مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطورهٔ فوتبال جهانه!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل‌زدن بازیکنا می‌کنه، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه می‌شه و ... goooooal!

حالا برای این‌که مارادونای کنکورتون باشین، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم نکته‌باز!

در فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم، این‌طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم. علاوه بر همهٔ این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین، چون تو این کتابا همهٔ مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی‌سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگیت باش ...

مقدمه مؤلف

زندگی زیباست، زیبایی زندگی به ریاضیات و زیبایی ریاضیات به هندسه و زیبایی هندسه به یک نقطه و زیبایی نقطه به هیچ! «اینشتین»

سلام به مهندسان آینده!

بله کاملاً درسته! هندسه، سرآغاز مهندس‌شدن شماست. ما در این‌جا جمع شدیم تا مسیر شما رو راحت‌تر کنیم! مباحث مهم هندسهٔ ۱ و ۲ و ۳ رو جمع‌بندی کردیم، امّا بعدش رهاتون نکردیم. کلی تست همراه این نکات تقدیمتون کردیم که هم کلیات کتاب درسی و هم کنکور سال‌های اخیر رو پوشش بده، البته خلاصه! یادتون باشه هندسه اولش صبر زیاد می‌خواد که خودت رو عادت بدی و تست رو به تصویر بکشی! اطلاعات رو جمله‌به‌جمله روی تصویرت اضافه کنی. تو پاسخ‌نامهٔ تست‌ها یادتون دادم نکته‌ها رو عین پازل روی تصویرت چه‌طور بچینی و نیم نگاهی هم به خواستهٔ مسئلات داشته باشی! یهو یه جرقهٔ نهایی، آخرین تکهٔ پازل رو می‌چینه و جواب تست رو تو گزینه‌ها پیدا می‌کنی! نمی‌گم شما با مطالعهٔ چندهفته‌ای این کتاب یه دفعه درصد خودتون رو به ۶۰ تا ۸۰ درصد افزایش می‌دهید. ما در این کتاب‌های نکته‌باز، چشم‌بندی نمی‌کنیم، اما چشمتون رو به حقایق حل مسئله در هر درس باز می‌کنیم و سپس جمع‌بندی و خلاصه می‌کنیم!

در آخر تشکر می‌کنم از:

- مادرم که همیشه پشت و پناه و دلگرمی زندگی من هستند.
- تیم حرفه‌ای و شریف تألیف و تولید خیلی‌سبز که بهترین دلگرمی و همراه من در تمام مراحل تألیف این کتاب بودند، آقای پیام ابراهیم‌نژاد و آقای صارمی و بقیهٔ اساتید و بزرگواران.

منیره احمدی‌کیا- مهر ۱۴۰۲

@MonAhmadik

Mo.mo.ahmadikia@gmail.com

فهرست مطالب

پایهٔ دهم

پایهٔ یازدهم

پایهٔ دوازدهم

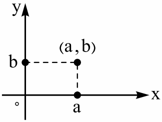
فصل دهم

بردارها

۹۵ معرفی فضای $\mathbb{R}^2$ و رسم نمودار در آن

هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه از صفحه را مشخص می‌کند.

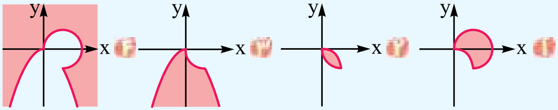
بنابراین مجموعهٔ $\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ شامل همهٔ نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند.



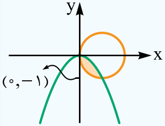
$$\mathbb{R}^2=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

برای رسم نمودار یک نابرابری در فضای $\mathbb{R}^2$، ابتدا علامت نامساوی را به مساوی تبدیل کرده، سپس نمودار را رسم می‌کنیم. در یک طرف نمودار نقطه‌ای دلخواه را انتخاب می‌کنیم و اگر مختصات آن در نابرابری صدق کرد، آن قسمت از نمودار که شامل آن نقطه است، محدودهٔ نابرابری است. در غیر این صورت طرف دیگر، جواب مسئله است.

