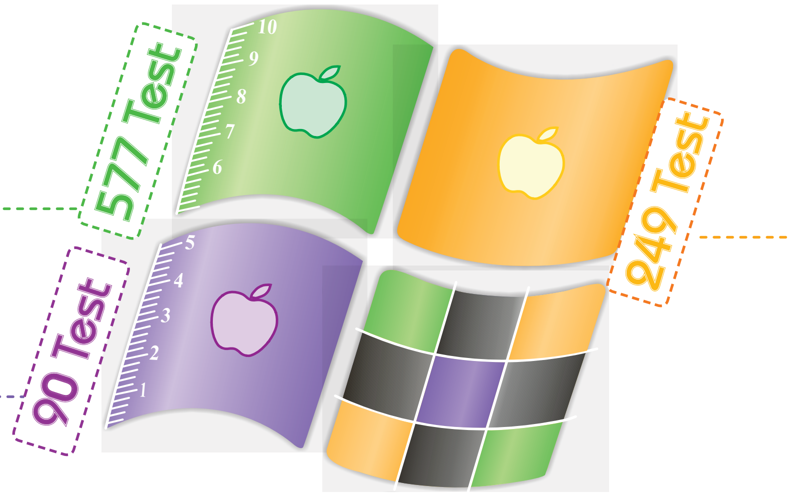
مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می‌پردازید ! در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت نخواندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است ...



1000 نکته

Geometry

10+11+12

این نسل از کتاب‌های ریاضی میکرو که با وسواس خاصی تهیه شده ، ترکیبی است از ۳ کتاب با ۳ استراتژی مختلف:

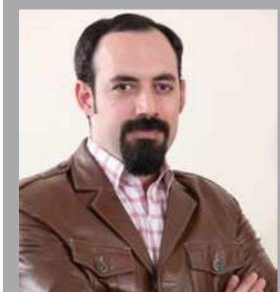
کتاب اول : نکته‌های واجب و ضروری

کتاب دوم: نکته‌های ویژهٔ تسلط و تثبیت و مرور

کتاب سوم: نکته‌های IQ و چالشی ویژهٔ دانش‌آموزان مدارس برتر

مقدمه مؤلف

A.Monsef.Shokri



M.Hosseyni.Fard

به جای نوشتن مقدمهٔ طول و دراز و تشکر از فک و فامیل و ایل و تبار خودمان و دست‌اندرکاران کتاب بهتر است توضیحاتی کوتاه و مهم دربارهٔ ساخت و بافت این کتاب ارائه کنم :

این کتاب دارای سه تیپ نکته است

نکته‌های سبز: این نکته‌ها که با 🍏 مشخص شده است برای همهٔ دانش‌آموزان واجب و ضروری است .

نکته‌های زرد: این نکته‌ها که با 🍏 مشخص شده است ویژهٔ تسلط بر ریزه‌کاری‌ها و نکات فرعی است .

نکته‌های بنفش: این نکته‌ها که با 🍏 مشخص شده است ویژهٔ دانش‌آموزان مدارس برتر و همچنین دانش‌آموزانی است که به دنبال نکته‌های چالشی و سطح بالاتر از کنکور سراسری هستند .

ویژگی‌های خاص این کتاب نست به سایر کتاب‌های موجود در بازار:

1. طراحی و معماری داخلی بسیار زیبا جذاب و مورد پسند دانش‌آموزان و معلمین و مشاوران
2. استفاده مناسب و حرفه‌ای از رنگ در ساختار درسنامه که فرآیند یادگیری را بسیار ساده‌تر، جذاب‌تر و سریع‌تر می‌کند .
3. تیپ‌بندی بسیاری از مباحث برای سهولت در یادگیری
4. تطابق کامل وکامل و نقطه به نقطه با کتاب بانک تست هندسه جامع میکرو [نسل جدید]
5. بررسی کامل تمام تمرینات و متن کتاب درسی و همچنین اشکال ، نمودارها و کلید واژه‌ها
6. بررسی تست‌ها کنکور چند دههٔ اخیر به خصوص نظام جدید آموزش و استخراج نکات کلیدی مطرح شده در آن‌ها .
7. بررسی کامل کتاب راهنمای معلم و استخراج نکات کلیدی آن .
8. آموزش راه‌ها و شیوه‌های میان‌بُر در حل تست که بسیاری از کتاب‌های کمک‌آموزشی از بیان آن‌ها [به دلایل متعدد] پرهیز می‌کنند .
9. *user friendly* بودن کتاب برای دانش‌آموزان با هرسطحی از معلومات .
10. **کتاب یک ویژگی دیگر هم دارد که ربطی به ۹ ویژگی اول ندارد و در گوشه‌ای از کتاب پنهان است و امکان کشف آن تا قبل از ۱۵ اسفند ۱۴۰۰ وجود ندارد و حداکثر ۸ نفر ممکن است این راز را کشف کنند، اگر شما یکی از این ۸ نفر هستید در اینستاگرام این ویژگی را در دایرکت برای من بفرستید و ۸ جلد از کتاب‌های *دور دنیا در نیم ساعت* ویژه کنکور ۱۴۰۱ را هدیه بگیرید.**

علی منصف شکری - سجاد عظمتی

alimonsef_shokri

نظرات خود را دربارهٔ ویژگی دهم با ما در اینستاگرام درمیان بگذارید.

انتشارات بین‌المللی گاج

Bertrand Russell
1872-1970

Matrix $_{m\times n}$ CHAPTER 1

Lesson . 1	صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	درس اول	Bertrand Russell

تعریف ماتریس و مفاهیم اولیهٔ آن

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه یا عنصر نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و ... نشان می‌دهند.

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون
سطر اول C $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ سطر دوم B	ستون سوم A $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۷ & \sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix}$ درایه

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به‌صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (یا به‌طور خلاصه m در n) می‌گویند.

$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ ماتریس ۲ در ۳ ۲ سطر و ۳ ستون

$B=[۳ \quad ۲ \quad ۴]_{۱\times ۳}$ ماتریس ۱ در ۳

هر درایهٔ ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شمارهٔ سطر و اندیس دوم شمارهٔ ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم است.

درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$

درایهٔ سطر اول و ستون سوم

$D=\begin{bmatrix} d_{۱۱} & d_{۱۲} & d_{۱۳} \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$

Test **تعداد درایه‌های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟**

۱) $[a_{ij}]_{۳\times ۴}$ ۲) $[a_{ij}]_{۲\times ۶}$ ۳) $[a_{ij}]_{۶\times ۲}$ ۴) هر سه گزینه برابر است.

۴ تعداد درایه‌ها در یک ماتریس $m\times n$ برابر با $m\times n$ است، بنابراین همهٔ ماتریس‌های داده شده در گزینه‌ها ۱۲ درایه دارند.

