فهرست مطالب

فصل ۱: تابع

فصل ۲: مثلثات

فصل ۳: حد و پیوستگی

فصل ۴: مشتق

فصل ۵: کاربرد مشتق

فصل ۶: مجموعه‌ها

فصل ۷: شمارش بدون شمردن

فصل ۸: احتمال

فصل ۹: الگو و دنباله

فصل ۱۰: ریشه و توان

فصل ۱۱: معادله و تابع درجه دوم

فصل ۱۲: معادلات گویا، ...

فصل ۱۳: قدر مطلق و ...

فصل ۱۴: توابع نمایی و ...

فصل ۱۵: هندسه تحلیلی

فصل ۱۶: هندسه یازدهم (پایه)

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم

فصل ۱۸: آمار

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

فصل اول

۱ تابع

CHAPTER 1

تابع

یک ماشین است که به‌ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد. **ورودی‌های مجاز را دامنه (D) و خروجی‌های آن را برد (R) می‌نامیم.** تشخیص تابع از دیدگاه‌های مختلف را در جدول زیر ببینید:

تابع	دامنه	برد	تشخیص
نمودار پیکانی از A به B	A	زیرمجموعه‌ای از B	از هر عضو A دقیقاً یک فلش به عضوی از B برود.
زوج مرتب	مجموعهٔ مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم	نباید مؤلفه‌های اول برابر باشند.
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور x ها	تصویر نمودار روی محور y ها	هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
ضابطه	x های مجاز	y های مجاز	هر رابطه به شکل $y=f(x)$ تابع است.

تذکر: معمولاً رابطه‌هایی که در آن‌ها y دارای توان زوج، قدرمطلق، جزءصحیح و یا دارای ضریب متغیر است، تابع نیستند.

دامنه

دامنهٔ همهٔ توابع کنکوری برابر $\mathbb{R}$ است به‌جز **توابع گفته‌شده در جدول زیر.**

تابع	دامنه
کسری	$\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکالی با فرجه زوج	زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم.
لگاریتمی	در تابع $y=\log_x u$ ، بین سه شرط $u>0$ ، $x>0$ و $x\neq 1$ اشتراک می‌گیریم.

تذکر: قبل از محاسبهٔ دامنهٔ تابع، هیچ‌وقت ضابطهٔ تابع را ساده نکنید.

برد

بهترین روش برای پیدا کردن برد توابع، رسم نمودار آن‌ها است. این روش معمولاً برای توابع براکتی، چندضابطه‌ای و قدرمطلقی استفاده می‌شود.

در جدول زیر، برد بعضی از توابع خاص آمده است. آن‌ها را بلد باشید:

ضابطه	برد	ضابطه	برد
$y=ax^2+bx+c\ ;\ a\neq 0$	۱ $a>0\ ;\ R=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$ ۲ $a<0\ ;\ R=(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$	$y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$R=\{0,-1\}$
$y=\sin x\ ,\ y=\cos x$	$R=[-1,1]$	$y=x+\frac{1}{x}$	۱ $x>0\ ;\ R=[2,+\infty)$ ۲ $x<0\ ;\ R=(-\infty,-2]$
$y=x-[x]$	$R=[0,1)$	$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ ;\ c\neq 0, ad-bc\neq 0$	$R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$

تساوی دو تابع

دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را مساوی می‌گوییم هر وقت اولاً دامنه‌هایشان با هم برابر باشند و ثانیاً ضابطه‌هایشان هم یکی باشند.
در این صورت نمودار دو تابع f و g برهم منطبق است. برای جلوگیری از افتادن در دام‌های تستی بخش تساوی دو تابع، حواستان به گذاشتن قدرمطلق بعد از خارج کردن عبارت از زیر رادیکال با فرجه زوج باشد.

انتقال و تبدیلات

این‌جا می‌خواهیم از روی نمودار تابع $y=f(x)$، نمودارهای جدیدی را رسم کنیم. برای این‌کار ۶ حالت اصلی زیر را ببینید:

انتقال و تبدیلات	نحوهٔ رسم	دامنه و برد
$y=f(x)+k$	❶ $f(x): k>0$ را به اندازهٔ k واحد بالا می‌بریم. ❷ $f(x): k<0$ را به اندازهٔ k واحد پایین می‌بریم.	دامنه ثابت ولی برد k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=f(x+k)$	❶ $f(x): k>0$ را به اندازهٔ k واحد چپ می‌بریم. ❷ $f(x): k<0$ را به اندازهٔ k واحد راست می‌بریم.	برد ثابت ولی دامنه k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=kf(x)$	عرض تابع k برابر می‌شود.	دامنه ثابت ولی برد k برابر می‌شود.
$y=f(kx)$	طول تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.	برد ثابت ولی دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.
$y=-f(x)$	قرینهٔ $f(x)$ نسبت به محور x ها	دامنه ثابت ولی برد تغییر می‌کند.
$y=f(-x)$	قرینهٔ $f(x)$ نسبت به محور y ها	برد ثابت ولی دامنه تغییر می‌کند.

تقدم روی انتقال و تبدیلات: برای رسم تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی $f(x)$ تقدم به‌صورت زیر است:

❶ c ❷ b ❸ a ❹ d

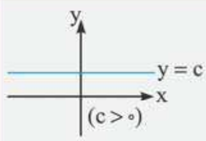
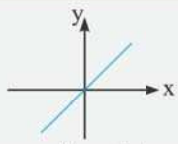
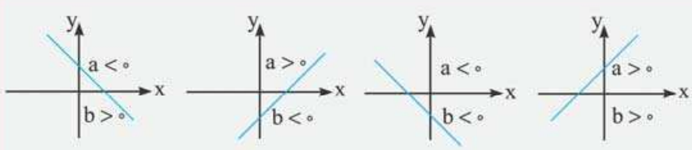
یعنی اینکه از روی $f(x)$ به‌ترتیب $f(x+c)$، $f(bx+c)$، $af(bx+c)$ و در آخر $af(bx+c)+d$ را رسم می‌کنیم.

رسم نمودار $|f(x)|$ و $f(|x|)$

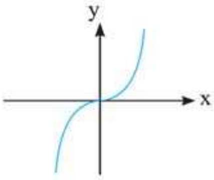
$y=\|f(x)\|$	ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخشی از $f(x)$ که زیر محور x ها است را قرینه کرده و به بالای این محور منتقل می‌کنیم.
$y=f(\|x\|)$	ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس سمت چپ محور y ها را پاک کرده و قرینهٔ بخشی که سمت راست محور y ها است را در سمت چپ هم می‌کشیم.

توابع خاص

نوبتی هم که باشد، نوبت توابع ثابت، همانی و خطی است. برای یادگرفتن آن‌ها جدول زیر را به‌خاطر بسپارید:

تابع	تابع ثابت	تابع همانی	تابع خطی
ضابطه	$y=c$	$y=x$	$y=ax+b \; ; \; a\neq 0$
تعریف	به‌ازای هر ورودی، جوابش c می‌شود.	هر ورودی‌ای که می‌گیرد، خروجی‌اش همان می‌شود.	در ضابطهٔ تابع خطی، a شیب و b عرض از مبدأ است.
نمودار	 «خط افقی»	 «نیمساز ناحیه اول و سوم»	

تابع درجه سوم



ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ است. ساده‌ترین حالت این تابع $y=x^3$ است که نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد (شبیه لُره) و همچنین داریم:

$\boxed{\text{برد}=\mathbb{R}}$ ، $\boxed{\text{دامنه}=\mathbb{R}}$

تذکر: توابع درجه سوم پرکاربرد زیر را ببینید:

$\boxed{y=(x\pm 2)^3=x^3\pm 6x^2+12x\pm 8}$ ، $\boxed{y=(x\pm 1)^3=x^3\pm 3x^2+3x\pm 1}$

تابع هموگرافیک

هر تابع به فرم $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ را هموگرافیک می‌نامیم. دامنه و برد این تابع به‌صورت زیر است:

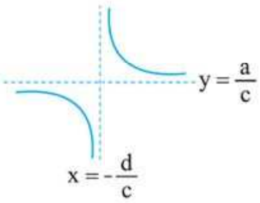
$\boxed{R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}}$ ، $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}}$

تذکر: در توابع به فرم هموگرافیک:

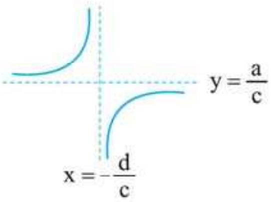
۱ اگر $c=0$ باشد، تابع خطی می‌شود. ۲ اگر $ad-bc=0$ باشد، تابع ثابت می‌شود.

نمودار تابع هموگرافیک

$\boxed{ad-bc<0}$

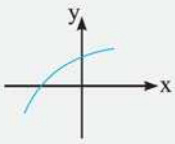
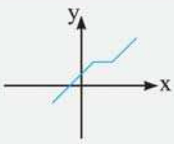
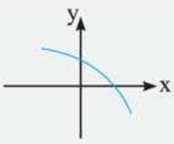
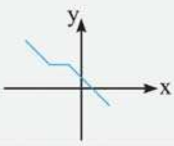


$\boxed{ad-bc>0}$

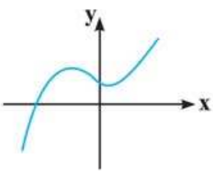


یکنوایی

حالت‌های مختلف یکنوایی را از روی جدول زیر یاد بگیرید:

وضعیت	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
اکیداً صعودی	با افزایش x ، مقدار تابع هم زیاد می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$	
صعودی	با افزایش x ، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا زیاد می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x ، مقدار تابع کم می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$	
نزولی	با افزایش x ، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا کم می‌شود.	$x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$	

تذکر: ۱ **توابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند را غیریکنوا می‌نامیم. مانند شکل مقابل:**



۲ **تنها تابع دنیا که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت می‌باشد.**

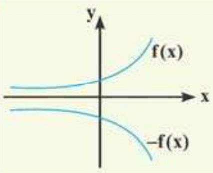
۳ **بهترین روش برای بررسی یکنوایی توابع، رسم آن‌ها است.**

یکنوایی توابع معروف

یکنوایی توابع خطی، درجه دوم و هموگرافیک از جمله مطالب مهم در کنکور است که دانستن آن برای همه الزامی است.

تابع	وضعیت یکنوایی
تابع خطی $y=ax+b$	۱ اگر $a>0$ باشد، تابع اکیداً صعودی است. ۲ اگر $a<0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است. ۳ اگر $a=0$ باشد، تابع ثابت است. (هم صعودی و هم نزولی)
تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c\,;\,a\neq 0$	۱ اگر $a>0$ باشد، تابع در بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است. ۲ اگر $a<0$ باشد، تابع در بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است. توجه داشته باشید این تابع در کل غیریکنوا است.
تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$	۱ اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً صعودی دارد ولی در کل غیریکنوا است. ۲ اگر $ad-bc<0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً نزولی دارد ولی در کل غیریکنوا است.

نکته: ۱ **اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، $-f(x)$ اکیداً نزولی است و برعکس. این هم شکلش:**



۲ **جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی و همچنین جمع دو تابع نزولی تابعی نزولی است.**

اعمال جبری روی توابع

اگر بخواهیم دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را با هم جمع، ضرب و ... کنیم، اولین کار این است که اشتراک **دامنه‌شان را به‌دست آوریم، سپس عمل جبری** خواسته‌شده را روی y هایشان انجام دهیم.

تذکر: برای محاسبهٔ دامنه توابع کسری، **علاوه‌بر اشتراک گرفتن بین دامنهٔ تابع‌های صورت و مخرج کسر، باید حواس**مان باشد که مخرج کسر صفر نشود. به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

ترکیب توابع

منظور از تابع مرکب $f(g(x))$، تابعی است که در آن خروجی‌های $g(x)$، ورودی $f(x)$ شوند. به زبان ساده‌**تر داستان به این صورت است که در تابع** $f(g(x))$ ابتدا x وارد تابع g می‌شود و سپس $g(x)$ ساخته‌شده را به‌جای x در تابع f قرار می‌دهیم. در نهایت $f(g(x))$ به‌دست می‌آید.

نکته: **گاهی‌اوقات تابع مرکب $(fog)(x)$ و یکی از توابع $f(x)$ یا $g(x)$ داده می‌شوند و تابع دیگر خواسته می‌شود. در این تست‌ها دو حالت زیر را در نظر بگیرید:**

۱ **fog و f معلوم باشند: در این حالت که تابع بیرونی یعنی $f(x)$ داده شده است، در ضابطه این تابع به‌جای x، $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به‌دست آید. در نهایت دو ضابطهٔ $f(g(x))$ را با هم برابر قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $g(x)$ به‌دست آید. (جای‌گذاری)**

۲ **fog و g معلوم باشند: در این صورت که تابع درونی یعنی $g(x)$ داده شده است، از تغییر متغیر $g(x)=t$ کمک می‌گیریم و x را بر حسب t پیدا می‌کنیم و در ضابطهٔ $(fog)(x)$ قرار می‌دهیم. (تغییر متغیر)**

دامنهٔ تابع مرکب

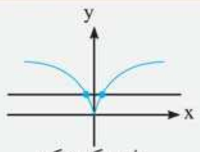
دامنهٔ تابع $y=(fog)(x)$ به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

البته برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ می‌توانیم تابع $g(x)$ را به‌جای x در تابع $f(x)$ قرار دهیم تا ضابطهٔ $f(g(x))$ به‌دست آید و سپس دامنهٔ این تابع را از روی ضابطه‌اش محاسبه کنیم. (فقط توجه داشته باشید در این حالت ساده‌سازی انجام ندهید.)

تابع یک‌به‌یک

تابع $y=f(x)$ یک‌به‌یک است هرگاه ورودی**های مختلف، خروجی‌هایشان یکسان نشوند. تشخیص تابع یک‌به‌یک را در سه حالت زیر بلد باشید:**

دیدگاه	وضعیت یک‌به‌یکی	مثال
زوج مرتب	برای یک‌به‌یکی تابع زوج مرتبی، نباید مؤلفه‌های دوم برابر باشند.	$f=\{(۱,۲),(۳,۲)\}$ غیر یک‌به‌یک
نمودار	هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.	 غیر یک‌به‌یک
ضابطه	❶ رسم نمودار تابع ❷ هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است.	$f(x)=x+[x]$ x اکیداً صعودی و $[x]$ صعودی است، پس مجموعشان اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک می‌باشد.

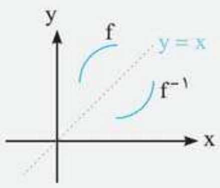
تابع وارون (تابع معکوس)

اگر $f(x)$ یک‌به‌یک باشد، وارون‌پذیر است. وارون تابع $f(x)$ را با نماد $f^{-1}(x)$ نمایش می‌دهیم. حواستان باشد که $f^{-1}(x)$ هیچ ربطی به $\frac{1}{f(x)}$ ندارد.

برای رسیدن به وارون تابع $f(x)$، جای ورودی و خروجی $f(x)$ را با هم عوض می‌کنیم، یعنی:

$$\boxed{(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}}$$

پیدا کردن تابع معکوس را در سه حالت زوج مرتب، نمودار و ضابطه بلد باشید:

دیدگاه	تابع وارون (معکوس)	مثال
زوج مرتب	برای پیدا کردن تابع معکوس جای مؤلفه‌های اول و دوم تابع را با هم عوض می‌کنیم.	$f=\{(۱,۴),(۲,۳)\}\Leftrightarrow f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲)\}$
نمودار	نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.	
ضابطه	ابتدا x را تنها می‌کنیم و سپس جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.	$y=۲x+۱$ $\Rightarrow ۲x=y-۱\Rightarrow x=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow y^{-1}=\frac{x-۱}{۲}$

نکته: موارد زیر را در مورد تابع وارون بدانید.

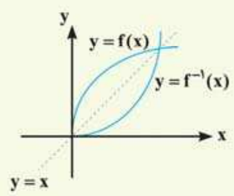
$\boxed{R_f=D_{f^{-1}}}$ ، $\boxed{D_f=R_{f^{-1}}}$

۱ دامنهٔ $f(x)$، برد $f^{-1}(x)$ و برد $f(x)$، دامنهٔ $f^{-1}(x)$ است:

۲ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، $f^{-1}(x)$ هم اکیداً صعودی است و اگر $f(x)$ اکیداً نزولی باشد، $f^{-1}(x)$ هم اکیداً نزولی است.

