فهرست

آزمون‌های فصل

نمونه سؤال امتحانی

بارم‌بندی درس ریاضی ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۵	۱/۵
دوم	۵	۱/۵
سوم	۵	۲
چهارم	۵	۲
پنجم	-	۴
ششم	-	۴
هفتم	-	۵
جمع	۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ مجموعه، الگو و دنباله

از فصل اول ریاضی (۱)، ۵/۰ نمره در نوبت اول، ۱/۵ نمره در نوبت دوم و ۲ نمره در نوبت شهریور سؤال طرح می‌شود.

فیلم شب امتحان

فصل ۱

برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل **QR-code** مقابل را اسکن کنید.

بسته اول

مجموعهٔ اعداد – بازه‌ها

صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی

بستهٔ اول شامل معرفی برخی از مجموعه‌های خاص و تعریف انواع بازه‌ها است.

مجموعهٔ اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به‌صورت زیر است:

$\mathbb{W} = \{۰,۱,۲,۳,...\}$: مجموعهٔ اعداد حسابی ، $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی

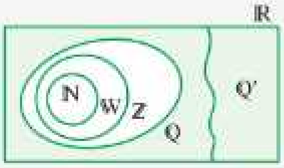
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$: مجموعهٔ اعداد گویا ، $\mathbb{Z} = \{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$: مجموعهٔ اعداد صحیح

$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ = مجموعهٔ اعدادی که نتوان عضوهای آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. : مجموعهٔ اعداد گنگ

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعهٔ اعداد حقیقی

نکته ❶ رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ است. به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌های اعدادی که تا کنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند.

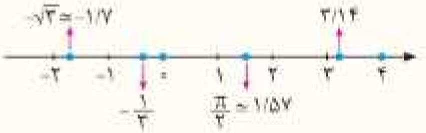
❷ هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.



سؤال کدام‌یک از اعداد زیر گویا و کدام‌یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

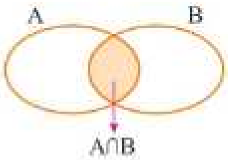
$-\frac{۱}{۳}, ۳/۱۴, \frac{\pi}{۲}, -\sqrt{۳}, ۴, ۰$

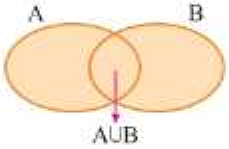
پاسخ $-\frac{۱}{۳}, ۳/۱۴, ۴, ۰$: اعداد گویا ، $\frac{\pi}{۲}, -\sqrt{۳}$: اعداد گنگ



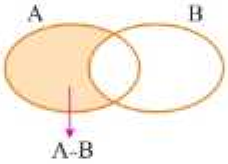
یادآوری از اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه

۱ اشتراک دو مجموعه: مجموعهٔ تمام عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B را اشتراک دو مجموعهٔ A و B می‌گوییم و با $A \cap B$ نشان می‌دهیم.





۲ اجتماع دو مجموعه: مجموعهٔ تمام عضوهایی که در A یا در B یا درهر دو باشند را اجتماع دو مجموعهٔ A و B می‌گوییم و با $A\bigcup B$ نشان می دهیم.



۳ تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ تمام عضوهایی که در A هستند ولی عضو B نیستند را مجموعهٔ $A-B$ می نامیم.

سؤال اگر $A=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}$ و $B=\{۲,۳,۶,۸\}$ دو مجموعه باشند، هریک از مجموعه‌های $A\bigcup B$ ، $A\bigcap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ همهٔ اعضای دومجموعهٔ A و B را در یک مجموعه قرار می دهیم، مجموعهٔ $A\bigcup B$ به‌دست می‌آید. (اعضای تکراری را یک بار می نویسیم)

$A\bigcup B=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}\bigcup\{۲,۳,۶,۸\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

همهٔ اعضای مشترک دومجموعهٔ A و B ، $A\bigcap B$ رامشخص می‌کند: $A\bigcap B=\{۲,۸\}$

عضوهای مشترک A و B را ازمجموعهٔ A حذف می‌کنیم. بقیهٔ اعضای A ، اعضای مجموعهٔ $A-B$ است:

$A-B=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}-\{۲,۳,۶,۸\}=\{۱,۴,۵,۷\}$

به همین‌ترتیب مجموعهٔ $B-A$ مشخص می‌شود: $B-A=\{۲,۳,۶,۸\}-\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}=\{۳,۶\}$

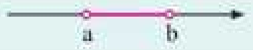
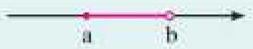
در این قسمت، با تعریف بازه که یک نماد برای ساده نوشتن مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی می‌باشد، آشنا می‌شویم.

بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ مانند A را که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

فرض کنید A مجموعهٔ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۴ باشد، یعنی: $A=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۴\}$

مجموعهٔ A را با نماد ساده‌تری به صورت $(۰,۴)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازهٔ باز از ۰ تا ۴ می‌نامیم. بنابراین: $A=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۴\}=(۰,۴)$

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a<b$ ، آن‌گاه:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	
نیم‌باز(نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	
نیم‌باز(نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	

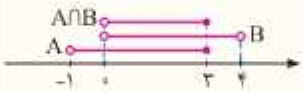
نکته هر بازه، یک مجموعه است، بنابراین اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها وجود دارد.

سؤال اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x\le ۳\}$ و $B=(۰,۴)$ باشند، $A\bigcup B$ و $A\bigcap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A\bigcup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در A یا در B و یا در هر دو باشند:

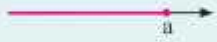
$\Rightarrow A\bigcup B=(-۱,۴)$

اعضای مشترک دومجموعهٔ A و B ، مجموعهٔ $A\bigcap B$ است:



$\Rightarrow A\bigcap B=(۰,۳]$

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

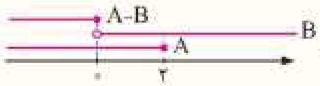
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز

توجه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

سؤال اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۲\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\}$ باشد، $A - B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ اگر عضوهای مشترک B و A را از مجموعهٔ A حذف کنیم، مجموعهٔ $A - B$ به‌دست می‌آید. از محور برای مشخص کردن $A - B$ استفاده کنید:

$A = (-\infty, ۲], B = (۰, +\infty) \Rightarrow A - B = (-\infty, ۲] - (۰, +\infty)$



$\Rightarrow A - B = (-\infty, ۰]$

نکته بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

بستهٔ ۱ پرسش‌های تشریحی — مجموعهٔ اعداد - بازه‌ها

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۱. $-۱ \in (-۱, ۲]$

۲. $۴ \in (۳, ۴]$

۳. $۰ \in \{-۱, ۱\}$

۴. $\frac{۵}{۶} \in (۰, ۱)$

۵. $\sqrt{۳} \in (۱, ۲)$

۶. $[-۱, ۱) = (-۱, ۱]$

۷. $\varnothing \subseteq [-۱, +\infty)$

۸. $\varnothing \in [۰, ۸)$

۹. $\{-۱, ۰, ۲\} \subseteq [-۱, ۳)$

۱۰. $(-۱, ۱) \subseteq [-۱, ۱)$

۱۱. $۰ \in (-۲, ۰) \cup (۰, ۱)$

۱۲. $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$

۱۳. $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

۱۴. $(۱, ۲) \subseteq \mathbb{Q}$

۱۵. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

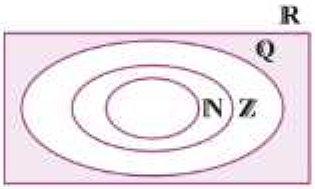
۱۶. $\{x \in \mathbb{Q} \mid -۱ \leq x < ۱\} = [-۱, ۱)$

۱۷. $-۶ \times ۱۰^{۲۳} \in (-\infty, ۱]$

۱۸. $۶ \times ۱۰^{-۴} \in [۲, +\infty)$

۱۹. **اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.**

$۱۰^{۰}$ ، -۲ ، $-\frac{\pi}{۲}$ ، $\sqrt{۵}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $۳/۱۲۱۲۰۰۰$



۲۰. **هریک از اعداد $-\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{\pi}{۴}$ ، $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ ، $۲/۴$ ، $۲^{۰}$ و -۲ را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند.**

۲۱. **طرف دوم هریک از تساوی‌های زیر را بنویسید.**

آ) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$ ب) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} =$ پ) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} =$

ت) $\mathbb{W} - \mathbb{Q}' =$ ث) $\mathbb{W} - \mathbb{N} =$ ج) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' =$

۲۲. **هریک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.**

آ) $(-۲, ۲)$ ب) $[۰, ۲)$ پ) $[-۴, -۱]$ ت) $(۱, \sqrt{۵}]$

ث) $(۳, +\infty)$ ج) $(-\infty, -۲)$ چ) $[\sqrt{۲}, +\infty)$ ح) $(-\infty, \frac{۱}{۲}]$

۲۳. **نمایش هندسی دو بازهٔ $A=[-1,5)$ و $B=(-3,2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.**

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

آ) $A\cap B$ ب) $A\cup B$

پ) $A-B$ ت) $B-A$

۲۴. **حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.** (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ) $(-2,5]\cap(-1,7)$ ب) $[-4,0]\cap[-1,+\infty)$ پ) $[-2,4)\cup(0,5]$ ت) $(-\infty,-1)\cup[-1,+\infty)$

ث) $(-\infty,2)-(0,3)$ ج) $(0,5]-[2,+\infty)$ چ) $(-1,0]\cap[0,2)$ ح) $(-\infty,-1)\cup(-\infty,3)$

۲۵. **مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{0\}$ ، $\mathbb{R}-\{-3,4\}$ ، $[3,7]-\{4,6\}$ و $[-2,4]-(0,1]$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.**

۲۶. **اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x+1\le 2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x\le 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به‌کمک بازه نمایش دهید.**

آ) A ب) B پ) $A-B$ ت) $A\cup B$

۲۷. **اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},-1<x<3\}$ ، $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\le 1\}$ و $C=\{x\mid x\in\mathbb{R},x\ge 0\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)\cup C$ و $B-(A\cap C)$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.**

۲۸. **اگر $\frac{m+1}{2}\in[-1,4)$ باشد، حدود m را مشخص کنید.**

بستهٔ دوم

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

صفحه‌های ۵ تا ۱۳ کتاب درسی

در این بسته، تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آورده می‌شود. متمم مجموعه تعریف می‌شود و با فرمول تعداد عضوهای مجموعه‌های متناهی آشنا می‌شویم.