بیان درایه‌ها بر حسب i و j

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به‌طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ اگر به‌ازای هر $۱\leq i\leq ۲$ و هر $۱\leq j\leq ۲$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ جمع درایه‌ها $=۲۰$

در ماتریس $B=[b_{ij}]_{2\times3}$ اگر به‌ازای هر $1\le i\le 2$ و هر $1\le j\le 3$ داشته باشیم: $b_{ij}=i+j$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$$B=\begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

⇐ جمع درایه‌ها $=21$

در ماتریس $C=[c_{ij}]_{2\times2}$ اگر $c_{ij}=\begin{cases} i\times j & ;\ i\ge j \\ 7 & ;\ i<j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times1 & 7 \\ 2\times1 & 2\times2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$i\ge j$ ، $i<j$

⇐ جمع درایه‌ها $=14$

Test در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} i^2-2j & ;\ i\ne j \\ i+j & ;\ i=j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) -3 ۴) 2

۲

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 & 1^2-2\times2 \\ 2^2-2\times1 & 2+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

⇐ جمع درایه‌های ستون دوم $=-3+4=1$

Matrix — معرفی ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n (یا $n\times n$) می‌نامیم.

a_{ij} روی قطر اصلی ⇔ $i=j$	a_{ij} روی قطر فرعی ⇔ $i+j=n+1$
$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0/2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$	$C=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه بر اساس رابطهٔ بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$i<j$ [بالای قطر اصلی]

$i>j$ [پایین قطر اصلی]

$i=j$ [روی قطر اصلی]

Test در ماتریس $A=[3i+j]_{3\times3}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲ لازم نیست همهٔ درایه‌های A را پیدا کنید یافتن درایه‌های زیر قطر اصلی کافیست [در ضمن $a_{ij}=2i+j$]:

$$A=\begin{bmatrix} \ & \ & \ \\ a_{21} & \ & \ \\ a_{31} & a_{32} & \ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ & \ & \ \\ 7 & \ & \ \\ 10 & 11 & \ \end{bmatrix}\Rightarrow$$

جمع درایه‌های زیر قطر اصلی $=7+10+11=28$

گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس‌های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است، که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است. نمونه‌ای از این ماتریس‌ها به صورت زیر است:

$M_۱=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ $\quad M_۲=[A \mid B]$ $\quad M_۳=\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{A} & d\\ & & e\end{array}\right]$ $\quad M_۴=\left[\begin{array}{c|c}A&B\\ \hline C&D\end{array}\right]$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن‌ها باید، درایه‌های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیرماتریس‌ها بر حسب تابعی از i و j داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

اگر $A=[۱\ \ ۲\ \ ۳]$ ، $B=\begin{bmatrix}۲&۱&۴\\۵&۰&۷\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه‌های قطر اصلی C کدام است؟

$C=\begin{bmatrix}۲&۱&۴\\۵&۰&۷\\۱&۲&۳\end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=۲+۰+۳=۵$

در مثال فوق، اگر ماتریس C را به‌صورت $C=\left[\begin{array}{c|cc}۲&۱&۴\\ \hline ۵& \multicolumn{2}{c}{D}\\ ۱ & & \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

با توجه به ماتریس C، خواهیم داشت: $D=\begin{bmatrix}۰&۷\\۲&۳\end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر فرعی $=۲+۷=۹$

اگر $A=[i+j]_{۱\times۳}$ ، $B=[i\times j]_{۱\times۳}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، ماتریس $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ را بنویسید.

ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$A=[۱+۱\ \ ۱+۲\ \ ۱+۳]$
$B=[۱\times۱\ \ ۱\times۲\ \ ۱\times۳]$ $\Rightarrow C=\begin{bmatrix}۲&۳&۴\\۱&۲&۳\end{bmatrix}$

بعضی‌ها ممکن است ماتریس C را به‌صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۱&۱+۲&۱+۳\\۲\times۱&۲\times۲&۲\times۳\end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است و اشتباه آن در درایه‌های سطر دوم است.

Test اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۰&۳\\۱&۴&۵&۲\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۱\\۰&۵&۱&۴\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c|c} & ۳\\ \hline E & \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر اصلی E کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۱

$C=\left[\begin{array}{ccc|c}۱&۲&۰&۳\\ \hline ۱&۴&۵&۲\\۱&۱&۲&۱\\۰&۵&۱&۴\end{array}\right]\Rightarrow E=\begin{bmatrix}۱&۴&۵\\۱&۱&۲\\۰&۵&۱\end{bmatrix}\Rightarrow$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=۳$

انواع ماتریس

اگر در یک ماتریس مربعی درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را بالا مثلثی و اگر درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را پایین مثلثی می‌نامند.

$B=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۲&۱&۰\\۳&۲&۴\end{bmatrix}$ پایین مثلثی $\qquad A=\begin{bmatrix}۵&۲&۱\\۰&۱&۳\\۰&۰&۴\end{bmatrix}$ بالا مثلثی

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&a+۱&a+b\\a&۳&b-۱\\b&a&۴\end{bmatrix}$ پایین مثلثی باشد.

■ باید درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشد، بنابراین:
$$\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$$

بنابراین درایهٔ سطر اول و ستون سوم یعنی $a+b$ خود به خود صفر می‌شود و نیازی به صفر گذاشتن آن نیست.

اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، این ماتریس را **ماتریس قطری** می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

درایه‌های قطر اصلی در ماتریس‌های قطری می‌توانند صفر هم باشند.

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-1 & b+2 \\ a+1 & b-1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

■ برای این‌که یک ماتریس قطری باشد باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد:
$$\begin{cases} b+2=0 \Rightarrow b=-2 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

اگر در یک ماتریس مربعی درایه‌های زیر قطر فرعی یا بالای قطر فرعی صفر باشد، ماتریس را **شبه مثلثی** می‌نامند و اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر فرعی صفر شود، ماتریس را **شبه قطری** می‌نامند.

به ازای کدام مقدار a و b ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-2 & a+1 \\ b+2 & b+1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس شبه قطری است؟

■ باید درایه‌های خارج از قطر فرعی صفر باشد، بنابراین:
$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را یک **ماتریس اسکالر** می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad C=[4]_{1\times 1}$$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & a-2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

■ باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند:
$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a=b \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

اگر در یک ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های قطر اصلی برابر «۱» باشند، آن را **ماتریس واحد (ماتریس همانی)** می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad I=[1]_{1\times 1}$$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-1 & c+1 \\ d-2 & b-2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس واحد باشد، مقادیر a, b, c, d را به دست آورید.

■ باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی برابر با ۱ باشد.

