t=-\frac{5}{2},t=3$$

به این ترتیب

$x^2+x+1=-\frac{5}{2}\Rightarrow x^2+x+\frac{7}{2}=0$ جواب ندارد $(\Delta<0)$

$x^2+x+1=3\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=-2\,,\,x=1$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۳۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=(x-\frac{1}{x})^2+4$$

پس معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ $(x-\frac{1}{x})^2=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{x})$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یا $x-\frac{1}{x}=0$، یعنی $x^2-1=0$، که مجموع جواب‌هایش صفر است،
یا $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$، یعنی $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$ که مجموع جواب‌هایش $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۳۳۰- گزینهٔ ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4\Rightarrow x+1=4x^2\Rightarrow 4x^2-x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۳۳۱- گزینهٔ ۳ اگر ماشین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند، ماشین سریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{3}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{t}$ کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{3}{t}$ کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t}+\frac{3}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{4}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow t=24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۳۲- گزینهٔ ۳ با توجه به جدول تعیین علامت باید $a-b<0$، پس $a<b$. همچنین $x=b$ ریشهٔ عبارت است، بنابراین

$$(a-b)b-2a+2b=0\Rightarrow(a-b)b-2(a-b)=0$$

$$(a-b)(b-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\Rightarrow a=b & (\text{غ.ق.ق})\\ b-2=0\Rightarrow b=2\end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a<b=2\Rightarrow a=1$$

بنابراین $a+b=3$.

۳۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس $a-2=0$ و در نتیجه $a=2$. بنابراین عبارت به صورت $y=-(2+b)x+4$ است. چون $x=4$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$-(2+b)\times4+4=0\Rightarrow b=-1$$

بنابراین $a-b=3$.

۳۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و $(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$+$	ت.ن	$+$	

۳۳۵- گزینهٔ ۲ دو نامعادلهٔ $3x-2<5x+6$ و $4x-1<3x-2$ را حل می‌کنیم:

$$3x-2<5x+6\Rightarrow-2x<8\Rightarrow x>-4$$

$$4x-1<3x-2\Rightarrow x<-1$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق یعنی $-4<x<-1$ جواب مسئله است. پس $a=-4$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-5$.

۳۳۶- گزینهٔ ۱ باید شرایط $\Delta<0$ و $a>0$ برقرار باشند. پس

$$m-1>0\Rightarrow m>1\quad(1)$$

$$\Delta=8-4m(m-1)<0\Rightarrow m^2-m-2>0\Rightarrow(m+1)(m-2)>0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$m<-1$ یا $m>2$ (۲)

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>2$.

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
m^2-m-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

۳۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	0	$+$	ت.ن	$-$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-2]\cup(0,2)$ است.

۳۳۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{2}{x}-1\ge0\Rightarrow\frac{x^2-x-2}{x}\ge0$$

به کمک تعیین علامت مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$\frac{x^2-x-2}{x}$		$-$	0	$+$	ت.ن	$-$	0	$+$	

این مجموعه به‌صورت $[-1,+\infty)-[0,2)$ است. پس $a=-1$ و $b=2$. در نتیجه $a+b=1$.

۳۳۹- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x-۱=x^۲-۴x+۴\Rightarrow x^۲-۵x+۵=۰$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $x=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ و $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. ولی $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و در معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=x-۲$ اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۳۴۰- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+۱}+۱=\sqrt{۲x+۳}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+۱+۱+۲\sqrt{x+۱}=۲x+۳\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=x+۱$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(x+۱)=(x+۱)^۲\Rightarrow ۴x+۴=x^۲+۲x+۱$$

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\,,\,x=۳$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۴۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^۲+۵x+۲۸-۲۴-۵\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۰$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=t$، این معادله می‌شود

$$t^۲-۲۴-۵t=۰\Rightarrow(t-۸)(t+۳)=۰\Rightarrow t=۸\,,\,t=-۳$$

چون $t\geq ۰$، پس $t=۸$، یعنی

$$\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۸\Rightarrow x^۲+۵x+۲۸=۶۴\Rightarrow x^۲+۵x-۳۶=۰$$

$$(x-۴)(x+۹)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۹$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۳۶ است.

۳۴۲- گزینهٔ ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}\frac{x^۲}{۴}=x\Rightarrow x^۲=۴x$$

$$x=۰,\;\; x=۴$$

چون هر دو عدد در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۴۳- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که $a>۱$. چون $x=۱$ جواب معادله است، پس

$$۲\times۱^۲-۱=|۱-a|\Rightarrow|۱-a|=۱\xrightarrow{a>۱}a-۱=۱$$

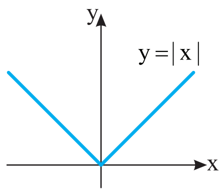
بنابراین $a=۲$.

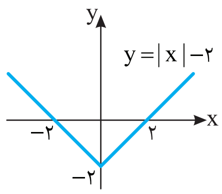
۳۴۴- گزینهٔ ۴ اگر خط و سهمی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، باید معادلهٔ $x^۲+۲kx+k+۱=-x$ جواب نداشته باشد. بنابراین معادلهٔ $x^۲+(۲k+۱)x+k+۱=۰$ جواب ندارد، یعنی

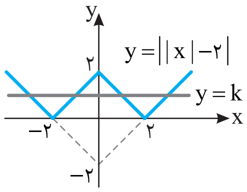
$$\Delta=(۲k+۱)^۲-۴(k+۱)<۰\Rightarrow ۴k^۲+۴k+۱-۴k-۴<۰$$

$$k^۲<\frac{۳}{۴}\Rightarrow-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<k<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۴۵- گزینهٔ ۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=||x|-۲|$ و $y=k$ است. نمودار $y=||x|-۲|$ را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:

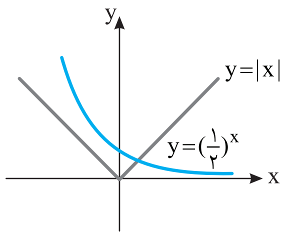






از روی شکل معلوم است که اگر خط $y=k$ نمودار $y=||x|-۲|$ را در چهار نقطه قطع کرده باشد، باید $۰<k<۲$.

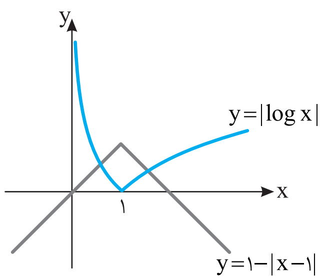
۳۴۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $|x|=(\frac{۱}{۲})^x$ می‌نویسیم و نمودار تابع‌های $y=|x|$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم. نمودارها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک جواب دارد.



۳۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$|\log x|=۱-|x-۱|$$

و نمودار تابع‌های $y=۱-|x-۱|$ و $y=|\log x|$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



۳۴۸- گزینهٔ ۱

$$\big|۳+|۲-|۱+a||\big|=\big|۳+|۲-(-(۱+a))|\big| \qquad (\text{چون } ۱+a<۰)$$

$$=\big|۳+|۳+a|\big|=|۳-(۳+a)| \qquad (\text{چون } ۳+a<۰)$$

$$=|-a|=-a \qquad (\text{چون } a<۰)$$