■ **مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌باشد:

$A=\{2,3,5,7\}$: مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی

توجه تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

قرارداد تعداد عضوهای مجموعهٔ متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

■ **مجموعه‌های نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

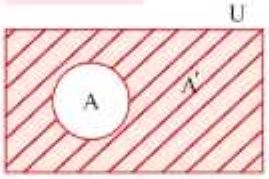
■ **مجموعهٔ مرجع:** در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

■ **متمم یک مجموعه:** هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع:

$$A'=U-A$$

نمودار ون مجموعهٔ A با مجموعهٔ مرجع U به‌صورت مقابل است:



سؤال **فرض کنید $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{1,2,4\}$ و $B=\{3,4,5,7\}$ باشند. مجموعه‌های $A'-B$ و $A'\cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.**

پاسخ ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A'=U-A=\{1,2,3,4,5,6,7\}-\{1,2,4\}=\{3,5,6,7\}\ ,\ B'=U-B=\{1,2,3,4,5,6,7\}-\{3,4,5,7\}=\{1,2,6\}$$

$$\Rightarrow A'-B=\{3,5,6,7\}-\{3,4,5,7\}=\{6\}\quad ,\quad A'\cup B'=\{3,5,6,7\}\cup\{1,2,6\}=\{1,2,3,5,6,7\}$$

سؤال **مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x < ۳\}$ را در نظر بگیرید.**

۱ مجموعهٔ A را روی محور نشان دهید.

۲ با فرض این‌که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعهٔ A' را مشخص کنید و آن را روی محور نشان دهید.

پاسخ ۱ مجموعهٔ A، بازهٔ $[-۱,۳)$ است. نمودار آن روی محور به صورت مقابل است:

۲ $\mathbb{R} - [-۱,۳)$، متمم مجموعهٔ A است. داریم: $A' = (-\infty,-۱) \cup [۳,+\infty)$

(-۱ عضوی از A است و در نتیجه، -۱ عضو A' نمی‌باشد و همچنین ۳ عضو مجموعهٔ A نیست و در نتیجه، ۳ عضوی از A' می‌باشد.) مجموعهٔ A' روی محور به‌صورت مقابل است:

نکته اگر A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه:

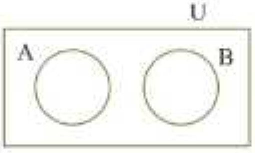
۱ $(A')' = A$ ۲ $A \cap A' = \varnothing$ ۳ $A \cup A' = U$

۴ $\varnothing' = U$ ۵ $U' = \varnothing$ ۶ $A - B = A \cap B'$

۷ $A - B = A - (A \cap B)$ ۸ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ۹ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

تذکر روابط (۸) و (۹)، قوانین دمورگان نام دارند.

■ **دو مجموعهٔ جدا از هم:** به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار ون دو مجموعهٔ جدا از هم به‌صورت مقابل است:



$\Rightarrow A \cap B = \varnothing$

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند:

$\begin{cases} O = \{۱,۳,۵,\cdots\} : \text{مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد} \\ E = \{۲,۴,۶,\cdots\} : \text{مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج} \end{cases} \Rightarrow O \cap E = \varnothing \Rightarrow$ O و E دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

نکته ۱ اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

۲ اگر U یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

■ **مفهوم چند واژه:**

۱ **حداقل:** ویژگی A یا ویژگی B به معنای حداقل است و از اجتماع استفاده می‌کنیم.

۲ **حداکثر:** ویژگی A یا ویژگی B یا هیچ یک از ویژگی‌های A و B به معنای حداکثر است و از متمم $(A \cap B)$ استفاده می‌کنیم.

سؤال **در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند.**

۱ چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟

۲ چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

پاسخ مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را با U، مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم فوتبال را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

۱ باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ را به‌دست آوریم:

$n(A) = ۱۷ \ , \ n(B) = ۱۵ \ , \ n(A \cap B) = ۷ \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۱۷ + ۱۵ - ۷ = ۲۵$

۲ باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A \cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$n(U) = ۳۰ \ , \ n(A \cup B) = ۲۵ \Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = ۳۰ - ۲۵ = ۵$

نکته اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه:

❶ $n(A\cap B') = n(A-B) = n(A) - n(A\cap B)$

❷ $n(A'\cap B') = n((A\cup B)') = n(U) - n(A\cup B)$

در فرمول شمارهٔ (۲)، U باید مجموعه‌ای متناهی باشد.

از نمودار ون برای به‌دست آوردن تعداد اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و ... می‌توانیم استفاده کنیم.

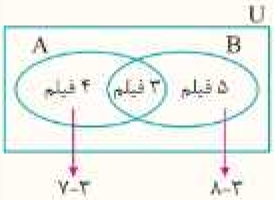
سؤال **یک دوره جشنوارهٔ فیلم کوتاه، با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم طنز وجود دارد به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های کارتونی با مضمون طنز هستند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:**

❶ کارتونی یا طنزند. **❷ غیرکارتونی و غیرطنزند.**

پاسخ مجموعه‌های A ، U و B را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

U: مجموعهٔ تمام فیلم‌ها A: مجموعهٔ فیلم‌های کارتونی B: مجموعهٔ فیلم‌های طنز

در نمودار ون مقابل، دو مجموعهٔ A و B ، مجموعهٔ U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده است. عددهایی که برای هر ناحیه وجود دارد را می‌نویسیم. (ابتدا باید عدد مربوط به اشتراک را بنویسیم):



❶ تعداد فیلم‌های کارتونی یا طنز برابر $۱۲ = ۵ + ۳ + ۴$ می‌باشد.

❷ تعداد فیلم‌های غیرکارتونی و غیرطنز برابر $۹ = ۱۲ - ۲۱$ است.

تعداد کل فیلم‌ها

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

● **در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.**

۲۹. مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵- یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

۳۰. مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

۳۱. $A\cap A' =$ .... ، $\varnothing' =$ .... ، $A'\cap B' =$ .... ، $A'\cup A =$ .... (کار در کلاس ۴ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۲. اگر A و B دو مجموعه و $A\cap B = \varnothing$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ .... می‌نامیم.

۳۳. اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه $A - B$ یک مجموعهٔ .... است.

● **کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟**

۳۴. مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعهٔ متناهی است.

۳۵. مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۲- و ۱- یک مجموعهٔ متناهی است.

۳۶. اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

۳۷. اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

۳۸. اگر همهٔ زیرمجموعه‌های A متناهی باشند، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

۳۹. اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ نامتناهی است.

۴۰. اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است.

۴۱. اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه: $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$

۴۲. متمم مجموعهٔ اعداد طبیعی نسبت به مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح منفی است.

● **متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.**

۴۳. مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و دورقمی

۴۴. مجموعهٔ اعداد صحیح فرد

۴۵. مجموعهٔ تمام چهارضلعی به‌صورت مربع

۴۶. مجموعهٔ خیابان‌های ایران

۴۷. مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

۴۸. مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

۴۹. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \le ۰\}$

۵۰. مجموعهٔ مضرب‌های صحیح ۴

۵۱. $(-۱, \frac{۱}{۲})$

۵۲. مجموعهٔ کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی

۵۳. مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴

۵۴. $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

۵۵. $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}$

۵۶. $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۵۷. **دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.**

۵۸. **دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.**

۵۹. **دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.**

۶۰. **دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.**

۶۱. **فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.**

آ) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید که $C \subseteq D$

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی و مجزا مانند A و B از U بنویسید که $A \cup B = U$

۶۲. **مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید:** (تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

آ) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' نامتناهی باشد.

ب) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' متناهی باشد.

پ) مجموعهٔ متناهی A را درنظر بگیرید. A' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) مجموعهٔ متناهی A و مجموعهٔ نامتناهی B را طوری بنویسید که A و B مجزا بوده و $\mathbb{N} = A \cup B$

۶۳. **$\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.** (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

آ) $A = (-۱,۵]$ ب) $\mathbb{N}$ پ) $B = (۲,+\infty)$

ت) $C = (-\infty,۱]$ ث) $(-\infty,۱) \cap (۰,+\infty)$ ج) $(-۴,۱) \cup (۲,۷)$

۶۴. **اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ باشند، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.**

آ) A' ب) $(A \cap B)'$ پ) $B \cup C'$

ت) $(A \cup B)'$ ث) $(A \cup B') \cap C$ ج) $(A - B) \cup C'$

۶۵. **فرض کنید $U = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱,۲,۴\}$ و $B = \{۲,۳\}$ باشند. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:** (کاردرکلاس ۶ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ب) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ پ) $A - B = A \cap B'$

۶۶. **اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ \leq x \leq ۴\}$ ، $A = \{x \in U \mid x \leq ۰\}$ ، $B = \{x \in U \mid$ مضرب ۴ است. $x\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱ \leq x \leq ۲\}$ باشند، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.**

آ) B' ب) $C' \cup B$ پ) $(A \cap C') - B$ ت) $(A' \cup B) \cap C'$

۶۷. **اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با A و مجموعهٔ مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با B نمایش دهیم، درستی هریک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.**

آ) $(A')' = A$ ب) $A - B = A - (A \cap B)$ پ) $B - A = B \cap A'$

ت) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ث) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ج) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۶۸. **به سؤالات زیر پاسخ دهید:**

آ) فرض کنید $U = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ (مجموعهٔ مرجع)، $A = \{۲,۶,۱۰\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۱۰\}$ باشند. آیا $A \subseteq B$؟ آیا $B' \subseteq A'$؟

(کاردرکلاس ۷ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

ب) فرض کنید $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعهٔ مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار ون نشان دهید $B' \subseteq A'$

۶۹. **فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U هستند، به‌طوری که $n(U) = ۵۰$ ، $n(A) = ۳۵$ ، $n(B) = ۲۰$ و $n(A \cap B) = ۱۲$ مطلوب است:** (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

آ) $n(A')$ ب) $n(A \cup B)$ پ) $n(A \cap B')$

ت) $n(A' \cap B')$ ث) $n(A' \cup B')$ ج) $n(A \cup B')$

۷۰. در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است: (تمرین ۵ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

آ) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.
ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از دو گروه نیستند.

