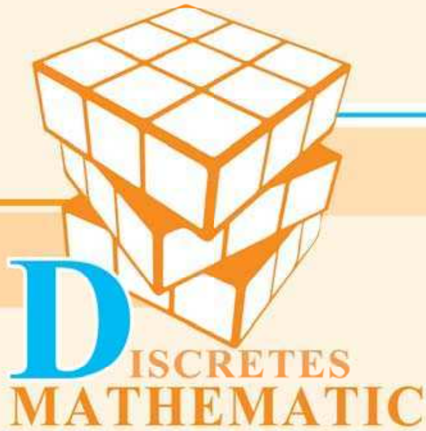
ریاضیات گسسته



آمار و احتمال

پاسخ‌نامه

فصل اول

۱ درس دوم: قسمت اول
بخش‌پذیری در اعداد صحیح

ریاضیات گسسته: فصل ۱

در ادامهٔ فصل به بررسی خواص مجموعهٔ اعداد صحیح می‌پردازیم. بنابراین در سراسر این فصل، منظور از عدد a، عدد b یا .... اعداد صحیح، a، b و ... است.

عاد کردن

عدد b بر عدد مخالف صفر a بخش‌پذیر است، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b = aq$. در این صورت می‌نویسیم «$a \mid b$» و به صورت‌های زیر می‌خوانیم.

$$a \mid b \Leftrightarrow b = aq$$

۱ عدد a، عدد b را عاد می‌کند.

۲ عدد صحیح b، مضرب عدد صحیح a است.

۳ عدد صحیح a، یک مقسوم‌علیه عدد صحیح b است.

۴ عدد صحیح a، یک شمارندهٔ عدد صحیح b است.

۵ عدد صحیح a، عدد صحیح b را می‌شمارد.

مثلاً چون $۳ \times ۷ = ۲۱ \times ۱ = ۲۱$ می‌توان گفت $۲۱ \mid ۲۱$، $۷ \mid ۲۱$، $۳ \mid ۲۱$ و $۲۱ \mid ۲۱$ اما چون عدد صحیحی مانند q یافت نمی‌شود که $۵ \times q = ۲۱$ باشد، پس $۵ \nmid ۲۱$.

توجه به زبان ساده می‌توان گفت وقتی $a \mid b$، یعنی a به صورت یک عامل ضربی در b وجود دارد.

? اگر a، b، c و d اعداد صحیح ناصفر و $ab = cd$ باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) $b \mid d$ ۲) $ab \mid c$ ۳) $b \mid cd$ ۴) $ac \mid bd$

گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف عاد کردن که به صورت «$a \mid b \Leftrightarrow b = aq$» می‌باشد، گزارهٔ $b \mid cd$ صحیح است، زیرا:

نقش q را بازی می‌کند.

$$ab = cd \Rightarrow cd = ba \Rightarrow b \mid cd$$

اما گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» نادرست هستند. البته می‌توان از مثال‌های زیر به عنوان مثال نقض برای آن‌ها استفاده کرد.

۱) $b = c = ۳ , a = d = ۱$ ۲) $a = c = ۱ , b = d = ۳$ ۴) $a = c = ۳ , b = d = ۱$

ویژگی‌های عاد کردن:

۱ هر عدد غیرصفر، بر خودش بخش‌پذیر است. $a \mid a$

نتیجه اگر m و n دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که $m \le n$، آن‌گاه داریم: $a^m \mid a^n$

مثلاً $۳^۴ \mid ۳^۶$ یا $۲^۵ \mid ۲^{۱۰}$ یا $۵^۴ \mid ۵^۹$ یا ....

توجه در تعریف رابطهٔ $a \mid b$ گفته شد که a مخالف صفر است. این‌که صفر عدد صفر را می‌شمارد، به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود. $۰ \mid ۰$

? کدام گزاره نادرست است؟

۱) $۴۵^۳ \mid ۱۵^۶$ ۲) $۱۲^۷ \mid ۱۸^{۱۲}$ ۳) $۱۲^۵ \mid ۶^{۱۰}$ ۴) $۷۵^۴ \mid ۱۵^{۱۰}$

گزینهٔ ۲ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $۴۵^۳ \mid ۱۵^۶ \Rightarrow ۳^۶ \times ۵^۳ \mid ۳^۶ \times ۵^۶$ ✓

۲) $۱۲^۷ \mid ۱۸^{۱۲} \Rightarrow ۲^{۱۴} \times ۳^۷ \mid ۲^{۱۲} \times ۳^{۲۴}$ ✗

واضح است که $۲^{۱۴} \nmid ۲^{۱۲}$، بنابراین $۱۲^۷ \nmid ۱۸^{۱۲}$. پس نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست. شما به عنوان تمرین، درستی گزینه‌های «۳» و «۴» را بررسی کنید.

۲ علامت در بخش‌پذیری تأثیری ندارد.

$a|b \Rightarrow -a|b\,,\ a|-b\,,\ -a|-b$

مثلاً واضح است که تمام بخش‌پذیری‌های ۱۲|۳، ۱۲|۳-، ۱۲-|۳ و ۱۲-|۳- برقرارند.

۳ ۱± تمام اعداد صحیح را عاد می‌کنند، یعنی ۱± مقسوم‌علیه هر عددی هستند.

$\pm 1|b$

۴ ۱± فقط بر خودشان بخش‌پذیرند، یعنی مقسوم‌علیه‌های ۱±، فقط خود ۱± هستند.

$a|\pm 1 \Rightarrow a=\pm 1$

به ازای هر عدد صحیح b، رابطهٔ $a^2-2a-2|b$ برقرار است. چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ ۱ چون به ازای هر عدد صحیح b، عدد a^2-2a-2 عدد b را عاد می‌کند، پس حتماً a^2-2a-2 برابر ۱± می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a^2-2a-2=1 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2-2a+2=-1 \Rightarrow a^2-2a+3=0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

یک مقدار صحیح برای a وجود دارد.

۵ صفر بی‌شمار مقسوم علیه صحیح دارد. به بیان دیگر تمام اعداد صحیح، صفر را عاد می‌کنند.

$a|0$

۶ **اگر صفر، عددی را عاد کند، حتماً آن عدد صفر است. به بیان ساده‌تر، عدد صفر، فقط مقسوم‌علیه صفر است. این مطلب را به عنوان قرارداد پذیرفته بودیم.**

$0|a \Rightarrow a=0$

کدام گزاره همواره درست است؟

۱) صفر، همهٔ اعداد صحیح را عاد می‌کند.
۲) همهٔ اعداد صحیح، ۱± را می‌شمارند.
۳) صفر بر صفر بخش‌پذیر است.
۴) مربع هر عدد صحیح، آن عدد را عاد می‌کند.

گزینهٔ ۳ می‌دانیم صفر بر صفر بخش‌پذیر است، بنابراین گزینهٔ «۳» صحیح است. در مورد گزینهٔ «۱»، گزارهٔ صحیح به‌صورت «همهٔ اعداد صحیح صفر را عاد می‌کنند.» می‌باشد. در مورد گزینهٔ «۲»، «۱±، همهٔ اعداد صحیح را می‌شمارند.» صحیح است و در مورد گزینهٔ «۴» هم مثال‌های نقض زیادی مانند ۲، ۳ و ... وجود دارد.

برای هر عدد صحیح a، رابطهٔ $a|b^2-2b-3$ برقرار است. چند عدد طبیعی برای b وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

گزینهٔ ۱ چون عدد b^2-2b-3 بر هر عدد صحیح مانند a بخش‌پذیر است، پس $b^2-2b-3=0$ می‌باشد، لذا داریم:

$b^2-2b-3=0 \Rightarrow b=-1, b=3 \Rightarrow$ فقط عدد ۳ عددی طبیعی است.

به ازای چند عدد صحیح n، عدد $2n^2-3n-2$ بر صفر بخش‌پذیر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

گزینهٔ ۲ تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است، پس:

$2n^2-3n-2=0 \Rightarrow (2n+1)(n-2)=0 \Rightarrow n=-\frac{1}{2}, n=2 \Rightarrow$ فقط یک عدد صحیح وجود دارد.

۷ **مقسوم‌علیه‌های هر عدد صحیح مخالف صفر، از نظر قدرمطلق، از خود عدد کوچک‌تر و یا مساوی‌اند.**

$a|b, b\neq 0 \Rightarrow |a|\leq|b|$

مثلاً به مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۶- که مجموعهٔ $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$ است، دقت کنید. همهٔ اعضا از نظر قدرمطلق، از قدرمطلق ۶- کوچک‌تر و یا مساوی‌اند.

نکته تنها عددی که مقسوم‌علیه‌هایش می‌توانند از نظر قدرمطلق از خودش بزرگ‌تر باشند، عدد صفر است.

$a|b, |a|>|b| \Rightarrow b=0$

نتیجه اگر دو عدد صحیح بر هم بخش‌پذیر باشند، یا با هم برابرند و یا قرینهٔ یکدیگرند.

$a|b, b|a \Rightarrow a=\pm b$

به ازای چند عدد صحیح n، رابطهٔ $n^2+3|n+9$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $n+9$ صفر نباشد، پس $|n^2+3|\leq|n+9|$ می‌باشد، از آن‌جایی که n^2+3 مثبت است، پس:

$n^2+3\leq n+9 \Rightarrow n^2-n-6\leq 0 \Rightarrow (n-3)(n+2)\leq 0 \Rightarrow -2\leq n\leq 3$

حال n های به‌دست‌آمده را در رابطه چک می‌کنیم:

$n=-2 \Rightarrow 7|7$ ✓ ‌ ‌ $n=-1 \Rightarrow 4|8$ ✓ ‌ ‌ $n=0 \Rightarrow 3|9$ ✓

$n=1 \Rightarrow 4|10$ × ‌ ‌ $n=2 \Rightarrow 7|11$ × ‌ ‌ $n=3 \Rightarrow 12|12$ ✓

از طرفی اگر $n+9$ صفر باشد، حتماً رابطهٔ $n+9 \mid n^2+3$ برقرار است، پس به ازای ۵ عدد صحیح ۲-، ۱-، صفر، ۳ و ۹-، عدد $n+9$ بر n^2+3 بخش‌پذیر است.