تست **نمودار رابطهٔ** $\begin{cases}(x-2)^2+y^2\le 4\\ x^2\le -2y\end{cases}$ **در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟**

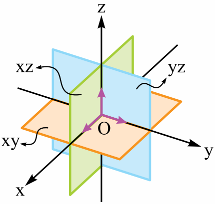


پاسخ **گزینهٔ ۲** نمودار $(x-2)^2+y^2\le 4$ نقاط درون و روی دایرهٔ به مرکز $(0,2)$ و شعاع ۲ است. همچنین سهمی قائم $x^2=-2y$ به رأس $(0,0)$ با دهانهٔ رو به پایین است. نقطهٔ $(0,-1)$ در نامعادلهٔ $x^2\le -2y$ صدق می‌کند، پس نمودار آن شامل نقاط داخل و روی سهمی است؛ بنابراین اشتراک داخل دایره و سهمی به صورت مقابل است:



۹۶ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

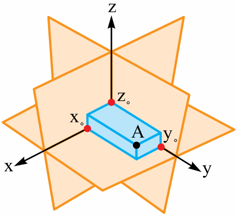
هر نقطه از فضا دقیقاً توسط یک سه‌تایی مرتب مانند (a,b,c) مشخص می‌شود و بالعکس. بنابراین مجموعهٔ $\mathbb{R}^3=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$ شامل همهٔ نقاط فضا است.



مطابق شکل فضای $\mathbb{R}^3$ شامل سه محور عمود بر هم x و y و z و سه صفحهٔ عمود بر هم xy و yz و xz می‌باشد که فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند.

$O(0,0,0)$ مبدأ مختصات است.

نمایش نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$: برای نمایش نقطهٔ $A(x_0,y_0,z_0)$ در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ ابتدا نقطهٔ (x_0,y_0) در صفحهٔ xy را مشخص کرده و سپس ارتفاع آن را به اندازهٔ z_0 در راستای موازی با محور zها تغییر می‌دهیم.



علامت مؤلفه‌های x، y و z در هر یک از ۸ ناحیهٔ فضای $\mathbb{R}^3$ مطابق جدول زیر می‌باشد:

علامت محورها			شمارهٔ ناحیه
z	y	x	
$+$	$+$	$+$	۱
$+$	$+$	$-$	۲
$+$	$-$	$-$	۳
$+$	$-$	$+$	۴
$-$	$+$	$+$	۵
$-$	$+$	$-$	۶
$-$	$-$	$-$	۷
$-$	$-$	$+$	۸

تصویر نقطهٔ $A(x,y,z)$ در فضا:

تصویر روی صفحهٔ xy	تصویر روی صفحهٔ yz	تصویر روی صفحهٔ xz
$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

تصویر روی محور xها	تصویر روی محور yها	تصویر روی محور zها
$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$

قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ در فضا:

نسبت به مبدأ	نسبت به محور xها	نسبت به محور yها	نسبت به محور zها
$(-x,-y,-z)$	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$

نسبت به صفحه xz	نسبت به صفحه yz	نسبت به صفحه xy
$(x,-y,z)$	$(-x,y,z)$	$(x,y,-z)$

۹۷ فاصلهٔ دو نقطه در فضا

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ که همان طول پاره‌خط AB می باشد، برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از مبدأ یا محورها یا صفحات مختصات به صورت زیر است:

فاصله از محور zها	فاصله از محور yها	فاصله از محور xها	فاصله از مبدأ
$\sqrt{x^2+y^2}$	$\sqrt{x^2+z^2}$	$\sqrt{y^2+z^2}$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

فاصله از صفحه xz	فاصله از صفحه yz	فاصله از صفحه xy
$\|y\|$	$\|x\|$	$\|z\|$

تست فاصلهٔ نقطهٔ A از محور xها، yها و zها به ترتیب ۳، ۴ و ۷ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{37}$ ۲) $\sqrt{34}$ ۳) $\sqrt{30}$ ۴) $\sqrt{29}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** با توجه به فاصلهٔ نقطهٔ A از محورهای مختصات داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+z^2}=3\\ \sqrt{x^2+z^2}=4\\ \sqrt{x^2+y^2}=7\end{cases}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\begin{cases}y^2+z^2=9\\ x^2+z^2=16\\ x^2+y^2=49\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 2x^2+2y^2+2z^2=74$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2+y^2+z^2=37$$

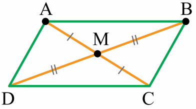
بنابراین فاصلهٔ A از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{37}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است.