۷۱. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟
ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟
پ) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۷۲. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟
ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟
پ) حداکثر چند نفر در یکی از این دو المپیاد شرکت کرده‌اند.

۷۳. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

آ) چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟
ب) چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟
پ) چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟
ت) چند نفر دقیقاً از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

بستهٔ سوم

الگو و دنباله

صفحهٔ ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی

در این بسته، الگو و دنباله تعریف می‌شوند. دنباله‌های خطی و دنبالهٔ درجه دوم از دنباله‌های مهم این قسمت هستند.

الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

الگوی عددی مقابل را در نظر بگیرید: $۲, ۴, ۶, ۸, ...$

جملهٔ اول این الگو را با a_1 (a اندیس ۱) نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $a_1 = ۲$. هم‌چنین جملهٔ دوم این الگو برابر ۴ است و می‌نویسیم $a_2 = ۴$ و به همین ترتیب جملهٔ n اُم این الگو را با a_n نمایش می‌دهیم و داریم $a_n = ۲n$

a_n را جملهٔ عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جملهٔ عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به دست آورد. در واقع جملهٔ عمومی یک الگو، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

سؤال **جملهٔ عمومی یک الگو به‌صورت $a_n = ۵n + ۳$ است.**

۱ مقدار جملهٔ دهم الگو را مشخص کنید.
۲ جملهٔ چندم الگو برابر ۱۰۸ است؟

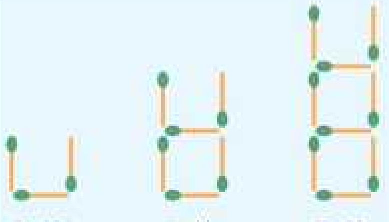
پاسخ ۱ با قرار دادن عدد ۱۰ به جای n در جملهٔ عمومی الگو، جملهٔ دهم الگو به‌دست می‌آید:

$$n = ۱۰ , a_n = ۵n + ۳ \Rightarrow a_{۱۰} = ۵ \times ۱۰ + ۳ = ۵۳$$

۲ باید n را طوری به‌دست آوریم که $a_n = ۱۰۸$ شود:

$$a_n = ۱۰۸ \Rightarrow ۵n + ۳ = ۱۰۸ \Rightarrow ۵n = ۱۰۸ - ۳ = ۱۰۵ \Rightarrow n = \frac{۱۰۵}{۵} = ۲۱$$

سؤال **با توجه به الگو، تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل n اُم را بنویسید.**



پاسخ در شکل ۱، $۳(۱) = ۳$ ، در شکل ۲، $۳(۲) = ۶$ ، در شکل ۳، $۳(۳) = ۹$ چوب کبریت به‌کار رفته است. با ادامهٔ همین روند، در شکل n اُم، $a_n = ۳n$ چوب کبریت به‌کار رفته است.

■ **الگوی خطی:** در الگوی $۵,۱۱,۱۷,۲۳,\cdots$ ، هر جمله دقیقاً ۶ واحد از جملهٔ قبل از خودش بیش‌تر است. چنین الگوهایی را که در آن‌ها اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم.

■ **جملهٔ عمومی الگوی خطی:** الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ باشد را الگوهای خطی می‌گوییم (زیرا شبیه معادلهٔ خط هستند.) که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دوجمله‌ای از درجهٔ یک برحسب n می‌باشد.

مثال الگوهای $a_n = -\frac{۱}{۳}n + ۲$ و $b_n = ۴n + ۱۷$ ، الگوهای خطی هستند.

سؤال **در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به‌ترتیب ۹ و ۲۳ می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید.**

پاسخ فرض کنیم جملهٔ عمومی الگو $t_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$\begin{matrix} t_۵ = a(۵) + b = ۹ \\ t_{۱۲} = a(۱۲) + b = ۲۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵a + b = ۹ \\ ۱۲a + b = ۲۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۵a - b = -۹ \\ ۱۲a + b = ۲۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷a = ۱۴ \Rightarrow a = \frac{۱۴}{۷} = ۲ \xrightarrow{۵a+b=۹} ۵(۲) + b = ۹ \Rightarrow b = -۱ \Rightarrow t_n = an + b = ۲n - ۱$$

نکته اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می‌باشد (که همان شیب، در معادلهٔ خط است).

هر الگویی که در آن اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، مقدار ثابتی نباشد، الگوی خطی نیست. در الگوی زیر، اختلاف دو جملهٔ اول برابر ۴ و اختلاف دو جملهٔ دوم و سوم برابر ۵ می‌باشد. این الگو، یک الگوی غیرخطی است. الگو: $۱,۵,۱۰,۱۹,\cdots$

■ **الگوی غیرخطی:** هر الگویی که جملهٔ عمومی آن به‌صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیرخطی می‌گوییم.

مثال الگوهای $a_n = n^۲ - ۴n$ و $b_n = \frac{۱}{n}$ الگوهای غیرخطی‌اند.

■ **دنباله:** هر تعداد عدد که پشت سرهم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

مثال اعداد $۱,۳,۵,۷,\cdots$ که از الگوی $a_n = ۲n - ۱$ به‌دست می‌آیند را یک دنباله می‌گوییم.

هم‌چنین اعداد $۴,۱۰,۱۸,\cdots$ که از الگوی درجهٔ دوم $a_n = n^۲ + ۳n$ به‌دست می‌آیند، یک دنباله می‌باشد.

توجه جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند، مانند دنبالهٔ اعداد اول $۲,۳,۵,۷,\cdots$

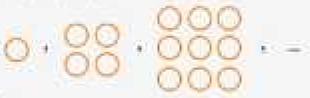
سؤال **جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = n^۲ - ۴n$ است. پنج جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.**

پاسخ $a_۱ = (۱)^۲ - ۴(۱) = -۳ \ , \ a_۲ = ۲^۲ - ۴(۲) = -۴ \ , \ a_۳ = ۳^۲ - ۴(۳) = -۳ \ , \ a_۴ = ۴^۲ - ۴(۴) = ۰ \ , \ a_۵ = ۵^۲ - ۴(۵) = ۵$

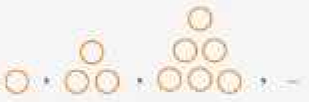
$\Rightarrow$ جملات دنباله: $-۳,-۴,-۳,۰,۵,\ldots$

نکته دو دنبالهٔ درجه دوم معروف $a_n = n^۲$ (دنبالهٔ مربعی) و $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ (دنبالهٔ مثلثی) وجود دارند که الگوی هندسی آنها به‌صورت زیر است:

$a_n = n^۲ : ۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , \ldots$

الگوی هندسی:


$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} : ۱ , ۳ , ۶ , ۱۰ , \ldots$

الگوی هندسی:


نکته مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است:

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

بسته ۳ پرسش‌های تشریحی — الگو و دنباله

● **کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟**

۷۴. الگوی ۴، ۷، ۱۰، ... یک الگوی خطی است.

۷۵. الگوی ۲، ۴، ۶، ۹، ... یک الگوی خطی است.

۷۶. جملهٔ دهم دنبالهٔ $a_n = 2n^2 + 3n$ برابر ۲۳۰ است.

۷۷. مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۹ برابر ۱۹۰ است.

۷۸. با استفاده از چوب کبریت‌ها، سه شکل مقابل ساخته شده است.

آ) شکل بعدی را در الگو رسم کنید و جدول را کامل کنید.

n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
a_n : تعداد چوب کبریت‌ها				

ب) جملهٔ عمومی الگو را مشخص کنید.

پ) در چه مرحله‌ای از الگو، تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۷۰ می‌باشد؟

۷۹. در یک الگوی خطی، جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۳۰ می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید. (مشابه مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

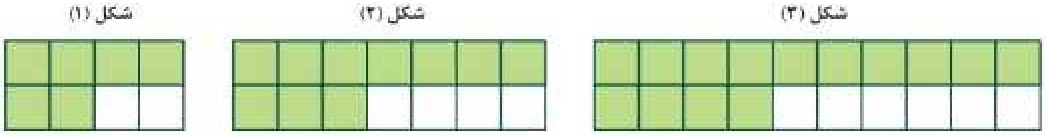
۸۰. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و هفدهم به ترتیب ۳ و ۲۷ می‌باشند.

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید.

ب) جملهٔ پنجاهم الگو را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو ۱۶۵ می‌باشد؟

۸۱. به الگوی زیر توجه کنید: (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)



آ) تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) اگر n شمارهٔ شکل و a_n تعداد مربع‌های سفید باشد، مقدار a_n را برحسب n بنویسید.

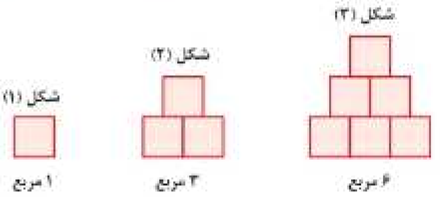
پ) اگر n تعداد مربع‌های سفید و b_n تعداد مربع‌های رنگی باشد، مقدار b_n را برحسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۲ مربع رنگی، چند مربع سفید لازم است؟

ث) در چندمین شکل، نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی $\frac{31}{63}$ می‌باشد؟

ج) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۴۶ مربع سفید باشد؟ اگر هست، تعداد مربع‌های رنگی آن چندتا است؟

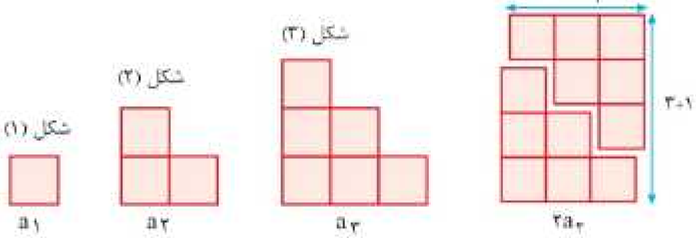
۸۲. الگوی زیر را درنظر بگیرید: (کار در کلاس ۴ صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)



آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی بالا را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با توجه به تصویر حاصل a_n را برحسب n به‌دست آورید.