۸ اگر عدد a، عدد b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز عاد می‌کند. به بیان دیگر می‌توان عامل‌های سمت راست رابطهٔ عاد کردن را زیاد یا تقویت کرد.

$a \mid b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a \mid b^n$ ‌ ‌ ‌ $a \mid b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a \mid mb$

مثلاً چون $3 \mid 6$، آن‌گاه $3 \mid 6 \times 47$ و $3 \mid 6^{23}$.

نکته واضح است که از رابطهٔ $a \mid b$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b+c$، زیرا اضافه کردن c به b، لزوماً عامل‌های b را زیاد یا تقویت نمی‌کند و حتی ممکن است عامل‌های b را عوض کند. مثلاً $2 \mid 4$ ولی $2 \nmid 4+3$. هم‌چنین از رابطهٔ $a \mid bc$ نمی‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند. مثلاً $6 \mid 3 \times 4$ در حالی که $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$، واضح است ۳ و ۴ به کمک یکدیگر می‌توانند عدد ۶ را در خود جای دهند و بر آن بخش‌پذیر **شوند. به بیان ساده‌تر، نمی‌توان عامل‌های سمت راست رابطهٔ عاد کردن را کاهش داد.**

۹ اگر عدد a، عدد b را عاد کند، مقسوم‌علیه‌های a نیز عدد b را عاد می‌کنند. به بیان ساده‌تر می‌توان عامل‌های سمت چپ رابطهٔ عاد کردن را کاهش داد.

$a^n \mid b \Rightarrow a \mid b$ ‌ ‌ ‌ $ma \mid b \Rightarrow a \mid b$

نکته عامل‌های a را با تفریق کردن نمی‌توان کاهش داد، چون در حالت کلی تفریق کردن باعث می‌شود عامل‌های a تغییر کنند.

$a \mid b \not\Rightarrow a-c \mid b$

۱۰ طرفین عاد کردن می‌توانند به یک اندازه تقویت شوند و یا به یک اندازه عامل از دست بدهند.

$ma \mid mb \xRightarrow{m \neq 0} a \mid b$ ‌ ‌ $a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$ ‌ ‌ $a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b$ ‌ ‌ $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

توجه در رابطهٔ $ma \mid mb \xRightarrow{m \neq 0} a \mid b$ به مخالف صفر بودن m توجه کنید. هنگامی می‌توانید عددی را از طرفین بخش‌پذیری ساده کنید که مطمئن باشید آن عدد صفر نیست. مثلاً $3 \times 0 \mid 7 \times 0$ اما اگر صفر را از طرفین حذف کنیم $3 \nmid 7$.

؟ کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نادرست است؟

۱) $a \mid b \Rightarrow a \mid 2b$ ‌ ‌ ۲) $3a^2 \mid b \Rightarrow a \mid b$ ‌ ‌ ۳) $a \mid b \Rightarrow 2a \mid b$ ‌ ‌ ۴) $a^2 \mid b^2 \Rightarrow 2a \mid 2b$

✓ گزینهٔ ۳ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینهٔ «۱» عامل‌های b تقویت شده‌اند، در گزینهٔ «۲»، $3a^2$ عامل از دست داده و به a تبدیل شده و در گزینهٔ «۴» ابتدا a^2 و b^2 به یک مقدار عامل از دست داده‌اند، سپس به طرفین عامل ۲ اضافه شده است. بنابراین نتیجه‌گیری‌ها درست هستند، اما در گزینهٔ «۳» به a عامل اضافه شده است که نادرست می‌باشد. مثال نقض برای گزینهٔ «۳» به‌صورت مقابل است: $3 \mid 9 \not\Rightarrow 2 \times 3 \mid 9$

؟ کدام گزاره درست است؟

۱) $24ab \mid 18ac \Rightarrow 4b \mid 3c$ ‌ ‌ ۲) $a+b \mid a \Rightarrow b \mid a$ ‌ ‌ ۳) $a=bc \Rightarrow a \mid c$ ‌ ‌ ۴) $a \mid b+1 \Rightarrow a \mid b^3+1$

✓ گزینهٔ ۴ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در گزینهٔ «۱» طرفین رابطهٔ $24ab \mid 18ac$ بر $6a$ تقسیم شده است، اما چون نمی‌دانیم که a مخالف صفر است یا خیر، پس چنین کاری مجاز نیست.

در گزینهٔ «۲» برای آن‌که $a+b$ به b تبدیل شود باید از تفریق استفاده کنیم، در حالی که نمی‌توان این کار را کرد. البته می‌توان مثال نقض هم ارائه کرد مثلاً اگر $a=-3$ و $b=4$ باشد، رابطهٔ $a+b \mid a$ درست است ولی رابطهٔ $b \mid a$ نادرست می‌باشد.

در گزینهٔ «۳» هم از تساوی $a=bc$ می‌توان نتیجه گرفت که $c \mid a$ ولی $a \mid c$ لزوماً درست نیست. به مثال نقض هم دقت کنید، مثلاً اگر $a=6$، $b=2$ و $c=3$ باشند رابطهٔ $a=bc$ برقرار است در حالی که $6 \nmid 3$.

اما گزینهٔ «۴» درست است، زیرا می‌توان به $b+1$ عامل اضافه کرد. نگاه کنید: $a \mid b+1 \Rightarrow a \mid (b+1)(b^2-b+1) \Rightarrow a \mid b^3+1$

۱۱ طرفین دو رابطهٔ بخش‌پذیری را می‌توان درهم ضرب کرد.

$a | b, c | d \Rightarrow ac | bd$

توجه از روابط $a | b$ و $c | d$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a + c | b + d$. مثلاً می‌دانیم $4 | 12$ و $3 | 9$ ولی $4+3 \nmid 12+9$ در حالی که $3 \times 4 | 9 \times 12$.

۱۲ اگر عدد a، عدد b و عدد b نیز c را عاد کند، آن‌گاه a، عدد c را عاد می‌کند. به این خاصیت، خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن می‌گوییم.

$a | b, b | c \Rightarrow a | c$

؟ اگر a، b و c اعداد طبیعی باشند و $a | b$ و $b^2 | ac$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a | 2b^3$ ۲) $a | c$ ۳) $2b | ac$ ۴) $b | c$

گزینهٔ ۳ گزینهٔ «۱» درست است، زیرا با توجه به فرض سؤال که $a | b$، در گزینهٔ «۱» عامل‌های b تقویت شده و به $2b^3$ تبدیل شده است. از طرفی اگر طرفین رابطه‌های $a | b$ و $b^2 | ac$ را در هم ضرب کنیم به رابطهٔ $ab^2 | abc$ می‌رسیم. حال چون a و b طبیعی هستند، پس $ab \neq 0$ بوده و با تقسیم طرفین بر ab داریم:

$a | b, b^2 | ac \Rightarrow ab^2 | bac \xrightarrow{\div ab} b | c \Rightarrow$ گزینهٔ «۴» صحیح است.

حال با توجه به خاصیت تعدی در رابطهٔ بخش‌پذیری می‌توان گفت: $a | b, b | c \Rightarrow a | c \Rightarrow$ گزینهٔ «۲» صحیح است.

بنابراین گزینهٔ «۳» نادرست است. البته می‌توان دلیل نادرستی گزینهٔ «۳» را نیز بررسی کرد. ابتدا از $b^2 | ac$ نتیجه گرفته شده که $b | ac$ اما دوباره عامل‌های b تقویت شده و به $2b$ تبدیل شده که کار اشتباهی است.

نتیجه اگر در سؤال عاد کردن، اعداد a، b و ... اعداد طبیعی باشند، احتمالاً طراح می‌خواهد غیرمستقیم به ما بگوید که می‌توانید a، b و ... را از طرفین رابطهٔ عاد کردن ساده کنید، چون حتماً صفر نیستند.

۱۳ اگر a و b اعداد صحیح و n، m، m' و n' اعداد طبیعی باشند، داریم:

$a^n | b^m \xrightarrow{nm' \geq mn'} a^{n'} | b^{m'}$

یعنی زمانی با تغییر توان‌های دو طرف عاد کردن، نتیجه‌ای درست به‌دست می‌آید که ضرب توان‌های دور بزرگ‌تر و یا مساوی ضرب توان‌های نزدیک باشد.

nm'

mn'

$a^n | b^m \Rightarrow a^{n'} | b^{m'}$

توجه خاصیت‌های «$a | b \Rightarrow a^n | b^n$» و «$a^n | b^n \Rightarrow a | b$» با خاصیت ۱۳ قابل توجیه هستند.

؟ کدام نتیجه‌گیری به ازای همهٔ مقادیر صحیح a و b برقرار است؟

۱) $a^2 | b^3 \Rightarrow a^3 | b^4$ ۲) $a^3 | b^5 \Rightarrow a^2 | b^3$ ۳) $a^4 | b^3 \Rightarrow a^3 | b^2$ ۴) $a^3 | b^4 \Rightarrow a^2 | b^3$

گزینهٔ ۴ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) غ ق ق $a^2 | b^3 \xrightarrow{2 \times 4 \ngeq 3 \times 3} a^3 | b^4$

۲) غ ق ق $a^3 | b^5 \xrightarrow{3 \times 3 \ngeq 5 \times 2} a^2 | b^3$

۳) غ ق ق $a^4 | b^3 \xrightarrow{4 \times 2 \ngeq 3 \times 3} a^3 | b^2$

۴) ق ق $a^3 | b^4 \xrightarrow{3 \times 3 \geq 4 \times 2} a^2 | b^3$

۱۴ اگر a، b و c اعداد صحیح باشند، برای هر دو عدد صحیح m و n داریم:

$a | b, a | c \Rightarrow a | mb + nc$

توجه کنید وقتی $a | b$ یعنی $b = aq$ و هم‌چنین چون $a | c$ پس $c = aq'$. بنابراین داریم:

$mb + nc = maq + naq' = a(mq + nq') \Rightarrow a | mb + nc$

نتیجه به $mb + nc$ یک ترکیب خطی b و c می‌گویند. چون $b \pm c$ نیز یک ترکیب خطی b و c هستند، پس می‌توان گفت اگر عددی، دو عدد صحیح را عاد کند، مجموع و تفاضل دو عدد را نیز عاد می‌کند.