۹۸ مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ باشند، مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{2}=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$$

۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD چون قطرها همدیگر را نصف می‌کنند داریم:



$$A+C=B+D \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \\ z_A+z_C=z_B+z_D \end{cases}$$

۲ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta,\gamma)$ به صورت $(2\alpha-x,2\beta-y,2\gamma-z)$ است.

تست **قرینهٔ نقطهٔ A به مختصات $(2-m,m,-m)$ نسبت به نقطهٔ $B(-1,1,2)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد. مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ M وسط AB کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

پاسخ **گزینهٔ ۱** ابتدا مقدار m را پیدا می‌کنیم:

$A(2-m,m,-m)$

$$\xrightarrow[(-۱,۱,۲)]{\text{قرینه نسبت به}} A'(۲(-۱)-(۲-m),۲(۱)-m,۲(۲)-(-m))$$

$$A' = (m-۴,۲-m,m+۴) \xrightarrow{A' \text{ روی صفحهٔ } xy} m+۴=۰$$

$$\Rightarrow m=-۴ \quad \Rightarrow \quad A(۶,-۴,۴)$$

بنابراین داریم: $M = \frac{A+B}{۲} = (\frac{۶+(-۱)}{۲}, \frac{-۴+۱}{۲}, \frac{۴+۲}{۲})$

$$\Rightarrow M(۲/۵,-۱/۵,۳)$$

مجموع مؤلفه‌های M برابر $۲/۵-۱/۵+۳=۴$ است.

۹۹ معادلات محورها و صفحات مختصات

معادلهٔ محور xها	معادلهٔ محور yها	معادلهٔ محور zها
$\begin{cases} y=۰ \\ z=۰ \end{cases}$	$\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$	$\begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases}$

معادلهٔ صفحهٔ xy	معادلهٔ صفحهٔ xz	معادلهٔ صفحهٔ yz
$z=۰$	$y=۰$	$x=۰$

معادلهٔ خط موازی محور xها (عمود بر صفحهٔ yoz)	معادلهٔ خط موازی با محور yها	معادلهٔ خط موازی با محور zها
$\begin{cases} y=\beta \\ z=\gamma \end{cases}$	$\begin{cases} x=\alpha \\ z=\gamma \end{cases}$	$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$

معادلهٔ صفحهٔ موازی yoz به فاصلهٔ $\|k\|$ از آن	معادلهٔ صفحهٔ موازی xoz به فاصلهٔ $\|k\|$ از آن	معادلهٔ صفحهٔ موازی xoy به فاصلهٔ $\|k\|$ از آن
$x=k$	$y=k$	$z=k$

مثال معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۳,۲,۳)$ موازی محور xها رسم شود، به فرم $\begin{cases} y=۲ \\ z=۳ \end{cases}$ است.

تست فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha+۲,۶,۳)$ از مبدأ مختصات برابر ۹ است. معادلهٔ خطی که از این نقطه می‌گذرد و بر صفحهٔ xoz عمود است، کدام است؟

۱) $\begin{cases} x=۶ \\ y=۶ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x=-۶ \\ y=۶ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x=-۶ \\ z=۳ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x=۶ \\ z=-۳ \end{cases}$

پاسخ گزینهٔ ۳

$$|OA|=\sqrt{\underbrace{(\alpha+۲)^۲}_{\alpha^۲+۴\alpha+۴}+۶^۲+۳^۲}=۹$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha-۳۲=۰ \Rightarrow \alpha=۴,-۸$$

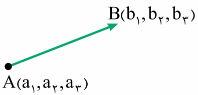
$A(۶,۶,۳)$ یا $A(-۶,۶,۳)$

پس معادلهٔ خطی که از A می‌گذرد و بر صفحهٔ xoz عمود است (یعنی موازی با محور yها) به دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=-۶ \\ z=۳ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=۶ \\ z=۳ \end{cases}$$

۱۰۰ بردار

هر پاره‌خط جهت‌داری را که دارای طول، راستا و جهت باشد، بردار می‌نامیم. برای به دست آوردن طول و مؤلفه‌های یک بردار از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

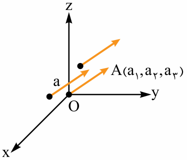


$$\overrightarrow{AB}=\text{مختصات انتها}-\text{مختصات ابتدا}=(b_۱-a_۱,b_۲-a_۲,b_۳-a_۳)$$

طول بردار $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

۱ برداری که ابتدا و انتهای آن یک نقطه باشد را بردار صفر می‌نامیم و به صورت $\vec{O}=(0,0,0)$ نمایش می‌دهیم.