۳ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد و تابع $f^{-1}(x)$ را قطع کند، نقطه تقاطع حتماً روی خط $y=x$ است.

پس به‌جای حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.



۴ ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی می‌شود.

$\boxed{(fof^{-1})(x)=x \;;\; x\in D_{f^{-1}}=R_f}$ ، $\boxed{(f^{-1}of)(x)=x \;;\; x\in D_f=R_{f^{-1}}}$

۵ برای دو تابع وارون‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$\boxed{(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)}$

در صورتی‌که بعد از مطالعهٔ خلاصهٔ فصل، نیاز به توضیحات بیشتر و کامل‌تری داشتید، حتماً به کتاب درسنامهٔ ریاضیات تجربی IQ مراجعه کنید.

فصل ۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

اهلاً و سهلاً. مرحبا بِگُم. هذا تابع

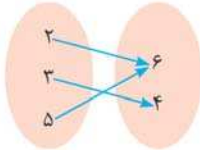
مفهوم تابع

۱ کدام گزینه نمایش‌دهنده یک تابع **نیست**؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\{(۳,۱),(۴,۲),(۵,۰)\}$

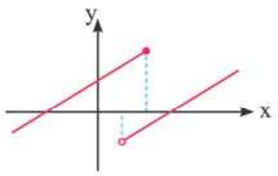
۲)

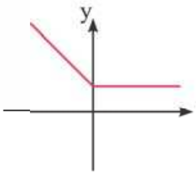
x	۲	$\sqrt{۳}$	۳
y	۱	۲	۱

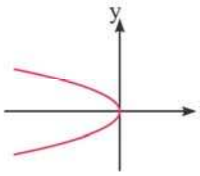
۳) 

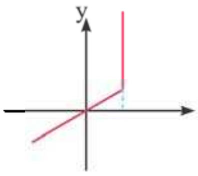
۴) رابطهٔ بین مادر و فرزندان

۲ کدام شکل، نمودار یک تابع است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

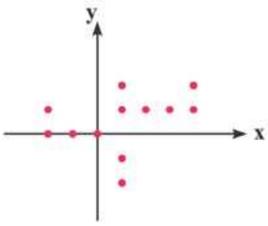
۱) 

۲) 

۳) 

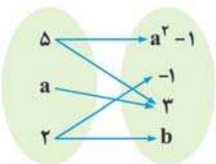
۴) 

۳ با حذف حداقل چند نقطه، نمودار مقابل **در دامنهٔ خود** یک تابع می‌باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۷

۴ اگر نمودار مقابل، مربوط به یک تابع باشد، ab کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

۵ رابطهٔ $\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۶ رابطهٔ $\{(a,۶b),(a-b,۲b-a),(a-b,۲a),(a,b^۲+۹)\}$ تابع است. واسطهٔ حسابی دو عدد a و b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۵

۷ اگر R رابطه‌ای باشد که به هر عدد طبیعی کمتر از ۵ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت دهد، حداقل چند زوج مرتب از R حذف کنیم تا این رابطه به یک تابع تبدیل شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸ حداقل چند نقطه از رابطهٔ $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, |x|+|y|=۲\}$ حذف کنیم تا این رابطه یک تابع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹ تعداد توابع f از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به $B=\{۵,۶,۷\}$ به طوری‌که $f(۲)\neq ۶$ و مقدار تابع f به ازای $x=۳$ عددی اول شود، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x\le 2 \\ 1 & x=2 \\ a\sin(x-2)+b & x\ge 2\end{cases}$ ضابطهٔ یک تابع باشد، $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -8 ۳) 4 ۴) 8

۱۱ اگر $f(x)=\begin{cases} x^3-x & |x-1|\ge 1 \\ g(x) & |x-1|\le 1\end{cases}$ یک تابع باشد، $g(x)$ برابر با کدام یک از گزینه‌ها می‌تواند باشد؟

۱) x^2-x ۲) x^2+x ۳) x^2-x+1 ۴) x^2+x-1

۱۲ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمایش جبری یک تابع است؟

۱) $|y|=|x|$ ۲) $y^2-1=\sin x$ ۳) $y^3=\sqrt{x}-1$ ۴) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+1 & x\ge 1 \\ x^2+2 & x\le 1\end{cases}$

۱۳ کدام گزینه یک تابع را نمایش می‌دهد؟

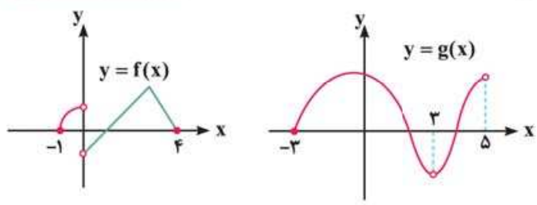
۱) $y^2-xy+3=0$ ۲) $(y-1)^2+|x-1|=0$ ۳) $\cos y=x$ ۴) $y^4-xy^3=0$

دامنه

دامنه یکی از مفاهیم خیلی مهم توی فصل تابع هست. راستی اینم بگیم که توی خیلی از فصل‌های دیگه هم استفاده می‌شه. تا همشو یاد نگرفتین نرید فصل بعدیا!!

دامنهٔ مقدماتی

۱۴ اگر نمودار توابع f و g به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ آن‌ها در چند نقطهٔ صحیح مشترک‌اند؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵ دامنهٔ تابع $f=\{(a^2-3a,a+1),(-3,1),(-2,3)\}$ دو عضوی است. a چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶ تعداد اعضای دامنه و برد یک تابع به‌ترتیب $17-2n$ و $n+1$ می‌باشد. n چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

دامنهٔ توابع کسری

۱۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x-3}}{x-\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0,3\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1,-1,3\}$

۱۸ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x^2-4)(5x^2-26x+5)}$ شامل چند عدد صحیح **نیست**؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{2x^2-ax-b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{1,3\}$ باشد، $2a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۲۲

۲۰ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{b}{ax^2+12x+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۲۰ ۴) -20

۲۱ اگر دامنهٔ توابع $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x^2-x-m}$ و $g(x)=\dfrac{1}{|x|+2}$ با هم برابر باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $m=\frac{1}{8}$ ۲) $m=\frac{-1}{8}$ ۳) $m<\frac{1}{8}$ ۴) $m<-\frac{1}{8}$

۲۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+mx+1)}$ برابر با $\mathbb{R}-\{1\}$ است. حدود m کدام است؟

۱) $-3<m<1$ ۲) $-1<m<3$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-2\le m<2$

۲۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+3mx+m+6}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\}$ باشد، $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) -6 ۴) 6

دامنهٔ توابع رادیکالی

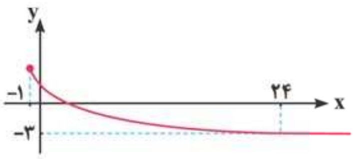
۲۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[4]{x(1-x)^3}$ به‌صورت $[a,b]$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}+\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(0,1]$ ۲) $(0,3)$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(2,3)$

۲۶ شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=a-\sqrt{x+b}$ است. طول از مبدأ نمودار تابع کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۷ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $[\frac{2}{3},2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

۲۸ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{5-x}-1}$ به‌صورت $[a,b]-\{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام می‌باشد؟

۱) -1 ۲) ۹ ۳) ۱ ۴) -9

۲۹ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$ به صورت $[a,b]$ است. $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۰ اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$، دامنهٔ تابع $f(3-x)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۲)

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,3]$

۳۱ اگر $f(x+1)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ باشد، دامنهٔ $f(x-1)$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(3,+\infty)$ ۴) $(4,+\infty)$

۳۲ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+ax+b}$، بازهٔ $[-1,2]$ باشد و بدانیم دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{5x}{2x^2-cx+d}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{a,b\}$ می‌باشد، $d-ac$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) -2 ۴) ۲

۳۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+ax+b}$ به صورت $D_f=\{1\}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -3 ۴) ۳

۳۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+2x+4}} & x<0\\ \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+3x+2} & x\ge 0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1,-2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ۴) $\mathbb{R}$

دامنهٔ توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

دو تا ابزار خوب (قدرمطلق و براکت) برای سخت شدن تست‌ها ...

۳۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{|x+1|-3}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{a,b\}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۳۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{|2x-1|-3}}$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-1)$ ۳) $\mathbb{R}-(-1,2)$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,2]$

۳۷ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+3|}$، دامنهٔ تابع $f(-x+1)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{5}{2},+\infty)$ ۲) $[\frac{5}{2},+\infty)$ ۳) $(-\infty,-\frac{5}{2}]$ ۴) $(-\infty,\frac{5}{2}]$

۳۸ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|x+1|+|x-3|-6}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}-(-2,4)$ (۲) $\mathbb{R}-[-2,4]$ (۳) $[-2,4]$ (۴) $(-2,4)$

۳۹ تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2|x+3|+6}$ در بازهٔ (a,b) تعریف نشده است. $a+b$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۰ اگر دامنهٔ دو تابع $f(x)=\sqrt{4x-x^2-3}$ و $g(x)=\sqrt{b-|x+a|}$ برابر باشند، ab کدام است؟ $(b>0)$

(۱) -2 (۲) 2 (۳) 3 (۴) -3

۴۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{[3x-1]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$ (۲) $\mathbb{R}-[0,1)$ (۳) $\mathbb{R}-[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ (۴) $\mathbb{R}-[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۴۲ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{[x]-3}{1-[x]}}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $[1,3)$ (۲) $[2,4)$ (۳) $[2,3]$ (۴) $(1,4)$

دامنهٔ توابع لگاریتمی

دامنهٔ توابع لگاریتمی جدیداً خیلی خیلی توی کنکور میاد. البته واسه حلش معمولاً گزینه بازی هم خیلی جوابه...

۴۳ دامنهٔ تابع $y=\log_{x^2-1}(9-x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) 6 (۲) 4 (۳) 2 (۴) صفر

۴۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

(۱) $[-2,0)\cup(3,5]$ (۲) $[-2,0]\cup(3,5)$ (۳) $[-2,3)$ (۴) $(0,5]$

۴۵ دامنه $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\log_{\frac{1}{2}}x}}$، شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

(۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۴۶ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\log_4(x^2-x-3)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

(۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ (۲) $(-1,2)$ (۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ (۴) $(-2,1)$

۴۷ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_4(|x^2-2|-x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

(۱) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$ (۲) $(-\infty,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ (۳) $[-1,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ (۴) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

دامنهٔ توابع مثلثاتی

۴۸ کدام عدد در دامنهٔ تابع $y=-\frac{1}{3}\cot(\frac{2x}{3})$ قرار ندارد؟

(۱) $\frac{9\pi}{4}$ (۲) $\frac{-2\pi}{3}$ (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi+\pi x}{2})$ در بازهٔ $(-5,5)$، شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

(۱) 7 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 4

۵۰ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1-\sqrt{|\sin x|}}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

(۱) $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ (۲) $\mathbb{R}-\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ (۳) $\mathbb{R}-\{2k\pi-\frac{\pi}{2}\}$ (۴) $\mathbb{R}$

۵۱ دامنهٔ تابع $y=\cos(\sqrt{1-[x]})$ به صورت $(-\infty,a)$ است. بیشترین مقدار a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۱) 1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 2 (۴) $\frac{5}{2}$

دامنه از روی نمودار

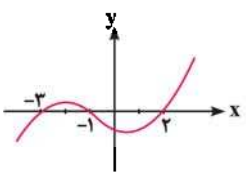
۵۲ شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $y=\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟

(۱) $[-3,2]$

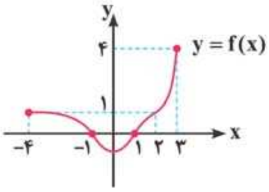
(۲) $[-1,+\infty)$

(۳) $(-\infty,-1]$

(۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

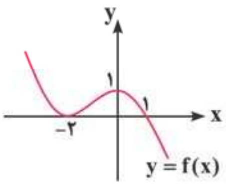


۵۳ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\frac{\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۵۴ نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{x - f(x-1)}$ کدام است؟

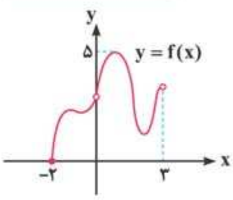


۱) $(-\infty, -2]$
۲) $(-\infty, -1]$
۳) $[1, +\infty)$
۴) $[2, +\infty)$

برد

برد تابع از روی نمودار

۵۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. $D_f \cap R_f$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۵۶ اگر دامنهٔ تابع $y = -x^2 + 2$ بازهٔ $[-1, 3]$ باشد، برد آن به صورت $[a, b]$ است. $b - a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۵۷ برد تابع $y = |1 - \sqrt{x}|$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $[1, +\infty)$ ۲) $[0, 1]$ ۳) $[0, +\infty)$ ۴) $(0, 1)$

۵۸ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 - 2x$ به‌صورت $\mathbb{R} - \{5, a\}$ باشد، برد تابع $[-1, +\infty) - \{b\}$ است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۵۹ برد تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \le 0 \\ 3 & 0 < x < 3 \\ 4 + \sqrt{x} & x > 4 \end{cases}$، شامل چند عدد صحیح نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۰ برد تابع $f(x) = \frac{1}{|x| + |x-1|}$ در بازهٔ $[-1, 2]$ کدام است؟

۱) $[1, 3]$ ۲) $[\frac{1}{3}, 1]$ ۳) $[1, +\infty)$ ۴) $[0, 1]$

۶۱ برد تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ |x+2| & x \le 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{1, 0\}$ ۴) $\mathbb{R}$

برد تابع بدون رسم نمودار

۶۲ اگر برد تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ برابر $R_f = \{0, 2, \frac{5}{2}\}$ باشد، کدام‌یک از نقاط زیر در دامنهٔ تابع f قرار ندارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -2 ۴) -1

۶۳ اگر برد تابع خطی $y = \frac{-x}{2} + 3$ بازهٔ $(0, 3]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۴ برد تابع $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ به صورت $\mathbb{R} - \{a\}$ است. a^2 کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۵ برد تابع $y = \frac{-2}{-1 - x^2}$ کدام است؟

۱) $(0, 1]$ ۲) $(0, 2]$ ۳) $[-1, 0)$ ۴) $(-2, -1]$

۶۶ برد تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+1}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۶۷ برد تابع $y=[\frac{x}{2}+1]+[3-\frac{x}{2}]$ به صورت $\{\alpha,\beta\}$ است. مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) 6 ۲) 9 ۳) 10 ۴) 12

۶۸ برد تابع $f(x)=\sqrt{1+4x-8[\frac{x}{2}]}$ کدام است؟

۱) $(1,3)$ ۲) $[1,3)$ ۳) $(1,3]$ ۴) $[1,3]$

۶۹ برد دو تابع $f(x)=4+\sqrt{x-1}$ و $g(x)=x^2+4x+(3a-4)$ با هم برابر است. برد تابع $y=a\sin x+3$ کدام است؟

۱) $[3,7]$ ۲) $[-1,7]$ ۳) $[1,3]$ ۴) $[4,7]$

۷۰ برد تابع $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ به صورت $[a,+\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۷۱ برد تابع $f(x)=2\sin^2 x-3\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $[-2,3]$ ۲) $[-3,2]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $[-3,3]$

۷۲ فرض کنید بازهٔ $[a,b]$ برد تابع $f(x)=2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۷۳ برد تابع $y=[|\cos^3 x-3\cos^2 x+3\cos x-4|]$ شامل چند عضو است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) 7 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 10

۷۴ برد تابع $y=\frac{2\sin x-1}{1+\sqrt{1-\cos^2 x}}$ کدام است؟ $(x\in(0,\pi))$

۱) $[-\frac{1}{2},1)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-1,\frac{1}{2}]$ ۴) $(0,1)$

تساوی دو تابع

۷۵ اگر توابع $f=\{(1,a),(2,a+b),(c,2)\}$ و $g=\{(1,0),(4,2),(2,-1)\}$ مساوی باشند، $a+b+c$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۷۶ در کدام گزینه دو تابع با هم برابر هستند؟

۱) $f(x)=(\sqrt[3]{x})^3$ و $g(x)=(\sqrt{x})^2$

۲) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$

۳) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^2+6x+9}$ و $g(x)=x+3$

۷۷ کدام دو تابع داده شده با هم مساوی **نیستند**؟

۱) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ و $g(x)=x-1$

۲) $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}$ و $g(x)=|x|-1$

۳) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ و $g(x)=1$

۴) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $g(x)=x-2$

۷۸ کدام دو تابع با هم برابرند؟

۱) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$

۲) $f(x)=\sqrt{-x^3}$ و $g(x)=x\sqrt{-x}$

۳) $f(x)=\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=\sqrt{1+x^2}-1$

۴) $f(x)=x|x+1|$ و $g(x)=|x|(x+1)$

۷۹ در کدام گزینه توابع f و g با هم برابر **نیستند**؟

۱) $g(x)=0$ و $f(x)=[\frac{x^2}{x^2+3}]$

۲) $g(x)=\frac{x}{|x|}$ و $f(x)=\frac{|x|}{x}$

۳) $g(x)=\frac{1}{2}\log x$ و $f(x)=\log\sqrt{x}$

۴) $g(x)=1$ و $f(x)=\tan x.\cot x$

۸۰ کدام یک از توابع زیر، با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $y=\log(x-2)-\log x$ ۲) $y=\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$ ۳) $y=\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$ ۴) $y=2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

۸۱ نمودار دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۳-۸}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳k & x=۲\end{cases}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ بر هم منطبق هستند. $a+b+k$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸۲ اگر $f(x)=\dfrac{۵}{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^۲+cx+d}$ با هم برابر باشند، $a+d$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

مقداردهی به تابع

رسیدیم به بحث شیرین مقداردهی به تابع. آسونه! ولی تست‌های ابتکاری هم زیاد داریم توش.