1) $a-1=1 \Rightarrow a=2$ 2) $b-2=1 \Rightarrow b=3$ 3) $c+1=0 \Rightarrow c=-1$ 4) $d-2=0 \Rightarrow d=2$

اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، آن را **ماتریس سطری** می‌نامند. [به‌طور کلی ماتریس‌هایی که تعداد ستون‌های آن‌ها بیشتر از تعداد سطرهای آن‌هاست، ماتریس افقی نامیده می‌شوند. ماتریس سطری یک حالت خاص از ماتریس‌های افقی محسوب می‌شود.]

$$A=[2 \quad 0/5 \quad 7]_{1\times 3} \qquad B=[2 \quad 1]_{1\times 2} \qquad C=[5]_{1\times 1}=5$$

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{(n-2)\times n}$ و $a_{ij}=i^2-2j$ یک ماتریس سطری باشد، مجموع درایه‌های A را پیدا کنید.

■ باید ماتریس A دارای یک سطر باشد، بنابراین:
$$n-2=1 \Rightarrow n=3 \Rightarrow A=[a_{ij}]_{1\times 3}=[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]=[1^2-2\times 1 \quad 1^2-2\times 2 \quad 1^2-2\times 3]=[-1 \quad -3 \quad -5] \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A = -9$$

اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامند. [به‌طور کلی ماتریس‌هایی که تعداد سطرهای آن‌ها بیشتر از تعداد ستون‌های آن‌هاست ماتریس قائم نامیده می‌شوند. ماتریس ستونی یک حالت خاص از ماتریس‌های قائم محسوب می‌شود.]

$A=\begin{bmatrix}\pi\\ \sqrt{2}\\ 5\end{bmatrix}_{3\times 1}$ $\quad B=\begin{bmatrix}0/5\\ 0\end{bmatrix}_{2\times 1}$ $\quad C=[9]_{1\times 1}=9$

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times(n-1)}$ و $a_{ij}=2i+3j$ یک ماتریس ستونی باشد، مجموع درایه‌های A را پیدا کنید.

باید ماتریس دارای یک ستون باشد، بنابراین:

$n-1=1\Rightarrow n=2\Rightarrow A=[a_{ij}]_{2\times 1}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+3\times1\\ 2\times2+3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A برابر ۱۲ است.

ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامند و با $\bar{O}$ نشان می‌دهند.

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2\times 2}$ $\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}_{1\times 3}$

اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-1 & b^3-1\\ b+1 & a^2-1\end{bmatrix}$ یک ماتریس صفر باشد، $a+b$ را به دست آورید.

باید تمام درایه‌های ماتریس برابر صفر باشد:

$$\begin{cases}\begin{cases}a-1=0\\ a^2-1=0\end{cases}\Rightarrow a=1\\ \begin{cases}b+1=0\\ b^3-1=0\end{cases}\Rightarrow b=-1\end{cases}\quad a+b=0$$

Test اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-1 & a-2\\ b+3 & b-2\end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۵

۱ برای این‌که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases}a-2=0\Rightarrow a=2\\ b+3=0\Rightarrow b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

ماتریس متقارن و پاد متقارن [ویژهٔ استعدادهای درخشان]

Matrix$_{m\times n}$

ماتریس‌هایی به شکل مقابل که درایه‌های طرفین قطر اصلی آن‌ها با هم برابر است را ماتریس‌های متقارن می‌نامند. هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می‌توان آن‌ها را به صورت $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، $a_{ij}=a_{ji}$ تعریف کرد. بدون این‌که اشارهٔ مستقیم به نام این ماتریس شود.

$A=\begin{bmatrix}a&x&y\\x&b&z\\y&z&c\end{bmatrix}$

ماتریس‌هایی به شکل مقابل که درایه‌های قطر اصلی آن‌ها صفر و درایه‌های طرفین قطر اصلی آن‌ها قرینه است را ماتریس‌های پاد متقارن می‌نامند. هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می‌توان آن‌ها را به صورت $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، $a_{ij}=-a_{ji}$ تعریف کرد. بدون این‌که اشاره مستقیم به نام این ماتریس شود.

$A=\begin{bmatrix}0&-x&y\\x&0&-z\\-y&z&0\end{bmatrix}$

Test در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & x-1\\ 5 & 3+x\end{bmatrix}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد و به ازای هر $1\le i, j\le 2$ رابطهٔ $a_{ji}=a_{ij}$ برقرار باشد، x کدام است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۶-
۴) ۴-

۱ a_{ij} ، a_{ji} درایه‌های طرفین قطر اصلی هستند، بنابراین باید:

$a_{12}=a_{21}\Rightarrow x-1=5\Rightarrow x=6$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\forall i,j\ .\ a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow[a_{ij}]=[b_{ij}]$$

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ برابر باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}\Rightarrow x=۱\ ,\ y=۲\ ,\ z=۴\ ,\ t=۵$$

Test اگر دو ماتریس $A=[i+mj]$ و $B=\begin{bmatrix}m+۱ & ۳\\ ۳ & x\end{bmatrix}$ برابر باشند، $m+x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۳ ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}۱+m & ۱+۲m\\ ۲+m & ۲+۲m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+۱ & ۳\\ ۳ & x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۱+۲m=۳\Rightarrow m=۱\\ ۲+۲m=x\Rightarrow x=۴\end{cases}\Rightarrow m+x=۵$$

جمع و تفریق دو ماتریس

برای محاسبهٔ جمع یا تفریق دو ماتریس، کافی است درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},B=[b_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

فقط دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۶ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۲+۴ & ۱+۲\\ ۳+۶ & ۵+۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۳\\ ۹ & ۱۲\end{bmatrix}$$

Test اگر $A=[i+j]_{۲\times۲}$ و $B=[۲i-j]_{۲\times۲}$ باشد، در ماتریس $A+B$ مجموع درایه های سطر اول کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}\Rightarrow ۶=\text{جمع درایه‌های سطر اول}$$

راه کوتاه‌تر این است که به جای تشکیل A و B ماتریس $A+B=[(i+j)+(۲i-j)]=[۳i]=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}$ را تشکیل دهیم.

