فهرست

نمونه سؤال امتحانی

90 min

بارم‌بندی درس هندسه ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۹	۳
دوم	۱۱	۴
سوم	-	۷
چهارم	-	۶
جمع	۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال ۱

فصل اول هندسه (۱) در امتحان نوبت اول ۹ نمره و در امتحان نوبت دوم و شهریور ۳ نمره دارد.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

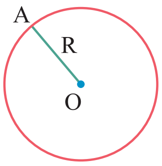
فصل ۱

بستهٔ اول

ترسیم‌های هندسی

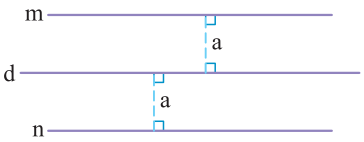
صفحه ۱۰ تا ۱۶ کتاب درسی

دایره



مجموعهٔ همهٔ نقاطی در صفحه که از یک نقطهٔ ثابت مانند O (در همان صفحه)، به فاصلهٔ معلومی مانند R قرار دارند، دایره گفته می‌شود. O را مرکز و R را شعاع دایره می‌نامند.

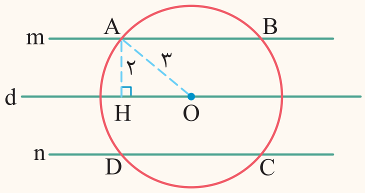
مجموعه نقاطی که از یک خط معلوم به فاصلهٔ ثابتی هستند



همهٔ نقطه‌هایی که از خط معلوم d به فاصلهٔ ثابت a واقع‌اند، دو خط موازی (خط‌های m و n) و به فاصلهٔ a از خط d هستند.

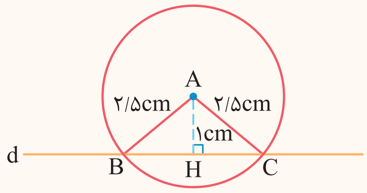
سؤال نقطهٔ O روی خط d واقع است. همهٔ نقاطی را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ واحد و از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد هستند.

پاسخ همهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد قرار دارند روی دو خط m و n و موازی با خط d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن واقع‌اند. از طرفی همهٔ نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است. مطابق شکل این دایره و خط‌های m و n در چهار نقطهٔ A، B، C و D متقاطع‌اند که جواب هستند.

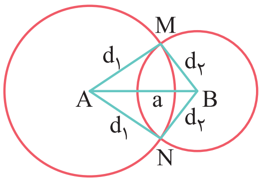


سؤال نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.

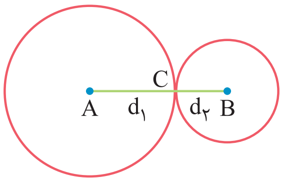
پاسخ همهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند. چون فاصلهٔ A از خط d برابر یک سانتی‌متر است، پس این دایره خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند و این نقاط جواب‌اند.



تعیین نقطه‌ای که از دو نقطهٔ ثابت به فاصله‌های معلوم باشد



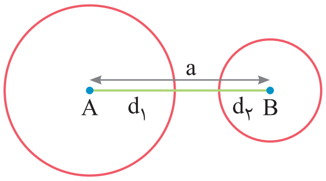
فرض کنیم A و B دو نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ a از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از A به فاصلهٔ d_1 و از B به فاصلهٔ d_2 باشد، دو دایره یکی به مرکز A و شعاع d_1 و دیگری به مرکز B و شعاع d_2 رسم می‌کنیم، نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است.



آ) اگر $d_1 + d_2 > a$ باشد، آن‌گاه مطابق شکل فوق، دو دایره در نقاط M و N متقاطع‌اند و مسأله دو جواب دارد.

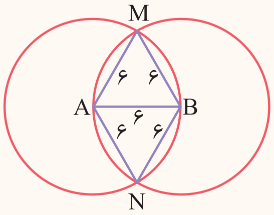
ب) اگر $d_1 + d_2 = a$ باشد، آن‌گاه دو دایره در نقطهٔ C مماس می‌شوند و این نقطه جواب است.

پ) اگر $d_1 + d_2 < a$ باشد، آن‌گاه دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسأله جواب ندارد.



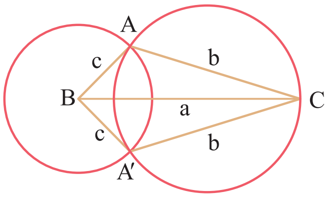
سؤال **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.**

پاسخ دایره‌هایی به مرکز A و B و شعاع‌های ۶ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها یعنی M و N جواب هستند.



رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

ابتدا یکی از سه ضلع داده شده (مثلاً بزرگ‌ترین ضلع) را رسم می‌کنیم $(BC = a)$، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b دو دایره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A یا A' معلوم می‌شود.

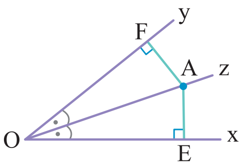


آ) اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب هم‌نهشت دارد. مثلث‌های ABC و $A'BC$ که با یکدیگر به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. بنا به قرارداد، این دو مثلث، یک جواب محسوب می‌شوند.

ب) اگر دو دایره مماس باشند، در این صورت مسئلهٔ جواب ندارد.

پ) اگر دو دایره متقاطع نباشند، در این‌صورت مسئله جواب ندارد.

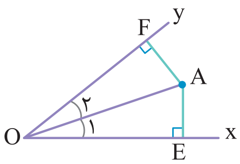
نیمساز یک زاویه



آ) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، فاصلهٔ نقطه از دو ضلع آن زاویه یکسان است، یعنی در شکل مقابل داریم:

$AE = AF$

ب) عکس خاصیت قبل نیز درست است، یعنی اگر نقطه‌ای درون یک زاویه به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع آن باشد، آن‌گاه نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در شکل زیر با فرض $AE = AF$، داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



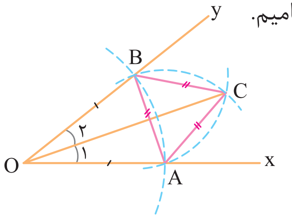
رسم نیمساز یک زاویه

زاویهٔ xOy مفروض است. می‌خواهیم نیمساز آن را رسم کنیم.

آ) نقطهٔ A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم، کمانی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند، داریم $OA = OB$

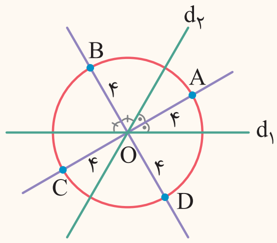
ب) به مرکز A و شعاع AB و بار دیگر به مرکز B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

پ) OC نیمساز زاویهٔ xOy است، زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



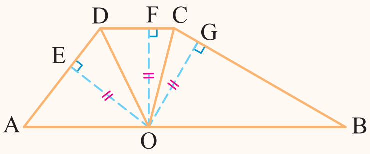
سؤال دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروضند. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد و از هر یک از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشد.

پاسخ نقطه‌ای که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله قرار دارد، روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از نقطهٔ O (محل تلاقی دو خط) به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر است، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر قرار دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است. یعنی نقاط A ، B ، C و D



سؤال اندازه‌های دو ساق یک ذوزنقه ۳ و ۵ و اندازهٔ قاعدهٔ کوچک آن ۲ است. نقطه‌ای روی قاعدهٔ بزرگ آن از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به یک فاصله است. محیط ذوزنقه را به‌دست آورید.