۸۳ اگر $f(x)=\begin{cases}x-۲ & x>۲\\ x^۲+x & -۱<x<۲\\ ۴x+۲ & x<-۱\end{cases}$ باشد، مقدار $f(-\sqrt{۲}+۱)+f(۳\sqrt{۲}-۲)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) ۸ ۳) صفر ۴) $۳\sqrt{۲}-۶$

۸۴ در تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۳ & x\geq a\\ -x+۹ & x\leq a\end{cases}$، مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۲۳ ۴) ۲۶

۸۵ اگر $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f(x^۲)-۲f(x)+۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱-x^۲}$ ۲) $\dfrac{۲x}{x^۲-۱}$ ۳) $\dfrac{۲x+۱}{۱-x^۲}$ ۴) $\dfrac{۲x-۱}{x^۲-۱}$

۸۶ اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ باشد، حاصل $f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))$ کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸۷ اگر $f(۱-۲x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x}+۲ & x\leq ۰\\ \sqrt{۴x} & x>۰\end{cases}$ باشد، $f(۳)+f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۸ در تابع $f(x)=\begin{cases}-x-۱ & x\geq ۰\\ x+۲ & x<۰\end{cases}$، اگر $f(f(\sqrt{a}))=-۳$ باشد، $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۶- ۳) ۱۷ ۴) ۱۷-

۸۹ اگر $f(x)=\dfrac{x^۲-۶x+۱۳}{x^۲-۶x+۱}$ باشد، مقدار $f(۳+\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۲

۹۰ اگر $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+۵$ باشد، حاصل $f(\sqrt[۳]{۳}+۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۱ اگر $f(x+\dfrac{۱}{x})=x^۳+\dfrac{۱}{x^۳}$ باشد، $f(۱+\sqrt{۲})$ چند برابر $۲+\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۲ اگر $f(۲x)=-f(۵)-۲x+۳$ باشد، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۶ ۴) ۴

۹۳ اگر $f(-x)-xf(x)=|۲x|+۱$ باشد، $f(-۳)$ کدام است؟

۱) ۱/۴- ۲) ۲/۸ ۳) ۱/۴ ۴) ۲/۸-

۹۴ با فرض $f(x+۱)=۲^x$، حاصل $۴f(x)+f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $۲f(x)$ ۳) $۴f(x)$ ۴) $۶f(x)$

۹۵ اگر برای هر $x\neq ۰$، داشته باشیم $f(x)+f(۱)=\dfrac{۱}{x^۲}-۳$، آنگاه $f(\cos x)$ کدام است؟

۱) $-\tan^۲x+۱$ ۲) $\tan^۲x+۱$ ۳) $-\tan^۲x-۱$ ۴) $\tan^۲x-۱$

نوشتن ضابطهٔ تابع

اینم چند تا تست از نوشتن ضابطهٔ تابع. توی فصل کاربرد مشتق (بهینه‌سازی) از این مطالب خیلی استفاده می‌کنیم.

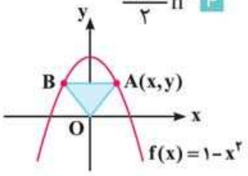
۹۶ در یک مستطیل، طول آن از ۲ برابر عرض آن یک واحد کمتر است. مساحت مستطیل کدام است؟ (x طول مستطیل است.) (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{x(x-1)}{2}$ ۲) $\frac{x(x+1)}{2}$ ۳) $\frac{x(x-1)}{4}$ ۴) $\frac{x(x+1)}{4}$

۹۷ در مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ارتفاع h، مساحت کدام است؟

۱) $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{h^2}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}h^2$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}h^2$

۹۸ شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=1-x^2$ است. مساحت مثلث OAB برحسب طول نقطه A کدام است؟

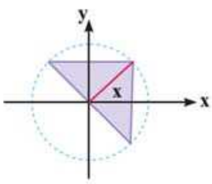


۱) x^3+x ۲) x^2+x ۳) $x-x^2$ ۴) $x-x^3$

۹۹ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر به‌صورت تابعی از r کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}\pi r^3+30\pi r^2$ ۲) $\frac{4}{3}\pi r^3+30\pi r^2$ ۳) $\frac{8}{3}\pi r^2+30\pi r^2$ ۴) $\frac{2}{3}\pi r^3+15\pi r^2$

۱۰۰ مساحت ناحیهٔ رنگی در دایرهٔ مثلثاتی مقابل تابعی از x است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



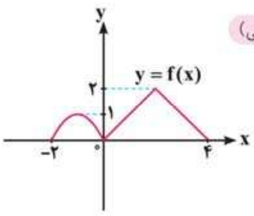
۱) $\sin 2x$ ۲) $\cos 2x$ ۳) $2\sin x$ ۴) $2\cos x$

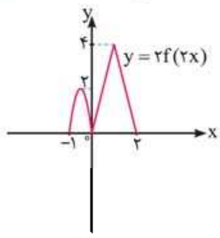
انتقال

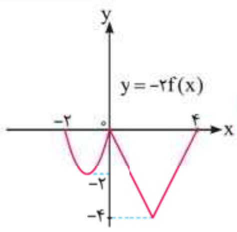
انتقال تنها بخش تابع هست که هم تو سال دهم، هم یازدهم و هم دوازدهم اومده! پس مهمه دیگه. نه مهم نیست. خیلی خیلی ... مهمه. توصیه می‌کنم اول جلد درسنامه رو با دقت بخونید بعد بیایید و همهٔ تست‌هاشو به ترتیب حل کنید.

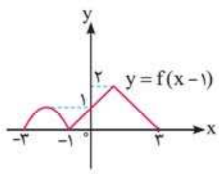
انتقال نمودار توابع

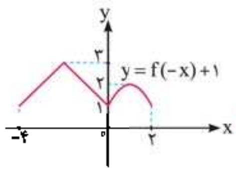
۱۰۱ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، کدام نمودار درست رسم **نشده** است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



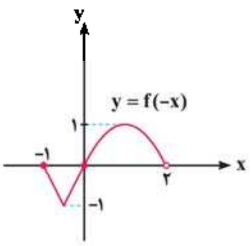
۱)


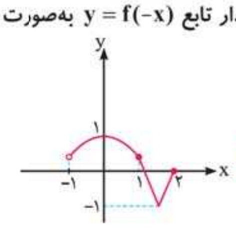
۲)


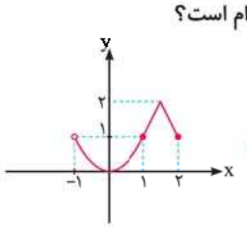
۳)


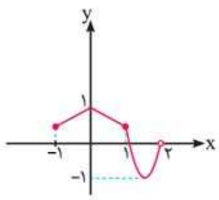
۴)


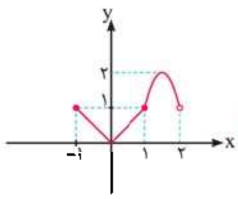
۱۰۲ نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(x-1)+1$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخنامه تشریحی فصل اول

۱ | **۴**

یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x، فقط یک y داشته باشد. حالا به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

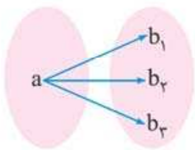
۱) مؤلفه‌های اول متمایزند، پس این رابطه نمایش‌دهنده یک تابع است. ×

۲) این رابطه به‌ازای هر x، دقیقاً یک y می‌دهد، پس تابع است. ×

۳) از هر عضو دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس یک تابع را نمایش می‌دهد. ×

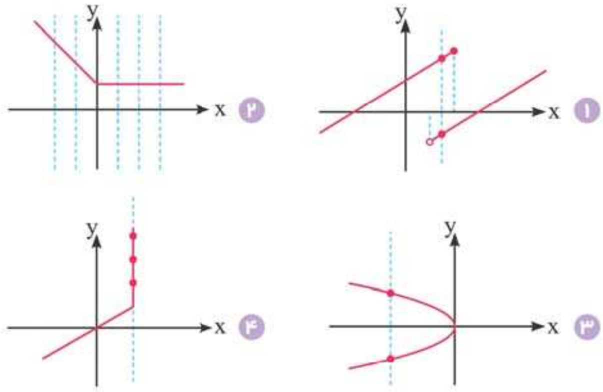
۴) اگر بخواهیم برای مادری که سه فرزند به نام‌های b_1، b_2 و b_3 دارد یک نمودار ون بکشیم، این نمودار به‌صورت زیر است:

به وضوح این رابطه تابع نیست. ✓



۲ | **۲**

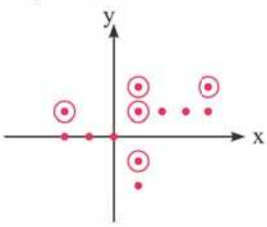
به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» خطی موازی با محور عرض‌ها، نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ تست گزینه «۲» است.

۳ | **۳**

شرط این‌که یک نمودار مربوط به یک تابع باشد **این است که هیچ دو نقطه با طول برابر عرض متمایزی نداشته باشد**، در نتیجه برای این‌که نمودار زیر مربوط به یک تابع باشد، حداقل باید نقاط مشخص شده را حذف کنیم که تعداد آن‌ها ۵ تا است. (قبوله؟)



۴ | **۳**

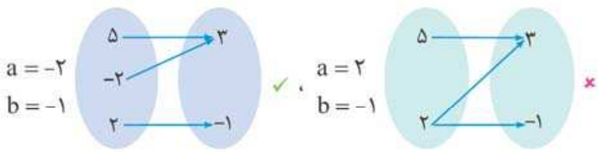
با توجه به تابع بودن رابطه و این‌که از هر یک از اعداد ۲ و ۵ دو پیکان خارج شده است، پس خروجی‌هایشان باید با هم برابر باشند، درنتیجه می‌توان نوشت:

$$x=2: -1=b \Rightarrow b=-1\ ,\ x=5: a^2-1=3$$

$$\Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2\ ,\ a=-2$$

حالا به‌ازای دو مقدار به‌دست آمده برای a، باید بررسی کنیم که کدام یک شرط تابع بودن را برقرار می‌کند. دو حالت زیر را ببینید:

حالت اول: | **حالت دوم:**



خلاصه این‌که برای تابع بودن، باید $a=-2$ و $b=-1$ باشند. در نتیجه $ab=(-2)(-1)=2$ است.

۵ | **۲**

برای تابع بودن باید مولفه‌های دوم دو زوج مرتب $(3,m+2)$ و $(3,m^2)$ با هم برابر باشد، تا به ازای xهای یکسان، yهای یکسان داشته باشند. پس داریم:

$$m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0$$

$$\Rightarrow m=2\ ,\ m=-1$$

حالا مقادیر به‌دست آمده برای m را در رابطهٔ داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m=2: \{(3,4),(2,1),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$$ ×

$$m=-1: \{(3,1),(2,1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$$ ✓

پس تنها مقدار قابل قبول برای m، **عدد ۱- است.**

۶ | **۲**

با توجه به حضور دو زوج مرتب (a,b^2+9) و $(a,6b)$ و تابع بودن رابطه، می‌توان نوشت:

$$b^2+9=6b \Rightarrow b^2-6b+9=0 \Rightarrow (b-3)^2=0$$

$$\Rightarrow b-3=0 \Rightarrow b=3$$

از طرفی با توجه به دو زوج مرتب $(a-b,2a)$ و $(a-b,2b-a)$ مقدار a را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$2b-a=2a \Rightarrow 2b=3a \xrightarrow{b=3} 6=3a \Rightarrow a=2$$

از طرفی می‌دانیم واسطهٔ حسابی دو عدد میانگین آن‌ها است، پس واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر با $\frac{a+b}{2}=\frac{2+3}{2}=2/5$ می‌باشد.

۷ | **۱**

عددهای طبیعی کمتر از ۵، همان اعداد ۱ تا ۴ هستند. حالا رابطهٔ R را به‌صورت زوج مرتب می‌نویسیم. داریم:

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$$

برای اینکه این رابطه به یک تابع تبدیل شود، باید از زوج مرتب‌های $(2,2)$ و $(2,1)$ حداقل یکی، از زوج مرتب‌های $(3,3)$ و $(3,1)$ هم حداقل یکی و از زوج مرتب‌های $(4,4)$، $(4,2)$ و $(4,1)$ حداقل دو تا را حذف کنیم. پس حداقل باید ۴ زوج مرتب را حذف کنیم که این رابطه به یک تابع تبدیل شود.

۸ | **۲**

به دنبال عددهای صحیح x و yای هستیم که در رابطهٔ $|x|+|y|=2$ صدق کنند. این رابطه به‌صورت مجموعه زوج مرتب‌های زیر نوشته می‌شود:

$$f=\{(-2,0),(-1,-1),(-1,1),(0,-2),(0,2),(1,-1),(1,1),(2,0)\}$$

برای اینکه رابطهٔ f تابع باشد، **نباید در زوج مرتب‌ها مولفهٔ اول تکراری داشته باشیم**، پس از بین زوج مرتب‌های $(-1,-1)$ و $(-1,1)$ حداقل یکی، از بین زوج مرتب‌های $(0,2)$ و $(0,-2)$ حداقل یکی و در آخر از بین زوج مرتب‌های $(1,-1)$ و $(1,1)$ هم باید حداقل یک عضو را حذف کنیم. یعنی **حداقل باید سه تا از زوج مرتب‌ها** را حذف کنیم تا رابطه، تابع شود.

۹ **۴**

عددهای ۱ و ۴ از مجموعهٔ A به هر یک از سه عضو مجموعهٔ B یعنی ۵، ۶ و ۷ می‌توانند بروند، یعنی هر کدام ۳ حالت دارند. عدد ۲ نباید به ۶ برود، یعنی برای آن، ۲ حالت داریم و همچنین عدد ۳ باید به یکی از اعداد اول مجموعهٔ B برود که آن هم ۲ حالت دارد (۵ یا ۷).

در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد کل توابع از A به B با توجه به شرط‌های گفته شده برابر است با: $۳\times۳\times۲\times۲=۳۶$

حواستان باشد که فقط اعضای مجموعهٔ A برایمان مهم هستند و مثلاً هیچ اشکالی ندارد که هم ۱ و هم ۴ هر دو به عدد ۵ بروند.

۱۰ **۱**

با توجه به اینکه $x=۲$ در دامنهٔ هر سه ضابطه قرار دارد، پس مقدار تابع به ازای $x=۲$ در هر سه ضابطه باید با هم برابر باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a(۲)^۲+۲b=۱=a\sin(۲-۲)+b\Rightarrow ۴a+۲b=۱=b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴a+۲b=۱ & (۱)\\ a\sin(۰)+b=۱\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

حالا با جای‌گذاری $b=۱$ در رابطهٔ (۱)، $a=-\frac{۱}{۴}$ و درنتیجه $\frac{b}{a}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}}=-۴$ می‌شود.