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، کافیست آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۲ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۶\\ ۸ & ۴ & ۱۰\end{bmatrix}$$

در حالت خاصی که عدد ۱- را در ماتریس A ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به‌دست می‌آید که آن را قرینهٔ ماتریس A می‌نامند و همواره داریم:

$$A+(-A)=\bar{0}$$

Test اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ به‌طوری که $b_{ij}=i^۲+j^۲$ حاصل $۲A-B+I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۶ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۶ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$

۱ ابتدا ماتریس B را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۱^۲+۱^۲ & ۱^۲+۲^۲ \\ ۲^۲+۱^۲ & ۲^۲+۲^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A-B+I=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۸ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

اعمال روی ماتریس‌ها

Matrix

اگر A, B, C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعداد حقیقی باشند، آنگاه خواص زیر همواره برقرار است:

ماتریس صفر عضو بی‌اثر جمع در ماتریس‌ها است.	جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.	جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
$A+\bar{o}=\bar{o}+A=A$	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+B=B+A$
توزیع‌پذیری ماتریس روی جمع اعداد	توزیع‌پذیری عدد روی جمع ماتریس‌ها	وجود عضو قرینه
$(r\pm s)A=rA\pm sA$	$r(A\pm B)=rA\pm rB$	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{o}$
قابلیت ضرب عدد در طرفین تساوی ماتریسی	قابلیت حذف عدد غیر صفر از طرفین تساوی	جابه‌جایی عدد و ماتریس
$A=B\Rightarrow rA=rB$	$rA=rB\xrightarrow{r\neq ۰}A=B$	$(r)(A)=(A)(r)$

Test اگر A, B, C سه ماتریس هم مرتبه باشند، کدام درست است؟

۱) $A-(B-C)=(A-B)-C$ ۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) $A-(B+C)=(A-B)+C$ ۴) $A+(B-C)=(A-B)+C$

۲ تنها گزینهٔ ۲ درست است که معرف خاصیت شرکت‌پذیری جمع در ماتریس‌هاست. [تفاضل ماتریس‌ها شرکت‌پذیر نیست!]

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

Matrix

اگر $A=[a_{۱j}]_{۱\times m}$ یک ماتریس سطری و $B=[b_{i۱}]_{m\times ۱}$ یک ماتریس ستونی به‌صورت‌های زیر باشند، آنگاه ضرب دو ماتریس A و B یعنی $A\times B$ یک عدد حقیقی است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AB=[a_{۱۱}\ a_{۱۲}\ \dots\ a_{۱m}]\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{m۱} \end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\dots+a_{۱m}b_{m۱}$$

اگر $A=[۲\ \ ۴\ \ ۰]$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$AB=[۲\ \ ۴\ \ ۰]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}=(۲\times۳)+(۴\times۷)+(۰\times۵)=۶+۲۸+۰=۳۴$$

Euclid
Mid-4 century BC

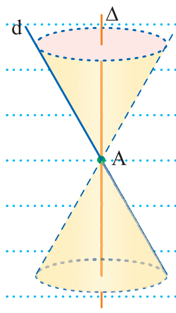
Conic sections

CHAPTER 2

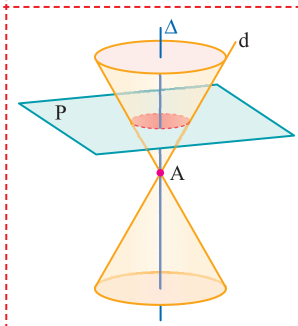
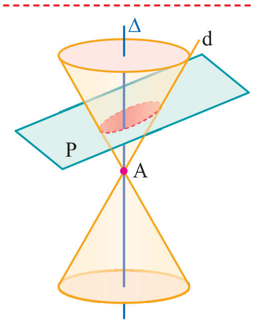
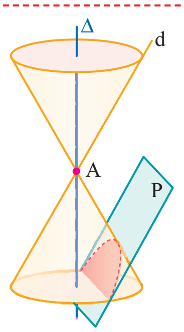
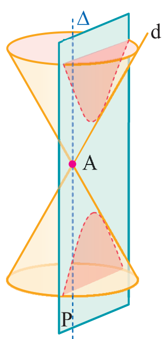
Lesson . 1	صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی	آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی	درس اول

مقاطع مخروطی

Conic sections



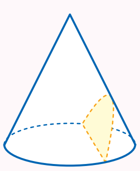
دو خط d و Δ را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است:

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P بر محور Δ عمود نبوده و غیر موازی با مولد d است.	صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.
			
حالات خاص			
در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کرده و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.

Test **مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟**

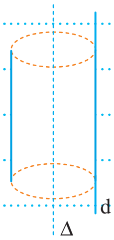
۱) موازی یک مولد ۲) موازی محور ۳) عمود بر یک مولد ۴) گذرا از نقطهٔ تلاقی محور و مولد



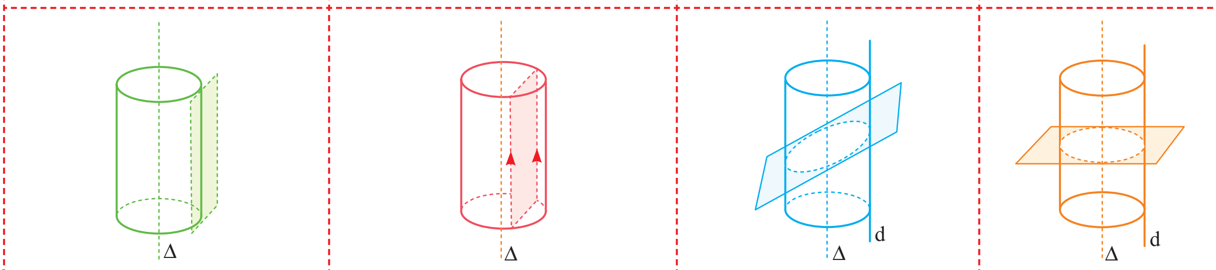
۱ اگر صفحهٔ موازی با مولد مخروط، رویهٔ مخروطی را قطع کند، سهمی به‌وجود می‌آید.

مقطع استوانه‌ای و کروی

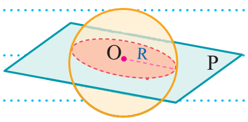
هرگاه دو خط d و Δ موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها برابر r باشد، از دوران d حول Δ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال اگر یک صفحه مانند P سطح استوانه‌ای را قطع کند، سطح مقطع پدید آمده مقطع استوانه‌ای نامیده می‌شود که به یکی از چهار حالت زیر است:



دایره	بیضی	دو خط موازی	یک خط
صفحهٔ P عمود بر Δ	صفحهٔ P غیرعمود و غیرموازی با Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصله کمتر از r از Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصلهٔ r از Δ



اگر یک کره به مرکز O و شعاع R داشته باشیم، سطح مقطع صفحهٔ P با سطح این کره همواره و در تمام حالات یک دایره است.



اگر از تقاطع صفحهٔ P و یک سطح استوانه‌ای یک بیضی ایجاد شده باشد، وضعیت صفحه نسبت به محور سطح استوانه‌ای چیست؟

صفحه باید غیر موازی با محور سطح استوانه‌ای و همچنین غیر عمود بر آن باشد، چون در صورت عمود شدن سطح مقطع به صورت دایره‌ای خواهد بود و در صورت موازی شدن با محور سطح استوانه‌ای به صورت دو خط موازی یا یک خط خواهد بود.