$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $1+2+3+\dots+n$ را به‌دست آورید.

۸۳. الگوی زیر را درنظر بگیرید: (تمرین ۲ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ پنجم آن بنویسید.

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل بیستم در این الگو چند نقطه دارد؟

ت) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد؟

شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

۱۵ نقطه ۶ نقطه ۱ نقطه

۸۴. چهار جملهٔ اول دنباله‌های زیر داده شده است. در هر مورد، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و در صورت امکان جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزنید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

آ) $1, 3, 5, 7, \dots$

ب) $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \dots$

پ) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

ت) $0/3, 0/03, 0/003, 0/0003, \dots$

ث) $-1, 4, -9, 16, \dots$

ج) $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, \dots$

چ) $1, 2, 3, 5, \dots$

ح) $2, 5, 14, 41, \cdots$

۸۵. جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

آ) $a_n = 3n$

ب) $b_n = 5n - 2$

پ) $c_n = n^2 + 1$

ت) $d_n = n^2 + 2n$

۸۶. برای دنباله‌های درجهٔ دوم زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

آ) $1, 4, 9, \cdots$

ب) $2, 6, 12, \dots$

۸۷. دو جملهٔ اول دنبالهٔ درجهٔ دوم $t_n = an^2 + bn$ به ترتیب ۱- و ۲ می‌باشند.

آ) a و b را به‌دست آورید.

ب) جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

بستهٔ چهارم
دنباله‌های حسابی و هندسی
صفحهٔ ۲۱ تا ۲۷ کتاب درسی

در بستهٔ قبل با الگوی خطی آشنا شده‌ایم، نام دیگر آن، دنبالهٔ حسابی است. در این بسته فرمول دنبالهٔ حسابی گفته می‌شود و براساس آن مسائل مختلف حل می‌شوند.

■ **دنبالهٔ حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی می‌نامیم و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و آن را با d نمایش می‌دهیم.

نکته

۱ اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی t_n باشد، آن‌گاه:

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

۲ جملهٔ n اُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به‌صورت مقابل است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

سؤال **کدام یک از دنباله‌های زیر، دنبالهٔ حسابی است. جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی را بنویسید.**

۱ $-2, 4, 10, \cdots$

۲ $3, 7, 12, \cdots$

پاسخ ۱ دنبالهٔ حسابی است، زیرا اختلاف بین هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابت ۶ است.

$$d = 6, t_1 = -2 \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \times 6 = -2 + 6n - 6 \Rightarrow t_n = 6n - 8$$

۲ دنبالهٔ حسابی نیست.

زیرا اختلاف بین دو جملهٔ اول برابر ۴ و اختلاف بین جمله‌های دوم و سوم برابر ۵ است.

سؤال **در یک دنبالهٔ حسابی، جملات هفتم و یازدهم به ترتیب ۹، ۱۷ می‌باشد. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.**

پاسخ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

طبق فرض $t_7 = 9$ و $t_{11} = 17$ می‌باشد. با قرار دادن اعداد ۷ و ۱۱ به جای n، t_7 و t_{11} به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} t_7 = t_1 + (7-1)d = 9 \\ t_{11} = t_1 + (11-1)d = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 6d = 9 \\ t_1 + 10d = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-t_1} - 6d = -9 \\ \cancel{t_1} + 10d = 17 \end{cases} \Rightarrow 4d = 8 \Rightarrow d = 2$$

از معادلهٔ $t_1 + 6d = 9$، مقدار t_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$t_1 + 6d = 9 \Rightarrow t_1 + 12 = 9 \Rightarrow t_1 = 9 - 12 = -3 \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = -3 + 2(n-1) = -3 + 2n - 2 \Rightarrow t_n = 2n - 5$$

توجه شکل دنبالهٔ حسابی، به‌صورت الگوی خطی است.

سؤال **در دنبالهٔ حسابی زیر، جملهٔ بیست و پنجم را مشخص کنید.**

$-5, -2, 1, \dots$

پاسخ $t_1 = -5 \quad , \quad d = t_2 - t_1 = -2 - (-5) = 3 \quad , \quad t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_{25} = -5 + 24 \times 3 = -5 + 72 = 67$

نکته اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $2b = a + c$ و عدد b را واسطهٔ حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

مثال واسطهٔ حسابی دو عدد $\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{2}-1$ برابر با 1 است. $b = \frac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})}{2} = \frac{2}{2} = 1$

سؤال **بین دو عدد ۱۱ و ۴۱ با جملهٔ اول ۱۱، پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.**

پاسخ می‌خواهیم بین دو عدد ۱۱ و ۴۱، پنج عدد قرار دهیم به طوری که هفت عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

$t_1 = 11 \ , \ t_7 = 41 \Rightarrow t_1 + 6d = 41 \Rightarrow 11 + 6d = 41 \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5$

بنابراین هفت عدد حاصل به‌صورت روبه‌رو است:

$11 \xrightarrow{+5} 16 \xrightarrow{+5} 21 \xrightarrow{+5} 26 \xrightarrow{+5} 31 \xrightarrow{+5} 36 \xrightarrow{+5} 41$

در دنبالهٔ حسابی با جمع کردن یک عدد ثابت با هر جمله، جملهٔ بعدی را به‌دست می‌آوردیم. در این قسمت با ضرب کردن یک عدد ثابت در هر جمله، جملهٔ بعدی را به‌دست می‌آوریم. چنین دنباله‌هایی را دنبالهٔ هندسی می‌گوییم.

■ **دنبالهٔ هندسی:** دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم و آن را با r نمایش می‌دهیم. جملهٔ اول هم باید غیرصفر باشد.

نکته ❶ در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی t_n ، داریم:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

❷ جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت مقابل است که در آن t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

سؤال **در دنبالهٔ هندسی $2, 6, 18, \dots$ ، قدر نسبت دنباله را به‌دست آورید و جملهٔ عمومی آن را بنویسید.**

پاسخ حاصل تقسیم جملهٔ دوم بر جملهٔ اول برابر قدرنسبت است:

$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6}{2} = 3$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی برابر $t_n = t_1 r^{n-1}$ است:

$t_1 = 2, r = 3 \Rightarrow t_n = 2 \times 3^{n-1}$

تذکر اگر $t_1, r > 0$ ، جملات دنبالهٔ هندسی مثبت و اگر $r < 0$ ، آن‌گاه جملات دنبالهٔ هندسی، یکی در میان مثبت و منفی و اگر $t_1 < 0$ و $r > 0$ ، جملات دنبالهٔ هندسی منفی هستند.

سؤال **در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم $\frac{1}{3}$ و جملهٔ پنجم ۹ است. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.**

پاسخ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $t_n = t_1 r^{n-1}$ است. طبق فرض $t_2 = \frac{1}{3}$ و $t_5 = 9$ می‌باشند، پس:

$t_2 = t_1 r = \frac{1}{3} \quad , \quad t_5 = t_1 r^4 = 9 \Rightarrow \frac{t_5}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = 27 = 3^3 \Rightarrow r = 3 \quad , \quad t_1 r = \frac{1}{3} \Rightarrow 3t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{9}$

نکته اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$. اعداد $b = \pm\sqrt{ac}$ را واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌گوییم.

مثال واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۳ و ۴۸، عددهای $\pm\sqrt{3 \times 48} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$ می‌باشند.

۲
بخش

پاسخ‌نامه

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۱ | نادرست است، زیرا بازهٔ $[-1,2)$ شامل تمام xهایی است که $-1 < x \leq 2$ باشد، لذا $x = -1 \notin (-1,2]$

۲ | درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد ۴ عضو این بازه است.

۳ | نادرست است، زیرا مجموعهٔ $\{-1,1\}$ (نه بازهٔ $(-1,1)$)، شامل فقط دو عضو -1 و 1 می‌باشد، بنابراین $0 \notin \{-1,1\}$

۴ | درست است، زیرا $1 > \frac{5}{6} > 0$ و در نتیجه $\frac{5}{6} \in (0,1)$

۵ | درست است، زیرا مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ برابر $1/7$ است و در نتیجه $2 > \sqrt{3} > 1$، پس $\sqrt{3} \in (1,2)$

۶ | نادرست است، زیرا مثلاً $-1 \in [-1,1)$ ولی $-1 \notin (-1,1]$، بنابراین دو بازهٔ $(-1,1]$ و $[-1,1)$ با هم برابر نمی‌باشند.

۷ | درست است، زیرا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

۸ | نادرست است، زیرا $\varnothing$ عضو مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 8\}$ نمی‌باشد.

۹ | درست است، زیرا اعداد -1، 0 و 2 عضو بازهٔ $[-1,3)$ می‌باشند و در نتیجه مجموعهٔ شامل این ۳ عدد، زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-1,3)$ است.

۱۰ | درست است، زیرا تمام اعضای بازهٔ $(-1,1)$ عضوی از بازهٔ $[-1,1)$ می‌باشند.

۱۱ | نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازهٔ $(-2,0)$ و $(0,1)$ قرار ندارد.

۱۲ | درست است، زیرا:

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\} - \{1,2,3,\ldots\} = \{0\}$$

۱۳ | درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعهٔ اعداد حقیقی قرار دارند.

۱۴ | نادرست است، زیرا در بازهٔ $(1,2)$ بی‌شمار عدد گنگ مثل $\sqrt{2} = 1/4$ وجود دارد که در مجموعهٔ اعداد گویا قرار ندارند.

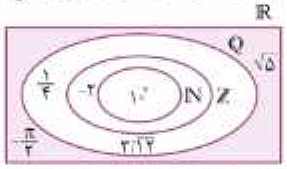
۱۵ | درست است، زیرا $\mathbb{R}$ از اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ تشکیل شده است.