۱۱ **۲**

ابتدا هر یک از نامعادلات $|x-۱|\ge۱$ و $|x-۱|\le۱$ را حل می‌کنیم. پس داریم:

$$|x-۱|\ge۱\Rightarrow\begin{cases}x-۱\ge۱\Rightarrow x\ge۲\\ \text{یا}\\ x-۱\le-۱\Rightarrow x\le۰\end{cases},$$

$$|x-۱|\le۱\Rightarrow-۱\le x-۱\le۱\xrightarrow{+۱}۰\le x\le۲$$

در نتیجه $f(x)=\begin{cases}x^۳-x & x\le۰ \text{ یا } x\ge۲\\ g(x) & ۰\le x\le۲\end{cases}$ می‌باشد. $x=۰$ و $x=۲$ در محدوده‌های داده شده برای هر یک از ضابطه‌ها مشترک هستند و چون f تابع است، باید به‌ازای این دو نقطه مقدار تابع در هر یک از ضابطه‌ها عدد یکسان شود. پس می‌توان نوشت:

$$x=۰: g(۰)=۰^۲-۰=۰\quad,\quad x=۲: g(۲)=۲^۳-۲=۸-۲=۶$$

در نتیجه گزینه‌ای درست است که مقدار آن به‌ازای $x=۰$ برابر با صفر و به‌ازای $x=۲$ برابر ۶ شود که این اتفاق فقط در گزینهٔ «۲» رخ می‌دهد. (حله؟)

۱۲ **۳**

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) به‌ازای $x=۱$ برای رابطهٔ $|y|=|x|$، دو مقدار $y=\pm۱$ به‌دست می‌آید، پس $|y|=|x|$ تابع نیست. ببینید: $x=۱\Rightarrow|y|=۱\Rightarrow y=\pm۱$

۲) به‌ازای $x=۰$ دو مقدار $y=\pm۱$ به‌دست می‌آید، پس $y^۲-۱=\sin x$ تابع نیست. ببینید: $x=۰\Rightarrow y^۲-۱=۰\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$

۳) این رابطه نمایش یک تابع است. ببینید:

$$y^۳=\sqrt{x}-۱\xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }}y=\sqrt[۳]{\sqrt{x}-۱}$$

۴) به‌ازای $x=۱$ مقدار تابع از ضابطهٔ بالایی برابر با ۲ و از ضابطهٔ پایینی برابر ۳ است. (موافقی؟) پس رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x}+۱ & x\ge۱\\ x^۲+۲ & x\le۱\end{cases}$ تابع نیست.

۱۳ **۲**

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با جای‌گذاری $x=۴$ داریم:

$$y^۲-۴y+۳=۰\Rightarrow(y-۱)(y-۳)=۰\Rightarrow y=۱, y=۳ ✗$$

به‌ازای یک مقدار از x، دو مقدار برای y به‌دست آوردیم، پس تابع نیست.

۲) جمع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس باید تک‌تک عبارات صفر شوند:

$$(y-۱)^۲=۰\Rightarrow y-۱=۰\Rightarrow y=۱, |x-۱|=۰\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱ ✓$$

پس فقط نقطهٔ $\{(۱,۱)\}$ باعث برقراری رابطهٔ بالا می‌شود که به وضوح مشخص‌کنندهٔ یک تابع است.

۳) با جای‌گذاری $x=۰$ داریم: $\cos y=۰\Rightarrow y=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\dots$ ✗

به‌ازای یک مقدار از x، بی‌شمار مقدار متمایز برای y به‌دست آوردیم، پس تابع نیست.

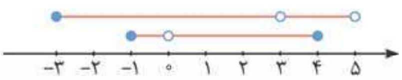
۴) با جای‌گذاری $x=۱$ داریم:

$$y^۴-y^۳=۰\Rightarrow y^۳(y-۱)=۰\Rightarrow y=۰, y=۱ ✗$$

به‌ازای یک مقدار از x، دو مقدار متمایز برای y به‌دست آوردیم، پس رابطه، تابع نیست.

۱۴ **۲**

دامنهٔ توابع f و g به‌ترتیب $D_f=[-۱,۴]-\{۰\}$ و $D_g=[-۳,۵)-\{۳\}$ است که اشتراک این دو دامنه برابر است با: اشتراک $=[-۱,۰)\cup(۰,۳)\cup(۳,۴]$



اعداد صحیح این اشتراک ۱-، ۱، ۲ و ۴ هستند که تعدادشان ۴ تا است.

۱۵ **۲**

با توجه به اینکه دامنهٔ تابع f دو عضوی است، پس $a^۲-۳a$ یا برابر با ۳- است یا ۲-. پس داریم:

$$a^۲-۳a=-۳\Rightarrow a^۲-۳a+۳=۰;\ \Delta=-۳ ✗$$

$$a^۲-۳a=-۲\Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰\Rightarrow(a-۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=۱, a=۲$$

حالا باید بررسی کنیم که به ازای مقادیر به‌دست آمده برای a، f تابع هست یا خیر. ببینید:

$$a=۱: f=\{(-۲,۲),(-۳,۱),(-۲,۳)\} ✗\quad,$$

$$a=۲: f=\{(-۲,۳),(-۳,۱),(-۲,۳)\} ✓$$

پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۶ **۳**

می‌دانیم تعداد اعضای دامنه یک تابع همواره بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد است. پس داریم:

$$۱۷-۲n\ge n+۱\Rightarrow ۳n\le۱۶\Rightarrow n\le\frac{۱۶}{۳}\quad(۱)$$

از طرفی تعداد اعضای دامنه و برد باید عدد طبیعی باشند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۱۷-۲n>۰\Rightarrow ۲n<۱۷\Rightarrow n<\frac{۱۷}{۲}\quad(۲)$$

$$n+۱>۰\Rightarrow n>-۱\quad(۳)$$

پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای n، اشتراک سه مجموعه جواب (۱)، (۲) و (۳) یعنی $-۱<n\le\frac{۱۶}{۳}$ است که به وضوح شامل ۵ عدد طبیعی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌باشد.

۱۷ **۴**

مخرج هیچ یک از کسرها نباید صفر شود. پس داریم:

$$x-۳\neq ۰\Rightarrow x\neq ۳\;\;,\;\; x\neq ۰$$

$$x-\frac{۱}{x}\neq ۰\Rightarrow x\neq\frac{۱}{x}\Rightarrow x^{۲}\neq ۱\Rightarrow x\neq ۱\,,\, x\neq -۱$$

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}-\{۰,-۱,۱,۳\}$ است.

۱۸ **۳**

دامنهٔ توابع کسری به‌صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. پس باید ریشه‌های مخرج را به‌دست آوریم:

$$(x^{۲}-۴)(۵x^{۲}-۲۶x+۵)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}-۴=۰\Rightarrow x^{۲}=۴\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=-۲\end{cases}\\[2mm] ۵x^{۲}-۲۶x+۵=۰\Rightarrow(۵x-۱)(x-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۵}\\x=۵\end{cases}\end{cases}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع، شامل سه عدد صحیح ۲، ۲- و ۵ نیست. (توجه داریم که $\frac{۱}{۵}$ صحیح نیست.) (حواستون هست که وقتی می‌خوایم دامنه حساب کنیم حق ساده‌سازی نداریم.)

۱۹ **۳**

روش اول: می‌دانیم دامنهٔ توابع کسری $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس وقتی دامنهٔ تابع $f(x)$، $\mathbb{R}-\{۱,۳\}$ است، حتماً $x=۱$ و $x=۳$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x=۱\Rightarrow ۲(۱)^{۲}-a(۱)-b=۰\Rightarrow\\ x=۳\Rightarrow ۲(۳)^{۲}-a(۳)-b=۰\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}a+b=۲\xrightarrow{\times(-۱)}\\ ۳a+b=۱۸\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a-b=-۲\\ ۳a+b=۱۸\end{cases}\xrightarrow{+}۲a=۱۶\Rightarrow a=۸\xrightarrow{a+b=۲}b=-۶$$

در نهایت $۲a+b=۲(۸)-۶=۱۰$ است.

روش دوم: $x=۱$ و $x=۳$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس با توجه به اینکه ضریب $x^{۲}$ برابر ۲ است، مخرج را می‌توانیم به‌صورت $۲(x-۱)(x-۳)$ بنویسیم، پس داریم: $۲(x-۱)(x-۳)=۲(x^{۲}-۴x+۳)=۲x^{۲}-۸x+۶$

در آخر با مقایسهٔ این عبارت با مخرج کسر، یعنی $۲x^{۲}-ax-b$ به‌وضوح $a=۸$ و $b=-۶$ و درنتیجه $۲a+b=۱۶-۶=۱۰$ است.

۲۰ **۳**

روش اول: با توجه به این‌که دامنهٔ f به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است، یعنی $x=-۳$ ریشهٔ مضاعف عبارت درجه دوم مخرج یعنی $ax^{۲}+۱۲x+b$ است، پس این عبارت به‌صورت $(x+۳)^{۲}$ یا ضریبی از آن نوشته می‌شود:

$$(x+۳)^{۲}=x^{۲}+۶x+۹$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ax^{۲}+۱۲x+b}۲(x^{۲}+۶x+۹)=ax^{۲}+۱۲x+b$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۱۲x+۱۸=ax^{۲}+۱۲x+b\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۱۸\end{cases}$$

پس $a+b=۲۰$ است.

روش دوم: مخرج کسر ریشهٔ مضاعف $x=-۳$ دارد. پس اولاً دلتای مخرج مساوی صفر است و ثانیاً ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^{۲}+۱۲x+b=۰$ برابر ۳- است. پس داریم:

$$\Delta=۰\Rightarrow(۱۲)^{۲}-۴(a)(b)=۰\Rightarrow ۱۴۴=۴ab\,,\,x=\frac{-b}{۲a}=-۳$$

$$\Rightarrow\frac{۱۲}{۲a}=۳\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲$$

حالا با جای‌گذاری $a=۲$ در تساوی $۱۴۴=۴ab$، مقدار b برابر ۱۸ می‌شود. در نتیجه $a+b=۲۰$ است.

۲۱ **۴**

ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|x|+۲=۰\Rightarrow|x|=-۲\quad\times$$

با توجه به این‌که در تابع g، مخرج کسر ریشه ندارد، پس دامنهٔ آن برابر با $\mathbb{R}$ است. از طرفی طبق فرض مسئله دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر است، در نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)$ هم باید $\mathbb{R}$ باشد. یعنی مخرج کسر f نباید ریشه داشته باشد، پس داریم:

$$۲x^{۲}-x-m=۰\,;\,\Delta<۰\Rightarrow(-۱)^{۲}-۴(۲)(-m)<۰\Rightarrow ۱+۸m<۰$$

$$\Rightarrow ۸m<-۱\Rightarrow m<\frac{-۱}{۸}$$

۲۲ **۴**

می‌دانیم دامنهٔ توابع کسری به صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. طبق فرض مسئله دامنهٔ تابع کسری داده شده $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. در نتیجه مخرج کسر فقط باید یک ریشه داشته باشد $(x=۱)$. پس داریم:

$$(x-۱)(x^{۲}+mx+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\x^{۲}+mx+۱=۰\end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}+mx+۱=۰$ یا باید ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف $x=۱$ داشته باشد. پس داریم: $x^{۲}+mx+۱=۰$

حالت اول: $\Delta<۰\Rightarrow m^{۲}-۴(۱)(۱)<۰\Rightarrow m^{۲}<۴\Rightarrow -۲<m<۲$ ✓

حالت دوم: $\Delta=۰\,,\,\frac{-b}{۲a}=۱\Rightarrow\frac{-m}{۲}=۱\Rightarrow m=-۲$ ✓

در نهایت مجموعه مقادیر قابل قبول برای m، $-۲\leq m<۲$ است.

۲۳ **۴**

دامنه توابع کسری به صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس α و $\frac{۱}{\alpha}$ ریشه‌های مخرج هستند. یعنی ریشه‌های مخرج، دو عدد معکوس هم هستند. پس معادله درجه دوم $۲x^{۲}+۳mx+m+۶=۰$ دو ریشه معکوس هم دارد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m+۶}{۲}=۱\Rightarrow m+۶=۲\Rightarrow m=-۴$$

در نتیجه $\alpha+\frac{۱}{\alpha}$ که در واقع همان مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+۳mx+m+۶=۰$ است، برابر با $S=\frac{-۳m}{۲}=\frac{-۳(-۴)}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$ می‌باشد.

۲۴ — **۱**

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد:

$$x(1-x)^3\ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)^3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(1-x)^3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow 0\le x\le 1 \Rightarrow [a,b]=[0,1]$$

در نتیجه $b-a=1-0=1$ است.

۲۵ — **۱**

روش اول: با توجه به این‌که دو عبارت $\frac{x-1}{x-3}$ و $\frac{2-x}{x}$ زیر رادیکال قرار گرفته‌اند باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\frac{x-1}{x-3}\ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le 1 \text{ یا } x>3 \ ,$$

$$\frac{2-x}{x}\ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0<x\le 2$$

دامنه تابع اشتراک دو محدوده به دست آمده یعنی بازهٔ $(0,1]$ است.

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی می‌توان نوشت:

$$x=2: f(2)=\sqrt{\frac{2-1}{2-3}}+\sqrt{\frac{2-2}{2}}=\sqrt{-1}+\sqrt{0}=\sqrt{-1} \ \times$$

(رد گزینه‌های «۲» و «۳»)

$$x=1: f(1)=\sqrt{\frac{1-1}{1-3}}+\sqrt{\frac{2-1}{1}}=\sqrt{0}+\sqrt{1}=1 \ \checkmark$$

(رد گزینهٔ «۴»)

۲۶ — **۲**

مطابق شکل، دامنهٔ تابع $x\ge -1$ است. پس با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$x+b\ge 0\Rightarrow x\ge -b \xrightarrow{x\ge -1} -b=-1\Rightarrow b=1$$

از طرفی نقطهٔ $(24,-3)$ روی نمودار تابع قرار دارد. پس این نقطه، درون تابع صدق می‌کند، می‌توان نوشت:

$$(24,-3)\in f\Rightarrow f(24)=-3\Rightarrow a-\sqrt{24+b}=-3$$

$$\xrightarrow{b=1} a-\sqrt{25}=-3\Rightarrow a-5=-3\Rightarrow a=2$$

در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=2-\sqrt{x+1}$ است و برای محاسبهٔ طول از مبدأ، به جای y یا همان f، صفر می‌گذاریم. ببینید:

$$f(x)=0\Rightarrow 2-\sqrt{x+1}=0\Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \xrightarrow{\text{توان دو}} x+1=4\Rightarrow x=3$$

۲۷ — **۴**

روش اول: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ تنها باید نامعادلهٔ $\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\ge 0$ را حل کنیم (چرا؟)، پس داریم:

$$\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\ge 0\Rightarrow \frac{4-9x^2}{2x^2}\ge 0 \xrightarrow[2x^2>0]{x\ne 0} 4-9x^2\ge 0\Rightarrow \frac{4}{9}\ge x^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} -\frac{2}{3}\le x\le \frac{2}{3} \xrightarrow{x\ne 0} x\in[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$$

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی، با فرض $x=2$ داریم:

$$x=2: \sqrt[4]{\underbrace{\frac{2}{4}-\frac{9}{2}}_{\text{منفی}}}+\sqrt[3]{4-4} \ \times$$

پس $x=2$ غیر قابل قبول است و گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست هستند. زیرا $x=2$ را دارند و از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع، $x\ne 0$ است. زیرا صفر ریشهٔ مخرج است، پس گزینهٔ «۲» هم رد می‌شود و پاسخ گزینهٔ «۴» است.

۲۸ — **۲**

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(x)$، ابتدا سراغ رادیکال‌ها می‌رویم و عبارت زیر آن‌ها را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$\sqrt{x}: x\ge 0 \ (1) \quad , \quad \sqrt{3-\sqrt{x}}: 3-\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 3\ge\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 9\ge x \ (2) \quad , \quad \sqrt{5-x}: 5-x\ge 0\Rightarrow x\le 5 \ (3)$$

همچنین حواستان باشد که مخرج نباید صفر شود، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{5-x}-1\ne 0\Rightarrow \sqrt{5-x}\ne 1 \xrightarrow{\text{توان دو}} 5-x\ne 1\Rightarrow x\ne 4 \quad (4)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از چهار محدودهٔ به‌دست آمده، دامنهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $[0,5]-\{4\}$ می‌شود و در نهایت طبق فرض مسئله $a=0$، $b=5$ و $c=4$ می‌باشد. پس $a+b+c=0+5+4=9$ می‌شود.