۲ دو بردار همسنگ (مساوی یا هم‌ارز) دارای اندازه و جهت یکسان هستند و نقطهٔ ابتدایی در بردارهای مساوی، می‌تواند متفاوت باشد.



برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات است را به عنوان نمایندهٔ بردارهای همسنگ در نظر می‌گیریم: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$

$$|\vec{a}|=|OA|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

۳ بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را برحسب بردارهای یکهٔ $\vec{i}=(1,0,0)$، $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

۴ برای یافتن تصویر یا قرینهٔ یک بردار نسبت به محورها و صفحات مختصات مثل نکات گفته‌شده برای نقطه رفتار می‌کنیم. مثلاً اگر $\vec{a}(2,-1,3)$ باشد:

قرینهٔ $\vec{a}$ نسبت به مبدأ: $\vec{a}=(-2,1,-3)$

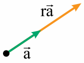
تصویر $\vec{a}$ روی صفحه xy: $\vec{b}=(2,-1,0)$

۱۰۱ ضرب عدد در بردار

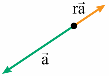
فرض کنید r یک عدد حقیقی و $\vec{a}(x,y,z)$ یک بردار باشد، در این صورت:

$$r\vec{a}=(rx,ry,rz)$$

اگر $r>0$ باشد، $r\vec{a}$ هم‌جهت با $\vec{a}$ است:



اگر $r<0$ باشد، $r\vec{a}$ مخالف جهت $\vec{a}$ است:



نتایج مهم

۱ طول بردار $r\vec{a}$، $|r|$ برابر طول بردار $\vec{a}$ می‌باشد: $|r\vec{a}|=|r||\vec{a}|$

۲ اگر r و s دو عدد حقیقی و $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند:

$$(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a} \qquad (rs)\vec{a}=r(s\vec{a})=s(r\vec{a})$$

$$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$$

۳ دو بردار موازی هستند اگر و تنها اگر یکی از آن‌ها، مضرب دیگری باشد:

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=r\vec{b} \quad (\vec{a},\vec{b}\neq\vec{o}, r\neq ۰)$$

به عبارتی اگر $\vec{a}(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{b}(x_۲,y_۲,z_۲)$ موازی باشند:

$$\frac{x_۱}{x_۲}=\frac{y_۱}{y_۲}=\frac{z_۱}{z_۲}$$

تست **اگر نقاط $A(-۱,۲,۰)$، $B(۲,-۲,۳)$ و $C(m,n,۴)$ روی یک خط راست باشند، طول بردار $\overrightarrow{OC}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۱۴}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** چون هر سه نقطه در یک راستا هستند پس $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$ است، بنابراین:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۲,-۲,۳)-(-۱,۲,۰)=(۳,-۴,۳)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(m-۲,n+۲,۱)$$

شرط موازی‌بودن: $\frac{۳}{m-۲}=\frac{-۴}{n+۲}=\frac{۳}{۱} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۳}{m-۲}=۳ \Rightarrow m=۳\\ \frac{-۴}{n+۲}=۳ \Rightarrow n=-\frac{۱۰}{۳}\end{cases}$

$$\overrightarrow{OC}=(۳,\frac{-۱۰}{۳},۴) \Rightarrow |\overrightarrow{OC}|=\sqrt{۳^۲+(\frac{-۱۰}{۳})^۲+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۳}$$

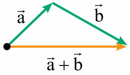
۱۰۲ جمع و تفریق دو بردار

۱. به صورت تحلیلی: کافی است مؤلفه‌های نظیر دو بردار را با هم جمع یا تفریق کنیم:

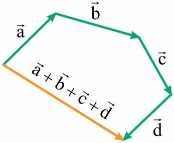
$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \\ \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3) \end{cases}$$

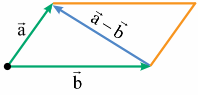
۲. روش مثلث: اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به گونه‌ای باشند که ابتدای یکی بر انتهای دیگری منطبق باشد، مجموع آن‌ها برداری است که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار دومی وصل می‌کند.