$a | b, a | c \Rightarrow a | b \pm c$

نتیجه اگر $a | b$ از آن‌جایی که $a | a$، پس می‌توان گفت:

$a | b \Rightarrow a | mb + na$

نکته خاصیت ۱۴ و نتایج آن تنها خاصیت در بخش‌پذیری است که می‌توان از جمع و تفریق استفاده کرد، آن هم در سمت راست رابطهٔ بخش‌پذیری. می‌دانیم جمع و تفریق خاصیت عدد را عوض می‌کنند پس هر جا نیاز بود که ماهیت سمت راست بخش‌پذیری عوض شود، حتماً پای این خاصیت در میان است. البته همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این خاصیت نیاز به دو بخش‌پذیری دارد. هر گاه یک بخش‌پذیری به‌صورت □|○ دیدید و احساس کردید باید از خاصیت ترکیب خطی بروید، بخش‌پذیری دوم را به صورت ○|○ تعریف کنید.

اگر $a-b\,|\,a$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $a\,|\,a-b$ ۲) $b\,|\,a-b$ ۳) $a\,|\,b$ ۴) $a-b\,|\,b$

گزینهٔ ۴ روش اول وقتی به گزینه‌ها نگاه می‌کنیم، متوجه می‌شویم ماهیت سمت راست رابطهٔ $a-b\,|\,a$ در گزینه‌ها تغییر کرده است، پس حتماً پای خاصیت ترکیب خطی و نتایج آن در میان است. از آن‌جایی که در صورت سؤال فقط یک بخش‌پذیری در اختیار داریم، دومی را خودمان می‌سازیم که $a-b\,|\,a-b$ می‌باشد. پس:

$$\begin{cases} a-b\,|\,a \\ a-b\,|\,a-b \end{cases} \xrightarrow{(-)} a-b\,|\,a-(a-b) \Rightarrow a-b\,|\,b$$

روش دوم می‌دانیم خاصیت $a\,|\,b, a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,mb+nc$ تنها خاصیت در بخش‌پذیری است که می‌توان از جمع و تفریق استفاده کرد، آن هم در سمت راست رابطهٔ عاد کردن. پس برای آن‌که گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» درست باشند، باید $a-b$ (سمت چپ رابطهٔ عاد کردن) با a یا b جمع و تفریق شود، در حالی که اصلاً چنین کاری مجاز نیست، پس حتماً گزینهٔ «۴» صحیح است.

روش سوم $a=3$ و $b=2$ مثال نقضی برای گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» می‌باشند.

به دست آوردن مقدار پارامتر در رابطهٔ عاد کردن: اگر مقدار یک پارامتر در سمت چپ رابطهٔ بخش‌پذیری خواسته شد، باید سعی کنیم به کمک خاصیت ترکیب خطی در سمت راست رابطهٔ بخش‌پذیری پارامترهای موجود را حذف کنیم و به یک عدد برسیم. در این لحظه عبارت پارامتری سمت چپ همان مقسوم‌علیه‌های عدد سمت راست بخش‌پذیری است.

اگر اعداد $7m+6$ و $6m+5$ بر عدد غیرصفر a بخش‌پذیر باشند، برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

گزینهٔ ۲ با توجه به صورت سؤال $a\,|\,7m+6$ و $a\,|\,6m+5$. چون مقدار a یعنی پارامتر موجود در سمت چپ بخش‌پذیری را می‌خواهیم، باید سعی کنیم در سمت راست، m را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a\,|\,7m+6 \xrightarrow{\times 6} a\,|\,42m+36 \\ a\,|\,6m+5 \xrightarrow{\times 7} a\,|\,42m+35 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a\,|\,(42m+36)-(42m+35) \Rightarrow a\,|\,1 \Rightarrow a=\pm 1$$

بنابراین برای a، دو جواب صحیح وجود دارد.

اگر $a\,|\,n-3$ و $a\,|\,5n^2-2n-26$، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

گزینهٔ ۲ چون مقادیر ممکن برای a یعنی پارامتر سمت چپ رابطه‌های بخش‌پذیری را می‌خواهیم، باید سعی کنیم در سمت راست عاد کردن، پارامتر n را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a\,|\,n-3 \xrightarrow{\times 5n} a\,|\,5n^2-15n \\ a\,|\,5n^2-2n-26 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a\,|\,-13n+26$$

حال به کمک رابطهٔ به‌دست آمده و $a\,|\,n-3$ داریم:

$$\begin{cases} a\,|\,-13n+26 \\ a\,|\,n-3 \xrightarrow{\times 13} a\,|\,13n-39 \end{cases} \xrightarrow{(+)} a\,|\,-13 \Rightarrow a=1 \text{ یا } 13$$

نکته وقتی در دو رابطهٔ عاد کردن، دنبال مقدار پارامتر سمت چپ عاد کردن هستیم و حداقل یکی از عبارت‌های پارامتری سمت راست از درجهٔ اول است، در واقع عددی که در نهایت در سمت راست، بعد از حذف پارامتر تولید می‌شود، باقی‌ماندهٔ تقسیم یکی از عبارت‌های سمت راست بر عبارت درجه اول سمت راست عاد کردن است، پس می‌توان از مطالبی که در حسابان خوانده‌ایم استفاده کنیم:

$$\begin{cases} n\,|\,ax+b \\ n\,|\,f(x) \end{cases} \Rightarrow n\,|\,\underbrace{f(-\tfrac{b}{a})}_{\text{باقی‌ماندهٔ تقسیم } f(x) \text{ بر } ax+b}$$

فقط اگر $f(-\frac{b}{a})$ عددی گویا و غیرصحیح شد (عدد کسری شد)، ابتدا تا جایی که امکان دارد کسر را ساده کرده، سپس از مخرج آن صرف‌نظر می‌کنیم.
دقت کنید مخرجی که تولید می‌شود به خاطر تفاوت حوزهٔ اعداد صحیح در ریاضیات گسسته و اعداد حقیقی در حسابان است. مثلاً حل دو تست آخر را با این روش ببینید:

$$\begin{cases} a \mid 7m+6 \\ a \mid 6m+5 \end{cases} \Rightarrow a \mid 6(-\frac{6}{7})+5 \Rightarrow a \mid -\frac{1}{7} \Rightarrow a \mid -1 \Rightarrow a=\pm 1$$

توجه اگر دو عبارت سمت راست عاد کردن‌ها درجه اول بودند، فرقی نمی‌کند ریشهٔ کدام یک را در دیگری قرار دهید:

$$\begin{cases} a \mid 7m+6 \\ a \mid 6m+5 \end{cases} \Rightarrow a \mid 7(-\frac{5}{6})+6 \Rightarrow a \mid \frac{1}{6} \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

حال حل تست بعدی را با این روش ببینید:

$$\begin{cases} a \mid n-3 \\ a \mid 5n^2-2n-26 \end{cases} \Rightarrow a \mid 5(3)^2-2(3)-26 \Rightarrow a \mid 13 \Rightarrow a=1 \text{ یا } 13$$

اگر $3n+2 \mid n^2+1$ ، برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ ۲ **روش اول** باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} 3n+2 \mid n^2+1 \Rightarrow 3n+2 \mid 3n^2+3 \\ 3n+2 \mid 3n+2 \xrightarrow{\times n} 3n+2 \mid 3n^2+2n \end{cases} \Rightarrow 3n+2 \mid (3n^2+2n)-(3n^2+3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2 \mid 2n-3 \xrightarrow{\times 3} 3n+2 \mid 6n-9 \\ 3n+2 \mid 3n+2 \xrightarrow{\times 2} 3n+2 \mid 6n+4 \end{cases} \Rightarrow 3n+2 \mid (6n+4)-(6n-9) \Rightarrow 3n+2 \mid 13 \Rightarrow 3n+2=\pm 1,\pm 13 \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n=-1,-5$$

نکته اگر $ax+b \mid f(x)$ و ما مقدار x را بخواهیم، به جای استفاده از دو رابطهٔ $ax+b \mid ax+b$ و $ax+b \mid f(x)$ ، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{ax+b \mid f(x) \Rightarrow ax+b \mid f(-\frac{b}{a})}$$

توجه کنید که اگر $f(-\frac{b}{a})$ کسری شد، ابتدا تا جایی که امکان دارد ساده کنید، سپس از مخرج آن صرف‌نظر کنید.

روش دوم با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$3n+2 \mid n^2+1 \xrightarrow{n=-\frac{2}{3}} 3n+2 \mid (-\frac{2}{3})^2+1 \Rightarrow 3n+2 \mid \frac{13}{9} \Rightarrow 3n+2 \mid 13 \Rightarrow 3n+2=\pm 1,\pm 13 \Rightarrow n=-1,-5$$

نکته گاهی ممکن است مسائل بخش‌پذیری را در قالب معادلهٔ یک منحنی مطرح کنند و بپرسند منحنی از چند نقطه با مختصات صحیح و یا طبیعی یا ... می‌گذرد. در این موارد معادلهٔ منحنی را به فرم $y=\frac{\square}{\bigcirc}$ درمی‌آوریم و سپس از بخش‌پذیری صورت بر مخرج، مقادیر ممکن را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید برای آن‌که y صحیح شود باید صورت کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد.

منحنی $4x^2-3xy-2y+1=0$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۶

گزینهٔ ۲ **روش اول** ابتدا منحنی را به فرم $y=\frac{\square}{\bigcirc}$ درمی‌آوریم و سپس از بخش‌پذیری استفاده می‌کنیم:

$$4x^2+1=3xy+2y \Rightarrow y=\frac{4x^2+1}{3x+2} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2 \mid 4x^2+1 \\ 3x+2 \mid 3x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2 \mid 3(4x^2+1)-4x(3x+2) \Rightarrow 3x+2 \mid -8x+3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2 \mid -8x+3 \\ 3x+2 \mid 3x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2 \mid 3(-8x+3)+8(3x+2) \Rightarrow 3x+2 \mid 25 \Rightarrow 3x+2=\pm 1,\pm 5 \pm 25 \Rightarrow x=-1,1,-9$$

روش دوم می‌توانیم به کمک ریشه‌گذاری، رابطهٔ بخش‌پذیری را حل کنیم:

$$3x+2 \mid 4x^2+1 \xrightarrow{x=-\frac{2}{3}} 3x+2 \mid 4(-\frac{2}{3})^2+1 \Rightarrow 3x+2 \mid \frac{25}{\cancel{9}} \Rightarrow \cdots$$

عدد اول و عاد کردن

عدد اول: هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است که به‌صورت $p = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ می‌باشد.