پاسخ بنا به فرض $OG = OE = OF$ ، لذا نقطهٔ O از دو ضلع زاویهٔ ADC به یک فاصله و در نتیجه O روی نیمساز این زاویه است. هم‌چنین O روی نیمساز زاویهٔ DCB است. در نتیجه:



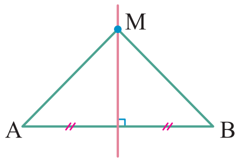
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \ , \text{مورب}\ OD \Rightarrow A\hat{O}D = O\hat{D}C \\ O\hat{D}C = O\hat{D}A \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{D}A = A\hat{O}D \Rightarrow OA = AD$$

با استدلال مشابه داریم $OB = BC$ ، پس $AB = OA + OB = AD + BC$ ، در نتیجه:

$$\text{محیط}\ ABCD = AB + AD + CD + BC = \underbrace{AD + BC}_{AB} + AD + CD + BC = ۳ + ۵ + ۳ + ۲ + ۵ = ۱۸$$

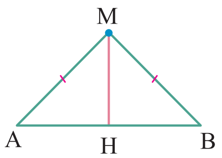
عمودمنصف یک پاره‌خط

خطی که از نقطهٔ وسط یک پاره‌خط بر آن عمود می‌شود، **عمود منصف آن پاره‌خط** نامیده می‌شود.



آ) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

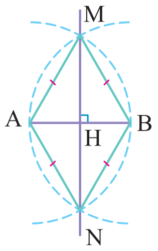
یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$



ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

جهت اثبات آن، کافی است M را به H وسط AB وصل کنیم و ثابت کنیم $MH \perp AB$

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



پاره‌خط AB مفروض است.

(آ) کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم.

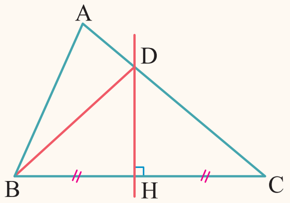
(ب) کمانی به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم.

(پ) نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم.

(ت) خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

سؤال **در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید اختلاف محیط‌های دو مثلث ABC و ABD برابر طول ضلع BC است.**

پاسخ مطابق شکل مقابل، عمود منصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کرده است، پس $BD = CD$ و در نتیجه $AC = AD + CD = AD + BD$ است و داریم:

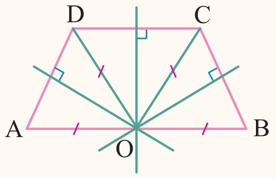


$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABD} = AB + \underbrace{BD + AD} = AB + AC$$

$$(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}) - (\text{محیط } \overset{\Delta}{ABD}) = (AB + AC + BC) - (AB + AC) = BC$$

سؤال **در یک ذوزنقه، عمود منصف‌های ساق‌ها و قاعدهٔ کوچک، روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند. ثابت کنید ذوزنقه، متساوی‌الساقین است.**

پاسخ مطابق شکل، عمودمنصف‌های ساق‌های AD و BC و قاعدهٔ کوچک CD در نقطهٔ O روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند، پس داریم:



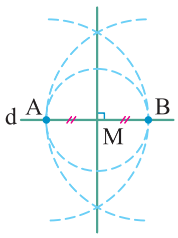
$$OB = OC = OD = OA$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{مورب } OC \Rightarrow O\hat{C}D = B\hat{O}C \\ AB \parallel CD, \text{مورب } OD \Rightarrow A\hat{O}D = O\hat{D}C \\ OC = OD \Rightarrow O\hat{C}D = O\hat{D}C \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}D = B\hat{O}C$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = OA \\ B\hat{O}C = A\hat{O}D \\ OC = OD \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{BOC} \cong \overset{\Delta}{AOD} \Rightarrow AD = BC$$

پس ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی‌الساقین است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن خط



خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است.

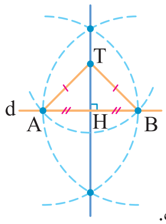
(آ) نقطهٔ A متمایز از نقطهٔ M را روی خط در نظر می‌گیریم.

(ب) به مرکز M و شعاع MA، دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی دیگر دایره با خط d را، نقطهٔ B می‌نامیم.

(پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

(ت) این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط



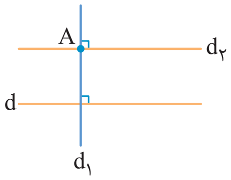
خط d و نقطهٔ T غیرواقع بر آن، مفروض است.

آ) نقطهٔ A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است. در غیر این صورت:

ب) به مرکز T و شعاع TA، کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی دیگر آن را با خط d، B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، این عمودمنصف، همان خطی است که از نقطهٔ T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$) و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط داده‌شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است.

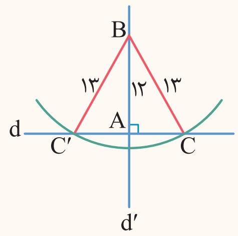
آ) از نقطهٔ A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

ب) در نقطهٔ A خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.

پ) دو خط عمود بر یک خط موازیند، لذا خط d_2 از نقطهٔ A گذشته و موازی خط d است.

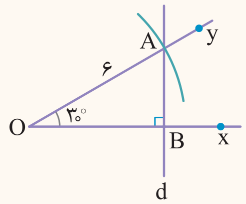
سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن به‌ترتیب ۱۳ و ۱۲ باشند.

پاسخ خط d را در نظر می‌گیریم. در نقطهٔ A روی آن، خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۱۲ جدا می‌کنیم و به مرکز B و شعاع ۱۳ کمانی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. دو مثلث هم‌نهشت ABC و ABC' جواب هستند.



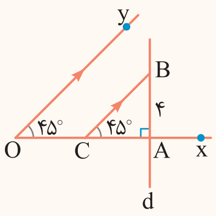
سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ وتر آن ۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ حادهٔ آن ۳۰° باشد.

پاسخ ابتدا زاویهٔ xOy را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم. از نقطهٔ A خط d را عمود بر نیم‌خط Ox رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Ox را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB جواب است.



سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک ضلع آن ۴ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، ۴۵ درجه باشد.

پاسخ ابتدا زاویهٔ xOy به اندازهٔ ۴۵° را رسم می‌کنیم، سپس نقطهٔ دلخواه A را روی Ox در نظر می‌گیریم و در این نقطه خط d را عمود بر Ox رسم می‌کنیم. حال پاره‌خط AB را روی خط d به اندازه ۴ جدا می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Ox یا امتداد آن را C می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.



بسته ۱ پرسش‌های تشریحی
ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به‌طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.

۲. توضیح دهید چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ سانتی‌متر رسم کرد.

۳. نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسأله فوق:

آ) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

۴. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۵. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۹ و ۱۲ و زاویهٔ بین آن‌ها 45° باشد، چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۶. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸ سانتی‌متر باشد. چند مستطیل با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۷. یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ باشد.

۸. یک لوزی رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطرش ۸ باشد.

۹. دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

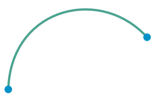
آ) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویه، ۳ واحد باشد.

ب) با استفاده از قسمت (آ)، نیمساز زاویهٔ مورد نظر را رسم کنید.

۱۰. دو نقطهٔ A و B داخل زاویهٔ xOy مفروض هستند. نقطه‌ای داخل آن چنان بیابید که از دو ضلع زاویه و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. چند نقطه با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۱۱. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R وتر AB رسم شده است. ثابت کنید عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد.

۱۲. در شکل مقابل قسمتی از یک دایره داده شده است. مرکز این دایره را تعیین کنید.



۱۳. مستطیلی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۴ باشد.