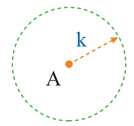
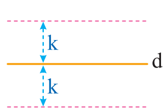
Test **اگر d_1 و d_2 دو خط موازی باشند، از دوران خط d_1 حول خط d_2 یک سطح ایجاد می‌شود، از برخورد صفحهٔ P با این سطح یک بیضی حاصل شده است وضعیت صفحهٔ P نسبت به خطوط d_1 و d_2 کدام است؟**

۱) موازی d_1 ۲) عمود بر d_2 ۳) غیر موازی d_1 ۴) غیر موازی با d_1 و غیر عمود بر d_2

۴ صفحهٔ P با هر دو خط d_1 و d_2 غیر موازی و غیرعمود است بنابراین می‌توان گفت غیر موازی با d_1 و غیرعمود بر d_2 است دقت کنید که گزینهٔ ۳ گزینهٔ کاملی نیست چون غیر موازی بودن کافی نیست و حتماً باید صفحه غیر عمود بر d_1 و d_2 نیز باشد.

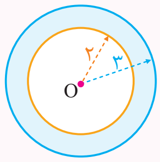
مکان هندسی

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعهٔ نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعهٔ نقاط را مکان هندسی می‌نامیم. [گاهی به آن، مکان نقطه نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی نقطه، خط و صفحه هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصلهٔ ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از نقطهٔ A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.	
۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصلهٔ k واحد از آن هستند.	

Test همهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل چقدر است؟

۱) 5π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 7π



۱ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O، بیشتر از ۲ واحد باشد بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیهٔ بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

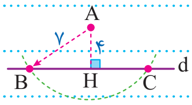
مساحت ناحیهٔ رنگی = مساحت دایره بزرگ - مساحت دایره کوچک $=\pi(3)^2-\pi(2)^2=9\pi-4\pi=5\pi$

اشتراک یک مکان هندسی و یک شکل هندسی

Conic sections

در برخی از سؤالات هندسه از ما می‌پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به خصوصی باشد». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به‌خصوص دارند را پیدا می‌کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می‌پردازیم.

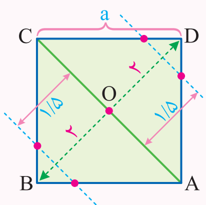
نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟



نقاطی که به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7>4$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط، جواب‌های مورد نظر هستند.

Test در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$، چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار



۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از آن واقع‌اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطهٔ تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟

این نقاط در صورت وجود جواب‌های تست هستند.

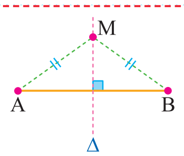
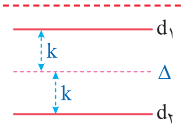
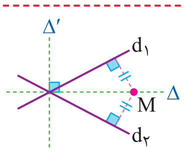
$$a=2\sqrt{2}\Rightarrow BD=a\sqrt{2}=\sqrt{2}\times(2\sqrt{2})=4\Rightarrow OB=OD=2$$

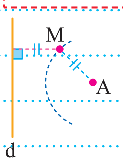
چون $OD>1/5$، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

مکان‌های هم فاصله از دو چیز

Conic sections

یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

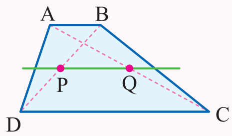
۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.	
۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.	
۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].	



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A و خط d به یک فاصله هستند، یک سهمی است که نقطهٔ A کانون آن و خط d هادی آن است [در ادامه فصل در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد].

Test **چند نقطه روی قطرهای ذوزنقهٔ ABCD وجود دارد که فاصلهٔ آن از دو قاعده یکسان باشد؟**

۱) نامشخص ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار



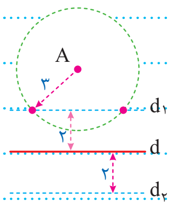
۲ نقاطی که به فاصلهٔ یکسان از دو قاعدهٔ ذوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصلهٔ آن از هر کدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع ذوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای ذوزنقه را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند.

[این خط را خط میانگین ذوزنقه می‌نامند].

اشتراک دو مکان هندسی

در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم این ویژگی را داشته باشد و هم آن ویژگی را»، در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که این ویژگی و نیز مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط اشتراک (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم.

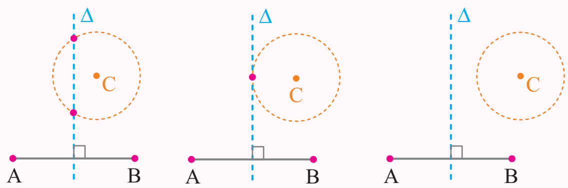
نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d باشد؟



نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند [این ویژگی]. همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند [آن ویژگی]. حال باید تعداد نقاط اشتراک این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته‌شده وجود دارد.

Test **نقاط A , B,C در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟**

۱) حداکثر یک نقطه ۲) حداکثر ۲ نقطه
۳) دقیقاً ۲ نقطه ۴) هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



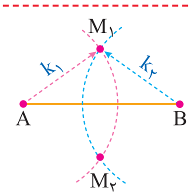
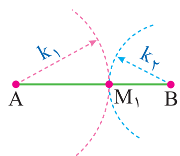
۲ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.

مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است.

با توجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس حداکثر ۲ نقطه وجود دارد. (Δ عمود منصف پاره‌خط AB است.)

اشتراک دو مکان هندسی مشهور

یکی از مشهورترین حالاتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ k_1 از نقطهٔ A و به فاصلهٔ k_2 از نقطهٔ B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایرهٔ به مرکز A و به شعاع k_1 و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:

۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]	۲ اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطهٔ M_1]	۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.
		چون دو دایره همدیگر را قطع نکرده‌اند، نقطه‌ای دیده نمی‌شود

Test **اگر برای تبدیل دو خط d و d' به یکدیگر، دقیقاً دو خط بازتاب وجود داشته باشد وضعیت d و d' نسبت به هم کدام است؟**

۱) موازی　　　　۲) عمود

۳) متقاطع　　　　۴) چنین چیزی امکان پذیر نیست.

۳ اگر دو خط متقاطع باشند، هر کدام از نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها می‌تواند خط بازتاب باشد؛ پس دو محور بازتاب مختلف برای تبدیل آن‌ها وجود دارد.

Geometric Conversations — مقایسه تبدیل‌ها

در جدول زیر تمام ویژگی‌های مربوط به تبدیل‌های چهارگانه، برای مقایسهٔ بهتر آمده است:

تبدیل \ ویژگی‌ها	اندازهٔ پاره‌خط	شیبِ خط	جهتِ شکل	اندازهٔ زاویه	شکل و تصویر	نقطهٔ ثابت
بازتاب	ثابت می‌ماند	ممکن است تغییر کند	تغییر می‌کند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	تمام نقاط خط بازتاب
انتقال	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	ندارد
دوران 180°	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	مرکز دوران
دوران $0<\theta<180^\circ$	ثابت می‌ماند	تغییر می‌کند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	مرکز دوران
تجانس	k برابر می‌شود	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	متشابه‌اند	مرکز تجانس

Test **کدام ویژگی در تجانس و انتقال وجود دارد ولی در دوران و بازتاب لزوماً وجود ندارد؟**

۱) شیب خط ثابت می‌ماند.　　　　۲) جهت شکل حفظ می‌شود.