نکته با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول و a یک عدد طبیعی باشد، داریم: $a \mid p \Rightarrow a = 1$ یا $a = p$

به ازای بعضی از مقادیر طبیعی n، اگر $\alpha \mid 13n+3$ و $\alpha \mid 5n+4$ و $\alpha \neq 1$ باشد، مجموع ارقام عدد α کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

گزینهٔ ۲ کافی است پارامتر n را یا به کمک ترکیب خطی یا به کمک ریشه‌گذاری حذف کنیم:

$$\begin{cases} \alpha \mid 13n+3 \Rightarrow \alpha \mid 65n+15 \\ \alpha \mid 5n+4 \Rightarrow \alpha \mid 65n+52 \end{cases} \xRightarrow{(-)} \alpha \mid 37 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ یا } \alpha = 37 \xRightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 37 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 10$$

به کمک ریشه‌گذاری را نیز ببینید:

$$\alpha \mid 5\left(-\frac{3}{13}\right)+4 \Rightarrow \alpha \mid \frac{37}{\cancel{13}} \Rightarrow \alpha \mid 37 \Rightarrow \cdots$$

درس ۲ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

عاد کردن

۴۲. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) $ac \mid bd$ ۲) $a \mid cd$ ۳) $b \mid ad$ ۴) $c \mid ab$

۴۳. مجموع مقادیر صحیح x که در رابطهٔ $3x+1 \mid 34$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۴. اگر $3n^2 - 7n + 2 \mid 0$، آن‌گاه برای n چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۵. منحنی $y = \frac{14}{2x+3}$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۶. کدام گزارهٔ شرطی زیر درست است؟

۱) $a \mid b \Rightarrow ac \mid b$ ۲) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ ۳) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ ۴) $ac \mid b \Rightarrow a \mid b^3$

۴۷. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a \mid b \Rightarrow a+c \mid b+c$ ۲) $a \mid b \Rightarrow a \mid b+c$ ۳) $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$ ۴) $ac \mid b \Rightarrow a \mid b$

۴۸. کدام نتیجه‌گیری صحیح نیست؟

۱) $b^3 + c^3 \mid a \Rightarrow b+c \mid a$ ۲) $a \mid a-b \Rightarrow a \mid a+b$

۳) $a^2 - b^2 \mid a \Rightarrow a+b \mid b$ ۴) $a^2 \mid a+b \Rightarrow a^2 \mid a-b$

۴۹. اگر $a \mid b+c$ و $a \mid 2c$، کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح است؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a \mid c$ ۳) $a \mid 2b$ ۴) $2a \mid b$

۵۰. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ یا $a \mid c$ ۲) $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b, a \mid c$

۳) $ab \mid a^2 - a \Rightarrow b \mid a-1$ ۴) $a \mid c-b \Leftrightarrow a \mid b-c$

۵۱. اگر $a \mid a+2b+2c$ و $b+c \mid c$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a \mid c$ ۲) $a \mid c^2$ ۳) $a \mid 2c^2$ ۴) $c \mid 2b$

۵۲. اگر a، b و c اعداد صحیح باشند، به‌طوری که $a \mid b+c$ و $a \mid bc$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a^{۳} \mid c^{۸}$ ۲) $a^{۲} \mid b^{۴}$ ۳) $b \mid c$ ۴) $a \mid b^{۲}+c^{۲}$

۵۳. اگر a، b و c اعداد صحیح باشند، به‌طوری که $b \mid a+c$ و $a^{۲}-c^{۲} \mid b+c$، کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) $c \mid a+b$ ۲) $a \mid b$ ۳) $b \mid c$ ۴) $a-c \mid a-b$

۵۴. اگر $a^{۲}-b^{۲} \mid a$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a^{۲}-b^{۲} \mid ۲b$ ۲) $a-b \mid b$ ۳) $a+b \mid ۴a+۳b$ ۴) $a-b \mid ۳b-۲a$

۵۵. اگر $a^{۲}-b^{۲} \mid a$ و $a^{۲} \mid b+c$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a-b \mid b+c$ ۲) $a \mid b+c$ ۳) $a^{۲}-b^{۲} \mid b$ ۴) $a-b \mid a+c$

۵۶. مجموع دو عدد صحیح بر حاصل‌ضرب آن‌ها بخش‌پذیر است. کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح است؟

۱) دو عدد صحیح برابرند. ۲) مجموع آن‌ها عددی فرد است.

۳) هر دو عدد صحیح زوج هستند. ۴) قدرمطلق دو عدد صحیح برابرند.

۵۷. برای هر سه عدد طبیعی a، b و c، اگر $abc \mid ab+ac$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $b=c$ ۲) $b \mid c^{۲}$ ۳) $a \mid b+c$ ۴) $c^{۲} \mid b^{۵}$

۵۸. اگر $a^{۳} \mid b^{۴}$، کدام نتیجه‌گیری به ازای همهٔ مقادیر صحیح a و b درست است؟

۱) $a^{۷} \mid b^{۸}$ ۲) $a^{۴} \mid b^{۵}$ ۳) $a^{۲} \mid b^{۳}$ ۴) $a \mid b$

۵۹. از رابطهٔ $a^{۳} \mid b^{۵}$ می‌توان نتیجه گرفت که $a^{۴} \mid b^{n}$، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۰. اگر $a^{۲} \mid b^{۳}$ و $b^{۲} \mid c^{۳}$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a^{۳} \mid c^{۸}$ ۲) $a^{۲} \mid c^{۵}$ ۳) $a^{۵} \mid c^{۱۰}$ ۴) $a \mid c^{۳}$

۶۱. اگر $n \mid a-۳$ و $n \mid b+۷$، آن‌گاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره بر n بخش‌پذیر است؟

۱) $ab+۱۴$ ۲) $ab-۱۱$ ۳) $ab+۲۱$ ۴) $ab-۱۳$

۶۲. اگر $۱۳ \mid a+b-k$ و $۱۳ \mid ۷a+۲۰b+۵$، آن‌گاه k کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶۳. اگر $۳a+۲b \mid ۴a+۷b$، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $۳a+۲b \mid ۲۵b$ ۲) $۳a+۲b \mid ۲۴b$ ۳) $۳a+۲b \mid ۱۹b$ ۴) $۳a+۲b \mid ۳۹b$

۶۴. اگر $۷ \mid ۵a+۳b$، به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $۷ \mid ۴a^{۲}+mab+b^{۲}$ برقرار است؟

۱) -۵ ۲) -۱۵ ۳) -۳۰ ۴) -۲۰

۶۵. اگر $۵ \mid ۴k+۱$ و $۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۲۸k+m$، آن‌گاه m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۶. اگر عدد طبیعی به‌صورت $۲n+۱$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ عدد طبیعی به‌صورت $۱۴n^{۲}+۱۹n+۶$ بر ۲۵ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۷. اگر $۵ \mid ۳n-۱$، آن‌گاه عدد $۲۴n^{۲}+bn+c$ بر ۲۵ بخش‌پذیر است. مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۸. اگر عددی صحیح مانند k وجود داشته باشد که $a \mid k^{۲}+k-۱$ و $a \mid ۲k^{۲}-k+۳$، آن‌گاه برای a چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶۹. اگر $a \mid ۵n^{۲}-۲n+۱$ و $a \mid n-۳$، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۷۰. عدد طبیعی a دو عدد $۹n+۷$ و $۷n+۶$ را عاد می‌کند. چند جواب برای a وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

۷۱. اگر $\alpha | 7n+3$ و $\alpha | 8n+3$ و $\alpha \neq 1$، برای α چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۷۲. به ازای هر عدد طبیعی n، اعداد $9n+5$ و $7n-3$ بر چند عدد طبیعی بخش‌پذیرند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۳. به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $m | n-4$ و $m | 8n-1$ و $m \neq 1$، آن‌گاه تعداد اعداد طبیعی و دورقمی m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۴. به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، عبارت‌های $n-5$ و $9n-4$ بر یک عدد طبیعی دورقمی بخش‌پذیرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵. به ازای چند عدد دورقمی b، فقط یک عدد طبیعی a در روابط $a | b-4$ و $a | 7b+1$ صدق می‌کند؟

۱) ۸۷ ۲) ۸۸ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۷۶. به ازای اعداد طبیعی $n \le n_0$ روابط $m | n+3$ و $m | 9n-2$ فقط برای یک مقدار m برقرار است. مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۲۵ ۳) ۳۵۱ ۴) ۳۷۸

۷۷. به ازای چند عدد صحیح n، عبارت n^3-3 بر $n-3$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۷۸. چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع هموگرافیک $y=\frac{x+3}{2x-1}$ قرار دارد؟ (آزمون مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹. منحنی $y=\frac{5x+3}{x-3}$ از چند نقطه با طول و عرض صحیح در ربع اول دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۴

۸۰. منحنی به معادلهٔ $2x^2-4y-3xy+1=0$ از چند نقطه با طول و عرض صحیح می‌گذرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱. منحنی $(8-y)x-2y=1$ از چند نقطه با طول و عرض صحیح می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۲. دنبالهٔ $a_n=\frac{n^2+1}{3n+4}$ مفروض است. اگر جملهٔ m اُم دنباله، عددی صحیح باشد، $m+a_m$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۸۳. به ازای چند مقدار صحیح n، رابطهٔ $n^2-5n+3 | 3n-2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۸۴. با قرار دادن عدد سه رقمی ۳$(\overline{a\circ a})$ بین دو رقم مشابه a، عدد جدید ساخته می شود. حداکثر چند عدد اول می تواند a را بشمارد؟ (نوبت دوم ۱۴۰۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵. اگر عدد دورقمی $\overline{aa}$ را بین ارقام a و 2a قرار دهید عدد جدید ساخته می‌شود. حداکثر چند عدد طبیعی می‌تواند a را عاد کند؟ (خارج ۱۴۰۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

یادداشت:

۳۵ ۲

به‌ازای $x=۲$ و $y=۴$ حکم $(\frac{x+y}{۲})^۲ \le xy$ برقرار نیست؛ زیرا:

$x=۲\,,\, y=۴ \Rightarrow (\frac{۲+۴}{۲})^۲ \le ۲\times ۴ \Rightarrow ۹ \le ۸$ ×

توجه کنید درستی سه حکم دیگر را می‌توان به کمک اثبات بازگشتی نشان داد:

۱ $x^۲+y^۲+۱ \ge xy+x+y \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲ \ge ۲xy+۲x+۲y$

$\Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱ \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲ \ge ۰$

۳ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge ۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲ \ge ۲xy \Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲ \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲ \ge ۰$

۴ $x^۲+y^۲ \ge ۲(x+y-۱) \Leftrightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱ \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲ \ge ۰$

۳۶ ۴

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به روش برهان خلف، اما گزینهٔ ۴ به کمک اثبات بازگشتی ثابت می‌شود.