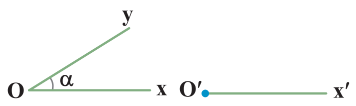
۱۴. ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۱۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای داخل یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۱۶. ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۱۷. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

۱۸. مطابق شکل، زاویهٔ معلوم xOy به اندازهٔ α و نیم‌خط $O'x'$ داده شده‌اند. زاویهٔ $x'O'y'$ را چنان رسم کنید که اندازهٔ آن برابر α باشد.



۱۹. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن به‌ترتیب ۳۹ و ۱۲ سانتی‌متر باشند.

۲۰. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ دو ضلع آن ۱۷ و ۱۰ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ باشد.

۲۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد.

۲۲. اندازه‌های دو ضلع مثلثی و میانهٔ نظیر ضلع سوم آن معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲۳. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۴ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

۲۴. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۶ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

بسته دوم

استدلال

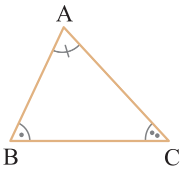
صفحه ۱۷ تا ۲۷ کتاب درسی

استدلال

- **استدلال استقرایی:** روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.
- **استدلال استنتاجی:** روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.
- **قضیه و عکس قضیه:** برخی نتایج مهم و کلی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شوند و اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، آن‌چه که حاصل می‌شود، عکس قضیه گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

قضیه ۱ مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث، برابر 180° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

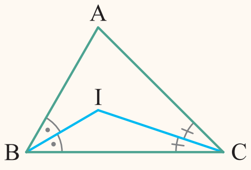


سؤال ثابت کنید در هر مثلث، زاویهٔ حاصل از برخورد دو نیمساز داخلی برابر است با نصف زاویهٔ سوم به‌علاوه 90°

پاسخ

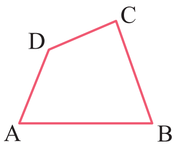
$$\begin{aligned}&\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\&\overset{\Delta}{BIC}:\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\hat{I}=180^\circ\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\\hat{B}+\hat{C}+2\hat{I}=360^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}2\hat{I}-\hat{A}=180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{I}=180^\circ+\hat{A}\Rightarrow\hat{I}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$



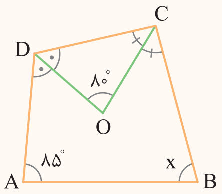
قضیه ۲ مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب، برابر 360° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$$



سؤال نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محدب، یکدیگر را با زاویهٔ 80° قطع می‌کنند. اگر اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر 85° و x باشد، مقدار x را بیابید.

پاسخ



$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\\\frac{\hat{D}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+80^\circ=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}85^\circ+x+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\\\hat{C}+\hat{D}=200^\circ\end{cases}\Rightarrow x=360^\circ-200^\circ-85^\circ=75^\circ$$

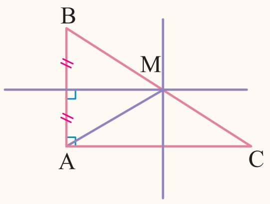
قضیه ۳ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند.

قضیه ۴ سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

قضیه ۵ سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث همرسند.

سؤال ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف اضلاع در وسط وتر همرسند.

پاسخ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. عمودمنصف ضلع AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن را با وتر BC، M می‌نامیم. داریم $MA=MB$ و می‌توان نوشت:

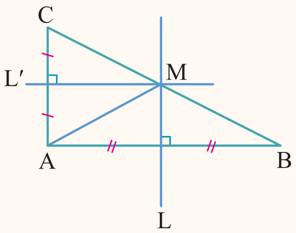


$$\left.\begin{aligned}&MA=MB\Rightarrow B\hat{A}M=\hat{B}\\&M\hat{A}C=90^\circ-B\hat{A}M\end{aligned}\right\}\Rightarrow M\hat{A}C=90^\circ-\hat{B}\xrightarrow{\hat{C}=90^\circ-\hat{B}}M\hat{A}C=\hat{C}\Rightarrow MA=MC$$

تساوی اخیر یعنی M روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و هم‌چنین از $MA=MB$ و $MA=MC$ نتیجه می‌شود $BM=MC$. بنابراین M نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در وسط وتر است.

سؤال **ثابت کنید اگر در مثلثی نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی ضلع مثلث قرار گیرد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.**

پاسخ مطابق شکل در مثلث ABC فرض کنیم عمودمنصف اضلاع AB ، AC و BC در نقطهٔ M روی ضلع BC همرسند. از M به A وصل می‌کنیم، داریم:

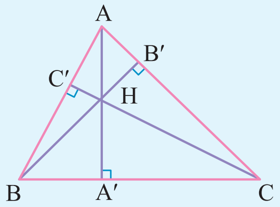


$$\left.\begin{array}{l} M \in L \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} \\ M \in L' \Rightarrow MA = MC \Rightarrow M\hat{A}C = \hat{C} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} M\hat{A}B + M\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{\text{طرفین}+\hat{A}} ۲\hat{A} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

و این یعنی مثلث ABC ، در رأس A قائم‌الزاویه است.

سؤال **در شکل مقابل، سه ارتفاع مثلث رسم شده‌اند. ثابت کنید** $B\hat{H}C = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$



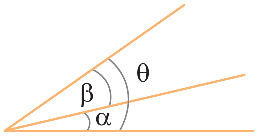
پاسخ در چهارضلعی $AB'HC'$ مجموع زوایا برابر ۳۶۰° است، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{A} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + B'\hat{H}C' = ۳۶۰^\circ \Rightarrow B'\hat{H}C' = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

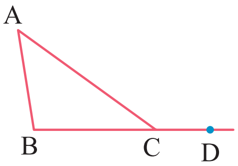
اما دو زاویهٔ $B'\hat{H}C'$ و $B\hat{H}C$ متقابل به رأس و در نتیجه هم‌اندازه هستند، لذا $B\hat{H}C = B'\hat{H}C' = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$

نامساوی‌ها در مثلث

۱ در شکل مقابل همواره داریم: $\theta > \alpha$ و $\theta > \beta$

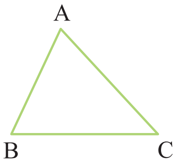


۲ هر زاویهٔ خارجی در مثلث از زوایای داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.



$$A\hat{C}D > \hat{A} \ , \ A\hat{C}D > \hat{B}$$

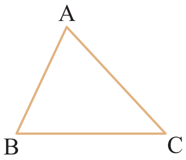
قضیه اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



$$AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$$

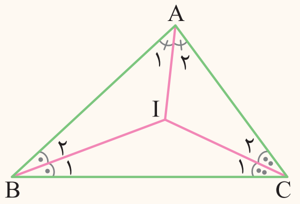
عکس قضیهٔ فوق: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$\hat{C} < \hat{B} \Rightarrow AB < AC$$



سؤال در مثلث ABC اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازها و $BC > AB > AC$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید $BI > CI > AI$

پاسخ



فرض : $BC > AB > AC$

حکم : $BI > CI < AI$

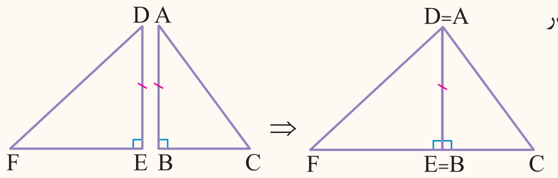
$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} > \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۲ > \hat{C}_۲ \xrightarrow{\text{در مثلث } AIC} CI > AI \quad (۱)$$

$$AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲} > \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{C}_۱ > \hat{B}_۱ \xrightarrow{\text{در مثلث } BIC} BI > CI \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow BI > CI > AI$$