۳) اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.　　　　۴) اندازهٔ پاره‌خط ثابت می‌ماند.

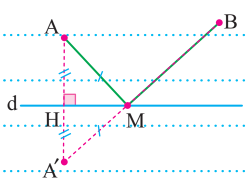
۱ در تجانس و انتقال شیب خط ثابت می‌ماند ولی در دوران و بازتاب، شیب خط لزوماً حفظ نمی‌شود.

Lesson . 2 | صفحهٔ ۵۲ تا ۶۰ کتاب یازدهم | کاربرد تبدیل‌ها | درس دوم

Caucher Birkar

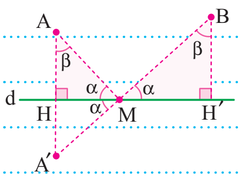
Geometric Conversations — مسئلهٔ هرون [تیپ اول]

دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط‌شکستهٔ AMB کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:



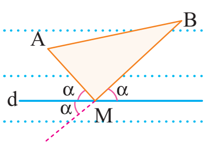
$$\mathrm{Min}(AMB)=|A'B|$$

این مسئله به مسئلهٔ هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

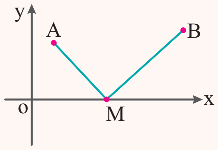


$$\frac{MB}{MA}=\frac{BH'}{AH}=\frac{MH'}{MH}$$

STOP در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطهٔ M نیز با هم برابرند.

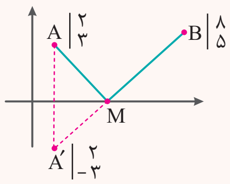


Test نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}8\\5\end{matrix}\right.$ مفروض‌اند، نقطهٔ M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMB کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۱۰

۴ کافیست بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور xها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازهٔ $A'B$ را به‌دست آوریم:



$$|A'B|=\sqrt{(8-2)^2+(5-(-3))^2}=10$$

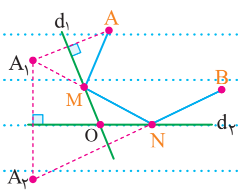
بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

1. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور x ها نقطهٔ $A'(a,-b)$ است.
2. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(-a,b)$ است.
3. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمساز ربع اول و سوم] نقطهٔ $A'(b,a)$ است.
4. تصویر نقطهٔ $A(a,b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمساز ربع دوم و چهارم] نقطهٔ $A'(-b,-a)$ است.

G کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ دوم]

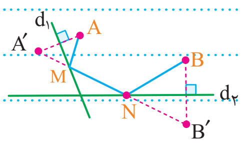
Geometric Conversions

دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقطهٔ M روی خط d_1 و نقطهٔ N روی خط d_2 بلغزد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ کافیست قرینهٔ A را نسبت به d_1 پیدا کرده و A_1 بنامیم، حال اگر قرینهٔ A_1 را نسبت به خط d_2 پیدا کرده و A_2 بنامیم، A_2B برابر با کم‌ترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ است.

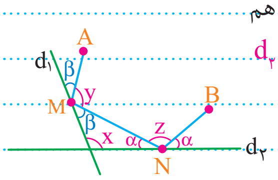


$$\boxed{\mathrm{Min}(AMNB)=|A_2B|}$$

STOP یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به d_1 و بازتاب B نسبت به d_2 یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکستهٔ $AMNB$ کوتاه‌ترین طول را دارد و اندازهٔ آن با $|A'B'|$ برابر است.

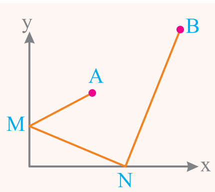


در هر یک از دو روش فوق وقتی $AMNB$ کوتاه‌ترین طول را دارد زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاه‌ترین طول است. در ضمن در این حالت زاویهٔ دو خط d_1 و d_2 برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکسته $AMNB$ است یعنی $x=\frac{y+z}{2}$



قضیهٔ فوق را برای بیش از دو خط d_1 و d_2 نیز می‌توان تعمیم داد.

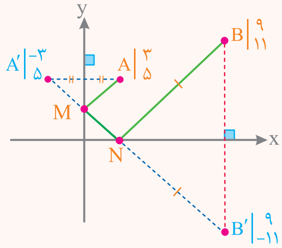
Test نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}9\\11\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازه خط شکسته $AMNB$، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

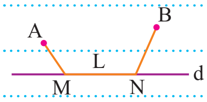
۳ اگر نقطهٔ A را نسبت به محور y و نقطهٔ B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محور xها و yها را در N و M قطع کند، در این صورت خط شکستهٔ AMNB کم‌ترین اندازه را خواهد داشت چون برابر $A'B'$ است.

$$Min|AMNB|=|A'B'|=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=۲۰$$



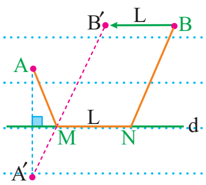
کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ سوم]

نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، نقاط M و N روی خط d به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB به صورت زیر عمل می‌کنیم:



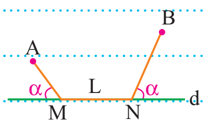
1 بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.

2 نقطهٔ B را به اندازهٔ بردار $\vec{L}$ به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' به دست آید.



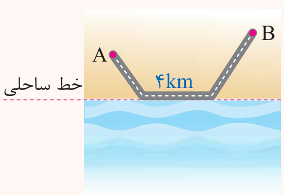
3 از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازهٔ L به سمت راست می‌رویم و به نقطهٔ N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکستهٔ AMNB برابر است با:

$$Min(AMNB)=|A'B'|+L$$



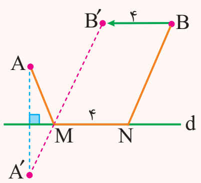
در این حالت زاویهٔ $\widehat{M}$ و زاویهٔ $\widehat{N}$ باید با هم برابر باشند.

Test **در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدودهٔ جادهٔ ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟**



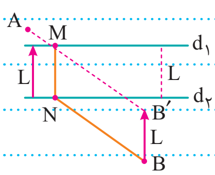
۱) بازتاب و دوران
۲) بازتاب و انتقال
۳) انتقال و تجانس
۴) دوران و تجانس

۲ باید نقطهٔ B را به اندازهٔ ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم وهمچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطهٔ M به دست آید اگر به اندازهٔ ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر است.