۳۷ ۴

عدد ۱ مثال نقض گزینهٔ ۱ است، زیرا $۱^۲$ از ۱ بزرگ‌تر نیست. برای گزینهٔ ۲ مثال‌های نقض زیادی وجود دارد، مثلاً عکس عدد $\frac{۱}{۲}$ عدد ۲ است که ۲ کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ نیست. در گزینهٔ ۳ هم عدد ۱- مثال نقض است، زیرا $-۱+\frac{۱}{-۱}=-۲$ که بزرگ‌تر از ۲ نیست. اما گزینهٔ ۴ را به روش بازگشتی می‌توان ثابت کرد. نگاه کنید:

$a^۲+b^۲ \ge ۲ab \Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab \ge ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲ \ge ۰$

۳۸ ۳

اگر a فرد باشد، داریم:

$a=۲k+۱ \Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲ \Rightarrow a^۲=۴k^۲+۴k+۱$

$\Rightarrow a^۲=\underbrace{۴k(k+۱)}_{۲q}+۱ \Rightarrow a^۲=۸q+۱ \Rightarrow a^۲-۱=۸q$

همان‌طور که می‌بینید روش استدلال، اثبات مستقیم است.

۳۹ ۱

برای اثبات درستی حکم «مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویا است.» از اثبات مستقیم استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}, b,d \ne ۰ \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

می‌دانیم ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح و جمع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است، پس:

$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{m}{n}$

۴۰ ۲

این حکم همواره درست نیست، مثلاً اگر $x=\sqrt{۳}$ و $y=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ باشد، $xy=۲$ می‌شود که عددی گویا است، بنابراین برای نشان دادن نادرستی حکم از مثال نقض استفاده می‌شود.

۴۱ ۳

به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$x^۴+y^۴ \ge xy(x^۲+y^۲) \Leftrightarrow x^۴+y^۴ \ge x^۳y+xy^۳$

$\Leftrightarrow x^۴-xy^۳+y^۴-x^۳y \ge ۰ \Rightarrow x(x^۳-y^۳)+y(y^۳-x^۳) \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x^۳-y^۳)(x-y) \ge ۰ \Leftrightarrow (x-y)(x^۲+xy+y^۲)(x-y) \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲(x^۲+xy+y^۲) \ge ۰ \Leftrightarrow x^۲+xy+y^۲ \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x+\frac{y}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}y^۲ \ge ۰$ همواره درست است.

۴۲ ۳

از $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نتیجه می‌گیریم $ad=bc$ است. با توجه به تعریف عاد کردن که به‌صورت « $a|b \Leftrightarrow b=aq$ » می‌باشد، گزارهٔ $b|ad$ صحیح است. زیرا:

نقش q را بازی می‌کند.

$ad=bc \Rightarrow b|ad$

۴۳ ۲

باید $۳x+۱$ برابر ±۱ یا ±۲ یا ±۱۷ یا ±۳۴ باشد، پس:

$۳x+۱=۱ \Rightarrow x=۰$

$۳x+۱=-۱ \Rightarrow$ غیرصحیح

$۳x+۱=۲ \Rightarrow$ غیرصحیح

$۳x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۱$

$۳x+۱=۱۷ \Rightarrow$ غیرصحیح

$۳x+۱=-۱۷ \Rightarrow x=-۶$

$۳x+۱=۳۴ \Rightarrow x=۱۱$

$۳x+۱=-۳۴ \Rightarrow$ غیرصحیح

بنابراین مجموع مقادیر صحیح x برابر $۰+(-۱)+(-۶)+۱۱=۴$ می‌باشد.

۴۴ ۳

می‌دانیم صفر فقط مقسوم‌علیه صفر است، پس:

$۳n^۲-۷n+۲=۰ \Rightarrow (۳n-۱)(n-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=\frac{۱}{۳} & \text{غ‌ق‌ق} \\ n=۲ \end{cases}$

۴۵ ۳

برای آن‌که کسر $\frac{۱۴}{۲x+۳}$ تبدیل به عدد صحیح شود، باید مخرج کسر، صورت آن را عاد کند، یعنی:

$۲x+۳ | ۱۴ \Rightarrow ۲x+۳=\pm۱,\pm۲,\pm۷,\pm۱۴$

از آن‌جایی که $۲x+۳$ همواره فرد است، پس:

$\begin{cases} ۲x+۳=\pm۷ \Rightarrow x=۲,-۵ \\ ۲x+۳=\pm۱ \Rightarrow x=-۱,-۲ \end{cases}$

⇐ منحنی از ۴ نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد.

۴۶ ۴

در رابطهٔ عاد کردن $ac|b$ ابتدا از عامل‌های ac کم می‌کنیم و سپس عامل‌های b را تقویت می‌کنیم:

$ac|b \Rightarrow a|b \Rightarrow a|b^۳$

اما دلیل نادرستی گزینه‌های دیگر را ببینید:

در گزینهٔ ۱ در رابطهٔ $a|b$، عامل‌های a تقویت شده است و در گزینهٔ ۲ و در رابطهٔ $a|bc$ عامل‌های bc کم شده و به b تبدیل شده است. در گزینهٔ ۳ هم اگر $b \neq ۰$ باشد، برقرار است.

۴۷ — **۴**

چون $b|ac$، پس می‌توان عامل‌های ac را کاهش داد و گفت $a|b$.

۴۸ — **۴**

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $b^۳+c^۳|a \Rightarrow (b+c)(b^۲-bc+c^۲)|a \Rightarrow b+c|a$

۲ $\begin{cases} a|a-b \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|a-(a-b) \Rightarrow a|b$

$\begin{cases} a|b \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|a+b$

۳ $a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow a+b|a$

$\begin{cases} a+b|a \\ a+b|a+b \end{cases} \Rightarrow a+b|(a+b)-a \Rightarrow a+b|b$

بنابراین گزینهٔ ۴ نادرست است. مثال نقض برای گزینهٔ ۴، $a=۳$ و $b=۱۵$ است.

۴۹ — **۳**

در گزینه‌ها در سمت راست b یا c وجود دارد، پس باید از دو رابطه، b یا c را حذف کنیم:

$\begin{cases} a|b+c \xrightarrow{\times ۲} a|۲b+۲c \Rightarrow a|(۲b+۲c)-۲c \Rightarrow a|۲b \\ a|۲c \end{cases}$

دقت کنید که در گزینهٔ ۲ سمت راست رابطهٔ $a|۲c$ عامل a از دست داده است، پس نادرست می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $a|۲b$، گزینهٔ ۱ نادرست است چون سمت راست عامل از دست داده است. هم‌چنین گزینهٔ ۴ نیز نادرست است، زیرا هم سمت راست عامل از دست داده و هم سمت چپ تقویت شده است.

۵۰ — **۴**

در گزینهٔ ۱، bc، عامل از دست داده است. برای گزینهٔ ۲ می‌توان مثال $۳|۵+۱ \not\Rightarrow ۳|۵, ۳|۱$ را به عنوان مثال نقض ارائه کرد. در گزینهٔ ۳ طرفین عاد کردن بر a تقسیم شده است، اما نمی‌دانیم که a حتماً صفر نیست. اما در گزینهٔ ۴، $c-b$ در -۱ ضرب شده است و می‌دانیم علامت در بخش‌پذیری تأثیری ندارد.

۵۱ — **۳**

به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$\begin{cases} a|a+۲b+۲c \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|(a+۲b+۲c)-a \Rightarrow a|۲b+۲c$

از طرفی چون $b+c|c$ می‌توان نتیجه گرفت $۲b+۲c|۲c$ بنابراین به کمک خاصیت تعدی داریم:

$\begin{cases} a|۲b+۲c \\ ۲b+۲c|۲c \end{cases} \Rightarrow a|۲c \Rightarrow a|۲c^۲$

۵۲ — **۳**

روش اول

با توجه به گزینه‌ها باید به کمک $a|b+c$ و $a|bc$، به روابطی دست پیدا کنیم که فقط b یا فقط c وجود داشته باشد:

$a|b+c \xrightarrow{\times c} \begin{cases} a|bc+c^۲ \\ a|bc \end{cases} \Rightarrow a|c^۲$

$a|b+c \xrightarrow{\times b} \begin{cases} a|b^۲+bc \\ a|bc \end{cases} \Rightarrow a|b^۲$

حالا تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a|c^۲ \xrightarrow{۱\times۸ \geq ۲\times۳} a^۳|c^۸$

۲ $a|b^۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲|b^۴$ (البته می‌توانستیم گزینهٔ ۱ بررسی کنیم.)

۴ $a|b^۲, a|c^۲ \Rightarrow a|b^۲+c^۲$

روش دوم می‌توانستیم فرض کنیم $a=۲$، $b=۴$ و $c=۶$ است. با این مقادیر گزینهٔ ۳ نادرست است.