سؤال در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DEF داریم: $\hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ$ ، $AB = DE$ و $\hat{F} > \hat{C}$. ثابت کنید $DF > AC$

پاسخ دو مثلث را در ضلعی که اندازه‌شان برابر است، مطابق شکل رسم می‌کنیم. چون در مثلث ACF ، $\hat{C} > \hat{F}$ ، پس بنا به قضیهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر، نتیجه می‌شود $DF > AC$



گزاره

تعریف گزاره جمله‌ای است خبری، درست یا نادرست، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام کند گزارهٔ ساده گفته می‌شود و اگر بیش از یک خبر را اعلام کند به آن گزارهٔ مرکب گفته می‌شود. مثلاً هر یک از جمله‌های زیر گزاره است:

- فردا هوا بارانی است. (گزارهٔ ساده)
- یازده، عددی اوّل است. (گزارهٔ ساده)
- فردا هوا برفی است و ۳ عددی زوج است. (گزارهٔ مرکب)
- $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است. (گزارهٔ ساده)

نقیض یک گزاره:

اگر P یک گزاره باشد، گزارهٔ «چنین نیست که P » را نقیض P می‌گوییم، مثلاً:

گزاره	نقیض گزاره
a از b بزرگ‌تر است.	چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد، یعنی a از b بزرگ‌تر نیست و معادل آن این است که بگوییم $a = b$ یا $a < b$ است.
مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.	چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است و معادل آن «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰° نیست.» می‌باشد.

نکته
- نقیض «هر» می‌شود «وجود دارد» و جمله منفی می‌شود و نقیض «وجود دارد» می‌شود «هر» و جمله منفی می‌شود.
- گزاره‌هایی که با «هیچ» شروع می‌شوند به نوعی با «هر» ارتباط دارند. مثلاً «**هیچ مثلثی دو زاویهٔ قائمه ندارد.**» معادل این است که بگوییم «**هر مثلث دو زاویهٔ قائمه ندارد.**»

مثال نقیض عبارت «مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست.» را بنویسید.

پاسخ «چنین نیست که مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست» و معادل آن این است که «هر مربعی، متوازی‌الاضلاع است.»

گزارهٔ شرطی: هر گزاره به‌صورت «اگر ......، آن‌گاه ......» گزارهٔ شرطی نامیده می‌شود. مثلاً گزارهٔ «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن‌گاه زوایای مقابل آن‌ها برابر است.» یک گزارهٔ شرطی می‌باشد.

برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

آ) فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد. (فرض خلف)

ب) به کمک روش‌های درست ریاضی، گزاره‌ای را نتیجه می‌گیریم که با مفروضات مسئله یا یک قضیه یا یک گزارهٔ درست در تناقض باشد.

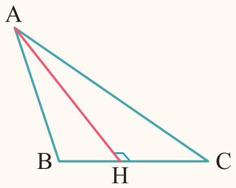
پ) با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است، در نتیجه حکم درست است.

سؤال **ثابت کنید در هر مثلث منفرجه‌الزاویه، دو ارتفاع خارج مثلث قرار می‌گیرد.**

پاسخ فرض کنیم در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم ارتفاع AH خارج مثلث ABC قرار می‌گیرد.

برهان خلف: فرض کنیم AH داخل مثلث یا روی آن قرار گیرد (فرض خلف).

آ) اگر AH داخل مثلث قرار گیرد (شکل مقابل) بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث ABH نتیجه می‌شود $\hat{B} < A\hat{H}C$ یا $\hat{B} < 90^\circ$ و این یعنی زاویهٔ B حاده است که با فرض منفرجه بودن آن تناقض دارد.



ب) اگر AH بر AB منطبق باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود که این با منفرجه‌الزاویه بودن آن تناقض دارد. پس فرض خلف غلط و حکم مسئله درست است.

با همین استدلال نتیجه می‌شود ارتفاع رسم شده از رأس C نیز خارج مثلث قرار می‌گیرد.

قضیهٔ دو شرطی

اگر عکس یک قضیه درست باشد، آن قضیه را دو شرطی می‌نامند. قضیه‌های دو شرطی به‌صورت (......... اگر و تنها اگر ....) نوشته می‌شوند و نماد $\Leftrightarrow$ برای آن‌ها به کار می‌رود. مثلاً قضیهٔ فیثاغورس دو شرطی است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

«مثلثی قائم‌الزاویه است؛ اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگرش باشد.»

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً حکم کلی «هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» با مثال لوزی، نقض می‌شود.

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیان کنیم، نمی‌توانیم دربارهٔ درستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای بگیریم. مثلاً در ریاضیات، حکم «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» معروف به حدس گلدباخ می‌باشد و هنوز درستی آن اثبات و مثال نقضی نیز برای آن پیدا نشده است.

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی | استدلال

۲۵. **اگر با مشاهدهٔ تعدادی مثلث که میانه و ارتفاع آن‌ها بر هم منطبق است، نتیجه‌گیری کنیم چنین مثلث‌هایی متساوی‌الساقین می‌باشد، چه استدلالی انجام داده‌ایم؟**

۲۶. **ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث 180° است.**

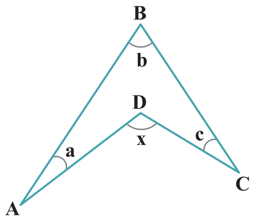
۲۷. **ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.**

۲۸. **ثابت کنید در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌باشد.**

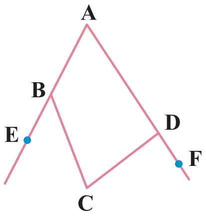
۲۹. **ثابت کنید هر زاویهٔ خارجی مثلث از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.**

۳۰. **ثابت کنید مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.**

۳۱. **در چهارضلعی مقعر روبه‌رو، ثابت کنید: $x = a + b + c$**



۳۲. در چهارضلعی محدب مقابل، ثابت کنید: $E\hat{B}C + F\hat{D}C = \hat{A} + \hat{C}$



۳۳. ثابت کنید اگر در مثلثی نیمساز یکی از زوایا بر ضلع مقابل آن زاویه عمود باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۳۴. ثابت کنید اگر در مثلثی ارتفاع نظیر یکی از اضلاع، میانهٔ آن باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

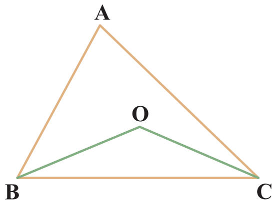
۳۵. ثابت کنید اگر در مثلثی نیمساز یکی از زوایا میانهٔ نظیر ضلع روبه‌روی آن زاویه باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۳۶. ثابت کنید سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند.

۳۷. ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

۳۸. ثابت کنید سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث همرسند.

۳۹. در شکل مقابل، O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث است. ثابت کنید $B\hat{O}C = ۲\hat{A}$



۴۰. ثابت کنید اگر I' نقطهٔ برخورد دو نیمساز زوایای خارجی B و C در مثلث ABC باشد، آن‌گاه $B\hat{I'}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$

۴۱. از نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC بر اضلاع آن عمود می‌کنیم. ثابت کنید این نقطه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی است که پای عمودها را به هم وصل می‌کند.

۴۲. ثابت کنید در هر مثلث، نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی و نیمساز زاویهٔ داخلی سوم همرسند.

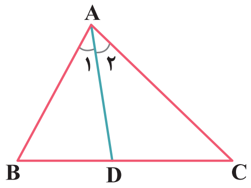
۴۳. مثلث ABC حاده‌الزوایا است. عمودمنصف اضلاع AB و AC خط شامل ضلع BC را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC بر نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای مثلث AEF منطبق است.