۱۶ | نادرست است، زیرا بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی‌باشد.

۱۷ | درست است، زیرا عدد -6×10^{23} عددی منفی است و در نتیجه از یک کوچک‌تر است. بنابراین: $-6 \times 10^{23} \in (-\infty,1]$

۱۸ | نادرست است، زیرا نمایش اعشاری عدد 6×10^{-4} به‌صورت $0/0006$ می‌باشد که عددی کوچک‌تر از ۲ می‌باشد، پس: $6 \times 10^{-4} \notin [2,+\infty)$

۱۹ | عدد $1 = 10^0$ یک عدد طبیعی، عدد -2 یک عدد صحیح منفی، اعداد $\frac{1}{4}$ و $3/\overline{12} = 3/1212\cdots$ اعدادی گویا و اعداد $\sqrt{5}$ و $-\frac{\pi}{2}$ نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:

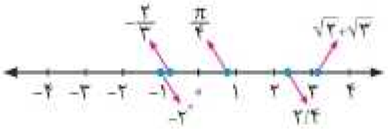


۲۰ | $\frac{\pi}{4}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی آن‌ها داریم:

$$\pi \simeq 3/14 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \simeq 0/785$$

$$\sqrt{2} = 1/4 \ , \ \sqrt{3} \simeq 1/7 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} = 1/4 + 1/7 = 3/1$$

مقدار 2^0 برابر یک است.



۲۱ | آ) $\mathbb{Q}'$

با حذف اعداد گویا از اعداد حقیقی، مجموعهٔ اعداد گنگ به‌دست می‌آید.

ب) $\{\cdots,-2,-1\}$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\cdots,-2,-1,\cancel{0},\cancel{1},\cancel{2},\cdots\} - \{0,1,2,\cdots\} = \{\cdots,-2,-1\}$$

پ) $\varnothing$

دو مجموعهٔ گویا و گنگ هیچ عدد مشترکی ندارند.

ت) $\mathbb{W}$

$\mathbb{W}$ و $\mathbb{Q}'$ (اعداد گنگ) هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین:

$$\mathbb{W} - \mathbb{Q}' = \mathbb{W}$$

ث) $\{0\}$

ج) $\mathbb{R}$

اجتماع تمام اعداد گویا و گنگ، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

۲۲ |

آ) 

$(-2,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

ب) 

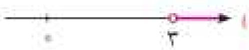
$[0,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

پ) 

$[-4,-1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -1\}$

ت) 

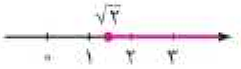
$(1,\sqrt{5}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \sqrt{5}\}$

ث) 

$(3,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

ج) 

$(-\infty,-2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

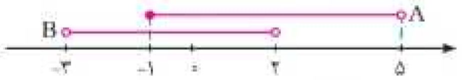
چ) 

$[\sqrt{2},+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$

ح) 

$(-\infty,\frac{1}{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\}$

۲۳ | نمایش هندسی دو بازهٔ A و B به‌صورت زیر است:



آ) قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی بازهٔ $[-۱,۲)$ جواب است:
$A\cap B=[-۱,۲)$

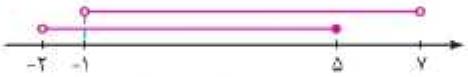
ب) تمام قسمت‌هایی که در A یا در B و یا در هر دو وجود دارند، در مجموعهٔ $A\cup B$ قرار می‌گیرند. بنابراین: $A\cup B=(-۳,۵)$

پ) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از A حذف کنیم، مجموعهٔ $A-B$ به‌دست می‌آید: $A-B=[۲,۵)$

ت) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از B حذف کنیم، مجموعهٔ $B-A$ به‌دست می‌آید: $B-A=(-۳,-۱)$

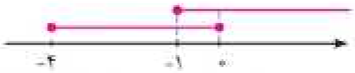
۲۴ |

آ)



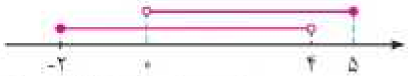
$(-۲,۵]\cap(-۱,۷)=(-۱,۵]$

ب)



$[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)=[-۱,۰]$

پ)

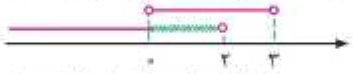


$[-۲,۴)\cup(۰,۵]=[-۲,۵]$

ت)

$(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

ث)



$(-\infty,۲)-(۰,۳)=(-\infty,۰]$

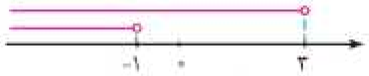
ج)

$(۰,۵]-[۲,+\infty)=(۰,۲)$

چ)

$(-۱,۰]\cap[۰,۲)=\{۰\}$

ح)



$(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)=(-\infty,۳)$

۲۵ | در نمایش هندسی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$\mathbb{R}-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

با حذف اعداد ۳- و ۴ از روی محور، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$ به‌دست می‌آید:

$\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$ از اجتماع سه بازه به‌دست می‌آید:

$\mathbb{R}-\{-۳,۴\}=(-\infty,-۳)\cup(-۳,۴)\cup(۴,+\infty)$

با حذف اعداد ۴ و ۶ از بازهٔ $[۳,۷]$، مجموعهٔ $[۳,۷]-\{۴,۶\}$ به‌دست می‌آید:

$[۳,۷]-\{۴,۶\}=[۳,۴)\cup(۴,۶)\cup(۶,۷]$

با حذف بازهٔ $(۰,۱]$ از بازهٔ $[-۲,۴]$، مجموعهٔ $[-۲,۴]-(۰,۱]$ به‌دست می‌آید:

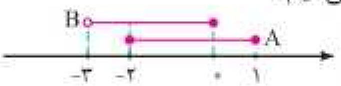
$[-۲,۴]-(۰,۱]=[-۲,۰]\cup(۱,۴]$

۲۶ | آ) با حل نامعادلهٔ $-۱\le x+۱\le ۲$، مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$-۱\le x+۱\le ۲ \xrightarrow{-۱} -۲\le x\le ۱ \Rightarrow A=[-۲,۱]$

ب) $B=(-۳,۰]$

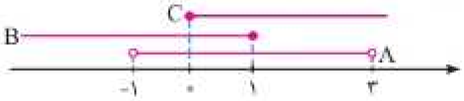
پ، ت) با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور، مجموعه‌های $A-B$ و $A\cup B$ را مشخص می‌کنیم:



$A-B=(۰,۱]$

$A\cup B=[-۳,۱]$

۲۷ | برای مشخص‌کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های A، B و C را روی محور نمایش می‌دهیم:



$A\cap B=(-۱,۳)\cap(-\infty,۱]=(-۱,۱]$

$\Rightarrow (A\cap B)\cup C=(-۱,۱]\cup[۰,+\infty)=(-۱,+\infty)$

$A\cap C=(-۱,۳)\cap[۰,+\infty)=[۰,۳)$

$\Rightarrow B-(A\cap C)=(-\infty,۱]-[۰,۳)=(-\infty,۰)$

۲۸ | $\frac{m+۲}{۲}$ عضوی از مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۴\}$ است. بنابراین $-۱\le\frac{m+۱}{۲}<۴$ می‌باشد. با حل نامعادله، حدود m به‌دست می‌آید.

$\frac{m+۱}{۲}\in[-۱,۴)\Rightarrow -۱\le\frac{m+۱}{۲}<۴$

$\xrightarrow{\times ۲} -۲\le m+۱<۸ \xrightarrow{-۱} -۳\le m<۷$

۲۹ | نامتناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵- به‌صورت $\{-۶,-۷,-۸,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

۳۰ | متناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی به‌صورت $\{۱۰۰۰,۱۰۰۱,\dots,۹۹۹۹\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۹۰۰۰ عضوی می‌باشد.

۳۱ |

$A\cup A'=U\ ,\ A'\cap B'=(A\cup B)'\ ,\ \varnothing'=U\ ,\ A\cap A'=\varnothing$

۳۲ | جدا از هم

۳۳ نامتناهی - چون اگر از یک مجموعه با بی‌شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن‌گاه بی‌شمار عضو برای آن باقی می‌ماند.

۳۴ نادرست است، زیرا بی‌شمار عدد گویا مانند $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{4}$ و ... در بازهٔ $(0,2)$ وجود دارد.

۳۵ درست است، زیرا مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۲- و ۱- ، مجموعهٔ تهی است که یک مجموعهٔ متناهی با صفر عضو می‌باشد.

۳۶ نادرست است، زیرا $A\cap B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است و چون A یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، پس هر زیرمجموعهٔ آن نیز یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، بنابراین $A\cap B$ یک مجموعهٔ متناهی است.

۳۷ نادرست است، به عنوان مثال، مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{N}$ دارای زیرمجموعهٔ متناهی $\{1,2\}$ است.

۳۸ درست است، زیرا اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، چون $A\subseteq A$ و هر زیرمجموعهٔ A متناهی است، بنابراین A متناهی می‌باشد.

۳۹ درست است، زیرا اگر $A\subseteq B$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام عضوهای مجموعهٔ B در مجموعهٔ A قرار دارند و در نتیجه A نامتناهی است.

۴۰ نادرست است، $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) و O (مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی)، مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}-O=\{2,4,6,...\}=E$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴۱ درست است، زیرا:

A و B دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند $\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow n(A\cap B)=0$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\cancel{n(A\cap B)}=n(A)+n(B)$$

۴۲ نادرست است، متمم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نسبت به اعداد صحیح شامل تمام اعداد صحیح منفی و عدد صفر می‌باشد.

$$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}\ ,\ \mathbb{N}=\{1,2,...\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{N}'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-2,-1,0\}$$

۴۳ متناهی، این مجموعه به‌صورت $\{11,13,...,97\}$ است که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است و در نتیجه یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد.

۴۴ نامتناهی، این مجموعه به‌صورت $\{...,-3,-1,1,3,...\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

۴۵ نامتناهی، می‌توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع‌های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

۴۶ متناهی، تعداد خیابان‌های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است.