۵۳ — **۳**

به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$a^۲-c^۲|b+c \Rightarrow (a-c)(a+c)|b+c \Rightarrow \begin{cases} a+c|b+c \\ b|a+c \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{تعدی}} \begin{cases} b|b+c \\ b|b \end{cases} \Rightarrow b|(b+c)-b \Rightarrow b|c$

۵۴ — **۱**

با توجه به ویژگی‌های عاد کردن درستی گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ را نشان می‌دهیم:

۲ $a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow \begin{cases} a-b|a \\ a-b|a-b \end{cases}$

$\xrightarrow{(-)} a-b|a-(a-b) \Rightarrow a-b|b$ ✓

۳ $a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow \begin{cases} a+b|a \\ a+b|۳a+۳b \end{cases}$

$\xrightarrow{(+)} a+b|۴a+۳b$

۴ $a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow \begin{cases} a-b|a \\ a-b|۳a-۳b \end{cases}$

$\xrightarrow{(-)} a-b|a-(۳a-۳b) \Rightarrow a-b|۳b-۲a$

۵۵ — **۳**

با توجه به ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

۱ $\begin{cases} a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow a-b|a \\ a^۲|b+c \Rightarrow a|b+c \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{تعدی}} a-b|b+c$

۲ $a^۲|b+c \Rightarrow a|b+c$

۴ $\begin{cases} a^۲-b^۲|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow a-b|a \\ a^۲|b+c \Rightarrow a|b+c \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{تعدی}} a-b|b+c$

$\begin{cases} a-b|b+c \\ a-b|a-b \end{cases} \xrightarrow{(+)} a-b|b+c+a-b \Rightarrow a-b|a+c$

اما درستی گزینهٔ ۳ را نمی‌توان به کمک داده‌های سؤال نشان داد.

۵۶ **۴**

صورت سؤال به زبان ریاضی می‌شود: $ab \mid a+b$، بنابراین داریم:

$$ab \mid a+b \Rightarrow \begin{cases} a \mid a+b \Rightarrow a \mid b \\ b \mid a+b \Rightarrow b \mid a \end{cases} \Rightarrow a=\pm b \Rightarrow |a|=|b|$$

۵۷ **۳**

چون a عدد طبیعی است، پس حتماً صفر نمی‌باشد و می‌توانیم طرفین رابطهٔ داده‌شده را بر a تقسیم کنیم:

۱ $abc \mid ab+ac \Rightarrow bc \mid b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \mid b+c \Rightarrow b \mid c \\ c \mid b+c \Rightarrow c \mid b \end{cases} \xrightarrow{\text{طبیعی‌اند } c,b} b=c$$

۴ $c \mid b \xrightarrow{1\times 5 \geq 1\times 2} c^2 \mid b^5$ ۲ $b \mid c \xrightarrow{1\times 2 \geq 1\times 1} b \mid c^2$

اما با توجه به داده‌های سؤال نمی‌توان گزینهٔ ۳ را ثابت کرد.

۵۸ **۳**

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^3 \mid b^4 \xrightarrow{3\times 8 \ngeq 4\times 7} a^7 \mid b^8$ ✗

۲ $a^3 \mid b^4 \xrightarrow{3\times 5 \ngeq 4\times 4} a^4 \mid b^5$ ✗

۳ $a^3 \mid b^4 \xrightarrow{3\times 3 \geq 2\times 4} a^2 \mid b^3$ ✓

بنابراین نیازی به بررسی گزینهٔ ۴ نیست.

۵۹ **۲**

با توجه به ویژگی عاد کردن داریم:

$$a^3 \mid b^5 \xrightarrow{3n \geq 5\times 4} a^4 \mid b^n \Rightarrow 3n \geq 20 \Rightarrow n_{min}=7$$

۶۰ **۳**

در گزینه‌ها رابطه‌های بین a و c داده شده است، پس ابتدا به کمک $a^2 \mid b^3$ و $b^2 \mid c^3$ یک رابطهٔ عاد کردن بین a و c به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{(\ )^2} a^4 \mid b^6 \\ b^2 \mid c^3 \xrightarrow{(\ )^3} b^6 \mid c^9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} a^4 \mid c^9$$

حالا به کمک $a^4 \mid c^9$ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^4 \mid c^9 \xrightarrow{4\times 8 \geq 9\times 3} a^3 \mid c^8$ ✓

۲ $a^4 \mid c^9 \xrightarrow{4\times 5 \geq 2\times 9} a^2 \mid c^5$ ✓

۳ $a^4 \mid c^9 \xrightarrow{4\times 10 \ngeq 9\times 5} a^5 \mid c^{10}$ ✗

بنابراین نیازی به بررسی گزینهٔ ۴ نیست.

۶۱ **۳**

با توجه به گزینه‌ها باید در سمت راست، ab ایجاد کنیم، پس به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$$\begin{cases} n \mid a-3 \xrightarrow{\times b} n \mid ab-3b \\ n \mid b+7 \xrightarrow{\times 3} n \mid 3b+21 \end{cases} \Rightarrow n \mid ab+21$$

۶۲ **۳**

سعی می‌کنیم a و b را از سمت راست بخش‌پذیری‌ها حذف کنیم.

$$\begin{cases} 13 \mid 7a+20b+5 \\ 13 \mid a+b-k \Rightarrow 13 \mid 7a+7b-7k \end{cases}$$

می‌دانیم $13 \mid 13b$، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \begin{matrix} 13 \mid 13b+5+7k \\ 13 \mid 13b \end{matrix} \Rightarrow 13 \mid 5+7k \Rightarrow k=3$$

۶۳ **۴**

با توجه به گزینه‌ها سعی می‌کنیم در سمت راست، a را حذف کنیم، می‌دانیم $3a+5b \mid 3a+5b$، پس:

$$\begin{cases} 3a+2b \mid 4a+7b \xrightarrow{\times 3} 3a+2b \mid 12a+21b \\ 3a+2b \mid 3a+2b \xrightarrow{\times 4} 3a+2b \mid 12a+8b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a+2b \mid (12a+21b)-(12a+8b) \Rightarrow 3a+2b \mid 13b$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3a+2b \mid 39b$$

۶۴ **۳**

روش اول با توجه به رابطهٔ $7 \mid 4a^2+mab+b^2$ سعی می‌کنیم در سمت راست، $4a^2$ و b^2 ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} 7 \mid 5a+3b \\ 7 \mid 21a^2 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid 5a(5a+3b)-21a^2 \Rightarrow 7 \mid 4a^2+15ab$$

$$\begin{cases} 7 \mid 5a+3b \\ 7 \mid 28b^2 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid 28b^2-9b(5a+3b) \Rightarrow 7 \mid b^2-45ab$$

حال داریم:

$$\begin{cases} 7 \mid 4a^2+15ab \\ 7 \mid b^2-45ab \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (4a^2+15ab)+(b^2-45ab)$$

$$\Rightarrow 7 \mid 4a^2-30ab+b^2 \Rightarrow m=-30$$

روش دوم اگر $a=1$ و $b=10$ باشند، رابطهٔ $7 \mid 5a+3b$ برقرار است، پس باید رابطهٔ $7 \mid 4a^2+mab+b^2$ نیز به‌ازای $a=1$ و $b=10$ برقرار باشد:

$$7 \mid 4+m(1)(10)+100 \Rightarrow 7 \mid 104+10m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=-30$$

۶۵ **۱**

روش اول ابتدا طرفین رابطهٔ $5 \mid 4k+1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$5 \mid 4k+1 \Rightarrow 25 \mid (4k+1)^2 \Rightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1$$

با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده و $25 \mid 16k^2+28k+m$، داریم:

$$\begin{cases} 25 \mid 16k^2+8k+1 \\ 25 \mid 16k^2+28k+m \end{cases} \xrightarrow{(-)} 25 \mid 20k+m-1$$

$$\xrightarrow{5 \mid 25} 5 \mid 20k+m-1$$

حال کافی است که از دو رابطهٔ $5 \mid 4k+1$ و $5 \mid 20k+m-1$، عدد k را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} 5 \mid 4k+1 \\ 5 \mid 20k+m-1 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid (20k+m-1)-5(4k+1)$$

$$\Rightarrow 5 \mid m-6 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=6$$

روش دوم اگر $k=1$ باشد، رابطهٔ $5 \mid 4k+1$ برقرار است. پس به‌ازای $k=1$ نیز باید رابطهٔ $25 \mid 16k^2+28k+m$ برقرار باشد، پس:

$$25 \mid 16+28+m \Rightarrow 25 \mid 44+m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=6$$

۶۶ — **۴**

روش اول با توجه به صورت سؤال $5 | 2n+1$ ، حال سعی می‌کنیم سمت راست عاد کردن را شبیه $14n^2+19n+6$ کنیم:

$$\begin{cases}5|2n+1 \Rightarrow 25|4n^2+4n+1\\ 5|2n+1 \Rightarrow 25|10n+5 \Rightarrow 25|10n^2+5n\end{cases}$$

$$\Rightarrow 25|(4n^2+4n+1)+(10n+5)+(10n^2+5n)$$

$$\Rightarrow 25|14n^2+19n+6$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $14n^2+19n+6$ برابر صفر است.

روش دوم به‌ازای $n=2$ رابطهٔ $5|2n+1$ برقرار است. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $14n^2+19n+6$ بر ۲۵ را به‌ازای $n=2$ به‌دست می‌آوریم. $14n^2+19n+6$ به‌ازای $n=2$ برابر ۱۰۰ می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲۵، صفر است.