۴۴. ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

۴۵. ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

۴۶. ثابت کنید هر ضلع مثلث، از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

۴۷. (قضیهٔ نامساوی مثلث): در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد.



آ) ثابت کنید $AB > BD$

ب) ثابت کنید $AC > CD$

پ) ثابت کنید در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازهٔ ضلع سوم آن بزرگ‌تر است $(AB + AC > BC)$.

۴۸. در مثلث ABC، AD' نیمساز زاویهٔ خارجی A است. ثابت کنید: $D'B > AB$ و $D'C > AC$

۴۹. ثابت کنید در هر مثلث مختلف‌الاضلاع با زوایای حاده، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، از رأس روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین فاصله را دارد.

۵۰. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید.

آ) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از سه برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است.

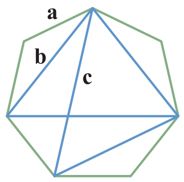
ب) مجموع دو زاویهٔ حاده کم‌تر از ۱۸۰° است.

پ) ارتفاع یک مثلث همواره داخل آن قرار می‌گیرد.

ت) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ث) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث، کوچک‌تر است.

ج) میانهٔ هر مثلث از اضلاع آن بزرگ‌تر است.



۵۱. در شکل زیر، نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی «با وصل‌کردن هر سه رأس از این شکل، یک مثلث متساوی‌الساقین به‌دست می‌آید.» درست است؟

۵۲. آیا حکم‌های کلی زیر درست هستند ؟ چرا؟

آ برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

۵۳. تعیین کنید کدام‌یک از حکم‌های کلی زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟ برای آن‌ها که نادرست هستند یک مثال نقض بیاورید.

آ همهٔ اعداد صحیح، منفی‌اند.

ب هر چهارضلعی که چهار زاویهٔ برابر داشته باشد، مربع است.

پ مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر پنج‌ضلعی محدب ۵۴۰° است.

ت به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ عددی اول است.

۵۴. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

آ هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

ب مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ هیچ مثلثی، بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.

ت مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

ث هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی محدب از هر زاویهٔ داخلی آن بزرگ‌تر است.

۵۵. عکس هر یک از قضایای زیر را نوشته و سپس آن‌ها را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بنویسید.

آ در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویهٔ روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.

ب اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

ث اگر در مثلثی دو ضلع برابر باشند، آن‌گاه میانهٔ نظیر آن‌ها نیز برابرند.

ج در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع‌های وارد بر ساق‌ها برابرند.

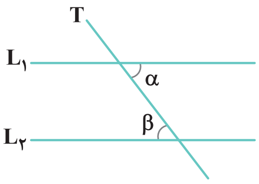
چ در متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

۵۶. به‌کمک برهان خلف ثابت کنید از یک نقطهٔ خارج یک خط، فقط یک عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۵۷. می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۵۸. با برهان خلف ثابت کنید در مثلث ABC، اگر $AB \neq AC$ باشد، آن‌گاه: $\hat{B} \neq \hat{C}$

۵۹. در شکل زیر با برهان خلف ثابت کنید، اگر $\alpha = \beta$ باشد، آن‌گاه: $L_۱ \parallel L_۲$

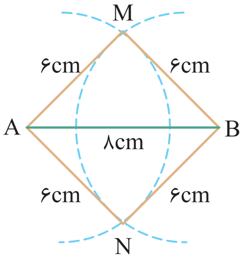


بخش ۲

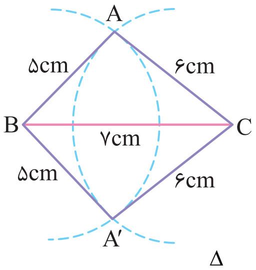
پاسخ‌نامه

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱ ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۸ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، سپس به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر و به مرکز B و شعاع ۶ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. M و N نقاطی هستند که از دو سر پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر هستند.

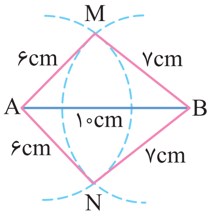


۲ ابتدا یکی از پاره‌خط‌های به طول ۵ یا ۶ یا ۷ را رسم می‌کنیم، مثلاً پاره‌خط بزرگ‌تر $BC = ۷$. سپس دو دایره به مراکز B و C و شعاع‌های ۵ و ۶ رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن‌ها، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A است.

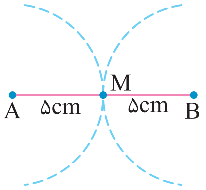


مسئله دارای دو جواب هم‌نهشت $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'BC}$ است که یک جواب محسوب می‌شود.

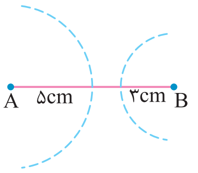
۳ آ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت دو نقطه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر باشد.



ب) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت یک نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر باشد.



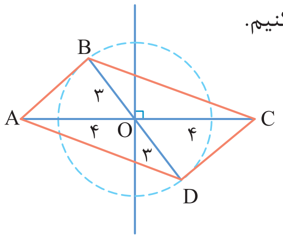
پ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت نقطه‌ای وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵cm و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳cm باشد.



۴ آ) پاره‌خط $AC = ۸$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = ۴$

پ) به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم می‌کنیم.



ت) یک قطر دلخواه از این دایره مانند BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

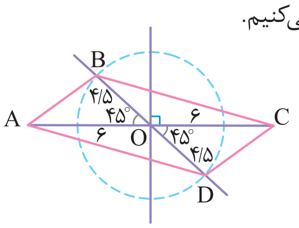
ث) چهارضلعی $ABCD$، متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند.

مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا بی‌شمار قطر مانند BD می‌توان رسم کرد.

۵ آ) پاره‌خط $AC=۱۲$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC، O می‌نامیم، داریم $OA = OC = ۶$

پ) به مرکز O و شعاع ۴/۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

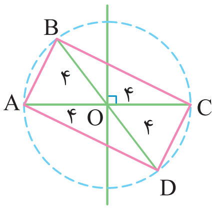


ت) نیمساز زاویهٔ قائمه به رأس O را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره، B و D می‌باشد.

ث) چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است. زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند و زاویهٔ بین آن‌ها $۴۵°$ است، پس مسئله دقیقاً یک جواب دارد.

۶ آ) پاره‌خط $AC = ۸$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = ۴$



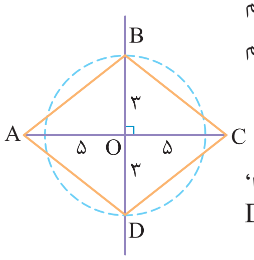
پ) به مرکز O و شعاع ۴، دایره‌ای رسم می‌کنیم.

ت) قطر دلخواه BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

ث) چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است زیرا قطرهای آن برابرند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۷ آ) پاره‌خط $AC = ۱۰$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC، O می‌نامیم، داریم $OA = OC = ۵$

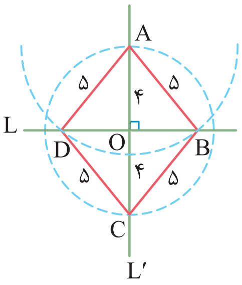


پ) به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، نقطه‌های تلاقی آن با عمودمنصف را B و D می‌نامیم.

ت) چهارضلعی $ABCD$ لوزی است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

۸ آ) دو خط عمود بر هم به نام‌های L و L' را رسم می‌کنیم.

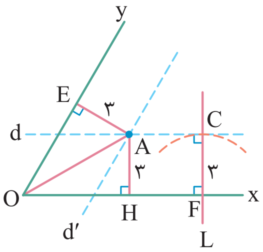
ب) به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L' را A و C می‌نامیم.