۴۷ نامتناهی، بین هر دو عدد دلخواه می‌توان به هر تعداد عدد گویا مشخص کرد: اعداد گویای بین ۰ و ۱: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$

۴۸ نامتناهی، بین هر دو عدد دلخواه می‌توان به هر تعداد عدد گنگ مشخص کرد: اعداد گنگ بین ۰ و ۱: $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{4},...$

۴۹ متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 0\}=\varnothing$ یک مجموعهٔ متناهی است.

۵۰ نامتناهی، مجموعهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۴ به‌صورت $\{...,-8,-4,0,4,8,...\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

۵۱ نامتناهی، بی‌شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد ۱- و $\frac{1}{2}$ وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ نامتناهی است.

۵۲ نامتناهی، بی‌شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ مورد نظر نامتناهی است. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{4},...$

۵۳ متناهی، مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴ به‌صورت $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۸ عضوی می‌باشد.

۵۴ متناهی، زیرا: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}-\{1,2,...\}=\{0\}$

۵۵ نامتناهی، زیرا $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

۵۶ نامتناهی، زیرا $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

۵۷ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$

۵۸
$$A=\{...,-3,-2,-1,0,1,2\}\ ,\ B=\{-1,0,1,2,3,...\}$$
$$\Rightarrow A\cap B=\{-1,0,1,2\}$$

۵۹ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

۶۰ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

۶۱ آ) $U=\{6,12,18,24,...\}$

ب) U مجموعه‌ای نامتناهی است.

پ) $A=\{12,18,24\}\subseteq U$ مجموعه‌ای متناهی است.

ت) اگر C مجموعهٔ مضرب‌های ۲۴ و D مجموعهٔ مضرب‌های ۱۲ باشد، آن‌گاه $C\subseteq D$

$$D=\{12,24,36,48,...\}\ ,\ C=\{24,48,...\}$$

ث) A را مضرب‌های فرد ۶ و B را مضرب‌های زوج عدد ۶ در نظر می‌گیریم:

$$A=\{6,18,30,42,...\}\ ,\ B=\{12,24,36,...\}\Rightarrow A\cup B=U$$

۶۲

آ) $A=\{۱,۳,۵,\cdots\} \Rightarrow A'=\mathbb{N}-A=\{۲,۴,۶,\cdots\}$ (نامتناهی)

ب) $A=\mathbb{N}-\{۱\} \Rightarrow A'=\{۱\}$

پ) A' نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{N}$ را از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ حذف کنیم، آن‌گاه مجموعهٔ باقی‌مانده نیز دارای بی‌شمار عضو است.

ت) $A=\{۱,۲\}\ ,\ B=\{۳,۴,\cdots\} \Rightarrow A\cap B=\varnothing\ ,\ A\cup B=\mathbb{N}$

می‌توان مثال‌های دیگری مانند اعداد زوج و فرد را هم در نظر گرفت:

$A=\{۱,۳,\cdots\},B=\{۲,۴,\cdots\} \Rightarrow A\cap B=\varnothing\ ,\ A\cup B=\mathbb{N}$

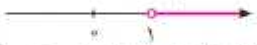
۶۳ آ) با حذف بازهٔ $(-۱,۵]$ از محور، متمم آن به‌دست می‌آید.

$A'=\mathbb{R}-(-۱,۵]=(-\infty,-۱]\cup(۵,+\infty)$

ب) $\mathbb{N}'=\mathbb{R}-\mathbb{N}=(-\infty,۱)\cup(۱,۲)\cup\ldots$

پ) $B'=\mathbb{R}-(۲,+\infty)=(-\infty,۲]$

ت) $C'=\mathbb{R}-(-\infty,۱]=(۱,+\infty)$



ث) ابتدا اشتراک دو بازه را به‌دست می‌آوریم:

$(-\infty,۱)\cap(۰,+\infty)=(۰,۱)$

$\Rightarrow(۰,۱)'=\mathbb{R}-(۰,۱)=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$

ج) مجموعهٔ $(-۴,۱)\cup(۲,۷)$ روی محور به‌صورت

می‌باشد، بنابراین:

$((-۴,۱)\cup(۲,۷))'=(-\infty,-۴]\cup[۱,۲]\cup[۷,+\infty)$

۶۴ مجموعهٔ مرجع $U=\{۱,۲,\ldots,۹\}$ می‌باشد.

آ) با حذف اعضای مجموعهٔ A از مجموعهٔ U، مجموعهٔ A' به‌دست می‌آید:

$A'=U-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۳},\cancel{۴},۵,\ldots,۹\}-\{۱,۲,۳,۴\}$

$=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$

ب) ابتدا مجموعهٔ $A\cap B$ را مشخص می‌کنیم و سپس متمم آن را به‌دست می‌آوریم:

$A\cap B=\{۱,۲,۳,۴\}\cap\{۲,۴,۶,۸\}=\{۲,۴\}$

$\Rightarrow(A\cap B)'=\{۱,\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۵,\ldots,۹\}-\{۲,۴\}=\{۱,۳,۵,۶,۷,۸,۹\}$

پ) $C'=U-C=\{۱,۲,۷,۸,۹\}$

$\Rightarrow B\cup C'=\{۲,۴,۶,۸\}\cup\{۱,۲,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۴,۶,۷,۸,۹\}$

ت) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$

$\Rightarrow(A\cup B)'=U-(A\cup B)=\{۵,۷,۹\}$

ث) ابتدا مجموعهٔ $A\cup B'$ را با اعضا می‌نویسیم و سپس اعضای مشترک آن با C را مشخص می‌کنیم:

$B'=U-B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

$\Rightarrow A\cup B'=\{۱,۲,۳,۴\}\cup\{۱,۳,۵,۷,۹\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۹\}$

$\Rightarrow(A\cup B')\cap C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۹\}\cap\{۳,۴,۵,۶\}=\{۳,۴,۵\}$

ج) $A-B=\{۱,۳\}\Rightarrow(A-B)\cup C'$

$=\{۱,۳\}\cup\{۱,۲,۷,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۷,۸,۹\}$

۶۵ آ) مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را ابتدا با مشخص کردن مجموعهٔ $A\cup B$ تعیین می‌کنیم:

$A\cup B=\{۱,۲,۴\}\cup\{۲,۳\}=\{۱,۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow(A\cup B)'=U-(A\cup B)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۱,۲,۳,۴\}$

$=\{۵\}\quad(۱)$

مجموعه‌های A' و B' را مشخص و سپس اشتراک آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$A'=U-A=\{۳,۵\}\ ,\ B'=U-B=\{۱,۴,۵\}$

$\Rightarrow A'\cap B'=\{۳,۵\}\cap\{۱,۴,۵\}=\{۵\}\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow(A\cup B)'=A'\cap B'$

ب)

$A\cap B=\{۲\}\Rightarrow(A\cap B)'=U-\{۲\}=\{۱,۳,۴,۵\}\quad(۱)$

$A'\cup B'=\{۳,۵\}\cup\{۱,۴,۵\}=\{۱,۳,۴,۵\}\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow(A\cap B)'=A'\cup B'$

پ) هریک از مجموعه‌های $A-B$ و $A\cap B'$ را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A-B=\{۱,\cancel{۲},۴\}-\{۲,۳\}=\{۱,۴\}\quad(۱)$

$A\cap B'=\{۱,۲,۴\}\cap\{۱,۴,۵\}=\{۱,۴\}\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow A-B=A\cap B'$

۶۶ مجموعه‌های U، A، B و C با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$U=\{-۵,-۴,\ldots,۳,۴\}\ ,\ A=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰\}$

$B=\{-۴,۰,۴\}\ ,\ C=\{-۱,۰,۱,۲\}$

آ) $B'=U-B=\{-۵,-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳\}$

ب) $C'=\{-۵,-۴,-۳,-۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow C'\cup B=\{-۵,-۴,-۳,-۲,۰,۳,۴\}$

پ) $A\cap C'=\{-۵,-۴,-۳,-۲\}$

$\Rightarrow(A\cap C')-B=\{-۵,-۳,-۲\}$

ت) $A'=\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow A'\cup B=\{-۴,۰,۱,۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow(A'\cup B)\cap C'=\{-۴,۳,۴\}$

۶۷ مجموعه‌های U، A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$U=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۵\}\ ,\ A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}\ ,\ B=\{۳,۶,۹,۱۲\}$

آ) $A'=U-A=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\Rightarrow(A')'=U-A'=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}=A$

ب) $A-B=\{۱,۲,۴\}\quad(۱)$

$A\cap B=\{۳,۶,۱۲\}\Rightarrow A-(A\cap B)=\{۱,۲,۴\}\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow A-B=A-(A\cap B)$

پ) $B-A=\{۹\}\quad(۱)$

$B\cap A'=\{۳,۶,۹,۱۲\}\cap\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}=\{۹\}\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow B-A=B\cap A'$

ت) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}\Rightarrow(A\cup B)'=U-(A\cup B)$

$=\{۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}\quad(۱)$

$A'\cap B'=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\cap\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$=\{۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}\quad(۲)$

$(۱)\,,(۲) \Rightarrow (A\cup B)' = A'\cap B'$

ث) $A\cap B=\{۳,۶,۱۲\} \Rightarrow (A\cap B)' = U-(A\cap B)$

$=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۱)

$A'\cup B'=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\cup\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۲)

$(۱)\,,(۲) \Rightarrow (A\cap B)' = A'\cup B'$

ج) طبق قسمت (پ)، داریم: $A'\cap B = B\cap A' = \{۹\}$

$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}$ (۱)

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow A\cup(A'\cap B) = A\cup B$

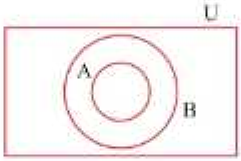
---

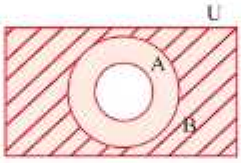
۶۸ آ) تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B قرار دارند، بنابراین:

$A\subseteq B$

$A'=\{۴,۸,۱۲\}\ ,\ B'=\{۸,۱۲\} \Rightarrow B'\subseteq A'$

ب) نمودار ون $A\subseteq B$ به‌صورت زیر است:





مجموعهٔ A' را با سایه و B' را با هاشور زدن مشخص می‌کنیم:

تمام قسمت‌های B' که به‌صورت هاشورخورده است، در مجموعه A' (سایه‌زده شده) نیز هست، لذا: $B'\subseteq A'$

---

۶۹ آ) از فرمول $n(A')=n(U)-n(A)$، مقدار $n(A')$ را به‌دست می‌آوریم:

$n(A')=n(U)-n(A)=۵۰-۳۵=۱۵$

ب) از فرمول $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$، مقدار $n(A\cup B)$ را به‌دست می‌آوریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۵+۲۰-۱۲=۴۳$

پ) $n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-۱۲=۲۳$

برای دو قسمت بعدی از قوانین دمورگان استفاده می‌کنیم.

ت) $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$\overset{(ب)}{=}۵۰-۴۳=۷$

ث) $n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)$

$=۵۰-۱۲=۳۸$

ج) $n(A\cup B')=n(A)+n(B')-n(A\cap B')$

طبق قسمت (پ)، $n(A\cap B')=۲۳$ می‌باشد، بنابراین:

$n(A\cup B')=۳۵+۳۰-۲۳=۴۲$

---

۷۰ از نمودار ون برای حل سؤال استفاده می‌کنیم.

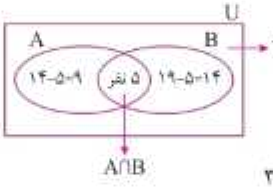
مجموعه‌های U، A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

U : مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان کلاس

A : مجموعهٔ دانش‌آموزانی که عضو گروه سرودند.

B : مجموعهٔ دانش‌آموزانی که عضو گروه تئاترند.

مجموعهٔ $A\cap B$، ۵ عضو دارد.



آ) ۹ (مجموعهٔ $A-B$، مجموعهٔ مطلوب است.)

ب) مجموعهٔ $(A\cup B)'$، مجموعهٔ مطلوب است:

$۳۱-(۹+۵+۱۴)=۳$

---

۷۱ طبق فرض داریم: $U \Rightarrow n(U)=۷۰$: مجموعهٔ مرجع

$A \Rightarrow n(A)=۴۰$: مجموعهٔ اعضای تیم فوتبال

$B \Rightarrow n(B)=۲۵$: مجموعهٔ اعضای تیم والیبال

طبق فرض ۵۵ نفر در حداقل یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند، پس:

$n(A\cup B)=۵۵$

آ) باید $n(A\cap B)$ را به‌دست آوریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۵۵=۴۰+۲۵-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$

ب) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۷۰-۵۵=۱۵$

پ) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ را به‌دست آوریم:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۱۰=۳۰$

---

۷۲ مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را U، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد ریاضی را A و دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد فیزیک را با B نشان می‌دهیم.

روش اول $(A\cup B)'$ مجموعهٔ دانش‌آموزانی است که در هیچ‌یک از این دو رشتهٔ المپیاد شرکت نکرده‌اند. داریم:

$n(U)=۳۰\,,\ n(A)=۱۷\,,\ n(B)=۱۵\,,\ n((A\cup B)')=۵$

$\Rightarrow n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۵$

$\Rightarrow n(A\cup B)=۳۰-۵=۲۵$

آ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ را به‌دست آوریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۲۵=۱۷+۱۵-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۳۲-۲۵=۷$

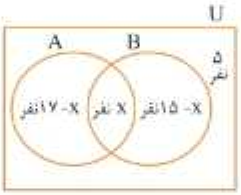
ب) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B'$ را به‌دست آوریم:

$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۱۷-۷=۱۰$

پ) باید تعداد عضوهای $(A\cap B)'$ را به دست بیاوریم:

$۳۰-۷=۲۳=$ تعداد

روش دوم فرض کنیم x نفر در هر دو رشتهٔ المپیاد شرکت کرده باشند. با استفاده از نمودار ون دو مجموعهٔ A و B، تعداد عضوهای هر چهار ناحیهٔ مجزا را مشخص می‌کنیم:



$n(U)=۳۰ \Rightarrow (۱۷-x)+x+(۱۵-x)+۵=۳۰ \Rightarrow x=۷$

آ) $x=۷$

ب) $۱۷-x=۱۷-۷=۱۰$

۷۳

$U \Rightarrow n(U)=200$: مجموعهٔ افرادی که در این نظرسنجی شرکت کرده‌اند.

$A \Rightarrow n(A)=120$: مجموعهٔ افرادی که از عالی‌قاپو بازدید کرده‌اند.

$B \Rightarrow n(B)=150$: مجموعهٔ افرادی که از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند.

آ) طبق فرض، مجموعهٔ $A-B$ ، ۴۰ عضو دارد:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 40=120-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=80$$

ب)
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=120+150-80=190$$

پ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=200-190=10$$

ت) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$n((A\cup B)-(A\cap B))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$
$$\xlongequal{\text{(آ) و (ب)}} 190-80=110$$

۷۴ درست است، زیرا اختلاف بین هر دو جملهٔ متوالی برابر ۳ است.

۷۵ نادرست است، زیرا اختلاف بین دو جملهٔ اول برابر ۲ و اختلاف بین دو جملهٔ سوم و چهارم برابر ۳ است.

۷۶ درست است، زیرا:

$$a_{10}=2(10)^2+3(10)=200+30=230$$

۷۷ درست است، زیرا:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow 1+2+\cdots+19=\frac{19\times 20}{2}=190$$

۷۸ آ)

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۴	۷	۱۰	۱۳

ب) **روش اول** در هر مرحله، ۳ چوب کبریت اضافه می‌شود، بنابراین:

$$a_1=4\ ,\ a_2=4+3\ ,\ a_3=4+2(3)$$
$$a_4=4+3(3)\ ,\ \ldots, a_n=4+(n-1)\times 3$$

بنابراین جملهٔ عمومی الگو به‌صورت $a_n=3n+1$ است.

روش دوم در هر مرحله، شمارهٔ شکل (n) در ۳ ضرب شده و حاصل آن به اضافهٔ ۱، a_n را تولید می‌کند، یعنی $a_n=3n+1$.

روش سوم در هر مرحله، شمارهٔ شکل (n) در ۴ ضرب شده و حاصل آن منهای $(n-1)$ برابر a_n شده است، یعنی:

$$a_n=4n-(n-1)=4n-n+1=3n+1$$

همان‌طور که می‌بینید از روش‌های مختلفی، توانستیم a_n را پیدا کنیم ولی در نهایت، جواب به‌دست آمده یکی است.

پ)
$$a_n=70\Rightarrow 70=3n+1\Rightarrow 3n=69\Rightarrow n=23$$

۷۹ جملهٔ عمومی الگوی خطی $t_n=an+b$ است. طبق فرض $t_4=9$ و $t_{11}=30$ می‌باشد:

$$\begin{cases}t_4=a(4)+b=9\\ t_{11}=a(11)+b=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4a-b=-9\\ 11a+b=30\end{cases}\Rightarrow 7a=21$$
$$\Rightarrow a=\frac{21}{7}=3\xrightarrow{4a+b=9}4(3)+b=9\Rightarrow b=-3\Rightarrow t_n=3n-3$$

۸۰ آ) جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ می‌باشد. طبق فرض $t_5=3$ و $t_{17}=27$ می‌باشد:

$$\begin{cases}t_5=a(5)+b=3\\ t_{17}=a(17)+b=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5a-b=-3\\ 17a+b=27\end{cases}$$
$$\Rightarrow 12a=24\Rightarrow a=\frac{24}{12}=2\xrightarrow{5a+b=3}5(2)+b=3\Rightarrow b=-7$$
$$\Rightarrow t_n=2n-7$$

ب) با قرار دادن عدد ۵۰ به جای n در فرمول $t_n=2n-7$ ، جملهٔ پنجاهم الگو به‌دست می‌آید: $t_{50}=2(50)-7=93$

پ) باید n را طوری به‌دست آوریم که $t_n=165$ شود:

$$t_n=2n-7=165\Rightarrow 2n=172\Rightarrow n=86$$

۸۱ جدول زیر را درنظر می‌گیریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...
تعداد کل مربع‌ها	۸	۱۴	۲۰	...
تعداد مربع‌های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...
تعداد مربع‌های سفید	۲	۴	۶	...

آ) تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله از اضافه کردن عدد ثابت ۴ به تعداد مربع‌های رنگی مرحلهٔ قبل به‌دست می‌آید:

$$6\overset{+4}{\frown}10\overset{+4}{\frown}14\overset{+4}{\frown}18\overset{+4}{\frown}22\overset{+4}{\frown}26$$

ب) تعداد مربع‌های سفید یک الگوی خطی است که در آن تفاضل هر دو جملهٔ متوالی برابر عدد ثابت ۲ است:

$$a_n=an+b\ \ ,\ \ a_1=2\ \ ,\ \ a_2=4\Rightarrow\begin{cases}a(1)+b=2\\ a(2)+b=4\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-a-b=-2\\ 2a+b=4\end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=0\Rightarrow a_n=2n$$

پ) جدول زیر را درنظر می‌گیریم:

n: تعداد مربع‌های سفید	۲	۴	۶	...
b_n: تعداد مربع‌های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...

به جای n فقط اعداد زوج می‌توان قرار داد و b_n از دستور $b_n=6+2(n-2)=2n+2$ به‌دست می‌آید.

ت) طبق رابطهٔ (پ)، n را طوری به‌دست می‌آوریم که $b_n=102$ شود:

$$b_n=102=2n+2\Rightarrow 2n=100\Rightarrow n=\frac{100}{2}=50$$

طبق قسمت (پ)، $n=50$ همان تعداد مربع‌های سفید است.

ث) تعداد مربع‌های رنگی برحسب شمارهٔ شکل از رابطهٔ $t_n=۴n+۲$ به‌دست می‌آید. پس نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی در شکل n اُم برابر $\frac{۲n}{۴n+۲}$ است. داریم:

$$\frac{۲n}{۴n+۲}=\frac{۳۱}{۶۳}\Rightarrow ۶۳\times ۲n=۳۱\times(۴n+۲)\Rightarrow ۱۲۶n=۱۲۴n+۶۲$$

$$\Rightarrow ۲n=۶۲\Rightarrow n=۳۱$$

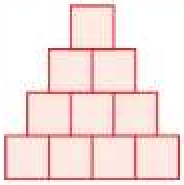
ج) $a_n=۲n=۴۶\Rightarrow n=۲۳$ (تعداد مربع‌های سفید)

بنابراین در شکل بیست و سوم، ۴۶ مربع سفید وجود دارد. پس در این شکل، تعداد مربع‌های رنگی برابر $t_{۲۳}=۴(۲۳)+۲=۹۴$ می‌باشد.

یا طبق فرمول قسمت (پ)، تعداد مربع‌های رنگی برابر $b_n=۲(۴۶)+۲=۹۴$ است.

---

۸۲ | آ) دنباله: $۱\xrightarrow{+۲}۳\xrightarrow{+۳}۶\xrightarrow{+۴}۱۰\xrightarrow{+۵}۱۵\xrightarrow{+۶}۲۱\xrightarrow{+۷}۲۸$


۱۰ مربع

ب) خیر، زیرا اختلاف هر دو جملهٔ متوالی یک عدد ثابت نیست.

پ) در الگوی جدید، می‌توان دو شکل (n) را طوری کنار هم قرار داد که شکل حاصل، یک مستطیل شامل $n\times(n+۱)$ مربع باشد. بنابراین:

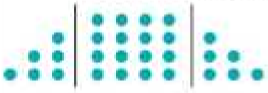
$$۲a_n=n(n+۱)\Rightarrow a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

ت) حاصل عبارت $۱+۲+...+n$ تعداد مربع‌های به کار رفته در a_n است (در ردیف اول، n مربع، در ردیف دوم، $n-۱$ مربع و ... و در ردیف n اُم، یک مربع قرار دارد.). پس:

$$۱+۲+...+n=a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

---

۸۳ | آ) در شکل‌های داده شده، درون | | به تعداد $n^۲$ نقطه وجود دارد. هم‌چنین در دو طرف | | در شکل n اُم، به تعداد مساوی نقطه وجود دارد که از دنبالهٔ مثلثی ساخته شده است:


$۱,۶,۱۵,۲۸,۴۵,\cdots$

ب) تعداد نقاط سمت راست به صورت زیر است:

$$۰,۱,۱+۲=۳,۱+۲+۳=۶,\cdots,۱+۲+\cdots+(n-۱)$$
$$=\frac{(n-۱)\times(n-۱+۱)}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲},\cdots$$

بنابراین تعداد کل نقاط برابر است با:

$$a_n=n^۲+\underbrace{\cancel{۲}}_{\text{دو طرف}}\times\frac{n(n-۱)}{\cancel{۲}}=n^۲+n^۲-n=۲n^۲-n$$

پ) $a_{۲۰}=۲\times(۲۰)^۲-۲۰=۸۰۰-۲۰=۷۸۰$

ت) باید مقدار n را طوری به‌دست آوریم که $a_n=۱۲۰$ شود:

$$a_n=۱۲۰\Rightarrow ۲n^۲-n=۱۲۰\Rightarrow n(۲n-۱)=۱۲۰$$

به ازای هیچ مقداری از n، تساوی $n(۲n-۱)=۱۲۰$ برقرار نمی‌باشد. بنابراین در این الگو شکلی وجود ندارد که تعداد نقطه‌های آن برابر ۱۲۰ باشد.

۸۴ | آ) $۱\xrightarrow{+۲}۳\xrightarrow{+۲}۵\xrightarrow{+۲}۷\xrightarrow{+۲}۹\xrightarrow{+۲}۱۱\xrightarrow{+۲}۱۳,...\Rightarrow a_n=۲n-۱$

ب) $\sqrt{۲},۲=\sqrt{۴},\sqrt{۶},۲\sqrt{۲}=\sqrt{۸},\sqrt{۱۰},\sqrt{۱۲},\sqrt{۱۴},...$

$$\Rightarrow a_n=\sqrt{۲n}$$

پ) $۱,\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۱۶},\frac{۱}{۲۵},\frac{۱}{۳۶},\frac{۱}{۴۹},...\Rightarrow a_n=\frac{۱}{n^۲}$

ت) $۰/۳\ ,\ ۰/۰۳\ ,\ ۰/۰۰۳\ ,\ ۰/۰۰۰۳\ ,\ ۰/۰۰۰۰۳\ ,\ ۰/۰۰۰۰۰۳\ ,\ ۰/۰۰۰۰۰۰۳\ ,\ ...$

$$\Rightarrow a_n=۰/\underbrace{۰...۰}_{n-۱}۳=a_n=\frac{۳}{(۱۰)^n}$$

ث) $-۱,۴,-۹,۱۶,-۲۵,۳۶,-۴۹,....\Rightarrow a_n=(-۱)^n n^۲$

جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی دارد، بنابراین از $(-۱)^n$ برای منفی و مثبت شدن جملات استفاده می‌کنیم.

ج) $۳\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}\frac{۵}{۲}\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}۲\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}\frac{۳}{۲}\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}۱\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}۰\ ,\ ...$

$$\Rightarrow a_n=۳+(n-۱)\times(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}n+\frac{۷}{۲}$$

چ) جملهٔ سوم، مجموع جملات اول و دوم و جملهٔ چهارم، مجموع جملات دوم و سوم می‌باشد. بنابراین:

$$۱,۲,۳,۵,۳+۵=۸,۵+۸=۱۳,۸+۱۳=۲۱,...$$
$$\Rightarrow a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}\ ;\ a_۱=۱\ ,\ a_۲=۲\ ,\ n\geq ۳$$

ح) با توجه به جملات داده شده، به غیر از جملهٔ اول، هر جمله یک واحد کم‌تر از سه برابر جملهٔ قبل از خود می‌باشد:

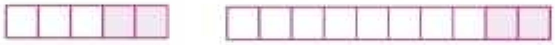
$$۵=۳(۲)-۱\ ,\ ۱۴=۳(۵)-۱\ ,\ ۴۱=۳(۱۴)-۱\ ,\ ۳(۴۱)-۱=۱۲۲$$
$$۳(۱۲۲)-۱=۳۶۵\ ,\ ۳(۳۶۵)-۱=۱۰۹۴$$
$$\Rightarrow a_n=۳a_{n-۱}-۱\ ;\ a_۱=۲$$

---

۸۵ | آ) $a_n=۳n:۳,۶,۹,۱۲,...$


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

ب) $b_n=۵n-۲:۳,۸,۱۳,۱۸,\cdots$


شکل (۱) شکل (۲)

در شکل n اُم تعداد کل مربع‌ها، ۵n و تعداد مربع‌های سفید شکل (n) برابر $b_n=۵n-۲$ می‌باشد.

پ) $c_n=n^۲+۱:۲,۵,۱۰,۱۷,...$


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

ت) $d_n=n^۲+۲n:۳,۸,۱۵,۲۴,...$


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۳ بخش

نمونه سؤال امتحانی

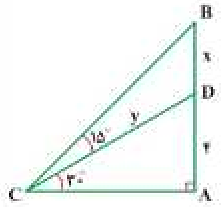
آزمون ۱

فصل اول | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. آ) $-1 \in (-3,0) \cap (-2,1)$ ب) اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، آن‌گاه B نامتناهی است. پ) هر دنبالهٔ ثابت، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d = 1$ می‌باشد. ت) در هر دنبالهٔ هندسی، حاصل تفاضل هر دو جملهٔ متوالی مقداری ثابت است.	۱
۲	اگر $A = (-1,4)$ ، $B = (-\infty,0)$ و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید. آ) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $(A - B)'$	۳
۳	مجموعهٔ $\mathbb{R} - (-1,4]$ را روی محور نشان دهید و آن را به‌صورت اجتماعی از دو بازه بنویسید.	۲
۴	مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید: آ) مجموعه‌ای نامتناهی مانند A مشخص کنید که A' متناهی باشد. ب) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی بنویسید که یکی زیرمجموعهٔ دیگری باشد.	 ۱ ۱/۵
۵	در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۰ نفر در درس ریاضی و ۳۲ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۵ نفر در درس ریاضی قبول شده باشند، ولی در درس فیزیک قبول نشده باشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی از این کلاس که: آ) فقط در یکی از این دو درس قبول شده‌اند. ب) در هیچ‌یک از این دو درس قبول نشده‌اند.	۲
۶	در هر قسمت، چهار جملهٔ اول یک دنباله نوشته شده است. سه جملهٔ بعدی هر دنباله و جملهٔ عمومی دنبالهٔ قسمت (آ) را بنویسید. آ) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$ ب) $2, 3, 5, 8, \dots$	 ۲ ۱/۵
۷	در دنبالهٔ حسابی روبه‌رو: $-2, 4, 10, \dots$ آ) جملهٔ عمومی را مشخص کنید. ب) چندمین جمله برابر ۵۲ می‌باشد.	 ۱ ۱
۸	در یک دنبالهٔ حسابی، جملات چهارم و نهم به ترتیب ۱۶ و ۴۱ می‌باشند. مجموع جملات این دنباله از جملهٔ سوم تا جملهٔ ششم را به‌دست آورید.	۲
۹	بین دو عدد $\frac{32}{3}$ و ۸۱ ، چهار واسطهٔ هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.	۲
	موفق و مؤید باشید.	۲۰

آزمون ۲

فصل دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	حاصل عبارت $3\tan^2 60^\circ + 2\sqrt{2}\sin 45^\circ - \cot 45^\circ$ را به‌دست آورید.	۳
۲	طول دو ضلع یک مثلث $2\sqrt{3}$ و ۲ و زاویهٔ بین آن‌ها 60° می‌باشد. مساحت این مثلث را به‌دست آورید.	۳
۳	در مثلث روبه‌رو، مقادیر x و y را به‌دست آورید. 	۳