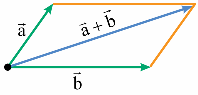
توجه اگر مطابق شکل، چند بردار از انتهای بردار قبلی شروع شوند، برای محاسبهٔ بردار مجموع آن‌ها، کافی است از ابتدای اولی به انتهای آخری، برداری را رسم کنیم.



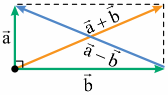
۳. روش متوازی‌الاضلاع: اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از یک مبدأ مشترک شروع شده باشند، مطابق شکل‌های زیر از انتهای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی آن‌ها رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع حاصل شود. در این صورت قطرهای متوازی‌الاضلاع $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ خواهند بود:



$\vec{a}-\vec{b}$ از انتهای بردار $\vec{b}$ که بردار دوم است، آغاز می‌شود. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



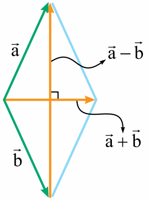
$\vec{a}+\vec{b}$ از مبدأ مشترک آغاز می‌شود.



۱ اگر a و b بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود و داریم:

$$|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b| \Leftrightarrow \vec a\perp\vec b$$

(قطرهای مستطیل برابرند.)



۲ اگر $\vec a$ و $\vec b$ با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به لوزی می‌شود:

$$(\vec a+\vec b)\perp(\vec a-\vec b) \Leftrightarrow |\vec a|=|\vec b|$$

(قطرهای لوزی بر هم عمودند.)

تست **با فرض $\vec a=(۳,m,۵)$ و $\vec b=(۳-m,۷,۰)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $\vec a+\vec b$ و $\vec a-\vec b$ بر هم عمودند. قرینهٔ بردار $۲\vec a$ نسبت به صفحهٔ xoy کدام است؟**

۱) $(-۶,-۸,۱۰)$ ۲) $(۶,۸,۰)$ ۳) $(۶,۸,-۱۰)$ ۴) $(۰,۰,۱۰)$

پاسخ **گزینهٔ ۳** چون $\vec a+\vec b$ و $\vec a-\vec b$ بر هم عمودند، پس متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$، حتماً لوزی است. در نتیجه: $|\vec a|=|\vec b|$ و داریم:

$$۹+m^۲+۲۵=(۳-m)^۲+۴۹+۰ \Rightarrow m=۴$$

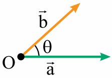
$$۲\vec a=(۶,۲m,۱۰)=(۶,۸,۱۰)$$

در قرینهٔ یک بردار نسبت به صفحهٔ xoy، فقط مؤلفهٔ z آن قرینه می‌شود، یعنی $(۶,۸,-۱۰)$.

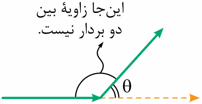
۱۰۳ ضرب داخلی دو بردار

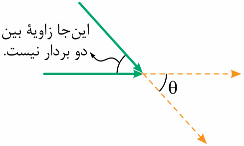
ضرب داخلی دو بردار $\vec a(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec b(b_۱,b_۲,b_۳)$ را با نماد $\vec a\cdot\vec b$ نشان داده و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $\vec a\cdot\vec b=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$

تعبیر هندسی: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، ضرب داخلی آن‌ها برابر است با: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



توجه حواستان باشد که منظور از زاویهٔ بین دو بردار، کوچک‌ترین زاویه‌ای است که دو بردار هم‌ابتدا با یکدیگر می‌سازند. به شکل‌های زیر توجه کنید:





تست اگر دو بردار $\vec{a}=(m,۳,-۲)$ و $\vec{b}=(-۱,m,۲)$ اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع به زاویهٔ ۱۲۰° باشند و $|\vec{a}|=۴$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۵}$