۶۷ — **۴**

به کمک ویژگی‌های عادکردن، داریم:

$$\begin{cases}5|3n-1 \Rightarrow 25|9n^2-6n+1\\ 5|3n-1 \Rightarrow 25|15n-5\\ \Rightarrow 25|15n-5 \Rightarrow 25|15n^2-5n\end{cases}$$

$$\Rightarrow 25|(9n^2-6n+1)+(15n-5)+(15n^2-5n)$$

$$\Rightarrow 25|24n^2+4n-4 \Rightarrow b=4\ ,\ c=-4 \Rightarrow b+c=0$$

۶۸ — **۱**

باید سعی کنیم در سمت راست، k را حذف کنیم:

$$\begin{cases}a|2k^2-k+3\\ a|k^2+k-1\end{cases} \Rightarrow a|(2k^2-k+3)-2(k^2+k-1)$$

$$\Rightarrow a|-3k+5 \quad (*)$$

حال اگر بتوانیم در سمت راست، یک عبارت درجه اول دیگر برحسب k ایجاد کنیم خیلی خوب می‌شود:

$$\begin{cases}a|-3k+5\\ a|k^2+k-1\end{cases} \Rightarrow a|k(-3k+5)+3(k^2+k-1)$$

$$\Rightarrow a|8k-3 \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases}a|-3k+5\\ a|8k-3\end{cases} \Rightarrow a|8(-3k+5)+3(8k-3) \Rightarrow a|31$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } a=31$$

۶۹ — **۲**

روش اول باید سعی کنیم در سمت راست، n را حذف کنیم:

$$\begin{cases}a|5n^2-2n+1\\ a|n-3 \xrightarrow{\times 5n} a|5n^2-15n\end{cases}$$

$$\Rightarrow a|(5n^2-2n+1)-(5n^2-15n) \Rightarrow a|13n+1$$

$$\begin{cases}a|13n+1\\ a|n-3 \xrightarrow{\times 13} a|13n-39\end{cases} \Rightarrow a|(13n+1)-(13n-39)$$

$$\Rightarrow a|40$$

بنابراین a می‌تواند اعداد ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵ یا ۸ یا ۱۰ یا ۲۰ یا ۴۰ باشد. پس برای a، ۸ جواب طبیعی وجود دارد.

روش دوم

یادآوری

$$\begin{cases}n|ax+b\\ n|f(x)\end{cases} \Rightarrow n|f(-\frac{b}{a})$$

اگر $f(-\frac{b}{a})$ کسری شد تا جایی که امکان دارد ساده می‌کنیم، سپس از مخرج کسر صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\begin{cases}a|n-3\\ a|5n^2-2n+1\end{cases} \Rightarrow a|5(3)^2-2(3)+1 \Rightarrow a|40$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 8 \text{ یا } 10 \text{ یا } 20 \text{ یا } 40$$

۷۰ — **۳**

روش اول سعی می‌کنیم n را در سمت راست بخش‌پذیری حذف کنیم:

$$\begin{cases}a|9n+7\\ a|7n+6\end{cases} \Rightarrow a|7(9n+7)-9(7n+6) \Rightarrow a|-5 \Rightarrow a=1 \text{ یا } 5$$

روش دوم ریشهٔ یکی را در دیگری قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}a|9n+7\\ a|7n+6\end{cases} \Rightarrow a|9(-\frac{6}{7})+7 \Rightarrow a|\frac{-5}{7} \Rightarrow a|-5 \Rightarrow a=1 \text{ یا } 5$$

۷۱ — **۱**

روش اول باید سعی کنیم در سمت راست بخش‌پذیری‌ها n را حذف کنیم:

$$\begin{cases}\alpha|7n+3 \Rightarrow \alpha|56n+24\\ \alpha|8n+3 \Rightarrow \alpha|56n+21\end{cases} \Rightarrow \alpha|3 \Rightarrow \alpha=1 \text{ یا } \alpha=3$$

روش دوم ریشهٔ یکی را در دیگری قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\alpha|7n+3\\ \alpha|8n+3\end{cases} \Rightarrow \alpha|8(-\frac{3}{7})+3 \Rightarrow \alpha|\frac{-24}{7}+\frac{21}{7}$$

$$\Rightarrow \alpha|\frac{-3}{\cancel{7}} \Rightarrow \alpha|-3 \Rightarrow \alpha=1 \text{ یا } \alpha=3$$

۷۲ — **۳**

باید ببینیم به‌ازای چند مقدار طبیعی برای a روابط $a|9n+5$ و $a|7n-3$ برقرارند، پس:

$$\begin{cases}a|7n-3\\ a|9n+5\end{cases} \Rightarrow a|9(\frac{3}{7})+5 \Rightarrow a|\frac{62}{\cancel{7}} \Rightarrow a|62$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 31 \text{ یا } 62 \Rightarrow \text{۴ مقدار}$$

۷۳ — **۱**

ابتدا سعی می‌کنیم در سمت راست n را حذف کنیم:

$$\begin{cases}m|n-4 \Rightarrow m|8n-32\\ m|8n-1\end{cases} \Rightarrow m|31 \Rightarrow m=\pm1 \text{ یا } m=\pm31$$

$$\xrightarrow{m \text{ طبیعی و دورقمی}} m=31$$

۷۴ — **۲**

فرض می‌کنیم عبارت‌های $n-5$ و $9n-4$ بر عدد دورقمی α بخش‌پذیرند، پس:

$$\begin{cases}\alpha|n-5\\ \alpha|9n-4\end{cases} \Rightarrow \alpha|9(5)-4 \Rightarrow \alpha|41 \Rightarrow \alpha=1 \text{ یا } \alpha=41$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ دورقمی}} \alpha=41$$

بنابراین $n-5$ مضرب ۴۱ است و داریم:

$$41|n-5 \Rightarrow \begin{cases}n-5=41 \Rightarrow n=46\\ n-5=82 \Rightarrow n=87\end{cases}$$

۷۵ **۱**

ابتدا در سمت راست رابطهٔ عاد کردن b را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b-۴ \\ a \mid ۷b+۱ \end{cases} \Rightarrow a \mid ۷(۴)+۱ \Rightarrow a \mid ۲۹ \Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=۲۹$$

برای آن که فقط یک عدد طبیعی برای a یافت شود، باید bهایی را پیدا کنیم که فقط عدد ۱ بتواند هر دو عدد $b-۴$ و $۷b+۱$ را عاد کند، پس ابتدا bهایی را پیدا می‌کنیم که هر دو عدد $b-۴$ و $۷b+۱$ بر ۲۹ بخش‌پذیر می‌شوند:

$$۲۹ \mid b-۴ \xrightarrow{b \text{ دورقمی}} \begin{cases} b-۴=۲۹ \Rightarrow b=۳۳ \\ b-۴=۵۸ \Rightarrow b=۶۲ \\ b-۴=۸۷ \Rightarrow b=۹۱ \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای سه عدد دورقمی b هر دو عدد $b-۴$ و $۷b+۱$ بر ۲۹ بخش‌پذیر می‌شوند، پس می‌توانند بر ۱ نیز بخش‌پذیر باشند اما به‌ازای $۸۷ = ۳ - ۹۰$ عدد طبیعی دورقمی دو عدد $b-۴$ و $۷b+۱$ فقط بر عدد طبیعی ۱ بخش‌پذیرند.

۷۶ **۲**

چون روابط فقط برای یک مقدار m برقرارند، پس حتماً $m=۱$ می‌باشد. حال باید بررسی کنیم آیا مقدار دیگری نیز برای m وجود دارد یا خیر، پس:

$$\begin{cases} m \mid n+۳ \\ m \mid ۹n-۲ \end{cases} \Rightarrow m \mid ۹(-۳)-۲ \Rightarrow m \mid -۲۹ \Rightarrow m=۱ \text{ یا } ۲۹$$

حال کوچک‌ترین مقدار n را می‌یابیم که m برابر ۲۹ می‌شود:

$$n+۳=۲۹k \Rightarrow n=۲۹k-۳ \xrightarrow{k=۱} n=۲۶$$

بنابراین به‌ازای اعداد طبیعی $n \le ۲۵$ روابط گفته شده فقط برای $m=۱$ برقرارند. حال مجموع مقادیر n را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۲+۳+...+۲۵ = \frac{۲۵\times۲۶}{۲} = ۳۲۵$$

۷۷ **۳**

روش اول باید سعی کنیم در رابطهٔ $n-۳ \mid n^۳-۳$ ، پارامتر n را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n-۳ \mid n^۲-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \xrightarrow{\times n^۲} n-۳ \mid n^۳-۳n^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n-۳ \mid (n^۲-۳)-(n^۳-۳n^۲) = \begin{cases} n-۳ \mid ۳n^۲-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \\ \xrightarrow{\times ۳n} n-۳ \mid ۳n^۲-۹n \end{cases}$$

$$\Rightarrow n-۳(۳n^۲-۳)-(۳n^۲-۹n) \Rightarrow \begin{cases} n-۳ \mid ۹n-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \\ \xrightarrow{\times ۹} n-۳ \mid ۹n-۲۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n-۳ \mid (۹n-۳)-(۹n-۲۷) \Rightarrow n-۳ \mid ۲۴$$

$$\Rightarrow n-۳ = \pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۸,\pm۱۲,\pm۲۴ \Rightarrow ۱۶ \text{ مقدار}$$

روش دوم

یادآوری همواره داریم: $\boxed{x-a \mid f(x) \Rightarrow x-a \mid f(a)}$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$n-۳ \mid n^۳-۳ \Rightarrow n-۳ \mid (۳)^۳-۳ \Rightarrow n-۳ \mid ۲۴$$

$$\Rightarrow n-۳ = \pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۸,\pm۱۲,\pm۲۴ \Rightarrow ۱۶ \text{ مقدار}$$

۷۸ **۴**

باید $۲x-۱ \mid x+۳$ ، بنابراین داریم:

$$۲x-۱ \mid \frac{۱}{۲}+۳ \Rightarrow ۲x-۱ \mid \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۲x-۱ \mid ۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۱ \Rightarrow x=۱ \\ ۲x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰ \\ ۲x-۱=۷ \Rightarrow x=۴ \\ ۲x-۱=-۷ \Rightarrow x=-۳ \end{cases} \Rightarrow ۴ \text{ نقطه}$$

توجه کنید چون $۲x-۱$ فرد است، پس می‌تواند هر ۴ مقدار ±۱ و ±۷ باشد و نیازی به بررسی تک‌تک معادلات نبود.

۷۹ **۱**

باید $x-۳ \mid ۵x+۳$ و در نتیجه داریم:

$$x-۳ \mid ۵x+۳ \Rightarrow x-۳ \mid ۵(۳)+۳ \Rightarrow x-۳ \mid ۱۸$$

$$\Rightarrow x-۳ = \pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶,\pm۹,\pm۱۸$$

از آن‌جایی که منحنی باید از ربع اول بگذرد، فقط xهایی قابل قبول هستند که هم $x-۳>۰$ و هم $\frac{۵x+۳}{x-۳}>۰$ باشند، پس ۶ جواب قابل قبول وجود دارد.