۲۹ — **۱**

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد. پس برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$ باید $x-1\ge 0$، $5-x\ge 0$ و $\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}\ge 0$ باشند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1 \ , \ 5-x\ge 0\Rightarrow x\le 5$$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x-1}\ge\sqrt{5-x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1\ge 5-x\Rightarrow 2x\ge 6\Rightarrow x\ge 3$$

دامنهٔ تابع برابر اشتراک محدوده‌های به دست آمده برای x است که برابر $[3,5]$ می‌باشد. در نهایت خواسته مسئله $b-a=5-3=2$ است.

۳۰ — **۴**

روش اول: با جای‌گذاری $3-x$ به‌جای x در تابع $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$، ضابطهٔ $f(3-x)$ را تعیین می‌کنیم و سپس برای محاسبهٔ دامنه، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}=$$

$$\sqrt{6-2x-(x^2-6x+9)}=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

$$-x^2+4x-3\ge 0\Rightarrow x^2-4x+3\le 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3)\le 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1\le x\le 3$$

روش دوم: ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ را تعیین می‌کنیم:

$$2x-x^2\ge 0\Rightarrow x^2-2x\le 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)\le 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\le x\le 2$$

حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ $y=f(3-x)$، باید عبارت $3-x$ در بازهٔ $[0,2]$ قرار بگیرد؟ (حله؟) پس می‌توان نوشت:

$$0\le 3-x\le 2 \xrightarrow{-3} -3\le -x\le -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1\le x\le 3$$

۳۱ — **۳**

با جای‌گذاری $x-2$ به جای x در ضابطهٔ $f(x+1)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$، ضابطهٔ $f(x-1)$ به‌دست می‌آید: (حله؟)

$$f(x-2+1)=\frac{2(x-2)}{\sqrt{(x-2)-1}}=\frac{2x-4}{\sqrt{x-3}}$$

همگی بلدیم که دامنهٔ این تابع بازهٔ $(3,+\infty)$ است.

۳۲ | **۳**

در تابع $f(x)$، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد: (x_1 و x_2 ریشه‌های عبارت زیر رادیکال هستند.)

$$-x^2+ax+b\ge 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-ax-b\le 0 \Rightarrow x_1\le x\le x_2$$

از طرفی طبق فرض مسئله $-1\le x\le 2$ است. در نتیجه ۱- و ۲ ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+ax+b=0$ هستند. پس داریم:

$$x=-1: -(-1)^2+a(-1)+b=0\Rightarrow b-a=1 \quad (1)$$

$$x=2: -4+2a+b=0\Rightarrow b+2a=4 \quad (2)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲)، $a=1$ و $b=2$ به دست می‌آید. از طرفی دامنهٔ تابع g به صورت $\mathbb{R}-\{1,2\}=\mathbb{R}-\{a,b\}$ است، یعنی ۱ و ۲ ریشه‌های مخرج هستند، پس می‌توان نوشت:

$$x=1: 2-c+d=0\Rightarrow c-d=2 \quad (3)$$

$$x=2: 8-2c+d=0\Rightarrow 2c-d=8 \quad (4)$$

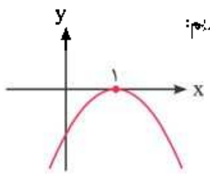
از حل دستگاه شامل معادلات (۳) و (۴)، $c=6$ و $d=4$ به دست می‌آید، در نتیجه پاسخ تست برابر است با: $d-ac=4-(1)(6)=-2$

۳۳ | **۴**

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(x)$ باید نامعادله $-x^2+ax+b\ge 0$ را حل کنیم. از طرفی پس از حل این نامعادله طبق فرض مسئله، تنها جواب قابل قبول $x=1$ است. (چرا؟)

درواقع تنها شکل قابل قبول برای سهمی $y=-x^2+ax+b$ به‌صورت زیر است:

همان‌طور که می‌بینید این تابع در $x=1$ بر محور xها مماس است و این یعنی معادلهٔ $-x^2+ax+b=0$ ریشهٔ مضاعف $x=1$ دارد، پس می‌توان آن را به‌صورت مربع کامل نوشت. در نتیجه داریم:



$$-x^2+ax+b=-(x-1)^2=-x^2+2x-1$$

از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که $a=2$ و $b=-1$ و در نتیجه $a-b=2-(-1)=3$ است.

۳۴ | **۴**

روش اول: ابتدا دامنهٔ هر یک از ضابطه‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم و با محدودهٔ قابل قبول برای x در هر ضابطه اشتراک می‌گیریم. پس داریم:

$$D: x^2+2x+4>0 \ ;\ \Delta=4-4(1)(4)=-12<0$$

$\xrightarrow{\text{ضریب } x^2>0}$ همواره برقرار است.

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}\Rightarrow D_1=\mathbb{R}\cap(-\infty,0)=(-\infty,0) \quad (1)$$

همچنین برای ضابطهٔ پایین می‌توان نوشت:

$$D=(\mathbb{R}-\{x\,|\,x^2+3x+2=0\})\cap(x+2\ge 0\Rightarrow x\ge -2)$$

$$x^2+3x+2=0\Rightarrow (x+2)(x+1)=0\Rightarrow x=-2\ ,\ x=-1$$

$$\Rightarrow D=(\mathbb{R}-\{-1,-2\})\cap[-2,+\infty)\Rightarrow D=(-2,+\infty)-\{-1\}$$

$$\Rightarrow D_2=((-2,+\infty)-\{-1\})\cap[0,+\infty)=[0,+\infty) \quad (2)$$

در نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر با اجتماع دو مجموعه جواب (۱) و (۲) است:

$$(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=\mathbb{R}$$

روش دوم: به کمک عددگذاری با جای‌گذاری $x=-2$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(-2)=\frac{|-2|}{\sqrt{(-2)^2+2(-2)+4}}=\frac{2}{2}=1$$

پس $x=-2$ درون دامنهٔ تابع است و در نتیجه پاسخ تست فقط گزینهٔ «۴» می‌تواند باشد.

۳۵ | **۲**

دامنه توابع کسری به‌صورت {ریشه‌های مخرج} - $\mathbb{R}$ است، پس داریم:

$$|x+1|-3=0\Rightarrow |x+1|=3\Rightarrow \begin{cases} x+1=3\Rightarrow x=2 \\ x+1=-3\Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

یعنی دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{2,-4\}$ است، پس $a+b=-4+2=-2$ می‌شود.

۳۶ | **۴**

روش اول: عبارت $|2x-1|-3$ زیر رادیکال و در مخرج کسر قرار دارد، پس باید $|2x-1|-3>0$ باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|2x-1|-3>0\Rightarrow |2x-1|>3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1>3\Rightarrow 2x>4\Rightarrow x>2 \\ \text{یا} \\ 2x-1<-3\Rightarrow 2x<-2\Rightarrow x<-1 \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-[-1,2]$ است.

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی داریم:

$x=-4: f(-4)=\frac{-3}{\sqrt{6}}$ ✓ (رد گزینهٔ «۱»)

$x=4: f(4)=\frac{5}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$ ✓ (رد گزینهٔ «۲»)

$x=2: f(2)=\frac{3}{\sqrt{3-3}}=\frac{3}{0}$ × (رد گزینهٔ «۳»)

۳۷ | **۴**

روش اول: ضابطهٔ $f(-x+1)$ به‌صورت زیر است:

$$f(-x+1)=\sqrt{-x+1+|-x+1+3|}=\sqrt{-x+1+|-x+4|}$$

برای تعیین دامنهٔ تابع $f(-x+1)$، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-x+1+|-x+4|\ge 0\xrightarrow{|-x+4|=|x-4|}|x-4|-x+1\ge 0$$

برای حل نامعادلهٔ $|x-4|-x+1\ge 0$ از بازه‌بندی استفاده می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$x-4=0\Rightarrow x=4\Rightarrow \begin{cases} x\le 4\xrightarrow{|x-4|=-(x-4)}-(x-4)-x+1\ge 0 \\ \Rightarrow -2x+5\ge 0\Rightarrow 2x\le 5\Rightarrow x\le \frac{5}{2} \\ x>4\xrightarrow{|x-4|=x-4}x-4-x+1\ge 0 \\ \Rightarrow -3\ge 0\Rightarrow x\in\varnothing \end{cases}$$

پس مجموعه‌جواب مسئله به‌صورت زیر است:

$$\{\underbrace{x\le 4\cap x\le \tfrac{5}{2}}_{x\le \frac{5}{2}}\}\cup\{\underbrace{x>4\cap\varnothing}_{\varnothing}\}=x\le \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D_{f(-x+1)}=\{x\,|\,x\le \frac{5}{2}\}=(-\infty,\frac{5}{2}]$$

روش دوم: ضابطهٔ تابع $f(-x+1)$ به‌صورت $f(-x+1)=\sqrt{-x+1+|-x+4|}$ است، به کمک گزینه بازی می‌توان نوشت:

$$x=0 \Rightarrow \sqrt{-(0)+1+|-(0)+4|}=\sqrt{5} \quad ✓ \quad ,$$

$$x=-3 \Rightarrow \sqrt{-(-3)+1+|-(-3)+4|}=\sqrt{11} \quad ✓$$

گزینه‌های «۲» و «۳»، $x=0$ را ندارند، پس حذف می‌شوند. از طرفی $x=-3$ نیز باید درون دامنه باشد، پس گزینهٔ «۱» هم حذف می‌شود و پاسخ تست، گزینهٔ «۴» است.

۳۸ ۱

روش اول: می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، یعنی:

$$|x+1|+|x-3|-6\geq 0 \Rightarrow |x+1|+|x-3|\geq 6$$

باتوجه به‌این که $x=-1$ و $x=3$ ریشه‌های قدرمطلق هستند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x<-1: -(x+1)-(x-3)\geq 6 \Rightarrow -x-1-x+3\geq 6 \\ \Rightarrow x\leq -2 \xrightarrow{\cap(x<-1)} x\leq -2 \quad (1) \\ -1\leq x\leq 3: (x+1)-(x-3)\geq 6 \\ \Rightarrow x+1-x+3\geq 6 \Rightarrow 4\geq 6 \quad \times \\ x>3: x+1+x-3\geq 6 \\ \Rightarrow x\geq 4 \xrightarrow{(x>3)} x\geq 4 \quad (2) \end{cases}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع برابر با اجتماع دو مجموعه جواب (۱) و (۲) یعنی $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-2,4)$ است.

روش دوم: به کمک عددگذاری می‌توان نوشت:

$$x=4: y=\sqrt{|4+1|+|4-3|-6}=\sqrt{5+1-6}=\sqrt{0}=0 \quad ✓$$

در نتیجه $x=4$ عضوی از دامنه است. (رد گزینه‌های «۲» و «۴»)

$$x=0: y=\sqrt{|0+1|+|0-3|-6}=\sqrt{1+3-6}=\sqrt{-2} \quad \times$$

در نتیجه $x=0$ عضوی از دامنه نیست (رد گزینهٔ «۳») و فقط گزینهٔ «۱» می‌تواند پاسخ تست باشد.

۳۹ ۲

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم عبارت زیر یک رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس داریم:

$$x^2-2|x+3|+6\geq 0$$

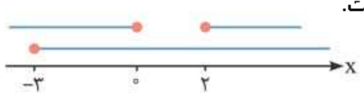
برای حل نامعادلهٔ قدرمطلقی فوق، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $x\geq -3$ باشد:

$$x^2-2(x+3)+6\geq 0 \Rightarrow x^2-2x-\cancel{6}+\cancel{6}\geq 0 \Rightarrow x^2-2x\geq 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$$

که اشتراک این مجموعه جواب با $x\in[-3,+\infty)$ با توجه به محور زیر برابر با $[-3,0]\cup[2,+\infty)$ است.



حالت دوم: اگر $x\leq -3$ باشد:

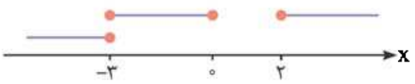
$$x^2+2(x+3)+6\geq 0 \Rightarrow x^2+2x+6+6\geq 0$$

$$\Rightarrow x^2+2x+12\geq 0 \ ; \Delta=4-4(1)(12)<0 \xrightarrow{a>0}$$

$$\text{همواره مثبت} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

که اشتراک این مجموعه جواب با $x\in(-\infty,-3]$ برابر با $(-\infty,-3]$ است.

در نتیجه دامنهٔ تعریف تابع، اجتماع دو مجموعه جواب $[-3,0]\cup[2,+\infty)$ و $(-\infty,-3]$ است:



که جواب برابر با $\mathbb{R}-(0,2)$ است، یعنی تابع در بازهٔ $(0,2)$ تعریف نشده، در نتیجه $a+b=0+2=2$ است.

۴۰ ۱

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. برای تعیین دامنهٔ f داریم:

$$D_f: 4x-x^2-3\geq 0 \Rightarrow x^2-4x+3\leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3)\leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1\leq x\leq 3$$

همچنین برای تعیین دامنهٔ تابع g داریم:

$$D_g: b-|x+a|\geq 0 \Rightarrow |x+a|\leq b$$

$$\Rightarrow -b\leq x+a\leq b \xrightarrow{-a} -b-a\leq x\leq b-a$$

طبق فرض مسئله دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -b-a=1 \Rightarrow b+a=-1 \quad (1) \\ b-a=3 \ (2) \end{cases}$$

از حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} b+a=-1 \\ b-a=3 \end{cases} \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1, a=-2 \Rightarrow ab=-2$$

۴۱ ۴

دامنهٔ توابع کسری به صورت $\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ است، پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم. داریم:

$$[3x-1]=0 \Rightarrow 0\leq 3x-1<1 \xrightarrow{+1} 1\leq 3x<2 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3}\leq x<\frac{2}{3}$$

از طرفی باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$x^2+1\geq 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ است.

۴۲ ۲

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد. پس داریم:

$$\frac{[x]-3}{1-[x]}\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1<[x]\leq 3$$

حالا با توجه به اینکه $1<[x]\leq 3$ است حتماً یکی از حالت‌های $[x]=2$ یا $[x]=3$ اتفاق می‌افتد. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3 \\ [x]=3 \Rightarrow 3\leq x<4 \end{cases}$$

در نهایت با اجتماع گرفتن از جواب‌های به‌دست آمده، مجموعه جواب به‌صورت بازهٔ $[2,4)$ می‌باشد.

۴۳ | ۳

گفتیم که برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)} f(x)$ باید بین جواب‌های سه نامعادلهٔ $f(x)>0$، $g(x)>0$ و $g(x)\neq 1$ اشتراک بگیریم. پس می‌توان نوشت:

$9-x^2>0 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3 \quad (1)$

$x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x>1$ یا $x<-1 \quad (2)$

$x^2-1\neq 1 \Rightarrow x^2\neq 2 \Rightarrow x\neq \pm\sqrt{2} \quad (3)$

در نهایت اشتراک این سه محدوده به‌صورت $(-3,-1)\cup(1,3)-\{\pm\sqrt{2}\}$ است که عددهای صحیح این محدوده تنها ۲- و ۲ هستند.

۴۴ | ۱

روش اول: باید نامعادله‌های $x^2-3x>0$ و $1-\log(x^2-3x)\ge 0$ را حل کنیم و بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-3)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$(x<0)\cup(x>3) \quad (1)$

$1-\log(x^2-3x)\ge 0 \Rightarrow \log(x^2-3x)\le 1$

$\xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} x^2-3x\le 10 \Rightarrow x^2-3x-10\le 0$

$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-5)(x+2)\le 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$-2\le x\le 5 \quad (2)$

در نهایت با اشتراک‌گیری از محدوده‌های (۱) و (۲)، جواب قابل قبول به صورت $[-2,0)\cup(3,5]$ است.

روش دوم: به کمک عددگذاری می‌توان نوشت:

$x=0: f(0)=\sqrt{1-\log(0)}$: تعریف‌نشده ×

پس $x=0$ در دامنه نیست و گزینه‌های «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

$x=3: f(3)=\sqrt{1-\log(9-9)}=\sqrt{1-\log 0}$: تعریف‌نشده ×

پس $x=3$ هم در دامنه نیست و گزینهٔ «۴» نیز حذف و پاسخ تست گزینهٔ «۱» می‌شود.