پاسخ گزینهٔ ۱

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=۴|\vec{b}|\times\underbrace{\cos۱۲۰^\circ}_{-\frac{۱}{۲}}=-۲|\vec{b}|\\&\vec{a}\cdot\vec{b}=(m,۳,-۲).(-۱,m,۲)\\&=-m+۳m-۲(۲)=۲m-۴\end{aligned}\right\}\Rightarrow -۲|\vec{b}|=۲m-۴$$

$$\xrightarrow{\div۲}|\vec{b}|=-m+۲$$

از طرفی $|\vec{b}|=\sqrt{(-۱)^۲+m^۲+۲^۲}=\sqrt{m^۲+۵}$ ؛ بنابراین:

$$-m+۲=\sqrt{m^۲+۵}\Rightarrow(-m+۲)^۲=m^۲+۵$$

$$\Rightarrow\ m^2+4-4m=m^2+5 \Rightarrow m=\frac{-1}{4}$$

$$|\vec{b}|=-m+2=\frac{+1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار:

۱ ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

۲ ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازهٔ بردار است.

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

۳ ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

۴ طرفین یک تساوی برداری را می‌توان در برداری دلخواه ضرب داخلی کرد. *(برعکسش همواره درست نیست.)*

$\overrightarrow{\square}=\overrightarrow{\triangle} \Rightarrow \vec{a}.\overrightarrow{\square}=\vec{a}.\overrightarrow{\triangle}$

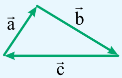
اتحادها در بردارها:

۱ $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

۲ $|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm 2\vec{a}.\vec{b}$

۳ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})$

تست سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ واحد مطابق شکل روبه‌رو قرار دارند. مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ برابر کدام است؟



(سراسری و مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) -12 ۴) -10

پاسخ گزینهٔ ۱ مطابق شکل چون $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ است، بنابراین:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\vec{a}+\vec{b})^2=(-\vec{c})^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|^2 \Rightarrow 3^2+4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=7^2$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=24 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=12$$

۱۰۴ زاویهٔ بین دو بردار

اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

نتایج ۱ اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ **موازی** باشند:

$$\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$$

۲ اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم **عمود** باشند:

$$\theta=90^\circ \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

تست **دو بردار که اندازهٔ یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویهٔ 60° می‌سازند. اندازهٔ زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟** (سراسری ۱۴۰۱)

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 120°

پاسخ گزینهٔ ۱ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با طول‌های x و $2x$ در نظر می‌گیریم که زاویهٔ بین آن‌ها 60° باشد:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=x\times 2x\times\frac{1}{2}=x^2$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ تفاضل دو بردار یعنی $|\vec{b}-\vec{a}|$ می‌توانیم از اتحاد استفاده کنیم:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=(2x)^2+(x)^2-2(x^2)=3x^2$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|=x\sqrt{۳}$$

حالا اگر زاویهٔ بین $\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ را θ بنامیم، داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}||\vec{b}-\vec{a}|}=\frac{|\vec{b}|^{۲}-\overbrace{\vec{b}.\vec{a}}^{\vec{a}.\vec{b}}}{|\vec{b}||\vec{b}-\vec{a}|}$$

$$=\frac{(۲x)^{۲}-x^{۲}}{(۲x)(x\sqrt{۳})}=\frac{۳x^{۲}}{۲\sqrt{۳}x^{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \boxed{\theta=۳۰^\circ}$$

تست بردارهای $\vec{a}=(۱,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۳,۲,m)$ بر هم عمودند و بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}=(n,m,p)$ با هم موازی‌اند. حاصل $۲n-۶p+۳m$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{-۱۵}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۳ چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۰\Rightarrow(۱,-۱,۳).(۳,۲,m)=۰$$

$$۳-۲+۳m=۰\Rightarrow \boxed{m=-\frac{۱}{۳}}$$

هم‌چنین $\vec{c}$ و $\vec{b}$ موازی هستند، بنابراین:

$$\vec{b}\,||\,\vec{c}\Rightarrow\frac{۳}{n}=\frac{۲}{m}=\frac{m}{p}\xrightarrow{m=\frac{-۱}{۳}}\frac{۳}{n}=-۶=\frac{-۱}{۳p}$$

$$\Rightarrow \boxed{n=\frac{-۱}{۲}}\ ,\ \boxed{p=\frac{۱}{۱۸}}$$

در نتیجه حاصل $۲n-۶p+۳m$ برابر است با:

$$۲n-۶p+۳m=۲(-\frac{۱}{۲})-۶(\frac{۱}{۱۸})+۳(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۷}{۳}$$