۸۰ **۲**

ابتدا معادلهٔ داده شده را به‌صورت $y=\frac{○}{□}$ درمی‌آوریم، سپس به کمک رابطهٔ □|○ مقادیر صحیح x را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x^۲-۴y-۳xy+۱=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۱=۴y+۳xy$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۱=y(۴+۳x) \Rightarrow y=\frac{۲x^۲+۱}{۳x+۴}$$

$$۳x+۴ \mid ۲x^۲+۱ \Rightarrow ۳x+۴ \mid ۲(-\frac{۴}{۳})^۲+۱ \Rightarrow ۳x+۴ \mid \frac{۴۱}{۹}$$

$$\Rightarrow ۳x+۴ \mid ۴۱$$

$$\Rightarrow ۳x+۴=\pm۱,\pm۴۱ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۴=۱ \Rightarrow x=-۱ \\ ۳x+۴=-۱ \text{ غ‌ق‌ق} \\ ۳x+۴=۴۱ \text{ غ‌ق‌ق} \\ ۳x+۴=-۴۱ \Rightarrow x=-۱۵ \end{cases}$$

۸۱ **۲**

ابتدا ضابطهٔ منحنی را به‌صورت $y=\frac{○}{□}$ می‌نویسیم:

$$(۸-y)x-۲y=۱ \Rightarrow ۸x-xy-۲y=۱ \Rightarrow xy+۲y=۸x-۱$$

$$y(x+۲)=۸x-۱ \Rightarrow y=\frac{۸x-۱}{x+۲}$$

حال باید $x+۲ \mid ۸x-۱$ ، پس:

$$x+۲ \mid ۸(-۲)-۱ \Rightarrow x+۲ \mid -۱۷ \Rightarrow x+۲=\pm۱ \text{ یا } \pm۱۷$$

بنابراین ۴ مقدار صحیح برای x وجود دارد، پس این منحنی از ۴ نقطه با طول و عرض صحیح می‌گذرد.

۸۲ | **۳**

باید $۳n+۴ | n^۲+۱$ و در ضمن n عددی طبیعی باشد. پس:

$$۳n+۴ | (-\frac{۴}{۳})^۲+۱ \Rightarrow ۳n+۴ | \frac{۲۵}{۹} \Rightarrow ۳n+۴ | ۲۵$$

$\Rightarrow ۳n+۴=\pm۱$ یا ±۵ یا ±۲۵

بنابراین داریم:

$۳n+۴=۱ \Rightarrow$ طبیعی نیست.

$۳n+۴=-۱$ طبیعی نیست.

$۳n+۴=۵ \Rightarrow$ طبیعی نیست.

$۳n+۴=-۵ \Rightarrow$ طبیعی نیست.

$$۳n+۴=۲۵ \Rightarrow n=۷ \Rightarrow a_۷=\frac{۴۹+۱}{۲۱+۴}=\frac{۵۰}{۲۵}=۲ \Rightarrow \begin{cases} m=۷ \\ a_m=۲ \end{cases}$$

$۳n+۴=-۲۵ \Rightarrow$ طبیعی نیست

بنابراین $m+a_m$ برابر ۹ = ۲ + ۷ می‌باشد.

۸۳ | **۳**

باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$n^۲-۵n+۳ | ۳n-۲ \Rightarrow n^۲-۵n+۳ | (۳n-۲)^۲$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n+۳ | ۹n^۲-۱۲n+۴$$

از طرفی می‌دانیم $n^۲-۵n+۳ | n^۲-۵n+۳$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} n^۲-۵n+۳ | ۹n^۲-۱۲n+۴ \\ n^۲-۵n+۳ | n^۲-۵n+۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n+۳ | (۹n^۲-۱۲n+۴)-۹(n^۲-۵n+۳)$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n+۳ | ۳۳n-۲۳$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} n^۲-۵n+۳ | ۳۳n-۲۳ \\ n^۲-۵n+۳ | ۳n-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n+۳ | (۳۳n-۲۳)-۱۱(۳n-۲)$$

$$\Rightarrow n^۲-۵n+۳ | -۱ \Rightarrow n^۲-۵n+۳=\pm۱$$

حال باید جواب‌های صحیح $n^۲-۵n+۳=۱$ و $n^۲-۵n+۳=-۱$ را به‌دست آوریم:

$n^۲-۵n+۳=۱ \Rightarrow n^۲-۵n+۲=۰$

$\Rightarrow$ چون $\Delta=۱۷$ است، پس مطمئناً جواب صحیح ندارد.

$n^۲-۵n+۳=-۱ \Rightarrow n^۲-۵n+۴=۰$

$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} n=۱, n=۴$

۸۴ | **۲**

چون عدد $۳(\overline{a,a})$ سه رقمی است، پس a می‌تواند ۱، ۲ و ۳ باشد که در حالت‌های $a=۲$ و $a=۳$ یک عدد اول می‌تواند a را بشمارد؛ پس حداکثر یک عدد اول a را می‌شمارد.

۸۵ | **۱**

برای آن‌که $\overline{aa}$ دو رقمی شود، a می‌تواند ارقام ۱ تا ۹ را اختیار کند. در بین این اعداد ۶ و ۸ بیشترین مقسوم‌علیه طبیعی دارند که مقدار آن‌ها برابر ۴ است. توجه کنید که تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی اعداد اول، ۱ و خود عدد اول می‌باشند، پس ۲ مقسوم‌علیه طبیعی دارند. کافی بود اعداد غیر اول بزرگ‌تر از ۱ را چک می‌کردیم.

۸۶ | **۳**

ابتدا دو رابطهٔ عادکردن را ساده می‌کنیم:

$$۳a | ۱۰۸۰ \xrightarrow{\div۳} a | ۳۶۰ ,\quad ۲a | ۹۶۰ \xrightarrow{\div۲} a | ۴۸۰$$

با توجه به روابط به‌دست آمده، a مقسوم‌علیه مشترک ۳۶۰ و ۴۸۰ است که بزرگ‌ترین a همان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۳۶۰ و ۴۸۰ است، پس:

$$(۳۶۰,۴۸۰)=۸(۴۵,۶۰)=۸\times۱۵=۱۲۰$$

۸۷ | **۴**

حاصل (۸۱۶,۶۸۰) را می‌خواهیم. ابتدا از عامل‌های ۲ فاکتور می‌گیریم.

عامل‌های ۲ را حذف کردیم

$$(۸۱۶,۶۸۰)=۸\times(۱۰۲,۸۵)=۸\times(۵۱,۸۵)$$

$$=۸\times(۳\times۱۷,۵\times۱۷)=۸\times۱۷=۱۳۶$$

۸۸ | **۳**

چون هر دو عدد فرد هستند، داریم:

$$(۱۶۸۳,۴۲۹)=(۱۶۸۳-۴۲۹,۴۲۹)$$

$$=(۱۲۵۴,۴۲۹)=(۶۲۷,۴۲۹)$$

حذف عامل ۲

حال دوباره با دو عدد فرد مواجه‌ایم؛ پس:

$$(۶۲۷-۴۲۹,۴۲۹)=(۱۹۸,۴۲۹)=(۹۹,۴۲۹)=(۳^۲\times۱۱,۴۲۹)$$

حذف عامل ۲

$=۳\times۱۱=۳۳ \Rightarrow$ مجموع ارقام $=۶$

۸۹ | **۲**

ابتدا حاصل (۱۱۷۸,۸۳۶) را به دست می‌آوریم:

$$(۱۱۷۸,۸۳۶)=۲(۵۸۹,۴۱۸)=۲(۵۸۹,۲۰۹)$$

$$=۲(۵۸۹-۲۰۹,۲۰۹)=۲(۳۸۰,۲۰۹)$$

$$=۲(۹۵,۲۰۹)=۲(۱۹,۲۰۹)=۲\times۱۹=۳۸$$

۲۰۹ قطعاً ۵ ندارد، پس عامل ۵ را از ۹۵ حذف می‌کنیم.

حال حاصل (۳۸,۵۷) را به‌دست می‌آوریم:

حذف عامل ۲

$$(۳۸,۵۷)=(۱۹,۵۷)=۱۹$$

عدد ۱۹ حداقل ۶ واحد از مربع کامل یک عدد که $۵^۲=۲۵$ می‌باشد کم‌تر است.

۹۰ | **۲**

ابتدا حاصل (۲۲۱,۳۵۷) و (۳۵۷,۶۲۹-) را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم علامت در ب. م. م تأثیری ندارد.

$$(۲۲۱,۳۵۷)=(۲۲۱,۳۵۷-۲۲۱)=(۲۲۱,۱۳۶)=(۲۲۱,۱۷)=۱۷$$

$$(-۳۵۷,۶۲۹)=(۳۵۷,۶۲۹)=(۳۵۷,۶۲۹-۳۵۷)=(۳۵۷,۲۷۲)$$

$$=(۳۵۷,۱۷)=۱۷$$

بنابراین حاصل $((۲۲۱,۳۵۷),(-۳۵۷,۶۲۹))$ برابر $(۱۷,۱۷)=۱۷$ است.

۹۱ | **۴**

ابتدا حاصل (۵۷۸,۳۷۴) را به‌دست می‌آوریم. هر دو عدد زوج هستند. پس:

$$(۵۷۸,۳۷۴)=۲\times(۲۸۹,۱۸۷)=۲\times(۲۸۹-۱۸۷,۱۸۷)$$

$$=۲\times(\underset{۵۱}{\cancel{۱۰۲}},۱۸۷)=۲\times(۳\times۱۷,۱۱\times۱۷)=۲\times۱۷=۳۴$$

حال حاصل (۳۹۱,۹۰۱) را که هر دو عدد، فرد هستند به‌دست می‌آوریم:

$$(۳۹۱,۹۰۱)=(۳۹۱,۹۰۱-۳۹۱)=(۳۹۱,\underset{۲۵۵}{\cancel{۵۱۰}})$$