۴۵ | ۱

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع داده شده، باید نامعادله $\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}\ge 0$ را حل کنیم. برای این کار به کمک تعیین علامت داریم:

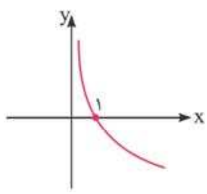
$$\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x=0 \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x=(\frac{1}{2})^0=1 \end{cases}$$

x		۰		۱	
$\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$	-	۰	+	ت‌ن	-

$\Rightarrow x\in(0,1)$

همانطور که مشاهده می‌کنید بازهٔ $(0,1)$ شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

حواستان باشد که نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ به‌صورت زیر است:



یعنی این تابع به ازای $x>1$، مقدارش منفی است.

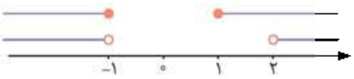
۴۶ | ۱

روش اول: با توجه به حضور لگاریتم، و رادیکال در ضابطهٔ تابع برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع می‌توان نوشت:

$x^2-x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-1$ یا $x>2 \quad (1)$

$x^2-1\ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le -1$ یا $x\ge 1 \quad (2)$

همچنین مخرج کسر یعنی $1+\sqrt{x^2-1}$ همواره مخالف صفر است، پس دامنه تابع برابر است با:



$\xrightarrow{\text{اشتراک}} (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

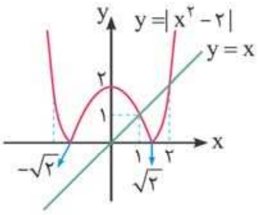
روش دوم: به کمک گزینه بازی با توجه به این‌که $x=0$ هم جلوی لگاریتم و هم عبارت زیر رادیکال را منفی می‌کند، گزینه‌های «۲» و «۴» نادرست هستند. از طرفی به ازای $x=2$ جلوی لگاریتم صفر می‌شود پس گزینهٔ «۳» هم نادرست است و پاسخ تست گزینهٔ «۱» می‌باشد.

۴۷ | ۴

روش اول: برای تعیین دامنهٔ تابع باید عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار داده و نامعادله به وجود آمده را حل کنیم.

$|x^2-2|-x>0 \Rightarrow |x^2-2|>x$

برای حل این نامعادله از روش هندسی کمک می‌گیریم، ببینید:



$\Rightarrow$ دامنهٔ تابع $=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

توجه داشته باشید، طول نقاط تقاطع دو منحنی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$x>\sqrt{2}: x^2-2=x \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=2$ ✓ , $x=-1$ ×

$0<x<\sqrt{2}: 2-x^2=x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=1$ ✓ , $x=-2$ ×

روش دوم: به کمک گزینه بازی، با توجه به این‌که $x=2$ جلوی لگاریتم را صفر می‌کند، گزینه‌های «۲» و «۳» نادرست هستند از طرفی با توجه به این‌که $x=0$ جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند باید حتماً در دامنهٔ تابع باشد یعنی گزینهٔ «۱» هم نادرست است و پاسخ تست گزینهٔ «۴» می‌باشد.

۴۸ | ۳

می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=\cot\bigcirc$ از حل نامساوی $\bigcirc\neq k\pi$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$\frac{2}{3}x\neq k\pi \Rightarrow x\neq \frac{3k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$

درنتیجه عددهایی مانند ۰، $\frac{3\pi}{2}$، 3π، $\frac{9\pi}{2}$ و ... درون دامنهٔ تابع مثلثاتی داده شده قرار ندارند، پس پاسخ تست گزینهٔ «۳» است.

۴۹ — ۴

می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=\tan \bigcirc$ از حل نامساوی $\bigcirc \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{\pi+\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\div\pi}\frac{1+x}{2}\neq k+\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2}1+x\neq 2k+1\Rightarrow x\neq 2k$$

در واقع عددهای زوج در دامنهٔ تابع $f(x)$ قرار ندارند. پس در بازهٔ $(-5,5)$ عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $f(x)$ هستند، ۳-، ۱-، ۱ و ۳ می‌باشند که تعدادشان ۴تا است.

۵۰ — ۴

عبارت زیر رادیکال‌های با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. از طرفی $0\le|\sin x|\le 1$ است، پس می‌توان نوشت:

$$1-\sqrt{|\sin x|}\ge 0\Rightarrow\sqrt{|\sin x|}\le 1\xrightarrow{\text{توان دو}}|\sin x|\le 1$$

$\Rightarrow -1\le\sin x\le 1\Rightarrow$ همواره برقرار است.

در نتیجه دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۵۱ — ۳

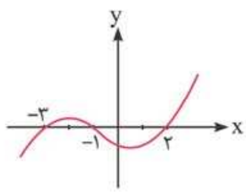
سینوس و کسینوس در تعیین دامنه تابع نقش ندارند، پس می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت یعنی به جای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\cos(\sqrt{1-[x]})$، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1-[x]}$ را محاسبه می‌کنیم که از حل نامعادله $1-[x]\ge 0$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$1-[x]\ge 0\Rightarrow[x]\le 1\Rightarrow x<2\Rightarrow \text{دامنه}=(-\infty,2)$$

در نتیجه بیشترین مقدار a برابر با ۲ است.

۵۲ — ۴

نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است، جدول تعیین علامتش را ببینید:



x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x+1)f(x)}$ باید رابطهٔ $(x+1)f(x)\ge 0$ برقرار باشد. بنابراین باید عبارت $(x+1)f(x)$ را تعیین علامت کنیم، پس داریم:

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$(x+1)f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	

بنابراین دامنهٔ تابع، بازهٔ $(-\infty,-3]\cup\{-1\}\cup[2,+\infty)$ است. اما از آن‌جایی‌که تابع غیرنقطه‌ای است، $x=-1$ را حذف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$D_f=(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)=\mathbb{R}-(-3,2)$$

۵۳ — ۲

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ باید دو نامعادلهٔ $f(x)\ge 0$ و $1-f(x)\neq 0$ را حل کنیم. پس داریم:

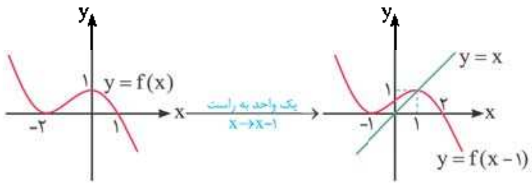
$$f(x)\ge 0\xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}}x\in[-4,-1]\cup[1,3]\quad(1)$$

$$1-f(x)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 1\xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}}x\neq -4,2\quad(2)$$

درنتیجه دامنهٔ تابع، برابر با اشتراک دو مجموعه جواب (۱) و (۲) یعنی **$(-4,-1]\cup[1,2)\cup(2,3]$ است که شامل ۵ عدد صحیح می‌باشد.**

۵۴ — ۳

ابتدا از روی نمودار $y=f(x)$ **نمودار $y=f(x-1)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار $y=f(x)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل کنیم، پس داریم:**



از طرفی می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-f(x-1)}$ از حل نامعادلهٔ $x-f(x-1)\ge 0$ یا $x\ge f(x-1)$ به‌دست می‌آید و برابر با طول نقاطی است که خط $y=x$ بالاتر از نمودار $y=f(x-1)$ است که با توجه به نمودار، برابر با $[1,+\infty)$ می‌باشد.

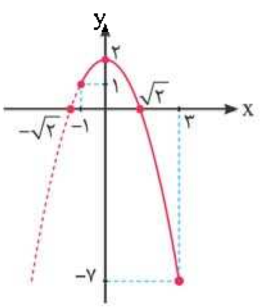
۵۵ — ۱

با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، دامنه و برد آن به ترتیب $D_f=[-2,3)-\{0\}$ و $R_f=[0,5]$ است. در نتیجه برای محاسبهٔ اشتراک این دو محدوده داریم:

پس اشتراک دامنه و برد f، بازهٔ $(0,3)$ است که شامل دو عدد صحیح نامنفی ۱ و ۲ می‌باشد.

۵۶ — ۲

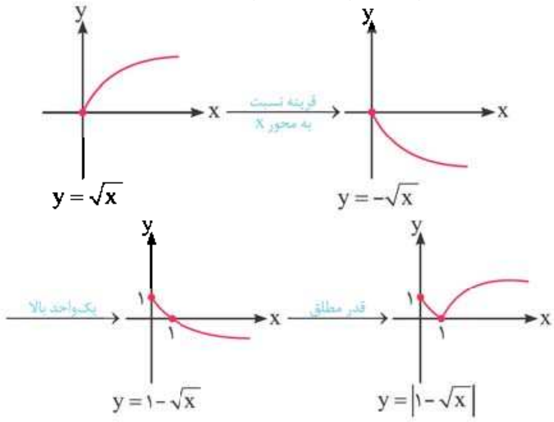
نمودار تابع $y=-x^2+2$ با دامنهٔ $[-1,3]$ به صورت زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید برد تابع، بازهٔ $[-7,2]$ است. در نتیجه $a=-7$ و $b=2$ و در نهایت $b-a=2-(-7)=9$ است.

۵۷ | **۳**

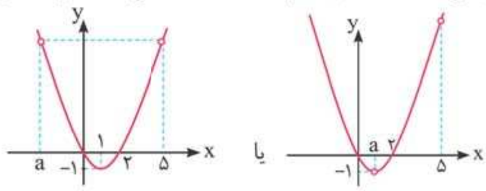
برای رسم نمودار تابع، $y=\sqrt{x}$ را رسم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. در نهایت بخشی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را حذف کرده و قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در بالای محور رسم می‌کنیم. پس داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برد این تابع $[۰,+\infty)$ است.

۵۸ | **۳**

نمودار سهمی $y=x^{۲}-۲x$ با شرایط گفته‌شده به یکی از دو صورت زیر است:



با توجه به این‌که با حذف $x=۵$ و $x=a$ از دامنهٔ تابع، از برد تابع که $[-۱,+\infty)$ است، عدد b کم شده است، دو حالت داریم:

حالت اول: باید $x=a$ و $x=۵$ دو نقطهٔ هم‌عرض از سهمی باشند که برای این موضوع، باید این دو نقطه نسبت به رأس سهمی یعنی $x=۱$ متقارن باشند. پس داریم:
$\frac{a+۵}{۲}=۱\Rightarrow a+۵=۲\Rightarrow a=-۳$

از طرفی b همان مقدار تابع به‌ازای $x=۵$ (یا $x=-۳$) است. پس می‌توان نوشت:
$b=f(۵)=۲۵-۱۰=۱۵$ یا $b=f(-۳)=۹+۶=۱۵$

در نتیجه $a+b=-۳+۱۵=۱۲$ می‌باشد.

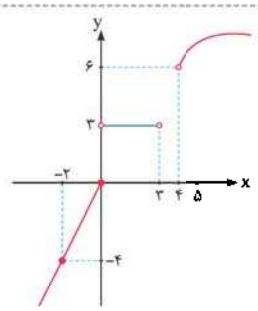
حالت دوم: a طول رأس سهمی باشد که برابر ۱ می‌شود. در نتیجه نقطهٔ حذف شده از برد همان نقطهٔ عرض رأس سهمی یعنی $b=-۱$ است:

$[-۱,+\infty)-\{-۱\}=(-۱,+\infty)$ ×

به وضوح این حالت امکان‌پذیر نیست.

۵۹ | **۲**

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:

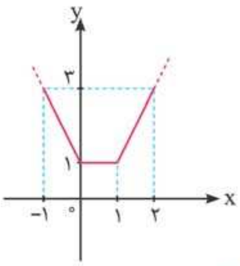


$\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]\cup\{۳\}\cup(۶,+\infty)$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برد تابع شامل اعداد صحیح ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ نمی‌شود که تعدادشان ۵ تا است.

۶۰ | **۲**

نمودار تابع $y=|x|+|x-۱|$ به‌صورت مقابل است (گلدون میشه!):

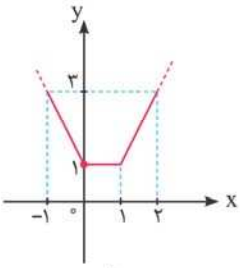


همان‌طور که می‌بینید برد این تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر $[۱,۳]$ است، پس می‌توان نوشت:

$$۱\le|x|+|x-۱|\le۳\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۱}{۳}\le\frac{۱}{|x|+|x-۱|}\le۱$$

در نتیجه برد تابع f برابر با $[\frac{۱}{۳},۱]$ است.

اگر روش رسم تابع $y=|x|+|x-۱|$ را به خاطر ندارید، از بازه‌بندی کمک بگیرید:

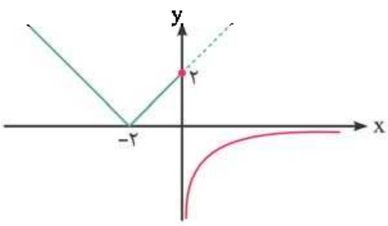


$x=۰\ ,\ x=۱$

$$\begin{cases} x<۰: y=-x-x+۱\Rightarrow y=-۲x+۱ \\ ۰\le x<۱: y=x-x+۱\Rightarrow y=۱ \\ x\ge۱: y=x+x-۱\Rightarrow y=۲x-۱ \end{cases}$$

۶۱ | **۴**

بهترین روش برای پیدا کردن برد تابع $f(x)$، رسم نمودار آن است. ببینید:



همان‌طور که از روی نمودار این تابع دیده می‌شود، برد $f(x)$ برابر $R_f=\mathbb{R}$ است. (توجه کنید که $f(-۲)=۰$ است.)

۶۲ | **۳**

با توجه به اینکه برد تابع ۳عضوی است، در نتیجه می‌توان به راحتی بررسی کرد که هر کدام از آن‌ها به ازای چه مقداری از x به دست آمده است. پس داریم:

$$\frac{x+۱}{x-۲}=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\ ,$$

$$\frac{x+۱}{x-۲}=۲\Rightarrow x+۱=۲x-۴\Rightarrow x=۵\ ,$$

$$\frac{x+۱}{x-۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۵x-۱۰=۲x+۲\Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴$$

در نتیجه فقط $x=-۲$ در دامنهٔ f قرار ندارد.

۶۳ | **۲**

برد تابع خطی $y=\frac{-x}{۲}+۳$ بازهٔ $(۰,۳]$ است، پس می‌توان نوشت:

$$۰<y\le۳\Rightarrow ۰<-\frac{x}{۲}+۳\le۳\xrightarrow{-۳}-۳<\frac{-x}{۲}\le۰$$

$$\xrightarrow{\times۲}-۶<-x\le۰\xrightarrow{\times(-۱)}۰\le x<۶$$

پس دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح ۰،۱،۲،۳،۴ و ۵ می‌باشد.

۶۴ **۴**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱}+۲=\frac{۱+۲x-۲}{x-۱}=\frac{۲x-۱}{x-۱}$$

طبق حرف‌هایی که در کتاب درسنامه زدیم، توابع به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰, c\neq ۰$ هموگرافیک هستند و بردشان از رابطهٔ $R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ به‌دست می‌آید. پس برد تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ برابر $R=\mathbb{R}-\{۲\}$ است، پس $a=۲$ و در نتیجه $a^۲=۴$ می‌باشد.

۶۵ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=\frac{-۲}{-۱-x^۲}=\frac{-۲}{-(۱+x^۲)}=\frac{۲}{۱+x^۲}$$

حالا با توجه به اینکه $x^۲$ همواره نامنفی است، می‌توان نوشت:

$$x^۲\geq ۰\xrightarrow{+۱}۱+x^۲\geq ۱\xrightarrow{\text{معکوس}}۰<\frac{۱}{x^۲+۱}\leq ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۰<\frac{۲}{۱+x^۲}\leq ۲\Rightarrow R_y=(۰,۲]$$

۶۶ **۱**

روش اول: می‌دانیم که برد تابع $y=-x^۲+۴x+۱$ با توجه به منفی بودن ضریب $x^۲$ از رابطهٔ $R=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$y_{max}=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{(۴)^۲-۴(-۱)(۱)}{۴(-۱)}=-\frac{۲۰}{-۴}=۵\Rightarrow R_y=(-\infty,۵]$$

حواستان باشد که با توجه به حضور رادیکال در تابع $f(x)$، برد این تابع به‌صورت $R_f=[۰,\sqrt{۵}]$ است (چرا؟) که شامل ۲ عدد طبیعی ۱ و ۲ می‌باشد.