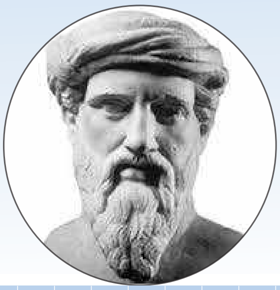
کاربرد مسئلهٔ هرون [تیپ چهارم]

دو خط d_1 و d_2 به فاصلهٔ L از هم قرار دارند، اگر نقاط A و B در طرفین d_1 و d_2 قرار گرفته باشند و پاره‌خط MN عمود بر هر دو خط d_1 و d_2 باشد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکستهٔ AMNB کافیست B را به اندازهٔ بردار L به موازات بردار L انتقال دهیم و از A به B' وصل کنیم تا خط d_1 را در M قطع کند، حال اگر از M عمودی بر d_2 رسم کنیم تا آن را در N قطع کند، در این صورت AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و اندازهٔ آن برابر است با:



$$Min(AMNB)=|AB'|+L$$

Pythagorsa
570-495 bc



Logitudinal Relations

CHAPTER 3

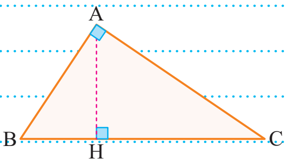
روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

Logitudinal Relations

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازهٔ پاره‌خط و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند، درهندسهٔ دهم علاوه بر رابطهٔ فیثاغورس [$a^2=b^2+c^2$] روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$AH^2 = BH \times HC$

$AH \times BC = AB \times AC$



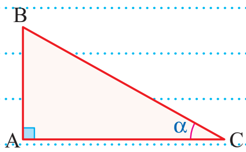
$AB^2 = BC.BH$

$AC^2 = BC.CH$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC}$



$\tan\alpha = \dfrac{AB}{AC}$

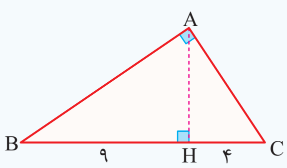
$\cot\alpha = \dfrac{AC}{AB}$

در جدول زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که معمولاً به آن‌ها نیاز داریم را می‌بینید:

زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
سینوس	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
کسینوس	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱
تانژانت	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

Test در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، AH ارتفاع نظیر وتر است. مساحت مثلث ABC چقدر است؟

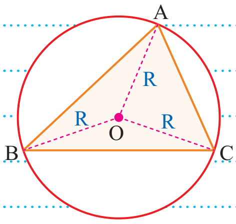
۱) ۲۸
۲) ۳۹
۳) ۳۶
۴) ۲۶



۲ ابتدا طول AH را به‌دست می‌آوریم و سپس به سراغ مساحت می‌رویم:

$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = ۴ \times ۹ \Rightarrow AH^2 = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶ \quad S_{ABC} = \dfrac{AH \times BC}{۲} = \dfrac{۶ \times ۱۳}{۲} = ۳۹$

قضیهٔ سینوس‌ها و نتایج آن

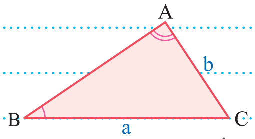


در هر مثلث نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابل به آن مقداری ثابت است و این مقدار ثابت با قطر دایرهٔ محیطی مثلث برابر است. [این رابطه به قضیهٔ سینوس‌ها مشهور است.]

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

یکی از نتایج قضیهٔ سینوس‌ها این است که در هر مثلث نسبت اضلاع با نسبت سینوس زاویهٔ مقابل به آن‌ها برابر است.

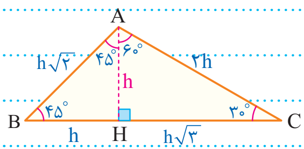
$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}}$$



نشان دهید، اگر در مثلثی دو ضلع برابر نباشند، ضلعی بزرگ‌تر است که زاویهٔ روبه‌رو به آن بزرگ‌تر باشد و برعکس.

$a>b \Leftrightarrow \frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B}>1 \Leftrightarrow \sin A>\sin B \Leftrightarrow \hat{A}>\hat{B}$

اگر یکی از زاویه‌های مثلثی، 75° یا 105° باشد، برای محاسبهٔ اندازهٔ ضلع روبه‌رو به آن از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده نمی‌کنیم. در این شرایط بهتر است که ارتفاع نظیر آن ضلع را رسم کنیم و سپس با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای 45° و 60° یا 45° و 30° اندازهٔ ارتفاع و ضلع‌ها را به‌دست آوریم.



در شکل مقابل زاویهٔ $\hat{A}=105^\circ$، با رسم ارتفاع AH به دو زاویهٔ 45° و 60° تقسیم شده و اندازهٔ اضلاع برحسب اندازهٔ ارتفاع h به‌دست آمده است:

اگر رابطه‌ای هم درجه بین اندازهٔ اضلاع مثلث برقرار باشد، می‌توان به جای اندازهٔ هر ضلع در رابطه، سینوس زاویهٔ مقابل به آن ضلع را جایگذاری کرد و برعکس.

در مثلث قائم‌الزاویه که رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ را داریم، رابطهٔ $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$ نیز برقرار است.

طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث $a<b+c$، بنابراین در همهٔ مثلث‌ها رابطهٔ $\sin A<\sin B+\sin C$ برقرار است.

اگر رابطه‌ای برحسب سینوس‌ها و کسینوس‌های زوایای مثلث داشته باشیم، ابتدا باید به کمک رابطهٔ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ تمام کسینوس‌ها را به سینوس تبدیل کنیم، سپس به جای سینوس هر زاویه، اندازهٔ ضلع مقابلش را جایگذاری کنیم.

Test در مثلث ABC با $BC=2$ ، $\hat{B}=75^\circ$ ، $\hat{C}=60^\circ$ طول ضلع AB چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) 3

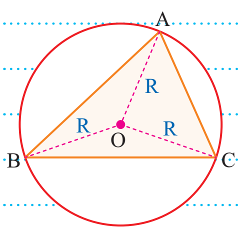
۱ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$$

حال طبق قضیهٔ سینوس‌ها، ضلع $c=AB$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ} \Rightarrow c=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$$

محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی در همهٔ حالات



برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی در هر مثلث، دو روش عمده وجود دارد:

۱ اگر اندازهٔ یک ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به آن معلوم باشد، با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{R=\frac{a}{2\sin A}}$$

۲ اگر اندازهٔ اضلاع معلوم باشد، ابتدا مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم و سپس از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$R=\frac{abc}{۴S}$$

در مثلث **قائم‌الزاویه**، شعاع دایرهٔ محیطی **نصف وتر** است و در مثلث **متساوی‌الاضلاع**، شعاع دایرهٔ محیطی به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ **ارتفاع** است.

در مثلث ABC اگر R شعاع دایرهٔ محیطی و r, r_a, r_b, r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی باشند، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$r_a+r_b+r_c=r+۴R$$

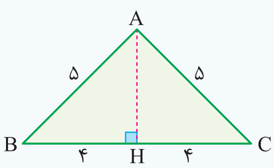
اگر شعاع سه دایره از ۴ دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی معلوم باشد، به کمک رابطهٔ زیر می‌توان چهارمین شعاع را به دست آورد:

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$$

بنابراین با داشتن سه شعاع از دایره‌های محاطی، در دو مرحله می‌توان شعاع دایرهٔ محیطی را محاسبه کرد.

Test **در مثلثی با اضلاع ۸ ,۵ ,۵ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟**

۱) ۴　　۲) $\frac{۲۵}{۸}$　　۳) ۳　　۴) $\frac{۲۵}{۶}$



۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ابتدا ارتفاع را رسم می‌کنیم و به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ ارتفاع را به‌دست می‌آوریم:

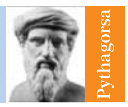
$$AH=\sqrt{AB^۲-BH^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$$

با معلوم بودن اندازهٔ ارتفاع، مساحت مثلث قابل محاسبه است:

$$S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{۳\times ۸}{۲}=۱۲$$

حال با در دست داشتن مساحت مثلث، می‌توانیم اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را به‌دست آوریم:

$$R=\frac{abc}{۴S}=\frac{۵\times ۵\times ۸}{۴\times ۱۲}=\frac{۲۵}{۶}$$

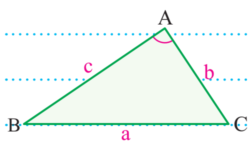


Lesson . 2　　صفحهٔ ۴۶ تا ۴۹ کتاب یازدهم　　قضیهٔ کسینوس‌ها　　درس دوم

قضیهٔ کسینوس‌ها و نتایج آن

Logitudinal Relations

در هر مثلث طبق **قضیهٔ کسینوس‌ها** مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دوبرابر حاصل‌ضرب آن‌ها در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها. [به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌توان با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، طول ضلع سوم را به دست آورد.]



$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc.\cos A$$

اگر اندازهٔ سه ضلع از مثلثی معلوم باشد، کسینوس هر زاویهٔ مثلث با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

اضلاع مثلثی با اعداد ۸ ,۷ ,۵ متناسب‌اند. کسینوس زاویهٔ متوسط در این مثلث کدام است؟

می‌دانیم زاویهٔ متوسط، روبه‌روی ضلع متوسط است:

$$\cos\alpha=\frac{(۵k)^۲+(۸k)^۲-(۷k)^۲}{۲\times(۵k)(۸k)}=\frac{۵^۲+۸^۲-۷^۲}{۲\times ۵\times ۸}=\frac{۲۵+۶۴-۴۹}{۲\times ۵\times ۸}=\frac{۴۰}{۲\times ۵\times ۸}=\frac{۱}{۲}$$

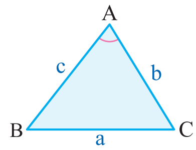
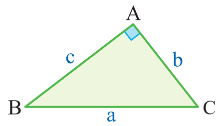
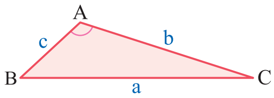
در مسائلی که یک رابطه بین مربعات سه ضلع از مثلث برقرار باشد، رابطهٔ داده شده را با قضیهٔ کسینوس‌ها مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم کسینوس یکی از زوایای مثلث را بیابیم.

اگر در مثلثی رابطهٔ $b^۲=a^۲+c^۲+\sqrt{۲}ac$ برقرار باشد، زاویهٔ B چقدر است؟

می‌دانیم در هر مثلث رابطهٔ $b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$ برقرار است، بنابراین:

$$a^۲+c^۲+\sqrt{۲}ac=a^۲+c^۲-۲ac\cos B \Rightarrow \cos B=-\frac{\sqrt{۲}ac}{۲ac}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \hat{B}=۱۳۵^\circ$$

تشخیص نوع زاویه‌ها در مثلث

$a^۲<b^۲+c^۲ \Leftrightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$	$a^۲=b^۲+c^۲ \Leftrightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$	$a^۲>b^۲+c^۲ \Leftrightarrow \hat{A}>۹۰^\circ$
		

بدیهی است اگر در مثلثی به دنبال یافتن زاویهٔ منفرجه هستیم، فقط باید مربع بزرگ‌ترین ضلع را با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مقایسه کنیم و نیازی نیست رابطه‌های بالا را برای اضلاع متوسط و کوچک بررسی کنیم؛ زیرا اگر بزرگ‌ترین زاویهٔ یک مثلث منفرجه نباشد [یعنی حاده یا قائمه باشد] قطعاً دو زاویهٔ دیگر نیز حاده هستند.

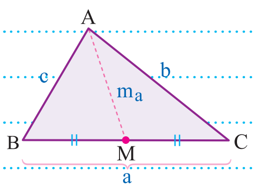
Test در مثلث ABC با اضلاع $۲\sqrt{۲}$ ، ۳ ، $\sqrt{۵}$ اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چقدر است؟

۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) $\cos^{-۱}(\frac{۲}{۳})$
۴) $\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})$

۲ می‌دانیم کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث، روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع است و در بین اعداد داده شده $a=\sqrt{۵}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است، پس داریم:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۳^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۵})^۲}{۲\times۳\times۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۲}{۱۲\sqrt{۲}} \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \hat{A}=۴۵^\circ$$

رابطهٔ طول میانه
Logitudinal Relations

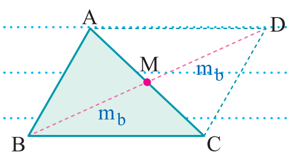


اگر نقطهٔ M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، رابطهٔ زیر بین اندازهٔ اضلاع مثلث و اندازهٔ میانهٔ AM برقرار است: [به این رابطه، قضیهٔ میانه‌ها می‌گویند.]

$$\boxed{۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}=b^۲+c^۲}$$

در هر مثلث، میانهٔ بزرگ‌تر به وسط ضلع کوچک‌تر وصل شده است، یعنی هرچه ضلع بزرگ‌تر باشد، میانهٔ نظیر آن کوچک‌تر است و برعکس.

اگر یکی از میانه‌های مثلث را به اندازهٔ خودش امتداد داده و به دو رأس مجاور وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید و رابطهٔ طول میانه به رابطهٔ $۲(\frac{BD}{۲})^۲+\frac{AC^۲}{۲}=AB^۲+BC^۲$ تبدیل می‌شود، با ساده کردن این رابطه به رابطهٔ زیر می‌رسیم که نشان می‌دهد در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات قطرها با مجموع مربعات همهٔ اضلاع برابر است:



$$\boxed{AC^۲+BD^۲=۲(AB^۲+BC^۲)}$$

در هر مثلث مجموع مربعات میانه‌ها با $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربعات اضلاع برابر است، یعنی اگر میانه‌های مثلث ABC را با m_a, m_b, m_c نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع a، b و c که a وتر آن است، داریم:

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+\underbrace{b^۲+c^۲}_{a^۲})\Rightarrow m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۲}a^۲=۱/۵a^۲$$