پ) به مرکز A و شعاع ۵، کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L را نقاط B و D می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOB و AOD به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند پس $OB = OD$

ت) $ABCD$ لوزی به ضلع ۵ و قطر ۸ می‌باشد، زیرا قطرهای آن عمودمنصف یک‌دیگرند.

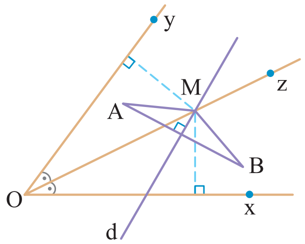
۹ آ) خط دلخواه L را در F عمود بر Ox رسم می‌کنیم، کمانی به مرکز F و شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ C قطع کند. در نقطهٔ C، خط d را عمود بر L رسم می‌کنیم. همهٔ نقاط خط d از نیم‌خط Ox به فاصلهٔ ۳ می‌باشند.



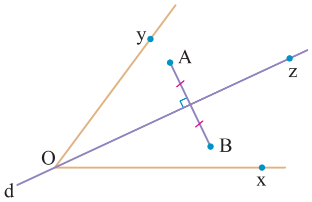
به طریق مشابه خط d′ موازی Oy و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌شود، محل تلاقی d و d′ نقطهٔ A است که از دو نیم‌خط Ox و Oy به فاصلهٔ ۳ است.

ب) چون نقطهٔ A از ضلع‌های زاویهٔ xOy به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد، از طرفی O نقطه‌ای از نیمساز زاویهٔ xOy است. در نتیجه نیم‌خط شامل پاره‌خط OA نیمساز زاویهٔ xOy است.

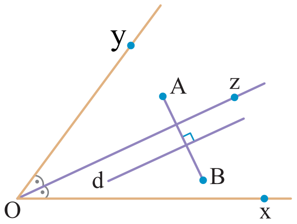
۱۰ Oz نیمساز زاویهٔ xOy و سپس خط d عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Oz را M می‌نامیم. نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xOy و از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



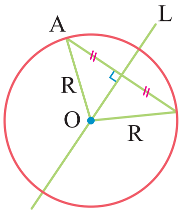
اگر نیمساز Oz بر خط d منطبق شود، در این صورت مسئله بی‌شمار جواب دارد و این اتفاق، وقتی می‌افتد که A و B دو طرف Oz قرار گرفته و از آن به یک فاصله باشند.



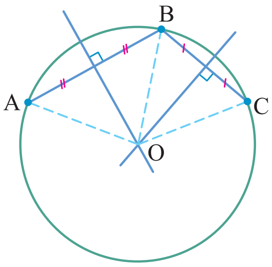
اما اگر نیمساز Oz و خط d موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



۱۱ فرض کنید خط L عمودمنصف وتر AB در دایره به مرکز O و شعاع R باشد، چون OA = OB = R است، پس نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط L قرار دارد.

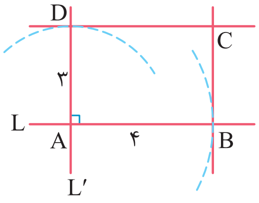


۱۲ نقاط A، B و C را مطابق شکل روی کمان داده‌شده در نظر می‌گیریم. عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و AC را رسم می‌کنیم.
چون هر دوی این عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطهٔ تلاقی آن‌ها یعنی نقطهٔ O مرکز دایره‌ای است که این کمان بخشی از آن است.

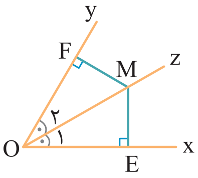


۱۳ دو خط عمود بر هم L و L′ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۴ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ B قطع کند. همچنین به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L′ را در نقطهٔ D قطع کند.

در نقطهٔ B خطی عمود بر L و در نقطهٔ D خطی عمود بر L′ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این دو خط را C می‌نامیم. ABCD مستطیل مطلوب است.

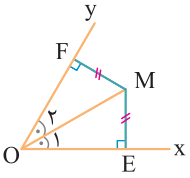


۱۴ **فرض:** $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ ، **حکم:** ME = MF



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OM=OM\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}\overset{\Delta}{OME}\cong\overset{\Delta}{OMF}\Rightarrow ME=MF$$

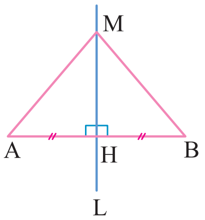
۱۵ **فرض:** ME = MF ، **حکم:** $\hat{O}_1=\hat{O}_2$



$$\left.\begin{array}{l}OM=OM\\ ME=MF\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}\overset{\Delta}{OME}\cong\overset{\Delta}{OMF}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2$$

یعنی نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

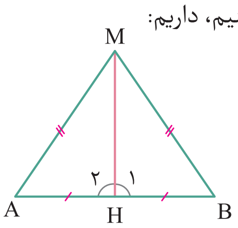
۱۶ **فرض:** خط L عمودمنصف AB است. ، **حکم:** MA = MB



$$\left.\begin{array}{l}AH=BH\\ A\hat{H}M=B\hat{H}M=90^\circ\\ MH=MH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{AMH}\cong\overset{\Delta}{BMH}\Rightarrow MA=MB$$

۱۷ **فرض:** MA = MB ، **حکم:** M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

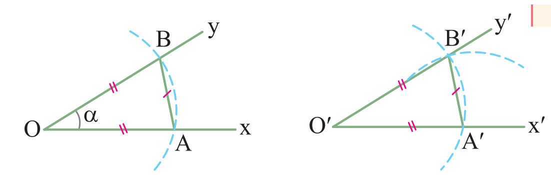
نقطهٔ M را به وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم، داریم:



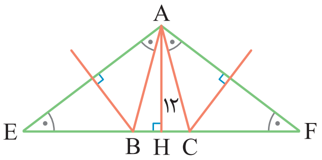
$$\left.\begin{array}{l}AM=MB\\ MH=MH\\ AH=BH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\overset{\Delta}{AMH}\cong\overset{\Delta}{BMH}\Rightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

از طرفی $\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ$ ، پس $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ یعنی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

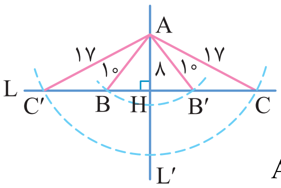
۱۸ نقطهٔ A را غیر از O روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز O و شعاع OA، نیم‌خط Oy را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند، داریم $OA = OB$. به مرکز O' و شعاع OA کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن را با نیم‌خط $O'x'$، نقطهٔ A' می‌نامیم. به مرکز A' و شعاع AB کمانی رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی آن را با کمان قبل نقطهٔ B' می‌نامیم. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم. اندازهٔ زاویهٔ $x'O'y'$ برابر α است زیرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت هستند.



۱۹ پاره‌خط EF را به طول ۳۹ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AH را به طول ۱۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الساقین است. عمودمنصف ساق‌های AE و AF را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن‌ها را با EF به‌ترتیب B و C می‌نامیم. دو مثلث متساوی‌الساقین ABE و ACF به حالت (ز‌ض‌ز) هم‌نهشت‌اند. پس $BE = AB = AC = CF$. در نتیجه محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر $EF = ۳۹$ است و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن $AH = ۱۲$ است.

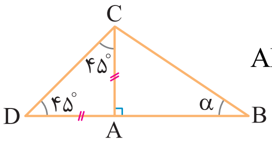


۲۰ دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم. AH را روی L' برابر ۸ جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاع ۱۰ و به مرکز A و شعاع ۱۷، دو کمان رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن‌ها با خط L را B، B'، C و C' می‌نامیم.



مثلث‌های ABC، $AB'C'$، $AB'C$ و ABC' جواب‌اند و مسئله دارای دو جواب متمایز ABC و $AB'C$ است. زیرا $\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{AB'C'}$ و $\overset{\Delta}{AB'C}\cong\overset{\Delta}{ABC'}$

۲۱ بنا به فرض $\hat{B}=\alpha$ و $AB+AC=k$ معلوم هستند. ابتدا پاره‌خط $BD=k$ را رسم می‌کنیم. زوایایی به اندازهٔ ۴۵° و α را به‌ترتیب در رأس‌های D و B می‌سازیم. محل برخورد اضلاع دیگرشان را C می‌نامیم. از C بر BD عمود می‌کنیم. پای عمود را A می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.

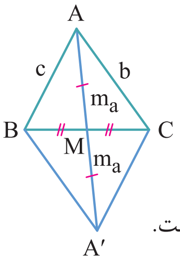


زیرا $AB+AC=AB+AD=BD=k$

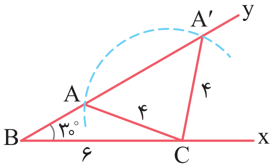
و $\hat{B}=\alpha$

۲۲ بنا به فرض $AB=c$، $AC=b$ و $AM=m_a$ معلوم هستند. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید.

چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند، پس $A'C = AB = c$.
مثلث $AA'C$ سه‌ضلعش معلوم است ($A'C=c$، $AC=b$ و $AA'=۲m_a$)، آن را رسم می‌کنیم. CM را از سمت M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ B به‌دست آید. A را به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

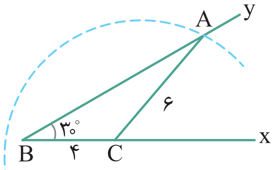


۲۳ ابتدا زاویهٔ xBy را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.



به مرکز B و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با نیم‌خط By را A و A' می‌نامیم. مثلث‌های غیرهم‌نهشت ABC و $A'BC$ جواب هستند.

۲۴ ابتدا زاویهٔ $x\hat{B}y$ را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.

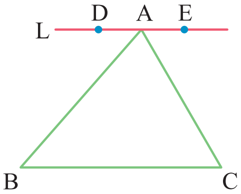


به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Bx را در C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۶ سانتی‌متر، کمانی رسم می‌کنیم. این کمان، نیم‌خط By را دقیقاً در یک نقطه مثلاً به نام A قطع می‌کند. مثلث ABC جواب است.

۲۵ استدلال استقرایی

۲۶ **فرض**: مثلث ABC، **حکم**: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

از رأس A خط L را موازی BC رسم می‌کنیم، داریم:



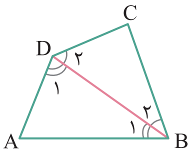
$$\left.\begin{array}{l} L \parallel BC \text{ , مورب } AB \Rightarrow D\hat{A}B=\hat{B} \\ L \parallel BC \text{ , مورب } AC \Rightarrow E\hat{A}C=\hat{C} \end{array}\right\}$$

از طرفی داریم $D\hat{A}B+\hat{A}+E\hat{A}C=۱۸۰^\circ$ و با قرار دادن تساوی‌های فوق در آن نتیجه می‌شود: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

۲۷ **فرض**: ABCD چهارضلعی محدب

حکم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$

قطر AC یا BD را رسم می‌کنیم، داریم:



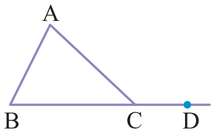
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: \hat{A}+\hat{D}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BCD}: \hat{C}+\hat{D}_۲+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{A}+\hat{C}+(\hat{D}_۱+\hat{D}_۲)+(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{B}=۳۶۰^\circ$$

۲۸ | **فرض:** $A\hat{C}D$ زاویهٔ خارجی $A\hat{B}C$

حکم: $A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$



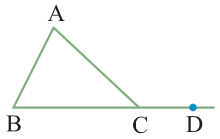
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{C}+A\hat{C}D=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{C}+A\hat{C}D$$

$$\Rightarrow A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$$

---

۲۹ | **فرض:** $A\hat{C}D$ زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$

حکم: $A\hat{C}D > \hat{B}$ ، $A\hat{C}D > \hat{A}$



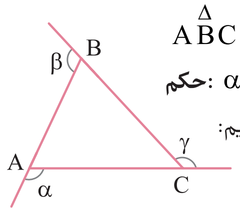
می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور مثلث است. لذا:

$$A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}\Rightarrow A\hat{C}D>\hat{A}\ ,\ A\hat{C}D>\hat{B}$$

---

۳۰ | **فرض:** α و β و γ زاویه‌های خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$

حکم: $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$



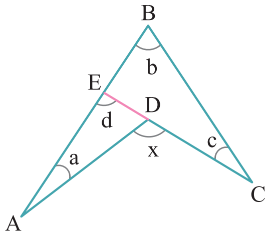
بنابه ویژگی زاویهٔ خارجی در مثلث ABC داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\hat{B}+\hat{C}\\ \beta=\hat{A}+\hat{C}\\ \gamma=\hat{A}+\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}\alpha+\beta+\gamma=2(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=2\times180^\circ=360^\circ$$

---

۳۱ | **فرض:** $ABCD$ چهارضلعی مقعر

حکم: $x=a+b+c$



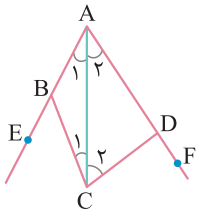
مطابق شکل، امتداد ضلع CD، ضلع AB را در E قطع می‌کند. بنابه ویژگی زاویهٔ خارجی در مثلث‌های $\overset{\Delta}{BCE}$ و $\overset{\Delta}{ADE}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x=a+d\\ d=b+c\end{array}\right\}\Rightarrow x=a+b+c$$

---

۳۲ | **فرض:** $E\hat{B}C$ و $F\hat{D}C$ به‌ترتیب زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ در چهارضلعی محدب $ABCD$

حکم: $E\hat{B}C+F\hat{D}C=\hat{A}+\hat{C}$



قطر AC را رسم می‌کنیم. بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث‌های ABC و ACD داریم:

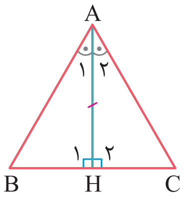
$$\left.\begin{array}{l}E\hat{B}C=\hat{A}_1+\hat{C}_1\\ F\hat{D}C=\hat{A}_2+\hat{C}_2\end{array}\right\}\xrightarrow{+}E\hat{B}C+F\hat{D}C=(\hat{A}_1+\hat{A}_2)+(\hat{C}_1+\hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow E\hat{B}C+F\hat{D}C=\hat{A}+\hat{C}$$

---

۳۳ | **فرض:** AH نیمساز $\hat{A}$ و $AH\perp BC$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



$$(\hat{A}_1=\hat{A}_2\ ,\ AH=AH,\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ)$$

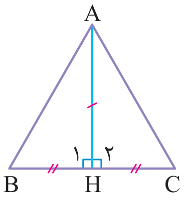
$$\xrightarrow{\text{(ز ض ز)}}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow AB=AC$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

---

۳۴ | **فرض:** $BH=CH$ و $AH\perp BC$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



$$(AH=AH,\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ,BH=CH)$$

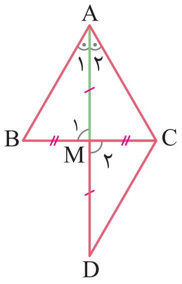
$$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

---

۳۵ | **فرض:** AM نیمساز $\hat{A}$ و $BM=CM$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم، داریم:

$$(BM=CM\ ,\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\ ,\ AM=DM)$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{ABM}\cong\overset{\Delta}{DCM}\Rightarrow\begin{cases}AB=CD & (1)\\ \hat{D}=\hat{A}_1\end{cases}$$

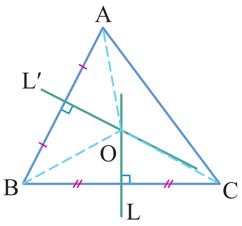
$$\hat{D}=\hat{A}_1\xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2}\hat{D}=\hat{A}_2\Rightarrow AC=CD\quad(2)$$

$(1),(2)\Rightarrow AB=AC\Rightarrow$ متساوی‌الساقین است $\overset{\Delta}{ABC}$

---

۳۶ | **فرض:** $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث دلخواه

حکم: عمودمنصف اضلاع AB، AC و BC همرسند.



نقطهٔ تلاقی عمودمنصف اضلاع BC و AB (خط‌های L و L') را O می‌نامیم و O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}O\in L\Rightarrow OB=OC\\ O\in L'\Rightarrow OB=OA\end{array}\right\}\Rightarrow OA=OC$$

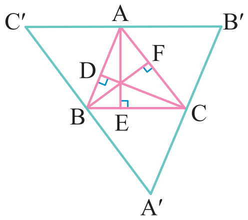
و این یعنی نقطهٔ O از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است، پس O روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و این یعنی سه عمودمنصف اضلاع مثلث ABC در نقطهٔ O همرسند.

---

۳۷ | **فرض:** $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث دلخواه

حکم: ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AB، AC و BC همرسند.

مطابق شکل AE، BF و CD، سه ارتفاع مثلث ABC هستند.



از رأس‌های مثلث ABC خط‌هایی موازی اضلاع مقابل آن رأس‌ها رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ پدید آید، داریم:

$AB' \parallel BC$, مورب $AC \Rightarrow B\hat{C}A = B'\hat{A}C$

$AC = CA$

$AB \parallel B'C$, مورب $AC \Rightarrow B\hat{A}C = B'\hat{C}A$

$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{CB'A} \Rightarrow AB' = BC$

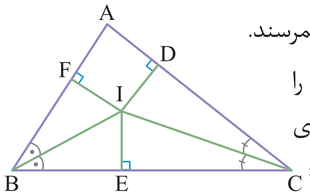
با استدلال مشابه دو مثلث ABC و BAC' نیز به حالت (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند؛ پس $AC' = BC$ و در نتیجه $AC' = BC = AB'$ و این یعنی A وسط $B'C'$ است.

$$B'C' \parallel BC \quad , \quad AE \perp BC \Rightarrow AE \perp B'C'$$

بنابراین AE عمودمنصف $B'C'$ است. بااستدلال مشابه نتیجه می‌شود BF عمودمنصف $A'C'$ و CD عمودمنصف $A'B'$ است. از طرفی عمودمنصف اضلاع مثلث $A'B'C'$ همرسند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز همرسند.

| ۳۸ | **فرض:** $\overset{\Delta}{ABC}$ دلخواه

حکم: نیمساز زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$، همرسند.



نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را I می‌نامیم. از I بر اضلاع مثلث، عمودهای IE، IF و ID را رسم می‌کنیم، داریم:

روی نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ $I \Rightarrow IE = IF$

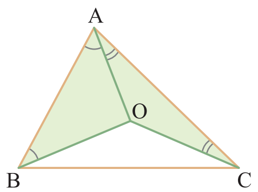
روی نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ $I \Rightarrow IE = ID$

$\Rightarrow IF = ID$

و این یعنی نقطهٔ I از دو ضلع زاویهٔ A نیز به یک فاصله است، پس I روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، یعنی سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC همرسند.

| ۳۹ | **فرض:** O، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC داخل آن است.

حکم: $B\hat{O}C = ۲\hat{A}$



O را به A وصل می‌کنیم. چون نقطهٔ O همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است، پس $OA = OB = OC$ است، در نتیجه داریم:

$OA = OB \Rightarrow O\hat{B}A = O\hat{A}B$

$OA = OC \Rightarrow O\hat{C}A = O\hat{A}C$

$\overset{+}{\Rightarrow} O\hat{B}A + O\hat{C}A = O\hat{A}B + O\hat{A}C = \hat{A}$

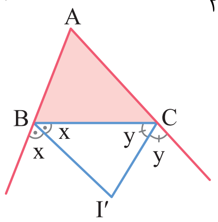
اما در چهارضلعی مقعر $ABOC$ داریم:

$$B\hat{O}C = O\hat{B}A + \hat{A} + O\hat{C}A = \underbrace{O\hat{B}A + O\hat{C}A}_{\hat{A}} + \hat{A} = ۲\hat{A}$$

| ۴۰ | **فرض:** BI' و CI' نیمسازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC

حکم: $B\hat{I'}C = ۹۰° - \frac{\hat{A}}{۲}$

مطابق شکل داریم:



$$۲x = ۱۸۰° - \hat{B} \Rightarrow x = ۹۰° - \frac{\hat{B}}{۲}$$

$$۲y = ۱۸۰° - \hat{C} \Rightarrow y = ۹۰° - \frac{\hat{C}}{۲}$$

در مثلث $BI'C$ داریم:

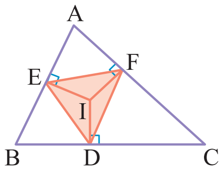
$$x + y + B\hat{I'}C = ۱۸۰° \Rightarrow ۹۰° - \frac{\hat{B}}{۲} + ۹۰° - \frac{\hat{C}}{۲} + B\hat{I'}C = ۱۸۰°$$

$$\Rightarrow B\hat{I'}C = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = \frac{۱۸۰° - \hat{A}}{۲} = ۹۰° - \frac{\hat{A}}{۲}$$

| ۴۱ | **فرض:** I نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC و IE، ID و IF عمود بر اضلاع

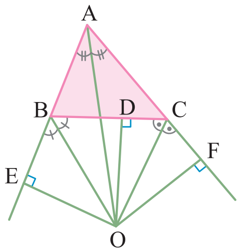
حکم: I نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های $\overset{\Delta}{DEF}$

می‌دانیم I از اضلاع ABC به یک فاصله است؛ پس $IE = IF = ID$ که نتیجه می‌دهد نقطهٔ I در مثلث EFD از سه رأس آن به یک فاصله است، لذا نقطهٔ I همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.



| ۴۲ | **فرض:** نیمساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$، نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{B}$ و نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{C}$ در مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

حکم: سه نیمساز فوق همرسند.



نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC را O می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم نیمساز زاویهٔ A هم از O می‌گذرد. به همین جهت از O بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم. داریم:

روی نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{B}$ $O \Rightarrow OE = OD$

روی نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{C}$ $O \Rightarrow OF = OD$

$\Rightarrow OE = OF$

و این یعنی نقطهٔ O از اضلاع زاویهٔ A به یک فاصله است، پس O روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد.

| ۴۳ | **فرض:** EH، عمودمنصف AB و MF، عمودمنصف AC در مثلث ABC و O نقطهٔ تلاقی آن‌ها است.

حکم: O، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$ است.

در مثلث حاده‌الزوایای ABC، O نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC، همان نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. EH عمودمنصف AB است، پس مثلث AEB متساوی‌الساقین است $(AE = BE)$، بنابراین EH نیمساز زاویهٔ AEF است.