روش دوم: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای یک حل خیلی با کلاس برایتان ارائه می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{-x^۲+۴x+۱}=\sqrt{-(x^۲-۴x)+۱}=\sqrt{-((x-۲)^۲-۴)+۱}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{-(x-۲)^۲+۵}$$

از طرفی می‌دانیم $(x-۲)^۲\geq ۰$ و در نتیجه $-(x-۲)^۲\leq ۰$ است، پس داریم:

$$-(x-۲)^۲\leq ۰\xrightarrow{+۵}-(x-۲)^۲+۵\leq ۵$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}۰\leq\underbrace{\sqrt{-(x-۲)^۲+۵}}_{f(x)}\leq\sqrt{۵}$$

خلاصه این‌که برد تابع $f(x)$ بازهٔ $R_f=[۰,\sqrt{۵}]$ است که شامل دو عدد طبیعی ۱ و ۲ می‌باشد.

۶۷ **۴**

ابتدا اعداد صحیح درون جزء صحیح‌ها را از جزء صحیح‌ها خارج می‌کنیم. پس داریم:

$$y=[\frac{x}{۲}+۱]+[۳-\frac{x}{۲}]=[\frac{x}{۲}]+۱+۳+[-\frac{x}{۲}]=[\frac{x}{۲}]+[\frac{-x}{۲}]+۴$$

از طرفی می‌دانیم $[\bigcirc]+[-\bigcirc]=\begin{cases}۰ & \bigcirc\in\mathbb{Z}\\ -۱ & \bigcirc\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است، پس برای تعیین برد تابع می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{۲}\in\mathbb{Z}: y=۰+۴=۴$$

$$\frac{x}{۲}\notin\mathbb{Z}: y=-۱+۴=۳$$

در نتیجه برد تابع، برابر $\{۳,۴\}$ و خواستهٔ مسئله $\alpha\beta=۱۲$ است.

۶۸ **۲**

ابتدا تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۱+۸(\frac{x}{۲})-۸[\frac{x}{۲}]}=\sqrt{۱+۸(\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}])}$$

حالا برای محاسبهٔ برد این تابع با توجه به اینکه $۰\leq\bigcirc-[\bigcirc]<۱$ است، می‌توان نوشت:

$$۰\leq\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}]<۱\xrightarrow{\times ۸}۰\leq ۸(\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}])<۸$$

$$\xrightarrow{+۱}۱\leq ۱+۸(\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}])<۹$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}۱\leq f(x)<۳\Rightarrow R_f=[۱,۳)$$

۶۹ **۲**

ابتدا برد تابع $y=f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{x-۱}\geq ۰\xrightarrow{+۴}۴+\sqrt{x-۱}\geq ۴\Rightarrow f(x)\geq ۴\Rightarrow R_f=[۴,+\infty)$$

از طرفی می‌دانیم برای یک تابع درجه دوم به شرط این‌که ضریب $x^۲$ عددی مثبت باشد، برد تابع به صورت $[\frac{-\Delta}{۴a},+\infty)$ است. پس برای محاسبه برد $y=g(x)$ داریم:

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶-۴(۳a-۴)(۱))}{۴}=\frac{۱۲a-۱۶-۱۶}{۴}$$

$$=\frac{۱۲a-۳۲}{۴}=۳a-۸\Rightarrow R_g=[۳a-۸,+\infty)$$

با توجه به اینکه برد دو تابع f و g با هم برابر است، پس می‌توان نوشت:

$$۳a-۸=۴\Rightarrow ۳a=۱۲\Rightarrow a=۴$$

پس باید برد تابع $y=۴\sin x+۳$ را محاسبه کنیم. حالا با توجه به آنکه می‌دانیم $-۱\leq\sin x\leq ۱$ است، برد تابع خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم. ببینید:

$$-۱\leq\sin x\leq ۱\xrightarrow{\times ۴}-۴\leq ۴\sin x\leq ۴\xrightarrow{+۳}-۱\leq ۴\sin x+۳\leq ۷$$

در نتیجه برد این تابع، بازهٔ $[-۱,۷]$ می‌باشد.

۷۰ **۳**

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x^۲+۱+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

از طرفی می‌دانیم اگر $A>۰$ باشد، آنگاه $A+\frac{۱}{A}\geq ۲$ است پس با توجه به اینکه $\sqrt{x^۲+۱}>۰$، داریم:

$$\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}\geq ۲\Rightarrow \text{برد تابع}=[۲,+\infty)$$

در نتیجه $a=۲$ است. (حواستون باشه اگه $A<۰$ باشه $A+\frac{۱}{A}\leq -۲$ می‌شه.)

۷۱ — ۲

با استفاده از رابطهٔ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=2\sin^2 x-3\cos^2 x=2\sin^2 x-3(1-\sin^2 x)=5\sin^2 x-3$$

از طرفی می‌دانیم $0\le\sin^2 x\le1$ است، پس می‌توان نوشت:

$$0\le\sin^2x\le1\xrightarrow{\times5}0\le5\sin^2x\le5\xrightarrow{-3}-3\le5\sin^2x-3\le2$$

$$\Rightarrow-3\le f(x)\le2\Rightarrow R_f=[-3,2]$$

۷۲ — ۴

می‌دانیم $0\le\sin^2x\le1$ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$0\le\sin^2x\le1\xrightarrow{\times5}0\le5\sin^2x\le5\xrightarrow{-1}-1\le5\sin^2x-1\le4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}0\le\sqrt{5\sin^2x-1}\le2\xrightarrow{\times(-1)}-2\le-\sqrt{5\sin^2x-1}\le0$$

از طرفی با توجه به این‌که تابع $y=2^x$ تابعی افزایشی (صعودی) است، داریم:

$$-2\le-\sqrt{5\sin^2x-1}\le0\Rightarrow2^{-2}\le2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le2^0$$

$$\Rightarrow\frac14\le2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le1$$

پس برد تابع برابر با $[\frac14,1]$ و در نتیجه $a+b=\frac14+1=\frac54$ است.

۷۳ — ۳

با توجه به اینکه $\cos^3x-3\cos^2x+3\cos x-1=(\cos x-1)^3$ است، پس ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=[|(\cos x-1)^3-3|]$$

حالا با توجه به اینکه $-1\le\cos x\le1$ است، پس داریم:

$$-1\le\cos x\le1\xrightarrow{-1}-2\le\cos x-1\le0\xrightarrow{\text{توان ۳}}-8\le(\cos x-1)^3\le0$$

$$\xrightarrow{-3}-11\le(\cos x-1)^3-3\le-3\xrightarrow{\text{قدرمطلق}}3\le|(\cos x-1)^3-3|\le11$$

به وضوح در این بازه، جزءصحیح عبارت می‌تواند مقادیر $\{3,4,5,6,\dots,11\}$ را داشته باشد که تعداد این اعداد ۹ تا است.

۷۴ — ۳

ابتدا به کمک رابطهٔ $\sin^2x=1-\cos^2x$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{1-\cos^2x}=\sqrt{\sin^2x}=|\sin x|\overset{x\in(0,\pi)}{=\!=\!=}\sin x$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $y=\frac{2\sin x-1}{1+\sin x}$ است و برای محاسبهٔ برد آن می‌توان نوشت:

$$y=\frac{2\sin x+2-3}{\sin x+1}=\frac{2(\sin x+1)-3}{\sin x+1}=2-\frac{3}{\sin x+1}$$

از طرفی با توجه به اینکه x در بازهٔ $(0,\pi)$ قرار دارد، در نتیجه $\sin x$ عددی بین صفر و یک است، پس داریم:

$$0<\sin x\le1\xrightarrow{+1}1<1+\sin x\le2$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac12\le\frac{1}{1+\sin x}<1\xrightarrow{\times(-3)}-3<\frac{-3}{1+\sin x}\le\frac{-3}{2}$$

$$\xrightarrow{+2}2-3<2-\frac{3}{1+\sin x}\le2-\frac32\Rightarrow-1<y\le\frac12$$

$$\Rightarrow R_f=(-1,\frac12]$$

۷۵ — ۳

دامنهٔ تابع f برابر $D_f=\{1,2,c\}$ و دامنهٔ تابع g برابر $D_g=\{1,4,2\}$ است و چون دامنه دو تابع باید برابر باشد. به وضوح $c=4$ است. پس $f=\{(1,a),(2,a+b),(4,2)\}$ است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$f(1)=g(1)\Rightarrow a=0,\ f(2)=g(2)\Rightarrow a+b=-1\xrightarrow{a=0}b=-1$$

در آخر خواستهٔ مسئله $a+b+c=0-1+4=3$ می‌باشد.

۷۶ — ۳

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

① دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنهٔ تابع g برابر $[0,+\infty)$ است، پس این دو تابع با هم برابر نیستند. ×

② دامنهٔ هر یک از توابع f و g را به‌دست می‌آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}\ ;\ x^2-1\ge0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\le-1\ \text{یا}\ x\ge1$$

$$g(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}\ ;\ x-1\ge0\Rightarrow x\ge1\ ,\ x+1\ge0$$

$$\Rightarrow x\ge-1\xrightarrow{\cap}x\ge1$$

چون دامنه دو تابع با هم برابر نیست پس این دو تابع با هم برابر نیستند. ×

③ ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع داده شده را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ;\ 1-x^2\ge0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-1\le x\le1$$

$$g(x)=\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\ ;\ 1+x\ge0\Rightarrow x\ge-1,\ 1-x\ge0$$

$$\Rightarrow x\le1\xrightarrow{\cap}-1\le x\le1$$

دامنه دو تابع با هم برابر است و چون $g(x)=\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$ است، می‌توان گفت این دو تابع با هم برابر هستند. ✓

④ اگر ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}$ بازنویسی کنیم، به وضوح دامنهٔ هر دو تابع f و g برابر با $\mathbb{R}$ است ولی چون ضابطهٔ دو تابع با هم برابر نیست این دو تابع با هم برابر نیستند. ببینید:

$$f(x)=\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|\ne g(x)$$ ×

۷۷ — ۴

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

① دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است. دلیلش هم این است که مخرج تابع f(x) ریشه ندارد، ببینید:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\ ;\ x^2+x+1=0\ ,\ \Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

از طرفی به کمک اتحاد چاق و لاغر سادهٔ شدهٔ عبارت f(x) به صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{x^2+x+1}}=x-1=g(x)$$ ✓

② دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است. توجه کنید که مخرج تابع f(x)، یعنی $|x|+1$ همواره مثبت است و این یعنی مخرج f(x) هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. از طرفی ضابطه‌های هر دو تابع با هم برابرند، ببینید:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}=\frac{|x|^2-1}{|x|+1}=\frac{(|x|-1)\cancel{(|x|+1)}}{\cancel{|x|+1}}$$

$$=|x|-1=g(x)$$ ✓

③ دامنهٔ هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است و از طرفی همگی می‌دانیم که $\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$ است، پس ضابطه‌هایشان هم برابر می‌باشد، پس این دو تابع مساوی هستند. ✓

④ اول سراغ بررسی ضابطه‌های دو تابع می‌رویم، داریم:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|\neq g(x) \quad ✗$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ضابطهٔ دو تابع برابر نیستند و پاسخ تست همین گزینهٔ «۴» است.

۷۸ **۳**

همهٔ گزینه‌ها نابرابرند به جز گزینهٔ «۳». اول از همه دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است چرا که $۱+x^{۲}$ همواره مثبت است و هیچ محدودیتی برای x در هیچ یک از توابع نداریم ($D_f=D_g=\mathbb{R}$). از طرفی ضابطه‌های دو تابع **با هم مساوی هستند، برای اثبات این موضوع، تابع g(x) را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم، ببینید:**

$$g(x)=(\sqrt{۱+x^{۲}}-۱)\times\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}+۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}+۱}=\frac{۱+x^{۲}-۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}+۱}$$

$$=\frac{x^{۲}}{\sqrt{۱+x^{۲}}+۱}=f(x) \quad ✓$$

برای اثبات نابرابری سایر گزینه‌ها از عددگذاری استفاده می‌کنیم، داریم:

① $x=۰;\ f(۰)=\sqrt{\frac{۰-۱}{۰-۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}},\ g(۰)=\frac{\sqrt{-۱}}{\sqrt{-۲}}$ ✗

② $x=-۱;\ f(-۱)=\sqrt{+۱}=۱,\ g(-۱)=-۱\sqrt{+۱}=-۱$ ✗

④ $x=\frac{-۱}{۲};\ f(\frac{-۱}{۲})=\frac{-۱}{۲}|\frac{-۱}{۲}+۱|=\frac{-۱}{۴},$

$g(\frac{-۱}{۲})=|\frac{-۱}{۲}|(\frac{-۱}{۲}+۱)=\frac{۱}{۴}$ ✗

۷۹ **۴**

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

① دامنهٔ هر دو تابع برابر با $\mathbb{R}$ است (درسته؟) و داریم:

$$x^{۲}<x^{۲}+۳\Rightarrow ۰\le\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۳}<۱\Rightarrow f(x)=[\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۳}]=۰=g(x) \quad ✓$$

② دامنهٔ هر دو تابع برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است و داریم:

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \quad ✓$$

③ دامنهٔ هر دو تابع $(۰,+\infty)$ است و داریم:

$$f(x)=\log\sqrt{x}=\log x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log x=g(x) \quad ✓$$

④ دامنهٔ دو تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\tan x.\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x:\cos x=۰ \text{ یا } \sin x=۰\}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$$

چون دامنهٔ دو تابع برابر نیست، پس این دو تابع برابر نیستند. ✗

۸۰ **۴**

ابتدا دامنهٔ تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x-۲}{x}>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

همان‌طور که گفتیم دو تابع زمانی با هم برابرند که دامنه‌هایشان یکسان باشد و همچنین ضابطه‌هایشان هم یکی باشد. حالا به بررسی همهٔ گزینه‌ها می‌پردازیم:

① $y=\log(x-۲)-\log x:\begin{cases}x-۲>۰\Rightarrow x>۲\\ x>۰\end{cases}\xrightarrow{\cap}x\in(۲,+\infty)$ ✗

دامنهٔ این تابع با دامنهٔ تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ برابر نیست، پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

② $y=\log\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+۲x}:\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+۲x}>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$	-۲		۰		۲	$+\infty$
$x^{۲}-۴$	+	۰	−		−	۰	+
$x^{۲}+۲x$	+	۰	−	۰	+		+
$\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+۲x}$	+	ت‌ن	+	ت‌ن	−	۰	+

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(-۲,۰)\cup(۲,+\infty) \quad ✗$$

دامنهٔ این تابع هم با تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ **برابر نیست. پس این گزینه هم** نادرست است.

③ $y=\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^{۲}:(\frac{x-۲}{x})^{۲}>۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{۰,۲\}$ ✗

حواستان باشد که چون عبارت **توان ۲ دارد همیشه مثبت است، به‌جز در** نقاط به طول‌های $x=۰$ و $x=۲$ **که لگاریتم در آن تعریف نشده است** (چرا؟). خلاصه این‌که این تابع هم با تابع داده شده برابر نیست.

④ $y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}:\frac{x-۲}{x}>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

دامنهٔ این تابع با دامنهٔ تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ برابر است. حالا برویم سراغ ضابطه‌هایشان! پس داریم:

$$y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}=۲\log(\frac{x-۲}{x})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}}y=\frac{۲}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})=\log(\frac{x-۲}{x}) \quad ✓$$

در نتیجه ضابطه‌ها هم یکی هستند و پاسخ تست گزینهٔ «۴» می‌باشد.

۸۱ **۴**

به ازای $x\neq۲$ ضابطه $f(x)=\frac{x^{۳}-۸}{x-۲}$ **را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،** ببینید:

$$f(x)=\frac{x^{۳}-۸}{x-۲}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x^{۲}+۲x+۴)}{\cancel{x-۲}}=x^{۲}+۲x+۴$$

با مقایسه عبارت به‌دست آمده با $g(x)=x^{۲}+ax+b$، $a=۲$ و $b=۴$ به‌دست می‌آیند پس $g(x)=x^{۲}+۲x+۴$ می‌باشد. از طرفی مقدار دو تابع باید به ازای $x=۲$ نیز با هم برابر باشد، پس می‌توان نوشت:

$$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۳k=(۲)^{۲}+۲(۲)+۴=۱۲\Rightarrow k=۴$$

در آخر $a+b+k=۲+۴+۴=۱۰$ است.

۸۲ **۴**

دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است، پس باید دامنهٔ تابع $g(x)$ هم $\mathbb{R}-\{-۲\}$ باشد. یعنی عبارت درجه دوم $x^۲+cx+d$ در مخرج کسر تابع $g(x)$ به‌صورت $(x+۲)^۲$ است، درنتیجه داریم:

$$(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴=x^۲+cx+d \Rightarrow c=۴, d=۴$$

پس ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=\frac{ax+b}{(x+۲)^۲}$ است. حالا برای اینکه ضابطهٔ دو تابع f و g با هم برابر باشد باید صورت کسر تابع $g(x)$ برابر با $۵(x+۲)$ باشد. (قبوله؟) (آخه اگه اینجوری بشه یکی از $(x+۲)$ ها از صورت و مخرج کسر حذف میشن و f و g دقیقاً مثل هم میشن)

پس می‌توان نوشت: $ax+b=۵(x+۲)=۵x+۱۰ \Rightarrow a=۵, b=۱۰$

در نهایت $a+d=۵+۴=۹$ است.

۸۳ **۳**

می‌دانیم $-۱<-\sqrt{۲}+۱<۰$ و $۳\sqrt{۲}-۲>۲$ است در نتیجه برای محاسبهٔ $f(-\sqrt{۲}+۱)$ و $f(۳\sqrt{۲}-۲)$ به ترتیب از ضابطه‌های دوم و اول استفاده می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$f(-\sqrt{۲}+۱)=(-\sqrt{۲}+۱)^۲-\sqrt{۲}+۱=(۲+۱-۲\sqrt{۲})-\sqrt{۲}+۱$$
$$=۴-۳\sqrt{۲}$$
$$f(۳\sqrt{۲}-۲)=(۳\sqrt{۲}-۲)-۲=۳\sqrt{۲}-۴$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر $(۴-۳\sqrt{۲})+(۳\sqrt{۲}-۴)=۰$ است.

۸۴ **۳**

در قدم اول برای این‌که f تابع باشد، باید به‌ازای $x=a$ مقدار محاسبه شده از ضابطه بالایی با مقدار محاسبه شده از ضابطهٔ پایینی با هم برابر باشد، پس داریم: $۲a+۳=-a+۹ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲$

در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}۲x+۳ & x\geq ۲\\ -x+۹ & x\leq ۲\end{cases}$ است، پس برای محاسبهٔ $f(f(-۱))$ داریم:

$$f(f(-۱))=f(-(-۱)+۹)=f(۱۰)=۲(۱۰)+۳=۲۳$$

۸۵ **۳**

برای محاسبهٔ $f(x^۲)$ باید در عبارت $f(x)$، به جای x قرار دهیم $x^۲$.

پس برای به دست آوردن خواستهٔ مسئله می‌توان نوشت:

$$f(x^۲)-۲f(x)+۱=\frac{x^۲}{x^۲-۱}-۲\frac{x}{x-۱}+۱$$

حالا با مخرج‌مشترک گیری از عبارت بالا، خواستهٔ مسئله را پیدا می‌کنیم. ببینید:

$$\frac{x^۲}{x^۲-۱}-\frac{۲x}{x-۱}+۱=\frac{x^۲-۲x(x+۱)+x^۲-۱}{x^۲-۱}$$
$$=\frac{x^۲-۲x^۲-۲x+x^۲-۱}{x^۲-۱}=\frac{-۲x-۱}{x^۲-۱}=\frac{۲x+۱}{۱-x^۲}$$

۸۶ **۱**

برای محاسبهٔ عبارت خواسته‌شده ابتدا مقادیر $g(۱-\sqrt{۲})$ و $f(۱-\sqrt{۲})$ را یافته و سپس مقدار به دست آمده را در ضابطهٔ f و g جای‌گذاری می‌کنیم. داریم:

$$g(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲+۲(۱-\sqrt{۲})+۱=۱+۲-۲\sqrt{۲}+۲-۲\sqrt{۲}+۱$$
$$=۶-۴\sqrt{۲} \Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))=f(۶-۴\sqrt{۲})=|\overbrace{۶-۴\sqrt{۲}}^{+}|=۶-۴\sqrt{۲}$$
$$f(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}-۱$$
$$\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱)^۲+۲(\sqrt{۲}-۱)+۱$$
$$=۲+۱-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-۲+۱=۲$$
$$\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}$$
$$=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۸۷ **۲**

با توجه به این‌که $f(۱-۲x)$ معلوم است و باید مقدار $f(۳)$ و $f(-۱)$ را محاسبه کنیم، ابتدا معادلات $۱-۲x=۳$ و $۱-۲x=-۱$ را حل می‌کنیم. پس داریم:

$$۱-۲x=۳\Rightarrow ۲x=-۲\Rightarrow x=-۱\quad,\quad ۱-۲x=-۱\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

حالا با جای‌گذاری $x=-۱$ و $x=۱$ در $f(۱-۲x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x}+۲ & x\leq ۰\\ \sqrt{۴x} & x>۰\end{cases}$، می‌توان نوشت:

$$x=-۱: f(۳)\xlongequal{\text{ضابطهٔ بالایی}}\sqrt[۳]{-۱}+۲=-۱+۲=۱$$
$$x=۱: f(-۱)\xlongequal{\text{ضابطهٔ پایینی}}\sqrt{۴}=۲$$
$$\Rightarrow f(۳)+f(-۱)=۱+۲=۳$$

۸۸ **۴**

ابتدا حاصل $f(\sqrt{a})$ را به دست می‌آوریم. برای این کار با توجه به این‌که $\sqrt{a}$ نامنفی است از ضابطهٔ بالایی استفاده می‌کنیم. پس داریم:

$$f(\sqrt{a})=-\sqrt{a}-۱=-(\sqrt{a}+۱)$$

حالا باید $f(-(\sqrt{a}+۱))$ را محاسبه کنیم و چون $-(\sqrt{a}+۱)$ به وضوح منفی است، از ضابطهٔ پایینی مقدار تابع را به دست آورده و برابر با -۳ قرار می‌دهیم. پس می‌توان نوشت:

$$-\sqrt{a}-۱+۲=-۳\Rightarrow -\sqrt{a}=-۴\Rightarrow \sqrt{a}=۴\Rightarrow a=۱۶$$

در آخر $f(۱۶)=-۱۶-۱=-۱۷$ است.

۸۹ **۱**

ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۶x+۹+۴}{x^۲-۶x+۹-۸}=\frac{(x-۳)^۲+۴}{(x-۳)^۲-۸}$$

حالا با جای‌گذاری $x=۳+\sqrt{۵}$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(۳+\sqrt{۵})=\frac{(۳+\sqrt{۵}-۳)^۲+۴}{(۳+\sqrt{۵}-۳)^۲-۸}=\frac{(\sqrt{۵})^۲+۴}{(\sqrt{۵})^۲-۸}=\frac{۵+۴}{۵-۸}=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

۹۰ **۴**

ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۶$$

می‌دانیم عبارت $x^۳-۳x^۲+۳x-۱=(x-۱)^۳$ است، درنتیجه برای محاسبهٔ $f(۱+\sqrt[۳]{۳})$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=(x-۱)^۳+۶\xrightarrow{x=۱+\sqrt[۳]{۳}}f(۱+\sqrt[۳]{۳})$$
$$=(\cancel{۱}+\sqrt[۳]{۳}-\cancel{۱})^۳+۶=۳+۶=۹$$

۹۱ ۱

طبق اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌دانیم $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

پس می‌توان نوشت:

$$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(\cancel{x})(\frac{1}{\cancel{x}})(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

پس ضابطه تابع به‌صورت $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$ نوشته می‌شود و با تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$، داریم: $f(t)=t^3-3t=t(t^2-3)$

حالا برای محاسبهٔ $f(1+\sqrt{2})$ در رابطهٔ به‌دست‌آمده به‌جای t، $1+\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$$f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})((1+\sqrt{2})^2-3)=(1+\sqrt{2})(\cancel{1}+\cancel{2}+2\sqrt{2}-\cancel{3})$$

$$=(1+\sqrt{2})(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}+4=2(2+\sqrt{2})$$

۹۲ ۳

با توجه به ضابطهٔ $f(2x)=-f(5)-2x+3$، برای این‌که به مقادیر $f(5)$ و $f(-2)$ برسیم، یک بار به $f(2x)$ مقدار $x=\frac{5}{2}$ و بار دیگر $x=-1$ را می‌دهیم، پس داریم: $f(2x)=-f(5)-2x+3$

$$\begin{cases} x=(\frac{5}{2}): f(2\times\frac{5}{2})=-f(5)-2(\frac{5}{2})+3 \\ \Rightarrow f(5)=-f(5)-5+3\Rightarrow 2f(5)=-2\Rightarrow f(5)=-1 \\ x=-1: f(2\times(-1))=-f(5)-2(-1)+3 \\ \Rightarrow f(-2)=-\underbrace{f(5)}_{-1}+2+3\Rightarrow f(-2)=1+2+3=6 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $f(-2)=6$ می‌باشد.

۹۳ ۲

با جای‌گذاری $x=-3$ در رابطهٔ داده‌شده، داریم:

$$f(3)+3f(-3)=|2(-3)|+1\Rightarrow f(3)+3f(-3)=7 \quad (1)$$

با توجه به اینکه $f(3)$ نیز نامعلوم است، پس $x=3$ را نیز در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم. ببینید:

$$f(-3)-3f(3)=|2(3)|+1\Rightarrow f(-3)-3f(3)=7 \quad (2)$$

حالا برای پیدا کردن $f(-3)$، دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) را حل می‌کنیم. پس داریم:

$$\begin{cases} f(3)+3f(-3)=7 \\ -3f(3)+f(-3)=7 \end{cases}\xrightarrow{\times 3}\begin{cases} \cancel{3f(3)}+9f(-3)=21 \\ -\cancel{3f(3)}+f(-3)=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10f(-3)=28\Rightarrow f(-3)=2/8$$

۹۴ ۴

ابتدا با تغییر متغیر $x+1=t$ ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+1=t\Rightarrow x=t-1\Rightarrow f(t)=2^{t-1}\xrightarrow{t\to x}f(x)=2^{x-1}$$

حالا حاصل $4f(x)+f(x+1)$ را به‌دست می‌آوریم، ببینید:

$$4f(x)+f(x+1)=4\times 2^{x-1}+2^x$$

برای این‌که بتوانیم عبارت را برحسب $f(x)$ بیان کنیم، جملهٔ 2^x را در $\frac{2}{2}$ ضرب می‌کنیم تا 2^{x-1} بسازیم، پس می‌توان نوشت:

$$4f(x)+f(x+1)=4\times 2^{x-1}+2^x\times\frac{2}{2}=4\times 2^{x-1}+2\times 2^{x-1}$$

$$=6\times\underbrace{2^{x-1}}_{f(x)}=6f(x)$$

۹۵ ۴

با توجه به اینکه $f(1)$ مجهول است، ابتدا مقدار آن را با جای‌گذاری $x=1$ در رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آوریم:

$$x=1: f(1)+f(1)=\frac{1}{(1)^2}-3\Rightarrow 2f(1)=-2\Rightarrow f(1)=-1$$

حالا با جای‌گذاری $f(1)=-1$ در رابطهٔ داده‌شده، ضابطهٔ f به دست می‌آید:

$$f(x)-1=\frac{1}{x^2}-3\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}-2$$

در نهایت ضابطهٔ $f(\cos x)$ برابر است با:

$$f(\cos x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}f(\cos x)$$

$$=1+\tan^2 x-2=\tan^2 x-1$$

۹۶ ۲

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، طبق اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

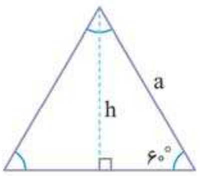
$$x=2y-1\Rightarrow 2y=x+1\Rightarrow y=\frac{x+1}{2}\quad (*)$$

در نهایت برای محاسبهٔ مساحت مستطیل می‌توان نوشت:

$$S=xy\overset{(*)}{=}x(\frac{x+1}{2})=\frac{x(x+1)}{2}$$

۹۷ ۱

در مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع a و ارتفاع h داریم:



$$\sin 60^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{h}{a}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{a}\Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}h\quad (*)$$

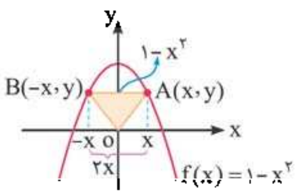
پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}ah\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}h)h=\frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

(یادتون باشه مساحت برحسب طول ضلع (a) میشه $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$)

۹۸ ۴

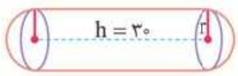
مختصات نقطهٔ B به‌وضوح به‌صورت $B(-x,y)$ است. از طرفی با توجه به این‌که A و B روی نمودار تابع $y=1-x^2$ قرار دارند، برای محاسبهٔ مساحت مثلث OAB می‌توان نوشت:



$$S=\frac{1}{2}\times\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x)(1-x^2)=x-x^3$$

۹۹ | **۲**

ابتدا یک شکل به‌صورت زیر برای مسئله در نظر می‌گیریم:

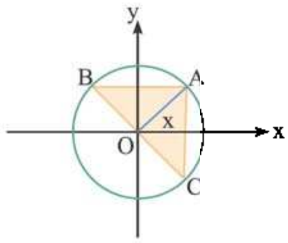


می‌دانیم حجم یک کره به شعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ و حجم استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r برابر $\pi r^2 h$ است. پس می‌توان نوشت:

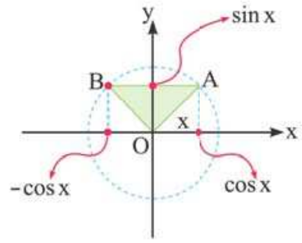
$$V = 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3\right)}_{\text{حجم دو نیم کره}} + \underbrace{\pi r^2(30)}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$$

۱۰۰ | **۱**

با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با مجموع مساحت‌های دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OAC}$ است.

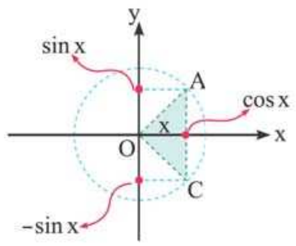


مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ برابر است با:



$$S_1 = \frac{1}{2}\times \sin x \times (2\cos x) = \sin x \cos x$$

مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ برابر است با:



$$S_2 = \frac{1}{2}\times \cos x \times (2\sin x) = \sin x \cos x$$

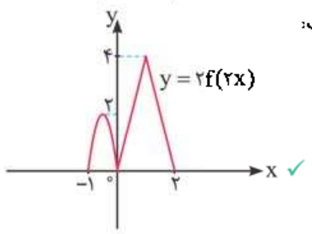
در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$S = S_1 + S_2 = \sin x\cos x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

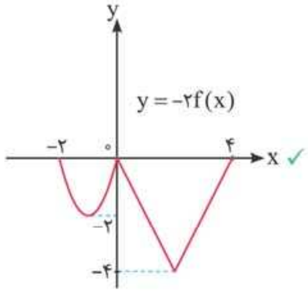
۱۰۱ | **۳**

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

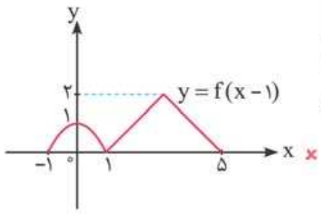
① برای رسم نمودار $y = 2f(2x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ عرض همهٔ نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم و طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم پس نمودار $y = 2f(2x)$ به‌صورت مقابل است:



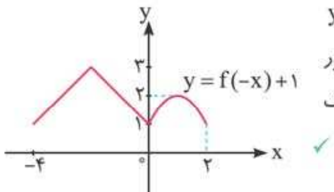
② برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ عرض همهٔ نقاط را در ۲- ضرب می‌کنیم:



③ برای رسم نمودار $y = f(x-1)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:

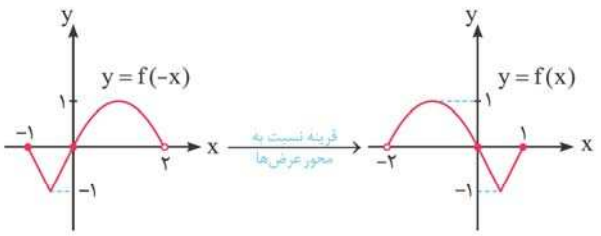


④ برای رسم نمودار $y = f(-x) + 1$ ابتدا نمودار تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و سپس یک واحد بالا می‌بریم:



۱۰۲ | **۲**

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را از روی نمودار $y = f(-x)$ رسم می‌کنیم. برای این‌کار کافی است نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم. (چرا؟)



حالا برای رسم $y = -f(x-1)+1$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم: