مقدمه ناشر

نمی‌دونم شما هم این‌جوری هستید یا نه، ولی خب یکی از مشکلاتی که من همیشه دارم، تمرکزکردنه! این‌جوری که هم‌زمان چندتا چیز مختلف میاد تو ذهنم و باعث می‌شه رو هیچ کدوم نتونم تمرکز کنم! یا مثلاً روی یه چیز تمرکز می‌کنم، اما وسطش حواسم به کوچک‌ترین چیزها پرت می‌شه! ولی خب وقتی از یه کاری لذت ببرم، اصلاً متوجه گذر زمان نمی‌شم و غرق می‌شم توش!

به گفتهٔ دیوید راک (David Rock)، یکی از بنیان‌گذاران مؤسسهٔ NeuroLeadership و نویسندهٔ کتاب «مغز شما در هنگام کار» (Your Brain at Work)، ما فقط ۶ ساعت در هفته واقعاً بر کار خود تمرکز می‌کنیم. به‌علاوه، بررسی‌های راک نشان داده است که بیشترین کارایی و قدرت فکری ۹۰٪ از مردم، مربوط به زمانی است که خارج از اداره‌اند و بالاترین میزان تمرکز افراد نیز در هنگام صبح یا اواخر شب است. این دقیقاً برخلاف چیزی است که برنامه‌های کاری به ما دیکته می‌کنند!

متمرکزکردن فکر، فعالیتی غیرمعمول نیست و تقریباً هر روز برای همه اتفاق می‌افتد ولی این تمرکز، توانایی ناخودآگاه و کنترل‌نشده‌ای است. برای مثال، آیا توجه کرده‌اید کودکان در هنگام بازی صدای شما را نمی‌شنوند؟ آن‌ها آن‌قدر در بازی غرق می‌شوند که به هیچ چیز دیگری توجه نمی‌کنند. یا وقتی کتاب بسیار جالبی می‌خوانید، صدای اطرافیانتان را نمی‌شنوید. زمانی که نامه‌ای مهم می‌نویسید، فیلم یا مسابقه‌ای ورزشی تماشا می‌کنید، شطرنج بازی می‌کنید و به طورکلی وقتی مشغول انجام کاری می‌شوید که عاشق آن هستید و برایتان جالب یا لذت‌بخش است، به محیط اطراف خود بی‌توجه می‌شوید و گذشت زمان را حس نمی‌کنید.

این مثال‌ها نشان می‌دهند که «متمرکز کردنِ توجه» امکان‌پذیر است ولی این کار با تمرکز واقعی تفاوت دارد، زیرا فرایندی آگاهانه و عمدی است و شما هر زمان که اراده کنید، می‌توانید برای مدت‌زمان مشخصی (و نه فقط چند ثانیه) ذهن خود را بر هر موضوعی که می‌خواهید، متمرکز کنید. با استفاده از این توانایی، می‌توانید علاوه بر چیزهای لذت‌بخش و کارهای مورد علاقه‌تان، ذهن خود را بر وظایف، شغل، درس و حتی کارهای خسته‌کننده و ناخوشایندی که مجبور به انجام آن‌ها هستید، متمرکز کنید.

خب یه سری راه هست که می‌شه تمرکز رو افزایش داد که اگر تو گوگل سرچ کنید، کامل براتون توضیح داده! اما این‌جا من نمی‌خوام در مورد این راه‌ها صحبت کنم و اصل حرفم اینه، چیزی که باعث می‌شه آدم توی کارش متمرکز بشه و متوجه گذر زمان نشه، لذت‌بردن از اون کاره! و خب وقتی هم آدم توی کاری عمیق بشه، حتماً پیشرفت می‌کنه! مستقل از این‌که چه کاری باشه! پس تو هر کاری هدفتون اول لذت‌بردن باشه، بعد چیزای دیگه! چون اگر غیر این باشه بهتون خوش نمی‌گذره، فکرتون درست کار نمی‌کنه، خلاقیت نخواهید داشت و در نهایت به اون چیزی که دلتون می‌خواد، نمی‌رسید!

پس پیشنهاد من به شما اینه تو مسیری برید که ازش لذت می‌برید! حالا تو حوزهٔ درس، ورزش، هنر یا هر چی!

از اون‌جایی که این کتاب رو تهیه کردی و خب این کتاب برای آدم‌های خاص و اهل عمیق‌شدن رو مسائل هست، کلی ایدهٔ باحال هست که موقع حل‌کردنش متوجه گذر زمان نمی‌شی و لذت می‌بری![1]

نوشتن چنین کتابی اصلاً راحت نیست و زمان خیلی زیادی براش گذاشته شده! این کتاب به‌جورایی ترکیب تجربه و جوانیه! ممنونم از عطای عزیز، که با تجربه و استعدادش این کتاب رو نوشت و ممنون از مسعود به خاطر انگیزه و خلاقیت زیادش!

تشکر از لولاو مرادی به خاطر تمام کارهای خوبش در جلو بردن پروژه و تمام بچه‌های باحال خیلی‌سبز!

از زندگیت لذت ببر!

۱- گسسته یکی از درس‌های مورد علاقمه! خیلی دوست داشتم من هم‌سن‌وسال شما بودم و می‌تونستم مثل شما این کتاب رو بخونم!

تقـدیم بـه آرزو
و
کـورو - شیـرو

مقدمه مؤلف

اگر کتاب‌های قبلی من را خوانده باشید، لابد می‌دانید که چندان عادت ندارم در مقدمهٔ کتاب‌های ریاضیم دربارهٔ خود ریاضی بنویسم و دوست دارم از چیزهایی دیگر حرف بزنم اما این بار می‌خواهم اول کمی دربارهٔ این کتاب با شما حرف بزنم بعد بروم سراغ موارد دیگر. من تا به امروز بیش از ده عنوان کتاب آموزشی دربارهٔ ریاضی نوشته‌ام اما از دید خودم این یکی از بهترین‌های آن‌هاست. برای این کتاب زحمت زیادی کشیده شده است، بدون اغراق دربارهٔ تک‌تک تست‌های این کتاب با مسعود بحث کرده‌ایم و سعی کرده‌ایم مجموعه‌ای از تست‌ها برای شما فراهم کنیم که از نظر گستردگی و پوشش ایده‌های مختلف مربوط به مباحث گسسته، کتاب کاملی باشد. هم‌چنین با توجه به این‌که رویکرد تازهٔ سازمان سنجش در مورد تست‌های گسسته و آمار و احتمال کنکورهای این چند سال این بوده که درجهٔ سختی سؤال‌ها بیشتر شود ما هم سعی کردیم توجه ویژه‌ای به این رویکرد داشته باشیم و با طرح تست‌های خلاقانه و مناسب، شما را برای آزمون سراسری آماده کنیم. در درس‌نامهٔ مفصل این کتاب نیز به شرح و بسط و طبقه‌بندی ایده‌های درسی پرداخته‌ایم به طوری که می‌توانیم ادعا کنیم با خواندن دقیق درس‌نامهٔ این کتاب درک بهتری از مباحث خواهید داشت و راحت‌تر می‌توانید از پس تست‌ها بربیایید! در بخش پایانی کتاب یعنی «تثبیت ایده‌ها» نیز شما می‌توانید در زمانی کوتاه و با زدن تعداد قابل‌قبولی تست، همهٔ ایده‌های اصلی را مرور کنید.

اما در ادامهٔ مقدمه می‌خواهم برای شما چند پیشنهاد داشته باشم. کتاب‌ها، فیلم‌ها، نمایش‌ها و به طور کلی آثاری وجود دارند که می‌توانند تأثیر عمیقی بر انسان داشته باشند و آدم را به فکرکردن وادار کنند و چه‌بسا نگاهمان به زندگی را عوض کنند. به همین خاطر می‌خواهم سه‌تا از این آثاری که در زندگی من اثرگذار بوده‌اند را به شما نیز پیشنهاد بدهم:

ملاقات با بانوی سالخورده

نمایش‌نامه‌ای از فریدریش دورنمات، نمایش‌نامه‌نویس و رمان‌نویس شناخته‌شدهٔ سوئیسی است در سه پرده دربارهٔ زن سالخوردهٔ بسیار ثروتمندی که پس از سال‌ها تصمیم گرفته به زادگاهش بازگردد. او در جوانی به خاطر آن‌که مردی که عاشقش بوده او را رها کرده، مجبور به ترک شهری که در آن به دنیا آمده می‌شود و حالا پس از گذشت سال‌ها با یک شرط مهم به آن‌جا بازگشته. او حاضر است پول بسیار قابل‌توجهی که به هر یک از شهروندان آن شهر که بیشتر آن‌ها در وضعیت اقتصادی خیلی نامناسبی هستند بدهد به شرط آن‌که آن‌ها مردی که در جوانی عاشقش بوده و در حق او بدی کرده ولی در حال حاضر شهردار آن شهر و شخصیت محبوب و محترمی است را به قتل برسانند.

زندگی دیگران

فیلمی به نویسندگی و کارگردانی فلوریان هنکل فون دونرسمارک که در هفتاد و نهمین دورهٔ مراسم اسکار برندهٔ جایزهٔ اسکار بهترین فیلم غیرانگلیسی‌زبان شده است. توضیح بیشتری نمی‌دهم تا خودتان فیلم را ببینید.

زیستن، نه بر پایهٔ دروغ

یادداشتی از الکساندر سولژنیتسین، نویسندهٔ سرشناس روس و برندهٔ جایزهٔ نوبل ادبیات که چندین سال از عمر خود را در زندان‌های مخوف شوروی گذراند و بعدتر به خاطر افشای جنایات استالین در کتاب‌هایش و انتقاد از فساد گسترده و ناکارآمدی مقامات شوروی تبعید شد. خلاصه حرف سولژنیتسین این بود که ساده‌ترین کار برای ما و نابودکننده‌ترین کار برای دروغ، شرکت‌نکردن در دروغ است. پیشنهاد می‌کنم متن کامل این جستار را پیدا کنید و بخوانید.

آثار ادبی، هنری و نمایشی از این دست بسیار زیادند و پرداختن بیشتر به آن‌ها از حوصلهٔ این مقدمه خارج است. پیشنهاد کلی من به شما این است که سعی کنید آدمی چندبعدی باشید، کتاب زیاد بخوانید، فیلم زیاد ببینید، به تماشای تئاتر بروید، پادکست زیاد گوش کنید و دنیایتان را ژرف‌تر و عمیق‌تر کنید. اما در پایان این مقدمه جا دارد تشکر کنم از مسعود که برای این کتاب زحمت خیلی زیادی کشید و از ایمان عزیز که همیشه با صبر و حوصله حرف‌های ما را شنید و به هر چه بهترشدن کتاب کمک کرد. حرف دیگری نیست و برایتان آرزوی موفقیت و روزهای خوب دارم.

عطا صادقی

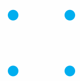
تقـدیم بـه
بچه‌های خفن گروه آموزشی لاپلاس

مقدمه مؤلف

سـلام! امیدوارم حالتون خوب باشه.

چند روز پیش (۲۵ خرداد ۱۴۰۲) داشتم با یکی از دانش‌آموزا صحبت می‌کردم، بحث چهارچوب ذهنی و ... شد. برا همین می‌خوام مقدمه رو با دوتا سؤال شروع کنم:

حتماً بازی نقطه خط رو یادتون هست که باید بین هر دوتا نقطه یه پاره‌خط رسم می‌کردیم تا مربع بشه و ... . حالا ۴ نقطه به شکل مقابل رو در نظر بگیرید.



این ۴تا نقطه روی رئوس یه مربع هستند. حالا یه سؤال! به نظرتون می‌شه از یکی از این ۴ نقطه شروع کرد و بدون این‌که دستمون رو از روی کاغذ بلند کنیم، سه‌تا خط بکشیم که از هر ۴ نقطه عبور کنه و آخر کار به نقطهٔ شروع برگردیم؟

جواب این سؤالو می‌تونید • • • • ببینید.

قیمت طلا امروز (۲۹ خرداد ۱۴۰۲) گرمی ۲ میلیون و چهارصده. سؤال دومم اینه که اگه بهتون ۱۰ گرم طلا بدم، چه کاری انجام می‌دین که موفق بشین یا به هدفتون برسید؟ (البته این هدفه متفاوته، مثلاً برا یکی کنکوره، برا یکی پولدار شدنه، برا یکی خرید ماشینه و ...)

خوب به این سؤال فکر کنید!

این سؤالو از آدما پرسیدم و جواب بعضی‌هاشون این‌طوری بود: نقد می‌کنم می‌زارم تو بانک، باهاش دلار می‌خرم، می‌برم تو بورس (یا ارز دیجیتال) و باهاش trade می‌کنم، باهاش دوره ثبت‌نام می‌کنم و کتاب می‌خرم و ...

اما یه سؤال! چرا اصلاً ذهن خودمونو محدود کنیم به این ۱۰ گرم؟ کی گفته اصلاً باید از این ۱۰ گرم استفاده کنیم تا به هدفمون برسیم؟ راه‌های خیلی زیادی وجود داره که حتی بدون استفاده‌کردن از این ۱۰ گرم هم می‌تونیم به هدفمون برسیم.

خلاصهٔ کلام این‌که چرا چهارچوب الکی برا ذهنمون درست کنیم؟

چهارچوب‌های ذهنی رو اگه بشکونیم، باعث خلق اتفاقات جدید می‌شیم! مثل نیما یوشیج که چهارچوب شکست و نوع جدیدی از شعر رو عرضه کرد؛ مثل انیشتین که چهارچوب فیزیک کلاسیک رو شکوند و فیزیک نوین رو عرضه کرد و ... .

توی این کتاب هم ما سعی کردیم چهارچوب سؤالات رو بشکونیم (از اون طرف هم البته حواسمون بوده که سؤال خارج کنکور ندیم) و مدل جدیدی از فکرکردن و حل مسئله رو بهتون ارائه بدیم!

به جرأت می‌تونم بگم این کتاب تا سال ۱۴۰۱، ایده‌های کنکور و ایده‌هایی که هنوز توی کنکور مطرح نشده رو پوشش می‌ده! البته به همین دلیل هم هست که سطح کتاب بالا رفته و احتمالاً خیلی از سؤالاتش رو بلد نباشید، اما بیشتر از این‌که اهمیت بدین مثلاً درس ۲ نظریهٔ اعداد رو چند درصد زدین، سعی کنید ایده‌ها رو یاد بگیرید و سؤالایی که بلد نیستید رو حتماً از روی پاسخ‌نامه بخونید! البته سؤالایی که بلد هستید رو هم از روی پاسخ‌نامه بخونید چون ممکنه نکته یا روشی گفته باشیم که سؤال با اون خیلی راحت‌تر حل می‌شه.

آخر کتاب هم یه قسمت تحت عنوان تثبیت ایده‌ها برای هر فصل داریم که سؤالات تألیفی و کنکورهای اخیر رو توی سه سطح ساده، متوسط و سخت طبقه‌بندی کردیم و البته سؤالای هر سطح به هم ریخته هستند و خودتون باید تشخیص بدین که هر سؤال مربوط به کدوم بخشه!

آخر کار هم تشکر می‌کنم اول از همه از عطا صادقی عزیز و خیلی خوشحالم که افتخار داشتم این کتابو با هم بنویسیم؛ تشکر می‌کنم از ایمان سلیمان‌زاده، لولاو مرادی، بچه‌های خوب گروه آموزشی لاپلاس، سیدعلی‌محمد میردامادی، جواد ترک‌ترابی، علیرضا قنادیان، دکتر غلامرضا طالبی و ... که حضورشون برای تألیف کتاب الزامی بود.

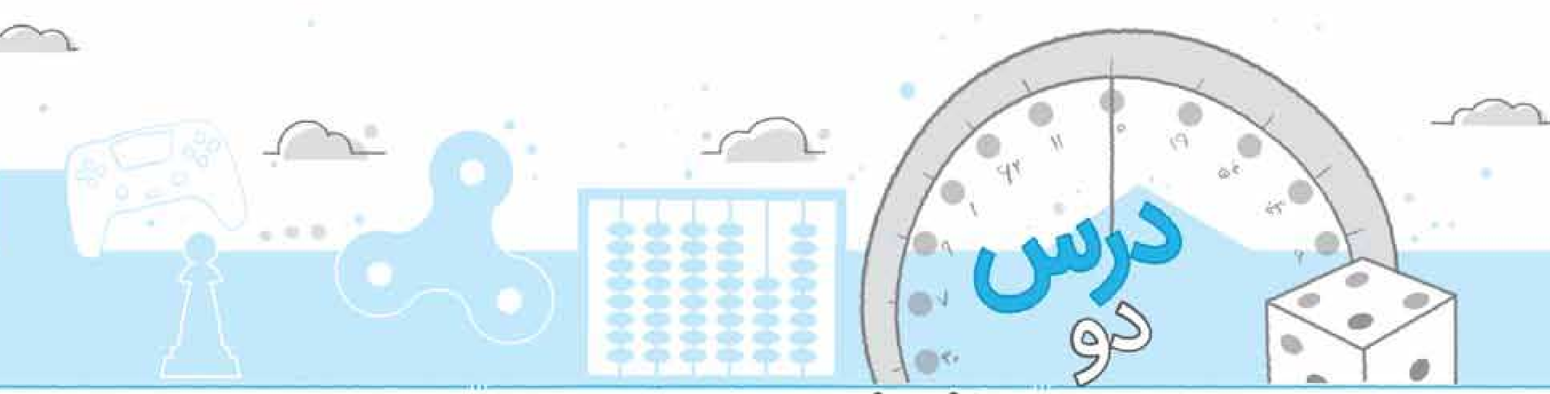
اگر پیشنهاد، انتقاد یا ... در مورد این کتاب داشتید به آیدی @masoood2000 یا masoudshafiei2000@gmail.com پیام بدین.

دوستون دارم! موفق باشید.

مسعود شفیعی

فهرست

۱- پاسخنامهٔ تشریحی تثبیت ایده‌ها و پاسخنامهٔ کلیدی را از طریق اسکن QR code مقابل می‌توانید مشاهده نمایید.



بخش‌پذیری در اعـداد صحیح

با مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح همگی کم و بیش آشناییم. برای مثال ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است، چون کسر $\frac{۴}{۲} = ۲$ عددی صحیح است ولی ۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست چون $\frac{۴}{۳}$ عددی صحیح نیست.

بنابراین یک جورهایی می‌توان گفت اگر $q = \frac{a}{b}$ عددی صحیح شود (a و b اعداد صحیح و $b \neq ۰$ است)، a بر b بخش‌پذیر است.

گفتیم یک جورهایی، چون دانشمندان! در تعریف بخش‌پذیری به دلایلی که کمی جلوتر به شما خواهیم گفت، تصمیم گرفته‌اند این کسر را طرفین‌وسطین‌شده بیاورند!

حواستون‌باشه! عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند، اگر عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که: $a = bq$

تست **چند عدد دورقمی وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشد؟**

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

پاسخ **گزینهٔ «۱»** دیدیم که اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، $a = bq$ است. بنابراین اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، می‌توان نوشت: $x = ۴q$

می‌خواهیم عدد دورقمی باشد، بنابراین: $۱۰ \leq x \leq ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \leq ۴q \leq ۹۹ \Rightarrow ۲/۵ \leq q \leq ۲۴/۷۵$

پس q از ۳ تا ۲۴ می‌تواند باشد: $۲۴ - ۳ + ۱ = ۲۲$

نکته

۱ حتماً یادتان هست که تعداد عددهای طبیعی بزرگ‌تر مساوی a و کوچک‌تر مساوی b برابر است با: $b - a + ۱$

۲ تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچک‌تر مساوی n باشد، برابر است با: $[\frac{n}{a}]$

این نکتهٔ دوم یعنی این‌که اگر برای مثال بخواهیم پیدا کنیم چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۲۰۰ وجود دارد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، به جای محاسبه‌ای که در سؤال قبل انجام دادیم، می‌توانیم خیلی راحت بنویسیم: $[\frac{۲۰۰}{۵}] = ۴۰$

این کار را در سؤال بعد تمرین می‌کنیم:

تست **چند عدد از مجموعهٔ $\{۲۳۴,۲۳۵,...,۴۳۲\}$ بر ۶ بخش‌پذیر است؟**

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اول مضارب ۶ که کوچک‌تر مساوی عدد ۴۳۲ است را پیدا می‌کنیم: $[\frac{۴۳۲}{۶}] = ۷۲$

اساساً مضارب ۶ را در فاصلهٔ $۲۴۳,۲۳۵,...,۴۳۲$ می‌خواهیم ولی مضارب ۶ را در فاصلهٔ $۱,۲,...,۴۳۲$ پیدا کرده‌ایم.

پس یک سری مضارب ۶ را زیاد حساب کرده‌ایم که باید آن‌ها را پیدا کرده و کم کنیم:

کل

$$\underbrace{۱,۲,۳,...,۲۳۳}_{\text{نمی‌خواهیم}}, \underbrace{۲۳۴,...,۴۳۲}_{\text{می‌خواهیم}} \Rightarrow [\frac{۲۳۳}{۶}] = ۳۸ \Rightarrow ۷۲ - ۳۸ = ۳۴$$

عادکردن

برعکس رابطهٔ بخش‌پذیری ما یک رابطه‌ای داریم به نام عادکردن:

حواستون‌باشه! ۱ اگر $a = bq$ آن‌گاه b عاد می‌کند a را (یا این‌که b می‌شمارد a را). $a = b.q \Leftrightarrow b|a$

۲ از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

$$a = bq \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a بر b بخش‌پذیر است.} \\ \text{b عاد می‌کند a را} \end{cases}$$

دقت کنید هرگاه ضرب چند عدد برابر عددی دیگر شود، هر کدام از آن چند عدد، عدد دیگر را عاد می‌کند. برای مثال:

$$۳۰=۲\times۳\times۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲|۳۰ & ۶|۳۰ \\ ۳|۳۰ & ۱۰|۳۰ \\ ۵|۳۰ & ۱۵|۳۰ \end{cases}$$

تست اگر $a^۶-b=۱$ باشد، کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱) $a^۲-۱|b$　۲) $a^۲+۱|b$　۳) $a^۲-a+۱|b$　۴) $a^۲+a+۱|b$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** **روش اول:**

$$a^۶-b=۱ \Rightarrow a^۶-۱=b \Rightarrow (a^۳-۱)(a^۳+۱)=b \Rightarrow (a-۱)(a^۲+a+۱)(a+۱)(a^۲-a+۱)=b$$

وقتی ضرب دو یا چند عدد برابر عددی مثل b شود، همهٔ آن عددها b را عاد می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست است ولی گزینهٔ (۲) لزوماً درست نیست.

روش دوم: سعی می‌کنیم مقادیری برای a و b پیدا کنیم تا شرط سؤال برقرار شود.

اگر $a=۲$ و $b=۶۳$ باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^۲-۱|b \Rightarrow ۳|۶۳$ ✓　۲ $a^۲+۱|b \Rightarrow ۵|۶۳$ ×

۳ $a^۲-a+۱|b \Rightarrow ۳|۶۳$ ✓　۴ $a^۲+a+۱|b \Rightarrow ۷|۶۳$ ✓

چند تا نکتهٔ مهم دربارهٔ عادکردن

۱ برای تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن کافی است آن را ۹۰ درجه خلاف عقربه‌های ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود. اگر حاصل کسر عدد صحیحی شد، رابطه درست است وگرنه رابطه نادرست است. برای مثال:

$۱۵|۵ \xrightarrow{۹۰^\circ} \frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$ × رابطه نادرست است.

$۸|۱۶ \xrightarrow{۹۰^\circ} \frac{۱۶}{۸}=۲$ رابطه درست است.

۲ اگر a عددی صحیح باشد و $x|a$ آن‌گاه x مقسوم‌علیه a است.

برای مثال اگر $x|۶$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۶ یعنی عددهای $\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶$ باشد.

۳ اگر a عددی صحیح باشد و $a|x$ آن‌گاه x مضرب a است.

برای مثال اگر $۸|x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از عددهای مقابل باشد: $۰,\pm۸,\pm۱۶,\pm۲۴,...$

تست چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ و مضرب ۲۴ باشد؟

۱) ۴　۲) ۶　۳) ۸　۴) ۹

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دنبال xهایی هستیم که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ باشند، این یعنی: $x|۱۲۰۰\ (I)$

هم‌چنین می‌خواهیم x مضرب ۲۴ باشد، یعنی: $۲۴|x\ (II)$

ابتدا رابطهٔ (II) را به تساوی تبدیل می‌کنیم بعد در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم:

$$۲۴|x \Rightarrow x=۲۴q \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (I)}} ۲۴q|۱۲۰۰$$

حالا اگر بخواهیم این رابطه برقرار باشد، باید کسر $\frac{۱۲۰۰}{۲۴q}$ عددی صحیح شود. این کسر را ساده می‌کنیم: $\frac{۱۲۰۰}{۲۴q}=\frac{۵۰}{q}$

بنابراین q باید مقسوم‌علیه ۵۰ باشد. مقادیر طبیعی قابل قبول این‌ها هستند: $q=۱,۲,۵,۱۰,۲۵,۵۰$

تست اگر $n!|۱۰۰۱$ و $m!|۱۰۲۴$ کم‌ترین مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲۳　۲) ۲۵　۳) ۲۹　۴) ۲۰۲۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** عددها را تجزیه می‌کنیم:

$۱۰۰۱=۷\times۱۱\times۱۳$

$۱۰۲۴=۲^{۱۰}$

چون $n!|۱۰۰۱$ پس کسر $\frac{n!}{۷\times۱۱\times۱۳}$ باید عددی صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی که هر سه عامل ۱۳،۱۱،۷ را دارد همان !۱۳ است. پس $n=۱۳$.

همچنین می‌خواهیم کسر $\frac{m!}{2^{10}}$ عددی صحیح شود، پس m باید ۱۰ تا عامل ۲ داشته باشد. شروع می‌کنیم می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که ۱۰ عامل ۲ دارد چه عددی است:

عدد	$1\times\underline{2}\times3\times$	$\underline{\overset{2^2}{4}}\times5\times$	$\underline{\overset{2\times3}{6}}\times7\times$	$\underline{\overset{2^3}{8}}\times9\times$	$\underline{\overset{2\times5}{10}}\times11\times$	$\underline{\overset{2^2\times3}{12}}$
تعداد عوامل ۲	(۱)	(۲)	(۱)	(۳)	(۱)	(۲)

همان‌طور که می‌بینید کوچک‌ترین مقدار m برابر ۱۲ است؛ بنابراین: $\min(m+n)=12+13=25$

چند ویژگی ابتدایی از بخش‌پذیری

۱ هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است: $a\,|\pm a$

۲ هر عددی بر ۱ و ۱- بخش‌پذیر است: $\pm1\,|\,a$

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است: $a\,|\,0$

(چون اگه تبدیلش کنی به کسر می‌شه $\frac{0}{a}=0$ که عددی صحیحه!)

۴ هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست: $0\nmid a,\ a\neq0$

(این هم واضحه دیگه. اگه تبدیل به کسرش کنی خیلی بد می‌شه! $\frac{a}{0}$)

۵ صفر بر خودش بخش‌پذیر است! $0\,|\,0$

این را ممکن است به کسرش فکر کنید و بگویید نمی‌شود که!

اما اول درس یادتان هست گفتیم که دانشمندان به دلایلی تصمیم گرفته‌اند فرمول رابطهٔ عادکردن را طرفین‌وسطین‌شده بدهند. دلیلش همین‌هاست. چون دیدیم که: $a\,|\,b \Leftrightarrow b=aq$

بنابراین چون $0=0\times q \Leftrightarrow 0\,|\,0$

تست کدام‌یک از رابطه‌های زیر فقط به ازای یک مقدار صحیح a برقرار است؟

۱) $0\,|\,2a^2-a+1$ ۲) $0\,|\,2a^2+a-1$ ۳) $0\,|\,a^2+a-2$ ۴) $0\,|\,a^2-a-2$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دیدیم که تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است پس باید دنبال معادله‌ای بگردیم که یک جواب صحیح داشته باشد.

۱ $2a^2-a+1 \Rightarrow \Delta=1-8=-7<0 \Rightarrow$ همواره مثبت است. جواب ندارد.

۲ $2a^2+a-1=(2a-1)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ a=\frac{1}{2}\ \text{غقق}\end{cases}$ یک جواب دارد.

۳ $a^2+a-2=(a+2)(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ a=-2\end{cases}$ دو جواب دارد.

۴ $a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ a=-1\end{cases}$ دو جواب دارد.

نکته

این دو نکته خارج از کتاب است اما حتماً باید بلد باشید. *(چون تو کنکور میاد!)*

۱ **تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد:** برای پیداکردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n اول آن را به عوامل اولش تجزیه می‌کنیم:

$$n=P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}\cdots P_k^{\alpha_k}$$

سپس از رابطهٔ مقابل تعداد مقسوم‌علیه‌ها را پیدا می‌کنیم: تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n $=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

۲ **توان عدد اول P در تجزیهٔ n!:** برای پیداکردن تعداد عوامل عدد اول P در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{n}{P}]+[\frac{n}{P^2}]+[\frac{n}{P^3}]+\cdots$$

تست عدد ۱۸۰۰ چند مقسوم‌علیه طبیعی و چند مقسوم‌علیه مربع کامل دارد؟

۱) ۱۸ ـ ۸ ۲) ۱۸ ـ ۴ ۳) ۳۶ ـ ۸ ۴) ۳۶ ـ ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول عدد را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$۱۸۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲$$

طبق آن‌چه گفتیم تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(۳+۱)(۲+۱)(۲+۱) = ۳۶$$

حالا بررسی می‌کنیم چند تا از این مقسوم‌علیه‌ها مربع کامل است.

فرض کنید x مقسوم‌علیه ۱۸۰۰ باشد، این یعنی این‌که کسر $\frac{۱۸۰۰}{x}$ عددی صحیح است. *(مفهوم مقسوم‌علیه همینه دیگه!)* حالا اگر x بخواهد مربع کامل هم باشد، باید توان تمام عوامل آن زوج باشد.

از طرفی واضح است که x فقط می‌تواند عوامل ۲،۳و۵ داشته باشد. *(وگرنه کسر ساده نمی‌شه.)*

$$\frac{۱۸۰۰}{x} = \frac{۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲}{۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma}}$$

پس ما دوتا شرط داریم. اول این‌که توان عوامل صورت بزرگ‌تر مساوی توان عوامل مخرج باشد و دوم این‌که α، β و γ هر سه زوج باشند.

پس هر کدام از α، β و γ دو حالت می‌توانند داشته باشند، یا صفر باشند یا ۲. بنابراین:

$$\underset{۰,۲}{\overset{\alpha}{۲}} \times \underset{۰,۲}{\overset{\beta}{۲}} \times \underset{۰,۲}{\overset{\gamma}{۲}} = ۸$$:تعداد مقسوم‌علیه‌های مربع کامل

(برای مثال اگر $\alpha = ۲$، $\beta = ۰$ و $\gamma = ۲$ باشه، مقسوم‌علیه ما می‌شه $۲^۲ \times ۳^۰ \times ۵^۲ = ۱۰۰$ که همین‌جور که می‌بینید، مربع کامله)

تست بزرگ‌ترین مقدار n از رابطهٔ $۸^n \mid ۱۰۰!$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول از رابطه‌ای که گفتیم توان عدد ۲ را در تجزیهٔ !۱۰۰ پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۴}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۸}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۱۶}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۶۴}\right]$$

یک چیزی هم خوب است یادتان بدهیم. یک کار راحت‌تر این است که عدد را همین‌طور به ۲ تقسیم کنیم و بعد خارج قسمت‌ها را با هم جمع کنیم:

$$۱۰۰ \to ۵۰ \to ۲۵ \to ۱۲ \to ۶ \to ۳ \to ۱$$

$$\Rightarrow ۵۰+۲۵+۱۲+۶+۳+۱ = ۹۷$$

(حواستون باشه این فرموله مال اعداد اوله. یه وقت تو مخرج ۸ قرار ندین!)

خب الان فهمیدیم در تجزیهٔ !۱۰۰ توان عدد دو، ۹۷ است. حالا اگر $۸^n \mid ۱۰۰!$ قرار باشد داریم:

$$\frac{۱۰۰!}{۸^n} = \frac{۲^{۹۷} \times \cdots}{۲^{۳n}}$$

این کسر باید عددی صحیح باشد بنابراین توان ۲ در صورت باید بزرگ‌تر مساوی توان ۲ در مخرج باشد، بنابراین:

$$۳n \le ۹۷ \Rightarrow n_{max} = ۳۲$$

ویژگی‌های تکمیلی رابطهٔ عادکردن

یک رابطهٔ عادکردنی مثل $a \mid b$ را در نظر بگیرید. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم از این $a \mid b$ چه نتایجی می‌شود گرفت و چه کارهایی با آن می‌شود کرد.

۱

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} ma \mid mb \\ a^n \mid b^n \end{cases}$$

طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌شود در هر عددی مثل m ضرب کرد یا به توان رساند.

(واضحه دیگه وقتی $a \mid b$ یعنی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیحه و وقتی یه کسر عدد صحیح باشه وقتی صورت و مخرجش رو در یه عدد ضرب کنیم باز هم عدد صحیحه و وقتی هم به توان n برسونیمش باز هم عدد صحیحه.)

$$۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۸ \mid ۶۴ \checkmark \qquad ۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{طرفین} \times ۳} ۶ \mid ۱۲ \checkmark$$

۲

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

این خیلی رابطهٔ مهمی است و به زودی می‌بینید چه‌قدر کاربرد دارد. دلیلش هم خیلی واضح است. وقتی $a \mid b$ یعنی این‌که می‌دانیم $\frac{b}{a}$ عددی صحیح است و وقتی یک کسر عددی صحیح باشد، صورت کسر را در هر عدد صحیحی ضرب کنیم، باز هم حاصل عددی صحیح است.

$$۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۳} ۲ \mid ۱۲$$

پس یادتان باشد سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌شود در هر عدد صحیحی ضرب کرد.

۳

$a \mid b$ و $(c \mid a$ یعنی) c مقسوم‌علیه a باشد $\Rightarrow c \mid b$

این هم درکش ساده است. $a \mid b$ یعنی b بر a بخش‌پذیر است. c مقسوم‌علیه a است، *یعنی* a *بر* c *بخش‌پذیره*. بنابراین مشخص است b بر c هم بخش‌پذیر است. این یعنی این‌که اگر یک رابطهٔ عادکردن دیدید *می‌توانید* سمت چپش را به هر کدام از مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کنید.

$$18 \mid 36 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} 6 \mid 36$$

۴ این رابطه را این‌جوری هم می‌توان گفت:

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

۵ $a \mid b \Rightarrow |a| \le |b|, b \ne 0$

وقتی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیح است واضح است که باید قدرمطلق صورت از قدرمطلق مخرج بزرگ‌تر یا مساوی آن باشد. $2 \mid -4 \Rightarrow |2| \le |-4|$

تست **اگر $2a \mid 3b$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟**

۱) $a \mid 3b$ ۲) $2a \mid 3b^2$ ۳) $a \mid 6b$ ۴) $a \mid b$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** در ۱ سمت چپ را تقسیم بر ۲ کرده‌ایم:

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid 3b \checkmark$$

در ۲ سمت راست را در b ضرب کرده‌ایم:

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} 2a \mid 3b^2 \checkmark$$

در ۳ سمت راست را در ۲ ضرب و قسمت چپ را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم:

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 2} a \mid 6b \checkmark$$

اما ۴ ممکن است درست نباشد برای مثال به ازای $a = 3$ و $b = 2$ رابطهٔ صورت سؤال برقرار است اما: $2 \nmid 3$

تست **اگر $a^2 \mid 2b$ آن‌گاه رابطهٔ $2 \mid a$ .... و رابطهٔ $a \mid b$ ....**

۱) درست است ـ درست است
۲) ممکن است درست نباشد ـ درست است
۳) ممکن است درست نباشد ـ ممکن است درست نباشد
۴) درست است ـ ممکن است درست نباشد

پاسخ **گزینهٔ «۲»** این‌که از $a^2 \mid 2b$ نمی‌توانیم همواره نتیجه بگیریم که $2 \mid a$ واضح است، چون برای مثال کافی است $a = 3$ و $b = 18$ باشد.

اما تشخیص درستی یا نادرستی رابطهٔ دوم احتیاج به دقت بیشتری دارد. به کسر $\frac{2b}{a^2}$ توجه کنید، این دوتا a در مخرج باید ساده شود. اگر a فرد باشد، واضح است که a^2 با ۲ ساده نمی‌شود و در نتیجه b باید بر a^2 بخش‌پذیر باشد پس b بر a هم بخش‌پذیر است.

اما فرض کنید a زوج باشد، در این صورت $a = 2k$ در این صورت:

$$\frac{2b}{a^2} = \frac{2b}{4k^2} = \frac{b}{2k^2} = \frac{b}{(2k) \times k}$$

می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ بنابراین b باید یک جوری باشد که $2k^2$ در مخرج ساده شود. یعنی b هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد و هم بر k و بنابراین باز هم بر a بخش‌پذیر است.

تست **اگر $a^7 \mid b^5$ کدام گزینه همواره درست است؟**

۱) $a^2 \mid b$ ۲) $a^3 \mid b^2$ ۳) $a^4 \mid b^3$ ۴) $a^{10} \mid b^7$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** یک راه برای پاسخ‌دادن این مدل سؤال‌ها پیداکردن مثال نقض برای ردکردن گزینه‌هاست. برای این کار باید تلاش کنیم a و b را جوری در نظر بگیریم که دو طرف رابطهٔ صورت سؤال برابر شود. یعنی الان می‌خواهیم $a^7 = b^5$ شود. اگر $a = b = 1$ باشد، دو طرف برابر می‌شوند ولی این مثال نقض به دردمان نمی‌خورد چون به ازای آن هر ۴ گزینه درست می‌شود. پس باید یک مثال دیگر پیدا کنیم. کوچک‌ترین مقادیر a و b که دو طرف را برابر می‌کند $a = 2^5$ و $b = 2^7$ است. *(دقت کنید توان این رو داریم به اون، توان اون رو داریم به این!)* در این صورت $(2^5)^7 = (2^7)^5$ و رابطهٔ $a^7 \mid b^5$ به صورت $2^{35} \mid 2^{35}$ درمی‌آید که درست است. حالا اگر با همین عددها گزینه‌ها را بررسی کنیم داریم:

۱ $a^2 \mid b \Rightarrow (2^5)^2 \mid 2^7 \Rightarrow 2^{10} \mid 2^7$ ×

۲ $a^3 \mid b^2 \Rightarrow (2^5)^3 \mid (2^7)^2 \Rightarrow 2^{15} \mid 2^{14}$ ×

۳ $a^4 \mid b^3 \Rightarrow (2^5)^4 \mid (2^7)^3 \Rightarrow 2^{20} \mid 2^{21}$ ✓

۴ $a^{10} \mid b^7 \Rightarrow (2^5)^{10} \mid (2^7)^7 \Rightarrow 2^{50} \mid 2^{49}$ ×

حواستان باشد که اثبات تشریحی این نوع سؤال‌ها ساده نیست.

برای مثال اگر بخواهیم از درستی $a^7 \mid b^5$ به درستی $a^4 \mid b^3$ برسیم باید این کار را بکنیم:

$$a^7 \mid b^5 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} a^{28} \mid b^{20} \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} a^{28} \mid b^{21} \xrightarrow{\text{ریشهٔ هفتم می‌گیریم}} a^4 \mid b^3$$

نکته اگر بخواهیم رابطهٔ $a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$ درست باشد، باید $np \le mq$ باشد.
برای درک بهتر:

$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q \Rightarrow$ نزدیک × نزدیک ≤ دور × دور

یک ویژگی مهم دیگر از بخش‌پذیری

$$\left.\begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} a\mid b+c \\ a\mid b-c \\ a\mid bc \\ a\mid mb\pm nc \end{cases}$$

این ویژگی خیلی کاربرد دارد و برای مثال در بخش بعد که معادله‌های عادکردنی است، کاربردهایش را می‌بینید.
یعنی اگر عددی مثل a هر دو عدد b و c را عاد کند، a هر مضربی از b به علاوه یا منهای هر مضربی از c را عاد می‌کند. خوب است این یکی را برایتان اثبات کنیم تا با اثبات این نوع رابطه‌ها آشنا شوید:

$$\left.\begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\mid mb+nc$$

$$\begin{cases} a\mid b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times m} mb=maq \\ a\mid c \Rightarrow c=aq' \xrightarrow{\times n} nc=naq' \end{cases} \xrightarrow{\oplus} mb+nc=maq+naq'=a\underbrace{(mq+nq')}_{q''}$$

$$\Rightarrow mb+nc=aq'' \Rightarrow a\mid mb+nc$$

تست **مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر آن بخش‌پذیرند، کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** عدد را a می‌نامیم. هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر a بخش‌پذیرند، بنابراین:

$$\begin{matrix} a\mid 7n+3 \xrightarrow{\times 6\ \text{سمت راست}} a\mid 42n+18 \\ a\mid 6n+5 \xrightarrow{\times 7\ \text{سمت راست}} a\mid 42n+35 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} a\mid 17$$

در این مدل سؤال‌ها باید با ضرب‌کردن سمت راست‌ها، متغیر را حذف کنیم. پس بزرگ‌ترین مقدار a برابر ۱۷ است که مجموع ارقام آن برابر $8 = 1+7$ است.

تست **از رابطهٔ $7\mid 53m-11$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟**

۱) $7\mid m-1$ ۲) $7\mid m-2$ ۳) $7\mid m+1$ ۴) $7\mid m+2$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به گزینه‌ها باید از شرط ضریب m یعنی ۵۳ و ۱۱− راحت شویم. از ویژگی‌های عادکردن استفاده می‌کنیم.
سعی می‌کنیم دوروبر عدد ۵۳ و ۱۱− مضرب ۷ پیدا کنیم:

$$7\mid 49 \Rightarrow \begin{matrix} 7\mid 49m \\ \text{از طرفی: } 7\mid 53m-11 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} 7\mid 4m-11$$

دیدیم وقتی سمت چپ در رابطهٔ عادکردن یکسان است می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم. حالا می‌رویم سراغ ۱۱−. داریم:

$$\begin{matrix} 7\mid 4m-11 \\ 7\mid 7 \end{matrix} \xrightarrow{\oplus} 7\mid 4m-4 \Rightarrow 7\mid 4(m-1)$$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{4(m-1)}{7}$ درمی‌آید. این یعنی $4(m-1)$ بر ۷ بخش‌پذیر است و چون ۴ نمی‌تواند بر ۷ بخش‌پذیر باشد، پس $m-1$ باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد و در نتیجه: $7\mid m-1$

یک ویژگی دیگر این است که از $a\mid b$ و $c\mid d$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $ac\mid bd$.

تست **اگر $3m+1$ بر ۵ و $9m+1$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد، کدام‌یک از عبارات زیر بر ۳۵ بخش‌پذیر است؟**

۱) $8m^2+12m+1$ ۲) $8m^2-12m+1$ ۳) $8m^2+12m-1$ ۴) $8m^2-12m-1$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** همان‌طور که در بالا گفتیم اگر $a\mid b$ و $c\mid d$ باشند، می‌توانیم طرفین این دو رابطه را در هم ضرب کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a\mid b \\ c\mid d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac\mid bd$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} 5\mid 3m+1 \\ 7\mid 9m+1 \end{matrix} \xrightarrow{\times} 35\mid (3m+1)(9m+1) \Rightarrow 35\mid 27m^2+12m+1$$

اما در هیچ‌کدام از گزینه‌ها ضریب m^2 برابر ۲۷ نیست؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} 35\mid 27m^2+12m+1 \\ 35\mid 35m^2 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} 35\mid 8m^2-12m-1$$

تست اگر $۶|۱۱n-۱$ و $۳۶|۵n^۲+۴n+a$ کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۱ ۳) ۲۵ ۴) ۳۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** **روش اول:** این مدل سؤال‌ها در تمرین‌های کتاب درسی آمده و یک مقدار سخت است. فکر کردم بد نیست یک نمونه این‌جا برایتان حل کنیم:

$$\begin{cases}۶|۱۱n-۱\\ ۶|۱۲n\end{cases} \xrightarrow{(-)} ۶|n+۱ \quad (II) \qquad \begin{cases}۶|۱۱n-۱\\ ۶|۶n\end{cases} \xrightarrow{(-)} ۶|۵n-۱ \quad (I)$$

با ضرب‌کردن دو رابطهٔ (I) و (II) در هم داریم:

$$۳۶|(۵n-۱)(n+۱) \Rightarrow ۳۶|۵n^۲+۴n-۱$$

پس $۵n^۲+۴n-۱$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است اما مشکل این‌جاست که ۱− طبیعی نیست؛ بنابراین:

$$\begin{cases}۳۶|۵n^۲+۴n-۱\\ ۳۶|۳۶\end{cases} \xrightarrow{(+)} ۳۶|۵n^۲+۴n+۳۵$$

پس کوچک‌ترین مقدار a برابر ۳۵ است.

روش دوم: یک عدد کوچک n پیدا می‌کنیم که رابطهٔ $۶|۱۱n-۱$ به ازای آن برقرار باشد. با کمی دقت متوجه می‌شویم به ازای $n=-۱$ رابطه برقرار است. حالا اگر در رابطهٔ $۳۶|۵n^۲+۴n+a$ به جای n عدد ۱− را قرار دهیم، داریم:

$$۳۶|۵-۴+a \Rightarrow ۳۶|۱+a$$

مشخص است که کوچک‌ترین مقدار طبیعی a برابر ۳۵ است.

معادله‌های عادکردنی

یک مدل بسیار پرتکرار در سؤال‌های بخش‌پذیری سؤال‌هایی مثل این است:

«به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $x-۲|۵x+۱$ برقرار است؟»

این مدل سؤال‌ها را معادله‌های عادکردنی می‌نامیم. *(چون به جای تساوی علامت عادکردن داره!)*

روش اصلی پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها ضرب‌کردن سمت راست رابطه در یک عدد و یکسان‌کردن ضریب‌هاست. الان بیشتر توضیح می‌دهیم منظورمان چیست. بیایید همین سؤال بالا را با هم حل کنیم:

۱ می‌دانیم هر عددی خودش را عاد می‌کند. پس عبارت سمت چپ هم خودش را می‌شمارد. $x-۲|x-۲$

۲ از طرفی دیدیم که می‌توانیم سمت راست هر عبارت عادکردنی را در هر عدد صحیحی که بخواهیم ضرب کنیم. سمت راست این رابطه را در ۵ ضرب می‌کنیم. چرا در ۵؟ صورت سؤال را ببینید، ضریب x در عبارت $۵x+۱$ عدد ۵ است. به همین خاطر این را هم در ۵ ضرب می‌کنیم تا بعداً ضریب‌ها ساده شود:

$$x-۲|x-۲ \xrightarrow{\text{سمت راست} ×۵} x-۲|۵x-۱۰$$

۳ حالا از رابطهٔ $\begin{cases}a|b\\ a|c\end{cases} \Rightarrow a|b-c$ استفاده می‌کنیم و ضریب x را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}x-۲|۵x-۱۰\\ \underbrace{x-۲|۵x+۱}_{\text{رابطهٔ صورت سؤال}}\end{cases} \xrightarrow{(-)} x-۲|۱۱$$

۴ حالا که سمت راست یک عدد ثابت است، عبارت سمت چپ (عبارت xدار) می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های آن عدد ثابت باشد:

$$x-۲|۱۱ \Rightarrow \begin{cases}x-۲=۱ \Rightarrow x=۳\\ x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱\\ x-۲=۱۱ \Rightarrow x=۱۳\\ x-۲=-۱۱ \Rightarrow x=-۹\end{cases}$$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در رابطهٔ $۵x-۲|۹x+۷$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

$$\begin{cases}۵x-۲|۵x-۲ \xrightarrow{\text{سمت راست} ×۹} ۵x-۲|۴۵x-۱۸\\ ۵x-۲|۹x+۷ \xrightarrow{\text{سمت راست} ×۵} ۵x-۲|۴۵x+۳۵\end{cases} \Rightarrow ۵x-۲|۵۳ \Rightarrow ۵x-۲=۵۳$$

$$\Rightarrow ۵x=۵۵ \Rightarrow x=۱۱ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱+۱=۲$$

چون بزرگ‌ترین عدد را خواسته، خود ۵۳ را در نظر گرفتیم.

تست **به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $yx + ۸ = x^۲ + ۳y$ برقرار است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$yx + ۸ = x^۲ + ۳y \Rightarrow yx - ۳y = x^۲ - ۸ \Rightarrow y(x - ۳) = x^۲ - ۸ \Rightarrow y = \frac{x^۲ - ۸}{x - ۳}$$

حالا اگر قرار باشد y عددی صحیح باشد، باید کسر $\frac{x^۲ - ۸}{x - ۳}$ عددی صحیح باشد؛ یعنی صورت آن بر مخرجش بخش‌پذیر باشد یا به بیان دیگر $x - ۳ \mid x^۲ - ۸$.

$$x - ۳ \mid x - ۳ \xrightarrow{\text{سمت راست} \times (x+۳)} \left.\begin{matrix} x - ۳ \mid x^۲ - ۹ \\ x - ۳ \mid x^۲ - ۸ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} x - ۳ \mid ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۱ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۸ \\ x - ۳ = -۱ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۴ \end{cases}$$

نکته تستی

یک راه ساده‌تر برای پاسخ‌دادن به این سؤال‌ها این است که اگر عبارت سمت چپ ریشه داشت، ریشهٔ آن را در عبارت سمت راست قرار دهیم تا به یک عدد ثابت برسیم. عبارت سمت چپ آن عدد ثابت را می‌شمارد.

برای مثال در مثالی که حل کردیم یعنی $x - ۲ \mid ۵x + ۱$ اگر $x - ۲ = ۰$ باشد، $x = ۲$ است که اگر آن را در عبارت $۵x + ۱$ قرار دهیم می‌شود $۵ \times ۲ + ۱ = ۱۱$ و عبارت سمت چپ یعنی $x - ۲$ عاد می‌کند ۱۱ را و سؤال خیلی ساده‌تر حل می‌شود یا در این تست آخر داشتیم:

$$x - ۳ \mid x^۲ - ۸$$

$$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } x^۲ - ۸} ۹ - ۸ = ۱$$

$$\Rightarrow x - ۳ \mid ۱$$

حواستون باشه! حتی اگر عبارت سمت چپ ریشهٔ صحیح نداشت، باز هم می‌شود از نکتهٔ قبلی سؤال را حل کرد. کافی است ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم و عبارت را ساده کنیم، در این صورت عبارت سمت چپ صورت کسر عبارت سمت راست را عاد می‌کند.

برای مثال به تست اولی که حل کردیم نگاه کنید:

$$۵x - ۲ \mid ۹x + ۷$$

$$۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۵}$$

ریشه را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$۹x + ۷ \xrightarrow{x = \frac{۲}{۵}} ۹ \times \frac{۲}{۵} + ۷ = \frac{۱۸}{۵} + ۷ = \frac{۱۸ + ۳۵}{۵} = \frac{۵۳}{۵}$$

حالا عبارت سمت چپ صورت کسر را عاد می‌کند:

$$۵x - ۲ \mid ۵۳$$

اما گاهی اوقات این معادله‌های عادکردنی از روش‌های معمول حل نمی‌شوند.

تست **به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $۲^n - ۱ \mid n^۲ - ۱$ برقرار است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم به ازای nهای بزرگ، رشد $۲^n - ۱$ از رشد $n^۲ - ۱$ بیشتر است؛ یعنی اگر کسر $\frac{n^۲ - ۱}{۲^n - ۱}$ را در نظر بگیریم، از یک جایی به بعد مخرج کسر از صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود و رابطه دیگر برقرار نیست. پس فقط در nهای کوچک رابطه برقرار است.

$n = ۱ \Rightarrow \frac{۰}{۱} = ۰$ ✓ $n = ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۳} = ۱$ ✓ $n = ۳ \Rightarrow \frac{۸}{۷}$ ×

$n = ۴ \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۵} = ۱$ ✓

$n = -۱ \Rightarrow \frac{۰}{-\frac{۱}{۲}}$ غیر قابل قبول؛ چون بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ تعریف می‌شود. پس برای اعداد صحیح منفی رابطه برقرار نیست.

و از $n \geq ۵$ مخرج از صورت بیشتر می‌شود.

$n = ۵ \Rightarrow \frac{۲۴}{۳۱}$ ×

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

در درس قبل دیدیم که اگر x عددی فرد باشد، مربع آن را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. از این ایده سؤال‌هایی در این بخش می‌آید که بد نیست با آن‌ها آشنا شویم.

$$x=2q+1 \Rightarrow x^2=4q^2+4q+1=4\underbrace{q(q+1)}_{\substack{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی}\\ \text{همواره زوج است.}}}+1=4(2k)+1=8k+1$$

تست اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $xy+x=7^{17}$ باشد، باقی‌ماندهٔ $3x^2+2y^3+1$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم 7^{17} عددی فرد است. حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی فرد شده ولی هر دو فردند:

$$xy+x=7^{17} \Rightarrow x(y+1)=7^{17} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ فرد است.} \\ y+1 \text{ فرد است.} \Rightarrow y \text{ زوج است.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &x^2=8q+1 \\ &y=2q' \Rightarrow y^3=8q'^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x^2+2y^3+1=3(8q+1)+2(8q'^3)+1=24q+3+16q'^3+1=\underbrace{24q+16q'^3}_{\text{مضرب ۸}}+4$$

تست اگر $a \mid 2^n+1$ و $b \mid m^2+m+1$ باقی‌ماندهٔ $a^4+b^4+a^2b^2$ بر ۸ کدام است؟ (m و n اعداد طبیعی‌اند.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۴»** 2^n+1 عددی فرد است. همچنین $m^2+m+1=\underbrace{m(m+1)}_{\substack{\text{ضرب دو عدد}\\ \text{متوالی زوج است.}}}+1=2q+1$ پس m^2+m+1 نیز فرد است.

بنابراین عدد فرد $\mid a$ و عدد فرد $\mid b$ پس a و b هیچ‌کدام نمی‌توانند عددی زوج باشند پس a و b هر دو فردند، بنابراین هر سه عبارت a^4 و b^4 و a^2b^2 مربع‌های عددهایی فردند، $(a^2)^2$، $(b^2)^2$ و $(ab)^2$ بنابراین:

$$a^4+b^4+a^2b^2=8q+1+8q'+1+8q''+1=\underbrace{8(q+q'+q'')}_{\text{مضرب ۸}}+3$$

سه اتحاد مهم در بخش‌پذیری

به این اتحاد نگاه کنید: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$

۱ از این‌جا می‌توان نوشت: $a-b \mid a^n-b^n$

۲ همچنین اگر n فرد باشد می‌توان نوشت: $a+b \mid a^n+b^n$

۳ و اگر n زوج باشد: $a+b \mid a^n-b^n$

به بیان دیگر:

۱ a^n+b^n زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۲ a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد a^n-b^n بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است.

تست به ازای چند مقدار $n \le 300$ رابطهٔ $33 \mid 2^n+1$ برقرار است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۵۹ ۴) ۶۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به 2^n+1 در سمت راست رابطه، عدد ۳۳ شما را یاد چه توانی از ۲ می‌اندازد؟ بله: $33=32+1=2^5+1$

حالا به اتحادهایی که گفتیم فکر کنیم، کدامشان ساختاری شبیه صورت سؤال داده‌شده دارد؛ چون در هر ۲ طرف رابطه + داریم، پس باید از اتحاد مقابل کمک بگیریم: n فرد است $a+b \mid a^n+b^n$

خب اگر $a=2^5$ و $b=1$ باشد، داریم: $2^5+1 \mid (2^5)^{2k+1}+1^{2k+1} \Rightarrow 2^5+1 \mid 2^{10k+5}+1$

چون n باید فرد باشد آن را به صورت $2k+1$ در نظر گرفتیم.

با مقایسه با صورت سؤال می‌توان فهمید $n=10k+5$ است. اما گفته $n \le 300$ بنابراین:

$$0 \le 10k+5 \le 300 \Rightarrow 0 \le 10k \le 295 \Rightarrow 0 \le k \le 29/5 \Rightarrow k=0,1,2,\dots,29$$

تست عدد $۳^{۵۶}-۲^{۲۸}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۳۵ ۲) ۹۱ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۸۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اگر بخواهیم از اتحادهای گفته‌شده استفاده کنیم، توان‌ها باید برابر باشند. بنابراین سعی می‌کنیم آن‌ها را برابر کنیم:

$۲۸=۲^{۲}\times ۷$ $۵۶=۲^{۳}\times ۷$

$۳^{۵۶}-۲^{۲۸}=(۳^{۴})^{۱۴}-(۲^{۲})^{۱۴}=۸۱^{۱۴}-۴^{۱۴}$

۱۴ زوج است پس $۸۱^{۱۴}-۴^{۱۴}$ هم بر $۸۱-۴=۷۷$ بخش‌پذیر است. (یعنی هم بر ۷ و هم بر ۱۱) و هم بر $۸۱+۴=۸۵$ بخش‌پذیر است (یعنی هم بر ۵ و هم بر ۱۷).

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: $۳۵=۵\times ۷$ ✓

$۳^{۵۶}-۲^{۲۸}$ بر ۷ بخش‌پذیر است اما بر ۱۳ نه. $۹۱=۷\times ۱۳$ ✗

$۱۸۷=۱۱\times ۱۷$ ✓ $۱۱۹=۷\times ۱۷$ ✓

قضیهٔ بالا را به صورت زیر نیز می‌توان گفت که اگر n و t اعدادی صحیح باشند:

۱ اگر $\frac{n}{t}$ صحیح باشد: $a^{t}-b^{t}\mid a^{n}-b^{n}$

۲ اگر $\frac{n}{t}$ فرد باشد: $a^{t}+b^{t}\mid a^{n}+b^{n}$

۳ اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد: $a^{t}+b^{t}\mid a^{n}-b^{n}$

تست به ازای چند عدد n از مجموعهٔ $A=\{۳,۶,۹,\dots,۹۹\}$، $a^{n}+b^{n}$ به $a^{۵}+b^{۵}$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۱»** طبق نکتهٔ گفته‌شده رابطهٔ $a^{۵}+b^{۵}\mid a^{n}+b^{n}$، هنگامی برقرار است که $\frac{n}{۵}$ عددی فرد باشد، پس n مضرب فردی از ۵ است که عضو مجموعهٔ A نیز هست، یعنی n هم مضرب فرد ۵ است هم مضرب ۳، پس n به صورت زیر است:

$n=۳۰k+۱۵ \Rightarrow n=۱۵,۴۵,۷۵ \rightarrow$ ۳ مقدار

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد ۳۰ و ۴۵ را ببینید:

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۳۰ $=\{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\}$

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۴۵ $=\{۱,۳,۵,۹,۱۵,۴۵\}$

حالا مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک این دو عدد را نگاه کنید:

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۳۰ و ۴۵ $=\{۱,۳,۵,\overbrace{۱۵}^{\text{ب.م.م}}\}$

که در میان آن‌ها ۱۵ بزرگ‌ترین است.

اما خب برای عددهای بزرگ نمی‌شود این کار را کرد. اما پیش از آن خوب است با تعریف ب.م.م که آن را در ریاضیات با d نشان می‌دهند، آشنا شویم:

حواستون‌باشه! عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم: $(a,b)=d$

هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ $d\mid a, d\mid b$ *(این یعنی d مقسوم‌علیه هردوئه!)*

۲ $c\mid a, c\mid b \Rightarrow \begin{cases} c\le d \\ c\mid d\end{cases}$ *(این ویژگی تضمین می‌کنه d کوچک‌ترینه!)*

۱ راه بهتر برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در هم ضرب کنیم:

$(۳۶۰,۲۸۸)=(۲^{۳}\times ۳^{۲}\times ۵,۲^{۵}\times ۳^{۲})=۲^{۳}\times ۳^{۲}=۷۲$

۲ اگر ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد، آن دو عدد را نسبت به هم اول می‌گویند. $(۳۵,۲۴)=(۵\times ۷,۲^{۳}\times ۳)=۱$

تست اگر $(۳۶۰,۲^{\alpha}\times ۳^{\beta})=۳۶$ باشد، کدام گزینه در مورد α و β درست است؟

۱) $\alpha=\beta=۲$ ۲) $\alpha=۲$ و $\beta\ge ۲$

۳) $\alpha\ge ۲,\beta=۲$ ۴) $\alpha\ge ۲,\beta\ge ۲$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** گفتیم برای پیداکردن ب.م.م دو عدد باید هر دو عدد را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. داریم: $(۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}, ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵) = ۲^۲ \times ۳^۲$

α باید حتماً ۲ باشد وگرنه در ب.م.م دو عدد $۲^۲$ دیده نمی‌شود. *(چون اون یکی $۲^۳$ داره!)*

در توان‌های ۳ باید $\min\{\beta, ۲\} = ۲$ باشد، بنابراین β حداقل برابر ۲ است اما هر مقداری می‌تواند داشته باشد یعنی $\beta \geq ۲$.

تست **اگر $(x, ۶۰۰) = ۱۰۰$ باشد، حاصل $(x^۲, ۱۰۰۰۰۰)$ کدام است؟**

۱) همواره ۱۰۰۰۰ ۲) همواره ۲۰۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰ ۴) ۲۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول عددها را تجزیه می‌کنیم تا بفهمیم چه خبر است: $(x, ۶۰۰) = ۱۰۰ \Rightarrow (x, ۲^۳ \times ۳ \times ۵^۲) = ۲^۲ \times ۵^۲$

پس x عامل ۳ ندارد *(وگرنه تو ب.م.م می‌اومد)* دارای دو عامل ۲ است *(چون اگه بیشتر داشت تو ب.م.م $۲^۳$ می‌اومد)* و دارای دست کم دو عامل ۵ است. *(چون اون یکی دو تا ۵ داره، تو ب.م.م هم ۲تا ۵ئه) (پس این می‌تونه هر عدد بیشتر از ۲ باشه.)*

پس فرم کلی x به صورت روبه‌رو است: $x = ۲^۲ \times ۵^{\alpha}, \alpha \geq ۲$

(البته ممکن است x عامل‌های دیگری هم داشته باشد ولی چون ۱۰۰۰۰۰ فقط عامل ۲ و ۵ دارد بقیه مهم نیستند.)

حالا ب.م.م $(x^۲, ۱۰۰۰۰۰)$ را پیدا می‌کنیم: $(x^۲, ۱۰۰۰۰۰) = (۲^۴ \times ۵^{۲\alpha}, ۲^۵ \times ۵^۵)$

خب در توان‌های ۲ که کار مشخص است چون $۲^۴$ و $۲^۵$ داریم که مینیمم $۲^۴$ می‌شود. اما در مورد توان‌های ۵ باید ۲ حالت در نظر بگیریم.

$$\alpha = ۲ \Rightarrow (۲^۴ \times ۵^{۲\alpha}, ۲^۵ \times ۵^۵) = (۲^۴ \times ۵^۴, ۲^۵ \times ۵^۵) = ۲^۴ \times ۵^۴ = ۱۰۰۰۰$$

$$\alpha = ۳ \Rightarrow (۲^۴ \times ۵^{۲\alpha}, ۲^۵ \times ۵^۵) = (۲^۴ \times ۵^۶, ۲^۵ \times ۵^۵) = ۲^۴ \times ۵^۵ = ۵۰۰۰۰$$

تست **اگر $(n, ۲۱) = ۷$ باشد، فرم کلی n برحسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$ کدام است؟**

۱) $n = ۷k$ ۲) $n = ۲۱k + ۷$

۳) $n = ۲۱k + ۱۴$ یا $n = ۲۱k + ۷$ ۴) $n = ۱۴k + ۷$ یا $n = ۲۱k + ۷$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** با توجه به این‌که $(n, ۳ \times ۷) = ۷$ پس n عامل ۳ ندارد ولی بر ۷ بخش‌پذیر است؛ یعنی $n = ۷q$ ولی q بر ۳ بخش‌پذیر نیست بنابراین q یا به صورت $۳k + ۱$ است یا به صورت $۳k + ۲$، پس: $n = ۷(۳k + ۱) = ۲۱k + ۷$ یا $n = ۷(۳k + ۲) = ۲۱k + ۱۴$

تست **به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵۰ مانند n دو عدد $n - ۳$ و $n^۲ + ۳n + ۱$ نسبت به هم اول‌اند؟ $(n \in \mathbb{N})$**

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۴۹

پاسخ **گزینهٔ «۱»** **روش اول:** ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. با توجه به ویژگی اول ب.م.م داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n - ۳ \xrightarrow{\times n} d \mid n^۲ - ۳n \\ \text{رابطهٔ صورت سؤال}: d \mid n^۲ + ۳n + ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d \mid ۶n + ۱$$

حالا دوباره:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n - ۳ \xrightarrow{\times ۶} d \mid ۶n - ۱۸ \\ d \mid ۶n + ۱ \Rightarrow d \mid ۶n + ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d \mid ۱۹ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۱۹$$

می‌خواهیم ب.م.م ۱ باشد؛ بنابراین حالت‌هایی که ب.م.م ۱۹ است قابل قبول نیست. بنابراین باید حالت‌هایی که عددها بر ۱۹ بخش‌پذیرند را پیدا کرده از کل عددها کم کنیم.

$$n - ۳ = ۱۹k \Rightarrow n = ۱۹k + ۳ < ۱۵۰ \Rightarrow ۰ \leq ۱۹k < ۱۴۷ \Rightarrow ۰ \leq k < ۷/... \Rightarrow k = ۰, ۱, ۲, ..., ۷$$

یعنی به ازای ۸ عدد ب.م.م برابر ۱۹ می‌شود پس به ازای $۱۴۲ = ۷ - ۱۴۹$ عدد ب.م.م برابر ۱ است و دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

(حواستون باشه: $[a, ۰] = |a|$*)*

روش دوم: در این نوع سؤال‌ها هم می‌شود ریشهٔ یکی از عبارت‌ها را در دیگری قرار داد. در این صورت d آن مقدار را عاد می‌کند:

$$n - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{جاگذاری در عبارت دیگر}} ۳^۲ + ۳ \times ۳ + ۱ = ۱۹ \Rightarrow d \mid ۱۹$$

و بقیهٔ پاسخ مثل روش اول است.

روش نردبانی برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد: گفتیم بهترین روش پیداکردن ب.م.م تجزیهٔ دو عدد و ضرب‌کردن عوامل مشترک با توان کوچک‌تر در هم است. اما گاهی عددها خوب تجزیه نمی‌شوند. در این صورت می‌توانیم از روش نردبانی ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم. در این روش از جدول زیر استفاده می‌کنیم. سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر دوم مربوط به دو عدد و سطر سوم مخصوص باقی‌مانده‌هاست. عددها را به ترتیب نزولی در سطر وسط قرار می‌دهیم و بر هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در سطر بالایی و باقی‌مانده را در سطر پایینی می‌گذاریم. اگر باقی‌مانده صفر بود، عدد آخر ب.م.م است وگرنه باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل می‌کنیم و دوباره الگوریتم را تکرار می‌کنیم.

برای درک بهتر به تست زیر نگاه کنید:

تست **مجموع ارقام بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد ۴۳۷ و ۲۵۳ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»** چون تجزیهٔ عددها آسان نیست، برای پیداکردن ب.م.م از روش نردبانی استفاده می‌کنیم:

۱) اول ۴۳۷ را بر ۲۵۳ تقسیم می‌کنیم:

۴۳۷ | ۲۵۳
۲۵۳   ۱
۱۸۴ → باقی‌مانده می‌رود سطر وسط

q	۱	۱	۲	۱	۲
۴۳۷	۲۵۳	۱۸۴	۶۹	۴۶	۲۳
r	۱۸۴	۶۹	۴۶	۲۳	۰

۲) حالا ۲۵۳ را بر ۱۸۴ تقسیم می‌کنیم:

۲۵۳ | ۱۸۴
$-$۱۸۴   ۱
۶۹ → باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط

۳) حالا ۱۸۴ را بر ۶۹ تقسیم می‌کنیم:

۱۸۴ | ۶۹
$-$۱۳۸   ۲
۴۶ → باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط

۴) ۶۹ را بر ۴۶ تقسیم می‌کنیم:

۶۹ | ۴۶
$-$۴۶   ۱
۲۳

۵) ۴۶ بر ۲۳ بخش‌پذیر است پس ب.م.م ۲۳ است.

$۲+۳=۵$

کوچک‌ترین مضرب‌مشترک

c را کوچک‌ترین مضرب‌مشترک دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم: $[a,b]=c$

هرگاه:

۱ $a\mid c$ و $b\mid c$ *(یعنی c بر هر دوتا عددها بخش‌پذیره!)*

۲ $\forall m>۰; a\mid m, b\mid m \Rightarrow \begin{cases} c\le m \\ c\mid m \end{cases}$ *(این ویژگی تضمین می‌کنه c کوچک‌ترینه!)*

یادتان هست کمی قبل ب.م.م دو عدد ۳۰ و ۴۵ را پیدا کردیم؟ الان ک.م.م‌شان را پیدا می‌کنیم:

مجموعهٔ مضارب طبیعی ۳۰ = $\{۳۰,۶۰,۹۰,۱۲۰,۱۵۰,۱۸۰,۲۱۰,...\}$

مجموعهٔ مضارب طبیعی ۴۵ = $\{۴۵,۹۰,۱۳۵,۱۸۰,۲۲۵,...\}$

مجموعهٔ مضارب مشترک ۳۰ و ۴۵ = $\{۹۰,۱۸۰,۲۷۰,...\}$

اما خب واضح است که این راه خوبی نیست. برای پیداکردن ک.م.م دو یا چند عدد بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

حواستون باشه! برای پیداکردن ک.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

برای مثال:

$$[۳۰,۴۵]=[۲\times۳\times۵,۳^{۲}\times۵]=۲\times۳^{۲}\times۵=۹۰$$

$$[۵۴,۶۰]=[۲\times۳^{۳},۲^{۲}\times۳\times۵]=۲^{۲}\times۳^{۳}\times۵=۵۴۰$$

تست **اگر $[a,۲۰]=۱۲۰$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟**

۱) a بر ۸ بخش‌پذیر است اما بر ۱۶ بخش‌پذیر نیست.
۲) a بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.
۳) a بر ۵ بخش‌پذیر است اما بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.
۴) کوچک‌ترین مقدار طبیعی a دورقمی است.

پاسخ **گزینهٔ «۳»** داریم:

$$[a,۲^{۲}\times۵]=۲^{۳}\times۳\times۵$$

در ک.م.م $۲^{۳}$ داریم پس a حتماً بر $۲^{۳}$ بخش‌پذیر است اما بر $۲^{۴}$ بخش‌پذیر نیست به دلیل این‌که در آن صورت در ک.م.م هم $۲^{۴}$ می‌آمد پس گزینهٔ (۱) درست است.

a حتماً عامل ۳ دارد چون ۳ در ک.م.م آمده اما بر ۹ نمی‌تواند بخش‌پذیر باشد. چون در آن صورت در ک.م.م هم $۳^۲$ می‌آمد پس گزینهٔ (۲) درست است.
چون $۵ \times ۲^۲ = ۲۰$ و در ک.م.م هم فقط یک عامل ۵ وجود دارد، پس a ممکن است اصلاً بر ۵ بخش‌پذیر نباشد پس گزینهٔ (۳) درست نیست.
(البته ممکنه یه ۵ داشته باشه اما نمی‌تونیم بگیم حتماً ۵ داره!)
a دارای دست کم ۳ عامل ۲ و یک عامل ۳ است پس $a_{min} = ۲^۳ \times ۳ = ۲۴$ پس گزینهٔ (۴) درست است.

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

(اگه دوتا عدد داشته باشیم که یکی اون یکی رو عاد می‌کنه ب.م.م می‌شه اونی که قدرمطلقش کوچک‌تره و ک.م.م می‌شه اون یکی.)

۱ $a \mid b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$

(علامت منفی تو ب.م.م و ک.م.م هیچ تأثیری نداره.)

۲ $\begin{cases}(a,b)=(a,-b)=(-a,b)=(-a,-b)\\ [a,b]=[a,-b]=[-a,b]=[-a,-b]\end{cases}$

(هرجا تونستی فاکتور بگیری بگیر!)

۳ $\begin{cases}(ka,kb)=|k|(a,b)\\ [ka,kb]=|k|[a,b]\end{cases}$

۴ $(a,b)=d \Rightarrow (a,b\pm ak)=d$

(اگه هر مضربی از یکی از عددها رو به اون یکی اضافه و یا ازش کم کنیم ب.م.م تغییری نمی‌کنه.)
برای مثال $[۳۰,۴۵] = [۳۰,۴۵+۲\times ۳۰] = [۳۰-۳\times ۴۵,۴۵] = ۹۰$

۵ $(a,b)[a,b]=|ab|$

(ضرب ب.م.م دوتا عدد تو ک.م.م‌شون می‌شه قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد.)
برای مثال:

$$\begin{matrix}(۳۰,۴۵)=۱۵\\ [۳۰,۴۵]=۹۰\end{matrix} \Rightarrow ۳۰\times ۴۵ = ۱۵\times ۹۰$$

تست حاصل $((a,[a,b]),[a^۲,(a,b)])$ کدام است؟

۱) (a,b) ۲) a ۳) $[a,b]$ ۴) $|a|$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** یک چیزی را همیشه یادتان باشد، ک.م.م دو تا عدد بر هر دو عدد بخش‌پذیر است و هر دو عدد بر ب.م.م‌شان بخش‌پذیرند. حالا برویم سراغ حل سؤال:

$$\left.\begin{matrix} a\mid [a,b] \Rightarrow (a,[a,b])=|a| \\ (a,b)\mid a, a\mid a^۲ \Rightarrow (a,b)\mid a^۲ \Rightarrow [a^۲,(a,b)]=a^۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (|a|,a^۲)=|a|$$

حواستان باشد ممکن است a منفی باشد، پس گزینهٔ (۲) همیشه درست نیست.

تست اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشند، حاصل $(۷a+۴b,۵a+۳b)$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۱ یا ۷

پاسخ **گزینهٔ «۱»** برای پاسخ‌گویی از آن ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که $(a,b)=d \Rightarrow (a,b\pm ak)=d$.
یعنی هر مضربی از یکی را می‌توان به دیگری اضافه یا از آن کم کرد.
۱) عبارت سمت راست را نگه می‌داریم و عبارت سمت چپ را منهای عبارت سمت راست می‌کنیم.

$$(۷a+۴b,۵a+۳b) = ((۷a+۴b)-(۵a+۳b),۵a+۳b) = (۲a+b,۵a+۳b)$$

۲) حالا عبارت سمت چپ را نگه می‌داریم و عبارت سمت راست را منهای دو برابر عبارت سمت چپ می‌کنیم:

$$=(۲a+b,(۵a+۳b)-۲(۲a+b)) = (۲a+b,a+b)$$

۳) حالا راستی را نگه می‌داریم و چپی را منهای راستی می‌کنیم: $(۲a+b-(a+b),a+b)=(a,a+b)$

۴) و بالأخره a را نگه می‌داریم و $a+b$ را منهای a می‌کنیم: $(a,a+b)=(a,a+b-a)=(a,b)=۱$

روش دوم: این سؤال را می‌توان با نکتهٔ زیر نیز حل کرد:

- اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a,b)=d$ باشد، آن‌گاه اگر x، y، z و t اعداد صحیح باشند، داریم:

$$(xa+yb,za+tb) \,\Big|\, \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} d$$

حال برای حل سؤال داریم:

$$(۷a+۴b,۵a+۳b) \,\Big|\, \begin{vmatrix} ۷ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix} \times ۱ \Rightarrow (۷a+۴b,۵a+۳b) \mid ۱ \Rightarrow (۷a+۴b,۵a+۳b)=۱$$

تست حاصل $(۲۰m+۲,۳۰m+۸)$ کدام است؟

۱) همواره ۲ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۲ یا ۱۰ ۴) همواره ۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اول از همه خوب است از یک ۲ فاکتور بگیریم:

$$(۲۰m+۲,۳۰m+۸)=۲(۱۰m+۱,۱۵m+۴)$$

حالا فرض می‌کنیم $(۱۰m+۱,۱۵m+۴)=d$ باشد، در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} d\,|\,۱۰m+۱ \xrightarrow{\times ۳} d\,|\,۳۰m+۳ \\ d\,|\,۱۵m+۴ \xrightarrow{\times ۲} d\,|\,۳۰m+۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۵ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۵$$

اما دقت کنید d نمی‌تواند برابر ۵ باشد چون $۱۰m+۱$ و $۱۵m+۴$ نمی‌توانند بر ۵ بخش‌پذیر باشند پس فقط $d=۱$ قابل قبول است و چون از یک ۲ فاکتور گرفته بودیم پاسخ همواره ۲ است.

متباین‌سازی

در سؤال‌های متباین‌سازی معمولاً دو رابطه (گاهی هم یک رابطهٔ ترکیبی) از ب.م.م، ک.م.م، مجموع یا حاصل‌ضرب دو عدد داده می‌شود و باید عددها را پیدا کنیم.

نکتهٔ کلیدی پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها نکتهٔ زیر است:

$$(a,b)=d \xrightarrow{\div d} (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

$\frac{a}{d}$ را a' و $\frac{b}{a}$ را b' می‌نامیم، بنابراین:

۱ $\frac{a}{d}=a' \Rightarrow a=a'd$

۲ $\frac{b}{d}=b' \Rightarrow b=b'd$

۳ $(a',b')=۱$

حالا در این سؤال‌ها هر چیزی به ما بدهند را برحسب d، b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

۴ $[a,b]=[a'd,b'd]=d[a',b']=a'b'd$

۵ $a+b=a'd+b'd=d(a'+b')$

۶ $ab=(a'd)(b'd)=a'b'd^۲$

حالا سؤال‌های زیر را حل کنید تا با ایده‌های متباین‌سازی بیشتر آشنا شوید:

تست اگر $(a,b)=۷$ و $a+b=۵۶$ باشد، حداکثر $[a,b]$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۸۴ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$(a,b)=۷ \Rightarrow d=۷$$

$$a+b=۵۶ \Rightarrow d(a'+b')=۵۶ \Rightarrow a'+b'=۸$$

۱	۷	✓
۲	۶	×
۳	۵	✓
۴	۴	×

دقت کنید $(a',b')=۱$ است پس دو حالت قابل قبول نیست. حالا می‌خواهیم $[a,b]$ حداکثر شود پس باید حالتی را در نظر بگیریم که حاصل‌ضرب $a'b'$ بیشتر شود، پس ۵ و ۳ را در نظر می‌گیریم:

$$[a,b]=a'b'd=۵\times۳\times۷=۱۰۵$$

تست اگر $a+b=۱۱۷$ و $[a,b]=۲۶۰$ باشد، کدام گزینه درست است؟ $(a>b)$

۱) $a-b$ زوج است. ۲) $a-b$ مضرب ۳ است. ۳) $a-b$ عددی اول است. ۴) a و b دو عدد متوالی‌اند.

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$a+b=۱۱۷ \Rightarrow d(a'+b')=۱۱۷ \quad (I)$$

$$[a,b]=۲۶۰ \Rightarrow a'b'd=۲۶۰ \quad (II)$$

با تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{(I)}{(II)}=\frac{(a'+b')d}{a'b'd}=\frac{۱۱۷}{۲۶۰}$$

d را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\frac{a'+b'}{a'b'}=\frac{۹}{۲۰} \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=۹ \\ a'b'=۲۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{وقتی } a>d \text{ پس } a'>b' \text{ می‌شود.}} a'=۵,b'=۴$$

با جای‌گذاری در یکی از رابطه‌ها d هم پیدا می‌شود. هر چند وقتی طرفین $\frac{۱۱۷}{۲۶۰}$ را به ۱۳ ساده کردیم، معلوم بود $d=۱۳$ است، ولی با این حال:

$$a'b'd=۲۶۰ \Rightarrow ۵\times۴\times d=۲۶۰ \Rightarrow d=۱۳ \Rightarrow a=۶۵,b=۵۲ \Rightarrow a-b=۱۳$$

اعداد اول

اعداد اول را که همه می‌دانند چیست! عددهایی هستند که در میان اعداد طبیعی فقط بر خودشان و ۱ بخش‌پذیر باشند. همین اول کار دوتا تست ببینید تا بعد نکته‌هایش را با هم مرور کنیم:

تست **اگر a,b,c سه عدد اول باشند به طوری که $a<b<c$ و $a+b+c=۲۰۶$ باشد، مجموع ارقام $a^۲b+a^۲c$ کدام است؟**

۱) ۱۲　　۲) ۱۳　　۳) ۱۴　　۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** می‌دانیم همهٔ عددهای اول به‌جز ۲ فردند. از طرفی مربع سه عدد فرد، عددی فرد می‌شود اما این‌جا $a+b+c$ زوج است. پس یکی از آن‌ها حتماً زوج است و چون هر سه اول‌اند، کوچک‌ترین آن‌ها یعنی $a=۲$ است. حالا:

$$a+b+c=۲۰۶ \Rightarrow ۲+b+c=۲۰۶ \Rightarrow b+c=۲۰۴$$

$$a^۲b+a^۲c=a^۲(b+c)=۴\times(۲۰۴)=۸۱۶ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۸+۱+۶=۱۵$$

تست **اگر a و b دو عدد طبیعی و p عددی اول باشد به طوری که $a^۲=p+b^۲$ و $ab=۴۲۰$ باشد، $۲a+۳b$ کدام است؟**

۱) ۱۰۱　　۲) ۱۰۲　　۳) ۱۰۳　　۴) ۱۰۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

$$a^۲=p+b^۲ \Rightarrow a^۲-b^۲=p \Rightarrow (a-b)(a+b)=p$$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی ۱ و دیگری p است.

$$\begin{cases}a-b=۱\\a+b=p\end{cases} \Rightarrow a=\frac{p+۱}{۲},b=\frac{p-۱}{۲} \Rightarrow ab=\frac{p^۲-۱}{۴}=۴۲۰$$

$$\Rightarrow p^۲-۱=۱۶۸۰ \Rightarrow p^۲=۱۶۸۱ \Rightarrow p=۴۱$$

$$\Rightarrow a=\frac{۴۱+۱}{۲}=۲۱,b=\frac{۴۱-۱}{۲}=۲۰ \Rightarrow ۲a+۳b=۲\times۲۱+۳\times۲۰=۱۰۲$$

چند نکته در مورد اعداد اول

۱ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

$$\left.\begin{array}{l}۶k \Rightarrow \text{زوج}\\ ۶k+۱\\ ۶k+۲ \Rightarrow \text{زوج}\\ ۶k+۳ \Rightarrow \text{مضرب ۳}\\ ۶k+۴ \Rightarrow \text{زوج}\\ ۶k+۵\end{array}\right\} \Rightarrow p=۶k+۱ \text{ یا } ۶k+۵$$

یا برای راحتی کار $p=۶k\pm۱$.

۲ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $p>۳ \Rightarrow p^۲=۲۴k+۱$

۳ هیچ‌کدام از عددهای بزرگ‌تر از $n!+۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $n!+n$ اول نیستند. برای مثال همهٔ عددهای بزرگ‌تر از $۲۰!+۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $۲۰!+۲۰$ مرکب‌اند. برای مثال $۲۰!+۱۳=۲۰\times۱۹\times\cdots\times۱۳\times\cdots\times۲\times۱+۱۳$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a\,|\,bc$ و $(a,c)=۱$ باشند آن‌گاه $a\,|\,b$. این هم واضح است؛ فرض کنید $a\,|\,۳b$ و $(a,۳)=۱$ باشد. الان باید کسر $\frac{۳b}{a}$ عددی صحیح شود، a را که با ۳ نمی‌شود ساده کرد، پس b باید بر a بخش‌پذیر باشد یا $a\,|\,b$.

۵ تعداد اعداد اول نامتناهی است.

تست **حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقدار $n\in\mathbb{N}$ عدد اول نمی‌شود؟**

۱) $۵n+۱$　　۲) $n^۳-۸$　　۳) $n^۲-۵n+۸$　　۴) $n^۳+۲۷$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** $۵n+۱$ که مشخص است به ازای عددهای زیادی اول می‌شود، برای مثال اگر $n=۲$ باشد، $۵n+۱=۱۱$ می‌شود. پس گزینهٔ (۱) پاسخ سؤال نیست.

$$n^۳-۸=(n-۲)(n^۲+۲n+۴)$$

این عبارت حاصل‌ضرب دو عدد مختلف است و به نظر می‌رسد ضرب دو عدد هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود اما اگر $n=۳$ باشد، $n-۲=۱$ و $n^۲+۲n+۴=۱۹$ می‌شود و حاصل اول است. پس گزینهٔ (۲) نیز پاسخ سؤال نیست.

اگر n فرد باشد، $n^۲$ و $۵n$ هر دو فرد می‌شوند؛ پس $n^۲-۵n+۸$ زوج می‌شود. اگر n زوج باشد نیز $n^۲-۵n+۸$ همواره زوج است؛ اما ممکن است حاصل برابر ۲ شود که یک عدد اول است.

اگر بررسی کنیم، داریم:

$$n^۲-۵n+۸=۲ \Rightarrow n^۲-۵n+۶=۰ \Rightarrow (n-۳)(n-۲)=۰ \Rightarrow n=۳$$

یعنی به ازای $n=۳$ حاصل برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. پس گزینهٔ (۳) نیز پاسخ سؤال نیست.

حاصل $n^۳+۲۷$ ولی هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود زیرا:

$$n^۳+۲۷=(n+۳)(n^۲-۳n+۹)$$

حاصل‌ضرب دو عدد است که هیچ‌کدام به ازای هیچ مقدار طبیعی n برابر ۱ نمی‌شود. بنابراین ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ است که هیچ‌گاه اول نیست.

تست اگر p عددی اول باشد، به ازای چند مقدار p عبارت $p^۴+p^۲+۱$ عددی اول می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** گفتیم مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $۲۴k+۱$ نوشت، بنابراین:

$p=۲ \Rightarrow p^۴+p^۲+۱=۱۶+۴+۱=۲۱$ اول نیست.

$p=۳ \Rightarrow p^۴+p^۲+۱=۸۱+۹+۱=۹۱$ اول نیست.

$p>۳ \Rightarrow (۲۴k+۱)^۲+۲۴k+۱+۱=(۲۴k)^۲+۷۲k+۳$ همواره مضرب ۳ است بنابراین اول نیست.

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b اگر q خارج قسمت و r باقی‌مانده باشد، داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \\ r & \end{array}$$

مقسوم ← a ، مقسوم‌علیه ← b ، خارج قسمت ← q ، باقی‌مانده ← r

$a=bq+r$ و $۰\le r<b$

تست در تقسیم عدد a بر b اگر ۲۲۱ واحد به a اضافه شود، خارج قسمت و باقی‌مانده هر کدام m واحد اضافه می‌شوند، b کدام است؟ $(m>۱)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) نمی‌توان گفت.

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$a=bq+r \ \ (I)$ و $۰\le r<b$

$a+۲۲۱=b(q+m)+(r+m) \ \ (II)$ و $۰\le r+m<b$

حالا اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم: $(II)-(I):۲۲۱=mb+m \Rightarrow ۲۲۱=m(b+۱) \Rightarrow ۱۳\times۱۷=m(b+۱)$

با توجه به شرط باقی‌مانده می‌دانیم $b>m$ است، پس $m=۱۳$ و $b+۱=۱۷$ و در نتیجه $b=۱۶$ است.

تست چند عدد دورقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۹ خارج قسمت آن مضرب ۴ و باقی‌ماندهٔ آن مضرب ۵ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** عدد را a فرض می‌کنیم، چون خارج قسمت مضرب ۴ است، آن را ۴q فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & ۹ \\ \hline & ۴q \\ r & \end{array} \Rightarrow a=۳۶q+r, ۰\le r<۹$$

باقی‌مانده مضرب ۵ است، پس باقی‌مانده یا صفر است یا ۵. در هر دو حالت عددهای دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$\Rightarrow a=۳۶q \Rightarrow a=۳۶,۷۲$ یا $a=۳۶q+۵ \Rightarrow a=۴۱,۷۷$

تست در تقسیم عددهای a و b بر ۱۴ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۲ و ۱۱ و خارج قسمت‌ها q و q' اند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۶a+۳b$ بر ۲۱ برابر .... و خارج قسمت آن برابر .... است.

۱) ۱ و $۲q+q'+۱$ ۲) ۱ و $۴q+۲q'+۲$ ۳) ۳ و $۲q+q'+۱$ ۴) ۳ و $۴q+۲q'+۲$

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$\left.\begin{array}{l} a=۱۴q+۲ \xrightarrow{\times۶} ۶a=۸۴q+۱۲ \\ b=۱۴q'+۱۱ \xrightarrow{\times۳} ۳b=۴۲q'+۳۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۶a+۳b=۸۴q+۴۲q'+۴۵$$

$$=۲۱(۴q+۲q')+\underbrace{۴۵}_{۲۱\times۲+۳}=۲۱(۴q+۲q'+۲)+۳$$

در سؤال‌های بخش‌پذیری گاهی لازم می‌شود باقی‌ماندهٔ یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت پیدا کنیم. دو روش برای انجام این کار وجود دارد. فرض کنید a عددی منفی است و می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر عدد b به دست آوریم:

۱ می‌توانیم اول خارج قسمت را با دستور $q=[\frac{a}{b}]$ پیدا کنیم و سپس باقی‌مانده را از رابطهٔ $r=a-bq$ به دست آوریم.

۲ باقی‌ماندهٔ $|a|$ را بر b پیدا کنیم و آن را r' می‌نامیم. در این صورت باقی‌ماندهٔ a بر b برابر است با: $r=b-r'$

برای مثال اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ ۲۸− را بر ۵ به دست آوریم داریم:

روش اول:

$$q=\left[\frac{-۲۸}{۵}\right]=[-۵/۶]=-۶ \Rightarrow r=-۲۸-۵\times-۶=۲$$

روش دوم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۸ & ۵ \\ \hline -۲۵ & ۵ \\ ۳ & \end{array} \Rightarrow r'=۳ \Rightarrow r=۵-۳=۲$$

تست اگر $a=۱۵q+۱۳$ باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $۴a-۹۳$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) ۱ و $۳q-۲$ ۲) ۱ و $۳q-۳$ ۳) ۱۹ و $۳q-۲$ ۴) ۱۹ و $۳q-۳$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** $a=۱۵q+۱۳ \Rightarrow ۴a-۹۳=۴(۱۵q+۱۳)-۹۳=۶۰q-۴۱$

برای پیداکردن باقی‌مانده توجه کنید $۶۰q$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است، پس باید باقی‌ماندهٔ ۴۱− را بر ۲۰ پیدا کنیم:

برای این کار از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۲۰ \\ \underline{۴۰} & ۲ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow r=۲۰-۱=۱۹$$

و برای خارج قسمت: $[\frac{۶۰q-۴۱}{۲۰}]=[۳q-۲/۰۵]=۳q-۳$

تست اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ برابر ۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a+۱$ بر ۳۰ حداکثر برابر چند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»** باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۵ برابر ۱ است؛ بنابراین: $a=۵q+۱ \Rightarrow ۲a+۱=۱۰q+۳$

حالا می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ $۲a+۱$ را بر ۳۰ به دست آوریم، بنابراین باید q را در سه حالت بررسی کنیم: $q=۳k \Rightarrow ۲a+۱=۳۰k+۳ \Rightarrow r=۳$

$q=۳k'+۱ \Rightarrow ۲a+۱=۱۰(۳k'+۱)+۳=۳۰k'+۱۳ \Rightarrow r=۱۳$

$q=۳k''+۲ \Rightarrow ۲a+۱=۱۰(۳k''+۲)+۳=۳۰k''+۲۳ \Rightarrow r=۲۳$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم به ۴۲ باقی‌ماندهٔ آن $\frac{۳}{۴}$ مربع خارج قسمت آن باشد، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$\begin{array}{r|l} a & ۴۲ \\ - \quad \underline{} & q \\ \frac{۳}{۴}q^۲ & \end{array} \Rightarrow a=۴۲q+\frac{۳}{۴}q^۲ , ۰\le \frac{۳}{۴}q^۲<۴۲ \Rightarrow ۰\le q^۲<۵۶ \Rightarrow q_{max}=۷$$

اما q باید زوج باشد وگرنه باقی‌مانده عدد صحیح نمی‌شود پس $q_{max}=۶$.

بنابراین: $a_{max}=۴۲\times ۶+\frac{۳}{۴}\times ۶^۲=۲۵۲+۲۷=۲۷۹ \Rightarrow$ مجموع ارقام $=۲+۷+۹=۱۸$

تست باقی‌ماندهٔ a بر ۱۲ و ۷ به ترتیب برابر ۱۱ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ a بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۳»** باید دو رابطه را در عددهایی ضرب کنیم که خارج قسمت جدید مضرب ۴۲ باشد و وقتی آن دو را از هم کم می‌کنیم اختلاف یکی شود:

$a=۱۲q+۱۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۸۴q+۷۷$

$a=۷q'+۵ \xrightarrow{\times ۶} ۶a=۴۲q'+۳۰$

$\xrightarrow[\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم.}]{(-)} ۷a-۶a=۸۴q+۷۷-۴۲q'-۳۰ \Rightarrow a=۴۲(۲q-q')+\underbrace{۴۷}_{۴۲+۵}$

واضح است که باقی‌ماندهٔ عبارت بر ۴۲ برابر ۵ است.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم

عددهای صحیح در تقسیم به ۲، دو حالت دارند: یا زوج‌اند یا فرد. بنابراین مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ در تقسیم به ۲ به دو مجموعه افراز می‌شود:

$\mathbb{Z}$

عددهای فرد یا $۲k+۱$	عددهای فرد یا $۲k$

با همین استدلال در تقسیم به m مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m مجموعه افراز می‌شود.

$\mathbb{Z}$

mk	$mk+۱$	$mk+۲$	...	$mk+m-۱$

برای مثال در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ دستهٔ زیر افراز می‌شود:

$\mathbb{Z}$

$۵k$	$۵k+۱$	$۵k+۲$	$۵k+۳$	$۵k+۴$
مضرب ۵	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارند.

تست **باقی‌ماندهٔ یک عدد اول بزرگ‌تر از ۱۱ در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در تقسیم به ۱۲ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعهٔ زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم در کدام حالت‌ها عدد نمی‌تواند اول باشد.

$۱۲k$	زوج	$۱۲k+۴$	زوج	$۱۲k+۸$	زوج
$۱۲k+۱$		$۱۲k+۵$		$۱۲k+۹$	مضرب ۳
$۱۲k+۲$	زوج	$۱۲k+۶$	زوج	$۱۲k+۱۰$	زوج
$۱۲k+۳$	مضرب ۳	$۱۲k+۷$		$۱۲k+۱۱$	

پس باقی‌ماندهٔ یک عدد اول در تقسیم به ۱۲ می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

تست **چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰ وجود دارد به طوری که وقتی در تقسیم به ۳ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۳ دسته افراز می‌شود، این عددها در دستهٔ $۳k+۱$ و وقتی در تقسیم به ۴ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۴ دسته افراز می‌شود، این عددها در دستهٔ $۴k+۲$ قرار گیرند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** عددهای کوچک‌تر از ۳۰ دستهٔ $۳k+۱$ و $۴k+۲$ را مشخص کرده اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\{x=۳k+۱ : k\in\mathbb{Z}, x<۳۰\}=\{۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸\}$$

$$\{x=۴k+۲ : k\in\mathbb{Z}, x<۳۰\}=\{۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸,۲۲,۲۶\}$$

همان‌طور که می‌بینید تنها عددهای مشترک ۱۰ و ۲۲ هستند.

تست **اگر a مضرب ۵ نباشد، باقی‌ماندهٔ $۳a^۲+۱$ در تقسیم به ۵ کدام است؟**

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۱ یا ۴ ۳) ۳ یا ۴ ۴) ۲ یا ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ دسته افراز می‌شود، چون عدد a مضرب ۵ نیست پس آن را به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$a=۵k+۱$ $a=۵k+۲$ $a=۵k+۳$ $a=۵k+۴$

در هر حالت $۳a^۲+۱$ را پیدا کرده باقی‌ماندهٔ آن را به ۵ به دست می‌آوریم:

$$a=۵k+۱ \Rightarrow ۳a^۲+۱=۳(۵k+۱)^۲+۱=\underbrace{۷۵k^۲+۳۰k}_{\text{مضرب ۵}}+۴ \Rightarrow r=۴$$

$$a=۵k+۲ \Rightarrow ۳a^۲+۱=۳(۵k+۲)^۲+۱=\underbrace{۷۵k^۲+۶۰k}_{\text{مضرب ۵}}+۱۳ \Rightarrow r=۳$$

$$a=۵k+۳ \Rightarrow ۳a^۲+۱=۳(۵k+۳)^۲+۱=\underbrace{۷۵k^۲+۹۰k}_{\text{مضرب ۵}}+۲۸ \Rightarrow r=۳$$

$$a=۵k+۴ \Rightarrow ۳a^۲+۱=۳(۵k+۴)^۲+۱=\underbrace{۷۵k^۲+۱۲۰k}_{\text{مضرب ۵}}+۴۹ \Rightarrow r=۴$$

پس باقی‌مانده برابر ۳ یا ۴ است.

این سؤال را در فصل بعد و با همنهشتی خیلی راحت‌تر می‌شود حل کرد اما اگر در همین فصل هم می‌خواهید ساده‌تر به سؤال پاسخ دهید به جای کل عبارت می‌توانید فقط باقی‌مانده‌ها را جای‌گذاری کنید:

$$r=۱ \Rightarrow ۳\times ۱^۲+۱=۴ \qquad r=۲ \Rightarrow ۳\times ۲^۲+۱=۱۳ \Rightarrow r=۳$$

$$r=۳ \Rightarrow ۳\times ۳^۲+۱=۲۸ \Rightarrow r=۳ \qquad r=۴ \Rightarrow ۳\times ۴^۲+۱=۴۹ \Rightarrow r=۴$$

تست **اگر a مضرب ۵ باشد و زوج نباشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۲۰ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** a مضرب ۵ است پس $a=۵k$ است. می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر ۲۰ به دست آوریم. پس مجبوریم k را در ۴ حالت فرض کنیم که عامل ۲۰ به وجود بیاید. اما چون گفته k زوج نیست پس k یا به صورت $۴q+۱$ است یا $۴q+۳$ بنابراین:

$$k=۴q+۱ \Rightarrow a=۲۰q+۵ \Rightarrow r=۵ \qquad k=۴q+۳ \Rightarrow a=۲۰q+۱۵ \Rightarrow r=۱۵$$

پس باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۵ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

عادکردن

۴۱- چند عدد از مجموعهٔ $\{31,32,33,\ldots,88,89\}$ مضرب ۳ و زوج است؟

۱) ۸　۲) ۹　۳) ۱۰　۴) ۱۱

۴۲- به ازای چند مقدار صحیح a، روابط $a\,|\,(b+5)^2$ و $a\,|\,(b+6)(b+4)$ برقرارند؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۱

۴۳- اگر $a\,|\,b$، کدام‌یک از نتایج زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

۱) $a^2\,|\,b^4-2a^2$　۲) $a^2\,|\,(a-b)^2$　۳) $ab\,|\,7b^2-5ab$　۴) $a^2\,|\,b-a^5$

۴۴- برای سه عدد طبیعی a، b و c، اگر $abc\,|\,2ab+3ac$، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

۱) $b\,|\,12c$　۲) $c\,|\,8b$　۳) $a\,|\,2b+3c$　۴) $bc\,|\,2b+3c$

۴۵- از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $a-b\,|\,c^2$　۲) $c\,|\,a+b$　۳) $a+b\,|\,c^2$　۴) $c\,|\,a^4-b^4$

۴۶- اگر $a\,|\,12$ و $12\,|\,b$، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a,b\in\mathbb{N})$

۱) $4\,|\,b$　۲) $a\,|\,2b$　۳) $a\,|\,84$　۴) $2a\,|\,b$

۴۷- اگر $25\,|\,a$ و $a\,|\,550$، آن‌گاه a چند مقدار صحیح می‌تواند بپذیرد؟

۱) ۱۶　۲) ۴　۳) ۶　۴) ۸

۴۸- به ازای چند عدد طبیعی n هر دو رابطهٔ $12\,|\,n^2$ و $n\,|\,3600$ برقرار است؟

۱) ۲۴　۲) ۱۸　۳) ۱۲　۴) ۳۶

۴۹- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=2^n\times3^m$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{18}$، ۱۴ واحد بیشتر است. تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{6}$ چه‌قدر بیشتر است؟

۱) ۱۲　۲) ۱۴　۳) ۱۵　۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد که دارای ۳۰ مقسوم‌علیه طبیعی است، n^2 حداکثر چند مقسوم‌علیه دارد؟

۱) ۵۹　۲) ۸۷　۳) ۹۹　۴) ۱۳۵

۵۱- عدد $10!+24$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است؟

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۷

۵۲- عدد $24!+25!$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۶۹　۲) ۱۹۶　۳) ۲۸۹　۴) ۳۲۴

۵۳- به ازای چند عدد صحیح n، هر دو رابطهٔ $n^3+2\,|\,2n^2+n$ و $2n^2+n\,|\,n^3+2$ برقرار است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۵۴- به ازای چند مقدار صحیح x، $a\,|\,x^2-6x+9$ و $|a|>|x^2-6x+9|$ است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) بی‌شمار

۵۵- اگر $0\,|\,x^3-3x^2+3x-28$ آن‌گاه x چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۵۶- اگر $3^n\,|\,30!$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰　۲) ۱۲　۳) ۱۴　۴) ۱۶

۵۷- برای هر عدد طبیعی n داریم $n!=2^{a_1}\times3^{a_2}\times5^{a_3}\times\cdots$، مقدار $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ به ازای $n=24$ کدام است؟

۱) ۴۳　۲) ۴۴　۳) ۴۵　۴) ۴۶

۵۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $7^{10}\,|\,n!$ باشد کدام است؟

۱) ۴۹　۲) ۵۶　۳) ۶۳　۴) ۷۰

۵۹- به ازای چند عدد طبیعی n رابطهٔ $۸^{n-۱} | ۲^{n+۹}$ درست است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

۶۰- اگر $۱۲ | x^{۲}$، چند عدد سه‌رقمی x وجود دارد؟

۱) ۱۴۹ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۵۱ ۴) ۱۵۲

۶۱- اگر $۱۸۹ | a^{۲}$ و $۵۱۲ | b^{۳}$ در این صورت کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟ $(a,b \in \mathbb{N})$

۱) ۷۱ ۲) ۷۹ ۳) ۹۵ ۴) ۲۹

۶۲- تعداد اعداد ۴ و ۵ رقمی مضرب ۴۸ که مکعب کامل باشند کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰۰} = ۴/۶)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۳- برای دو عدد صحیح a و b $(a \neq ۰)$، اگر $a | b^{۲}$ آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر لزوماً درست است؟

۱) $a^{۳} | b^{۵}$ ۲) $a^{۲} | b^{۵}$ ۳) $a^{۴} | b^{۷}$ ۴) $a^{۷} | b^{۱۲}$

۶۴- اگر $a^{۷} | b^{۱۱}$ و $b^{۷} | c^{۱۱}$ کدام گزینه غلط است؟

۱) $a^{۴} | c^{۱۱}$ ۲) $a^{۳} | b^{۵}$ ۳) $a | c^{۳}$ ۴) $a^{۵} | c^{۱۲}$

۶۵- به ازای چند عدد صحیح مانند a، دو عدد $۴n+۳$ و $۵n+۲$ همواره بر a بخش‌پذیرند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۶- دو عدد $۱۱k+۲$ و $۷k+m$ به ازای مقادیر مختلف k بر عدد صحیح a بخش‌پذیرند. به ازای کدام m، عدد a فقط چهار مقدار صحیح دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۶

۶۷- دو عدد $۲n^{۲}+۳$ و $۳n^{۲}+n+۲$ به ازای برخی از مقادیر n بر عدد d بخش‌پذیرند. d کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۱ ۳) ۳۷ ۴) ۲۳

۶۸- اگر a عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، به گونه‌ای که $a | ۴n-۷$ و $a^{۲} | ۲n-۷$ آن‌گاه چند مقدار برای a وجود دارد؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۹- اگر $۱۱ | ۲a+۳b$، به ازای چند مقدار k از مجموعهٔ $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -۱۱ \leq x \leq ۱۱\}$، رابطهٔ $۱۱ | ۶a+kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰- اگر $۳a+۴b | ۵a+۹b$ آن‌گاه کدام‌یک از اعداد زیر همواره مضرب $۳a+۴b$ است؟

۱) $۸۳a$ ۲) $۱۶۷b$ ۳) $۱۶۷a$ ۴) $۴۲b$

۷۱- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $۷ | ۴k+۱$. اگر $۴۹ | ۱۶k^{۲}+۳۶k+m$، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۲- اگر $۷ | ۳n+۱$، بزرگ‌ترین عددی که عبارت $۳۰n^{۲}+۳۴n+۸$ همواره بر آن بخش‌پذیر است کدام است؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۴۹ ۳) ۹۸ ۴) ۲۸

۷۳- اگر $۱۳ | ۹۳m-۲۵$ کدام گزینه درست است؟

۱) $۱۳ | m-۱$ ۲) $۱۳ | m+۱$ ۳) $۱۳ | ۲m+۱$ ۴) $۱۳ | ۲m-۱$

۷۴- اگر $۷ | ۵m+۳$ و $۱۱ | ۳m+۷$ کدام گزینه درست است؟

۱) $۷۷ | ۱۵m^{۲}-۴۴m+۲۱$ ۲) $۷۷ | ۱۵m^{۲}+۴۴m-۲۱$ ۳) $۷۷ | ۵m^{۲}-۱۱m+۷$ ۴) $۷۷ | ۵m^{۲}+۱۱m-۷$

۷۵- اگر $(x-۱)(x-۲)(x-۳)$ مضرب ۷ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۷۶- اگر $x^{۳}-۷x^{۲}+۱۲x$ مضرب ۹ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x مضرب ۵ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

معادلهٔ عادکردنی

۷۷- روی منحنی $y = \frac{۷x-۱}{۳x-۱}$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۷۸- نقطهٔ (a,b) نقطه‌ای با مختصات طبیعی روی تابع $yx-y=۵x+۳$ است. b کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۹- اگر $n+۲ \mid n^۳-۴n+۳$ آن‌گاه n چند مقدار طبیعی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۰- تعداد مقادیر x و y صحیح که در تابع $y=\frac{x^۳+x+۲}{x+۱}$ صدق می‌کند، چندتاست؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۸۱- به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $n^۲-۲ \mid ۳n+۲$ برقرار است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۸۲- به ازای چند عدد دورقمی n، $۲۴ \mid n^۳-n$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۴۵ ۳) ۵۶ ۴) ۹۰

۸۳- به ازای چند عدد طبیعی دو یا سه‌رقمی مانند n، داریم: $n^۳ \mid ۳^n$؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- اگر a عضوی از مجموعهٔ $A=\{۳^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ باشد، آن‌گاه به ازای چند مقدار a عدد طبیعی مانند k می‌توان یافت به گونه‌ای که رابطهٔ $a \mid k^۲+۳$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

۸۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه $a^۲+۷$ همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۶- اگر x و y اعدادی صحیح از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ باشند، چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $۸y-x^۲=۷$ قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۷- اگر a عددی فرد و p عددی اول باشد و $a \mid p+۲$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a^۲+p^۲+۲$ به ۸ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۵

۸۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+۲)^۲+۸(b-۲)+۱۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۹- اگر p یک عدد فرد باشد، عبارت $p^{۱۶}-۱$ همواره بر ۲^n بخش‌پذیر باشد، حداکثر مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

سه اتحاد مهم در بخش‌پذیری

۹۰- عدد $۳^{۴۸}-۲^{۴۸}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۹ ۲) ۳۵ ۳) ۴۳ ۴) ۶۵

۹۱- عدد $۳^{۲۱}+۷^{۱۴}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی m، $۲۴۴ \mid ۳^m+۱$ برقرار است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۹۳- به ازای چند عدد طبیعی $n\le ۱۲۰۰$، $۳۴۴ \mid ۷^n-۱$ برقرار است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) هیچ مقدار

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، $۳^n-۲^n$ بر ۲۱۱ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۹۵- به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی n، $۳^n+۵^n \mid ۳^{\frac{n(n+۱)}{۷}}-۵^{\frac{n(n+۱)}{۷}}$ برقرار است؟

۱) ۷ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

۹۶- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۳۷۸ و ۴۶۸ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴۸

۹۷- اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $\frac{(۶m^۲,۴m)}{|m|}$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- اگر $a|۲$ حاصل $(۳a^۲,۴۲۰)$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۹۹- اگر $(a,۱۸)\neq ۱$، مجموع مقادیر تک‌رقمی a کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۰۰- اگر $d=(۳n+۲,۳۶)$ باشد؛ بزرگ‌ترین مقدار d چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۱- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی، $(n-۸,۱۱)$ بزرگ‌تر از ۱ می‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۱۰۲- به ازای چند مقدار دورقمی n، رابطهٔ $(n,۳۶)=۱۸$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۳- اگر $(۱۵a,۲۱b)=۱۰۲$ باشد، حاصل (a,b) است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۴

۳) ۱۰۲ ۴) بسته به مقادیر مختلف a و b، هر ۳ گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۱۰۴- اگر $(a,۹)=۳$ و $(b,۹)=۳$ کدام رابطهٔ زیر همواره درست است؟

۱) $(a+b,۹)=۳$ ۲) $(ab,۲۷)=۹$ ۳) $(a+b,۹)=۹$ ۴) $(ab,۲۷)=۲۷$

۱۰۵- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، رابطهٔ $(n,۷۰)=۲$ برقرار است؟

۱) ۴۷ ۲) ۳۳ ۳) ۴۹ ۴) ۳۴

۱۰۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، رابطهٔ $(n,۱۸۰)=۶$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰۷- اگر a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که $(a,۷^۳\times ۳)=۴۹$ باشد و $(b,۳^۴\times ۷)=۲۷$ باشد، اگر حاصل $(a^۲b^۳,۲۱^۵)$ به صورت $۳^x\times ۷^y$ باشد، حاصل xy کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۷۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

۱۰۸- اگر یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه‌ای که $(a,۱۸)=۶$ و $(a,۱۲۱)=۱۱$، آن‌گاه $(a,۲^۲\times ۳^۲\times ۷^۲\times ۱۱^۲)$ به ازای مقادیر مختلف a، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(۵a+۱,۵a+۶)=۱$ ۲) $(۷a+۲,۷a+۹)=۱$ ۳) $(۳a-۱,۳a+۲)=۱$ ۴) $(۲a-۲,۲a+۱)=۱$

۱۱۰- اعداد صحیح a و b به گونه‌ای هستند که $۳|a$ و $۳|b+۱$. کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $(a,b)=۱$ ۲) $(a,b+۱)=۳$ ۳) $(a+b+۱,۳)=۳$ ۴) $(a+b-۱,۳)=۳$

۱۱۱- اگر $(a,b)=d>۱$ و $d|۴a^۲-b+۱۳$، آن‌گاه a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۹ ۳) ۷۲ ۴) ۲۵

۱۱۲- اگر b عددی فرد باشد به طوری که $c|۲a-۳b,(a,b)=۷$، حاصل (b,c) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۷ یا ۱ ۴) $|c|$

۱۱۳- به ازای چند مقدار طبیعی و سه‌رقمی n، دو عدد $۱۳n+۶$ و $۱۵n+۷$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۲۵

۱۱۴- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۳n+۵$ و $۷n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۶۱ ۳) ۹ ۴) ۸۱

۱۱۵- به ازای چند عدد دورقمی n، دو عدد $۲۱n+۱$ و $۱۴n+۳$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۷۷ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

۱۱۶- اگر دو عدد $7n+3$ و $4n+5$ نسبت به هم اول نباشند، کدام نتیجه درست است؟

۱) $11 \mid 7n+12$ ۲) $13 \mid 7n+12$ ۳) $17 \mid 7n+12$ ۴) $19 \mid 7n+12$

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a، دو عدد صحیح $3n+2$ و $an+7$ همواره نسبت به هم اول نیستند؟ $(n \in \mathbb{Z})$

۱) ۱۵ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۶

۱۱۸- به ازای چند عدد دورقمی دو عدد $n+3$ و $5n-2$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۸۵ ۲) ۵ ۳) ۸۴ ۴) ۸۳

۱۱۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n^2+3n$ و $3n+2$ ، برای مقادیر مختلف طبیعی n، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۲۰- دو عدد $B = 2^2 \times 3^6 \times 5^7 \times 7^n \times 13^2$ و $A = 2^5 \times 3^2 \times 5^m \times 7^3 \times 17$ دارای ۵۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر یک هستند. حاصل AB چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۱- اگر برای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $(a,b)=7$ ، حاصل $(2a+3b, 3a+4b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۲۱

۱۲۲- اگر $(a^2, b^2) - (20a, 20b) + 100 = 0$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی x هر دو رابطهٔ $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

کوچک‌ترین‌مضرب‌مشترک

۱۲۳- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} : 28 \mid x, 21 \mid x\}$ چند مقسوم‌علیه غیر اول دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۲۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $([385,186], 341)$

۱) ۷۷ ۲) ۲۱۷ ۳) ۳۴۱ ۴) ۳۳

۱۲۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند n، ک.م.م و ب.م.م دو عدد n^2-7n+9 و ۳ برابر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح m رابطهٔ $[(m, m^2), m^3] = 64$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۷- حاصل $((3a^2, 6a^4), [12a^3, 4a])$ کدام است؟

۱) $3a^2$ ۲) $12a^3$ ۳) $|4a|$ ۴) $|3a|$

۱۲۸- حاصل عبارت $((a,b)[a,b], (a^2,b^2))$ کدام است؟

۱) (a,b) ۲) (a^2,b^2) ۳) $[a,b]$ ۴) $[a^2,b^2]$

۱۲۹- حاصل $[15!-16!, 17!, 18!]$ کدام است؟

۱) $18! \times 15$ ۲) $|5! \times 5|$ ۳) $18! \times 5$ ۴) $18! \times 255$

۱۳۰- به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $[(24,18), m] = 90$ درست است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

۱۳۱- به ازای چند عدد طبیعی m رابطهٔ $[m, 180] = 900$ برقرار است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

متباین‌سازی

۱۳۲- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=7$ و $ab = 1764$ باشد، حاصل‌جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۳۱ ۳) ۳۵۰ ۴) ۳۴۳

۱۳۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=d$ باشد، حاصل $([a^2,b^2], \frac{a^2b^2}{d^2})$ کدام است؟

۱) $|ab|$ ۲) d^2 ۳) $[a^2,b^2]$ ۴) $\frac{a^2b^2}{d}$

۱۳۴- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۱ و کوچک‌ترین مضرب‌مشترک آن‌ها ۳۳۰ است. مجموع دو عدد کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۸۷ ۳) ۳۴۱ ۴) ۳۵۲

۱۳۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۹$ و $a+b=۱۲۶$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $[a,b]$ کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۰۵ ۳) ۴۳۲ ۴) ۴۴۱

۱۳۶- اگر $۲ab=۳(a,b)^۲+۱$ حاصل $a^۲+b^۲$ چیست؟ $(a,b\in\mathbb{N})$

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۱۷ ۴) چنین چیزی غیرممکن است.

۱۳۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)\neq ۱$ و $۲[a,b]=۴۱(a,b)+۱۳$ باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱۷ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۴۳ ۴) ۱۵۶

۱۳۸- چند زوج عدد طبیعی a و b وجود دارد، به طوری که $a+b=۴۲$ و $\frac{[a,b]}{(a,b)}=۱۲$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $۲a=۷b$ و $\frac{[a^۲,b^۲]}{۱۴}+۳ab=۵۰۴$، آن‌گاه حاصل (a,b) کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۹

۱۴۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $۲a+۳b=۹۱$ و $[a,b]=۴۲$ باشد، مجموع ارقام $۳a+۴b$ کدام است؟ $((a,b)>۱)$

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

اعداد اول

۱۴۱- هر عدد اول بزرگ‌تر از ۵ به کدام صورت نمی‌تواند نوشته شود؟

۱) $۱۰k+۱$ ۲) $۱۰k+۳$ ۳) $۱۰k+۵$ ۴) $۱۰k+۷$

۱۴۲- اگر p عدد اول و $p|۳۰۸$ باشد، p چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۴۳- اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد به طوری که $\frac{۲a-۴p}{a}=\frac{۹}{۱۳}$ باشد، حاصل $a+p$ بر کدام عدد اول بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۳ ۳) ۲۹ ۴) ۶۹

۱۴۴- به ازای چند عدد دورقمی بزرگ‌تر از ۸۰ مانند n رابطهٔ $n|۸۰!$ برقرار نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۵- اگر عدد صحیح a دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی و b دارای ۳ مقسوم‌علیه طبیعی باشد و $(a,b)=۱$ باشد، ba دارای چند مقسوم‌علیه طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) نمی‌توان گفت.

۱۴۶- اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده $p^۲$ بر ۶ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱ و ۵

۱۴۷- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ p بر ۱۸ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، چه تعداد از اعداد زیر حتماً مرکب هستند؟

الف) $\frac{p^۲+۱}{۲}$ ب) $\frac{p^۲+۳}{۲}$ پ) $\frac{p^۲+۵}{۲}$ ت) $\frac{p^۲+۷}{۲}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۹- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام‌یک از عبارات زیر همواره عددی مرکب است؟

۱) $۷p-۶$ ۲) $۲^p-۱$ ۳) $۲^p+۱$ ۴) $p^۳+۲$

۱۵۰- اگر $n=(۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱\times\cdots\times۹۷)+۱$ باشد، به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی کوچک‌تر از ۱۰۰ برای x، $x|n$؟ (n برابر حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ به علاوهٔ ۱ است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۱۵۱- به ازای چند مقدار طبیعی n، هر ۵ عدد n، $n+۲$، $n+۶$، $n+۸$ و $n+۱۴$ اول هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۲- بزرگ‌ترین عدد اول p که $p^۳|۵۰!$ باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۴۷

۱۵۳- به ازای چند مقدار صحیح a، حاصل $a^۲-۷a+۱۲$ عددی اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۴- اگر a، b و c اعدادی اول متمایز باشند به طوری که $a+b+c=۱۴$ باشد، $a^۲+b^۲+c^۲$ بر کدام عدد بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۵۵- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $۱۶+۱۱p$ مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۶- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $p+۲۷$ مکعب کامل باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۷- اگر x، y و z اعداد اول متمایز و رابطهٔ $x=y^۲-z^۲$ برقرار باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{xyz}$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵۸- اگر a، b و c اعداد اول متمایز و رابطهٔ $a=b^۲+c^۲$ برقرار باشد، چند مقدار دورقمی برای a وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۹- اگر a، b و c اعداد اول متمایز و رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

۱۶۰- در تقسیم چند عدد سه‌رقمی به ۷، باقی‌مانده برابر با ۲ می‌شود؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۱

۱۶۱- اگر در تقسیمی ۵۰ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم‌علیه اضافه شود، خارج قسمت تغییری نکرده و باقی‌مانده ۴ واحد کم شود، خارج قسمت کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۶۲- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷، عدد ۹ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۶ بخش‌پذیر است؟

۱) $a+۳$ ۲) $a+۵$ ۳) $a+۷$ ۴) $a+۹$

۱۶۳- در تقسیم عدد a بر ۱۷، باقی‌مانده برابر ۷ می‌باشد. حداقل چند واحد از مقسوم کم کنیم تا باقی‌مانده برابر ۱۳ شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۱۶۴- در یک تقسیم، خارج قسمت برابر ۵ و باقی‌مانده ۲۴ می‌باشد. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد به شرطی که مقسوم و خارج قسمت تغییر <u>نکنند</u>؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶۵- در تقسیم عدد a بر ۱۲، باقی‌مانده ۷ است. اگر ۷۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت m واحد زیاد و باقی‌مانده n واحد کم می‌شود. $m+n$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۶۶- خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر b به ترتیب ۳۱ و ۲۴ می‌باشد. تعداد عددهای طبیعی سه‌رقمی a که بر ۵ بخش‌پذیر باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۶۷- چند عدد سه‌رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، خارج قسمت مضرب ۵ و باقی‌مانده مضرب ۷ باشد؟

۱) ۶۸ ۲) ۱۷ ۳) ۸۵ ۴) ۳۴

۱۶۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۱۱۷ برابر ۲۸ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۳ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۶۹- اگر $a=۹۱k+۲۳$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۳-۲a^۲-۹$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر ۱۷ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a+۳b+ab$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی ۲a و ۳a بر عدد طبیعی x، $(x>۱)$ به ترتیب ۵ و ۲۳ است. x کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۵۸ ۴) ۵۹

۱۷۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد زوج a بر ۱۷ برابر ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a}{2}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۷۳- خارج قسمت تقسیم عدد $13! - 7$ بر ۱۳ را به صورت $a! + b$ نوشته‌ایم. $a + b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۱۱

۱۷۴- در تقسیم عدد ۵۵− بر ۱۲، از مقسوم ۵ واحد کم و به مقسوم‌علیه ۵ واحد اضافه می‌کنیم. باقی‌مانده چه تغییری می‌کند؟

۱) سه واحد کم می‌شود. ۲) دو واحد زیاد می‌شود. ۳) سه واحد زیاد می‌شود. ۴) دو واحد کم می‌شود.

۱۷۵- اگر $a = 15q + 7$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $97 - 7a$ بر ۲۱ برابر .... و خارج قسمت آن برحسب q برابر .... است.

۱) ۶ و $5q - 2$ ۲) ۱۵ و $5q - 2$ ۳) ۶ و $5q - 3$ ۴) ۱۵ و $5q - 3$

۱۷۶- بزرگ‌ترین عدد صحیحی که وقتی بر ۲۶ تقسیم شود، باقی‌مانده ۴ برابر خارج قسمت باشد، کدام است؟

۱) ۱۷۷ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۱۷۷- در یک عمل تقسیم، مقسوم‌علیه برابر ۷ و باقی‌مانده یک‌سوم خارج قسمت است. حداکثر مقدار مقسوم کدام است؟

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۳۹ ۴) ۱۴۶

۱۷۸- در یک تقسیم مقسوم برابر a، مقسوم‌علیه برابر ۱۷، خارج قسمت برابر q و باقی‌مانده برابر ۷ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a + m$ بر ۱۷ برابر ۷ و خارج قسمت تقسیم $a - n$ بر ۱۷ برابر q می‌باشد. مجموع حداقل مقدار m و حداکثر مقدار n برابر کدام گزینه است؟ (m و n مقادیر طبیعی هستند.)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۷۹- در تقسیم a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۲ و خارج قسمت عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کوچک‌تر و یا مساوی ۲۶ برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۰- در تقسیم عدد ۴۵۱ بر چند عدد طبیعی، خارج قسمت، برابر ۷ می‌شود؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۸۱- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۶۷ بر هر یک از آن‌ها برابر با ۷ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۱۲

۱۸۲- چند عدد طبیعی a وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳، از مکعب خارج قسمت بزرگ‌تر است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۴

۱۸۳- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را داشته باشد و $b \mid 4a + 15$، آن‌گاه چند مقدار برای b وجود دارد؟ $(b > 1)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۸۴- در یک تقسیم، مقسوم ۷۰ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر ۱۰ است. خارج قسمت این تقسیم حداکثر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۵- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a + 90$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر با ۵ و ۱۵ باشند، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۷۰ ۴) ۷۹

۱۸۶- چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۲۰۰ باقی‌ماندهٔ آن $\frac{4}{5}$ مربع خارج قسمت آن است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۸۷- در تقسیم عدد ۳۶− بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۶ واحد کم‌تر از مقسوم‌علیه است. اگر b کم‌ترین عدد قابل قبول باشد، خارج قسمت کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) صفر ۴) ۲۹

۱۸۸- در تقسیم عدد ۲۳۱ بر عدد b، باقی‌ماندهٔ مجذور خارج قسمت است. چند مقدار صحیح برای b موجود است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۹- در یک تقسیم، مقسوم برابر ۵۲ و مجموع مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده برابر ۳۲ می‌باشد. چند مقدار متمایز برای باقی‌مانده وجود دارد؟ (مقادیر مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده همگی طبیعی هستند.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۰- عدد a در تقسیم بر ۷ خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ برابر و در تقسیم بر ۱۱ نیز خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ برابر دارد. مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲۰

۱۹۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۱ و ۱۲ به ترتیب برابر ۴ و ۷ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳۲ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۹ ۳) ۱۰۳ ۴) ۷

۱۹۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی $a < 200$ بر ۱۳ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۳ است. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۹۳- a عددی فرد و باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۹ برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۷۲ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۳۱ ۳) ۴۹ ۴) ۶۷

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

۱۹۴- اگر $A=\{k\in\mathbb{Z} \mid 2 \mid k+1\}$ و $B=\{k\in\mathbb{Z} \mid 3 \mid k+1\}$ آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) $\{6q+3 \mid q\in\mathbb{Z}\}$ ۲) $\{6q+4 \mid q\in\mathbb{Z}\}$ ۳) $\{6q+2 \mid q\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $\{6q+5 \mid q\in\mathbb{Z}\}$

۱۹۵- حاصل‌ضرب دو عدد به شکل $7q+3$ کدام می‌تواند باشد؟ $(q\in\mathbb{Z})$

۱) ۹۱ ۲) ۹۲ ۳) ۹۳ ۴) ۹۴

۱۹۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد فرد a در تقسیم بر ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۹۷- اگر a عددی فرد باشد که بر ۷ بخش‌پذیر باشد، فرم کلی آن به کدام صورت است؟

۱) $21k+14$ ۲) $21k+7$ ۳) $14k+7$ ۴) $7k+1$

۱۹۸- اگر در تقسیم عدد a بر ۷ باقی‌مانده برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۵ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۹- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۰، باقی‌مانده برابر ۸ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۰، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۰۰- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم p^2 بر ۳۶ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۲۰۱- به ازای اعداد صحیح و دلخواه a همواره یکی از اعداد $a+81$ ، $a+28$ ، $a+122$ یا k بر ۴ بخش‌پذیر است. k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $a+73$ ۲) $a+74$ ۳) $a+75$ ۴) $a+76$

۲۰۲- به ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برای b عبارت $(7a+b)(a+17)(4a)$ به ازای تمامی مقادیر طبیعی a بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۹۵ ۲) ۸۳ ۳) ۴۳ ۴) ۳۶

۲۰۳- کدام گزینه مثال نقضی است برای گزارهٔ «به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، n^2+2 مضرب ۳ است.»؟

۱) ۳۱ ۲) ۴۱ ۳) ۷۱ ۴) مثال نقض ندارد.

۲۰۴- اگر دو عدد طبیعی x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت x^2+y^2+7 به ازای مقادیر صحیح x و y بر ۳ کدام است؟

۱) فقط صفر ۲) فقط ۱ ۳) صفر یا ۲ ۴) صفر یا ۱

۲۰۵- اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $3 \mid a^2+b^2$ برقرار باشد، حاصل $2a-b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۲۰۶- اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، مربع آن به کدام صورت است؟

۱) $16k+1$ ۲) $8k+1$ ۳) $4k+1$ ۴) $4k$ و یا $8k+1$

۲۰۷- به تصادف عدد صحیح مربع کاملی را انتخاب می‌کنیم. این عدد با چه احتمالی در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۴ دارد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۲۰۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد طبیعی بر ۶ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۹- اگر n عددی طبیعی باشد به ازای چند عدد دورقمی n، 5^n+2 مربع کامل است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

۴۱- [۲] عددی که مضرب ۳ و زوج است یعنی بر ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$[\frac{۸۹}{۶}]-[\frac{۳۰}{۶}]=۱۴-۵=۹$$

اول مضارب ۶ در فاصلهٔ ۱ تا ۸۹ را پیدا می‌کنیم، بعد چون مضارب ۶ از ۳۱ تا ۸۹ را می‌خواهیم مضارب ۶ از ۱ تا ۳۰ را حذف می‌کنیم.

۴۲- [۱] هر دو رابطه را ساده می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$\left.\begin{matrix} a\mid(b+۵)^۲ \Rightarrow a\mid b^۲+۱۰b+۲۵ \\ a\mid(b+۴)(b+۶)\Rightarrow a\mid b^۲+۱۰b+۲۴\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\mid ۱$$

پس به ازای دو مقدار a رابطه برقرار است. $\Rightarrow a=\pm۱$

۴۳- [۴] گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

[۱] درست است.

$$a\mid b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times b} a\mid b^۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲\mid b^۴$$

از طرفی: $a^۲\mid ۲a^۲$

$$\xrightarrow{(-)} a^۲\mid b^۴-۲a^۲$$

[۲] درست است.

$$\left.\begin{matrix}a\mid a\\ a\mid b\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} a\mid a-b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲\mid (a-b)^۲$$

[۳] درست است.

$$a\mid b \xrightarrow{\text{طرفین}\times b} ab\mid b^۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۷} ab\mid ۷b^۲$$

از طرفی: $ab\mid ab \xrightarrow{\text{سمت راست}\times -۵} ab\mid -۵ab$

$$\xrightarrow{+} ab\mid ۷b^۲-۵ab$$

[۴] نادرست است. برای مثال اگر $a=۳$ و $b=۶$ باشد، داریم:

$$a^۲\mid b-a^۵ \Rightarrow ۹\nmid ۶-۳^۵$$

۴۴- [۳] [۴] درست است.

$$abc\mid ۲ab+۳ac \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } a} bc\mid ۲b+۳c$$

[۲] درست است.

$$bc\mid ۲b+۳c \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div b} c\mid ۲b+۳c$$

از طرفی: $c\mid ۳c$

$$\xrightarrow{(-)} c\mid ۲b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۴} c\mid ۸b$$

[۱] درست است.

$$bc\mid ۲b+۳c \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div c} b\mid ۲b+۳c$$

از طرفی: $b\mid ۲b$

$$\xrightarrow{(-)} b\mid ۳c \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۴} b\mid ۱۲c$$

[۳] نادرست است. برای مثال اگر $b=c=۵, a=۴$ رابطهٔ صورت سؤال درست است؛ زیرا $۱۰۰\mid ۴۰+۶۰$ ولی $a\mid ۲b+۳c$ نادرست است زیرا: $۴\nmid ۲۵$

۴۵- [۲] **روش اول:** $a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲-b^۲=c^۲$

$$(a-b)(a+b)=c^۲ \Rightarrow \begin{cases} a-b\mid c^۲\\ a+b\mid c^۲\end{cases}$$

[۱] و [۳] درست‌اند.

$$c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow c^۲\mid a^۲-b^۲ \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div c} c\mid a^۲-b^۲$$

$$\xrightarrow{\text{سمت راست}\times(a^۲+b^۲)} c\mid a^۴-b^۴$$

[۴] درست است.

پس [۲] نادرست است.

روش دوم: سه عدد پیدا می‌کنیم که در رابطهٔ داده‌شده صدق کند.

برای مثال: $\begin{cases} a=۱۳\\ b=۵\\ c=۱۲\end{cases}$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: [۱] $۸\mid ۱۴۴$ ✓

[۳] $۱۸\mid ۱۴۴$ ✓ [۲] $۱۲\mid ۱۸$ ×

[۴] $۱۲\mid ۱۳^۴-۵^۴=(۱۳^۲-۵^۲)(۱۳^۲+۵^۲)=۱۴۴\times ۱۹۴$ ✓

۴۶- [۴] [۱] درست است. $۱۲\mid b \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div ۳} ۴\mid b$

[۲] درست است. $a\mid ۱۲, ۱۲\mid b \Rightarrow a\mid b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۲} a\mid ۲b$

۳ درست است. $a|12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 7} a|84$

۴ درست نیست؛ برای مثال به ازای $a=b=12$ نقض می‌شود.

۴۷- ۴ در این مدل سؤال‌ها بهتر است رابطهٔ اول را تبدیل به تساوی کنیم و در رابطهٔ دوم قرار دهیم.

$25|a \Rightarrow a=25q$

$a|550 \Rightarrow 25q|550 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }25} q|22$

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۲۲ $=\{\pm1,\pm2,\pm11,\pm22\}$

پس به ازای ۸ عدد رابطه برقرار است.

۴۸- ۱ اگر $12|n^2$ یعنی کسر $\frac{n^2}{12}$ عددی صحیح است در این صورت:

$$\frac{n^2}{12}=\frac{n^2}{2^2\times3}$$

اگر بخواهیم مخرج با صورت ساده شود، n باید دست کم یک عامل ۲ و یک شمارندهٔ ۳ داشته باشد، به بیان دیگر: $n=6q$.

حالا با توجه به رابطهٔ دوم داریم: $6q|3600 \xrightarrow{\div 6} q|600$

نکته می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

بنابراین: $600=2^3\times3\times5^2$

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۶۰۰ $=4\times2\times3=24$

۴۹- ۳ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $x=2^n\times3^m$ برابر است با: $(n+1)(m+1)$

حال با توجه به این‌که: $\frac{x}{18}=\frac{2^n\times3^m}{2^1\times3^2}=2^{n-1}\times3^{m-2}$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $\frac{x}{18}$ برابر است با: $n(m-1)$

اختلاف تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۴تاست، بنابراین:

$(n+1)(m+1)-n(m-1)=14$

$\Rightarrow mn+m+n+1-mn+n=14 \Rightarrow m+2n=13$

دقت کنید $1\le n$ و $2\le m$ است وگرنه $\frac{x}{18}$ عددی صحیح نمی‌شود.

$3x=2^n\times3^{m+1} \xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (n+1)(m+2)$

$\frac{x}{6}=\frac{2^n\times3^m}{2\times3}=2^{n-1}\times3^{m-1}\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها}} nm$

$(n+1)(m+2)-nm=mn+m+2n+2-mn$

$=m+2n+2=13+2=15$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$، ۱۵تا از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{6}$ بیشتر است.

۵۰- ۴ حالت‌های زیادی وجود دارند که ضرب تعدادی عدد برابر ۳۰ می‌شود اما اگر بخواهیم تعداد مقسوم‌علیه‌های n^2 بیشترین مقدار خود را بگیرد، باید تا جا دارد ۳۰ را خرد کنیم! یعنی چی؟ یعنی به صورت $2\times3\times5$ در نظر بگیریم. در این صورت:

$\alpha_1+1=2\Rightarrow\alpha_1=1$

$\alpha_2+1=3\Rightarrow \alpha_2=2$

$\alpha_3+1=5\Rightarrow\alpha_3=4$

$\Rightarrow n=p_1p_2^2p_3^4\Rightarrow n^2=p_1^2p_2^4p_3^8$

$\Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $n^2 = 3\times5\times9=135$

۵۱- ۳ $10!+24=10\times9\times\underline{8}\times7\times6\times5\times4\times\underline{3}\times2\times1+24$

از ۲۴ فاکتور می‌گیریم: $24(\underbrace{10\times9\times7\times6\times5\times4\times2\times1+1}_{A})$

خب این عدد بر ۲۴ بخش‌پذیر است یعنی واضح است که بر ۱,۲,۳,۴,۶,۸ بخش‌پذیر است و با توجه به این‌که نه ۲۴ و نه A بر هیچ‌کدام از عددهای ۵,۷,۹ بخش‌پذیر نیستند پس عدد، فقط بر ۶ عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است.

۵۲- ۳ $24!+25!=24!+25\times24!=24!\times26$

$=24\times23\times\cdots\times3\times2\times1\times13\times2$

یک عامل ۱۳ در $24!$ است و یک عامل در ۲۶ پس عدد بر ۱۶۹ بخش‌پذیر است.

می‌دانیم $14^2=196$ پس باید ببینیم دوتا عامل ۷ و دوتا عامل ۲ عوامل عبارت است یا نه که البته هست! برای مثال یکی خود عدد ۱۴ و دیگری عددهای ۷ و ۲ که در هم ضرب بشوند می‌شود ۱۹۶.

$17^2=289$ اما در این حاصل‌ضرب فقط یک عامل ۱۷ وجود دارد پس این عدد بر 17^2 بخش‌پذیر نیست و **۳** پاسخ سؤال است.

و بالأخره $18^2=324$ است و این عدد دوتا عامل ۱۸ دارد. برای مثال ضرب عددهای ۹,۲,۱۸ می‌شود 18^2.

۵۳- ۳ **نکته** وقتی هم $b|a$ و هم $a|b$ یعنی $a=\pm b$ است.

بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $n^3+2=2n^2+n\Rightarrow n^3-n-2n^2+2=0$

$\Rightarrow n(n-1)(n+1)-2(n-1)(n+1)=0$

$\Rightarrow (n-1)(n+1)(n-2)=0\Rightarrow \begin{cases}n=1\\n=-1\\n=2\end{cases}$

حالت دوم: $n^3+2=-2n^2-n\Rightarrow n^3+n+2n^2+2=0$

$n(n^2+1)+2(n^2+1)=0\Rightarrow(n^2+1)(n+2)=0\Rightarrow n=-2$

پس به ازای ۴ مقدار صحیح n، رابطه برقرار است.

۵۴- ۲ **نکته** دقت کنید گفتیم اگر $a|b$، آن‌گاه $|a|\le|b|$

اما در صورت سؤال دقیقاً برعکس این گزاره را داریم، پس فقط در حالتی گزارهٔ $|a|>|b|$ درست است که $b=0$ باشد. در نتیجه:

$x^2-6x+9=0\Rightarrow x=3$ فقط ۱ مقدار

۵۵- ۲ **نکته** رابطهٔ $a|0$ تنها زمانی برقرار است که $a=0$ باشد.

بنابراین: $0|x^3-3x^2+3x-28\Rightarrow x^3-3x^2+3x-28=0$

حالا باید این عبارت را یک‌جوری تجزیه کنیم. یک جملهٔ x^3 داریم و یک عدد ثابت ۲۸. اگر فرض کنیم تجزیهٔ عبارت به صورت $(x-a)(x^2+bx+c)$ باشد، پس $ac=28$ است. واضح است که ۱ ریشهٔ عبارت نیست پس ریشهٔ عبارت یا ۴ است یا ۷. بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که رابطه به ازای $x=4$ برقرار است:

$4^3-3\times4^2+3\times4-28=0$

خب حالا عبارت به صورت $(x-4)(x^2+bx+7)$ درمی‌آید. این عبارت را ساده کرده با عبارت صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$x^3+bx^2+7x-4x^2-4bx-28$

$=x^3+(b-4)x^2+(7-4b)x-28$

پس $b-4=-3$ و $7-4b=3$ است که از هر دو رابطه نتیجه می‌شود $b=1$ *(این معادله انگار بیشتر سؤال ریاضی پایه است تا گسسته اما شما این رو در نظر بگیرید که طراح‌ها ممکن است کرم داشته باشند ☺)*

$$(x-4)\underbrace{(x^2+x+7)}_{\substack{\text{در این عبارت} \\ \Delta<0 \text{ است پس} \\ \text{همواره مثبت است.}}}=0 \Rightarrow x=4$$

پس تنها به ازای یک مقدار صحیح x رابطه برقرار است.

۵۶- ۳ **نکته** برای پیداکردن توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

حالا پیدا می‌کنیم که در تجزیهٔ $30!$ چند عامل ۳ وجود دارد.

$$\left[\frac{30}{3}\right]+\left[\frac{30}{9}\right]+\left[\frac{30}{17}\right]=10+3+1=14$$

بنابراین اگر بخواهیم $3^n \mid 30!$ برقرار باشد. n حداکثر می‌تواند برابر ۱۴ باشد.

۵۷- ۴ پاسخ این سؤال طولانی است اما چون شبیه آن در کنکورهای اخیر آمده مجبوریم این نوع سؤال‌ها را هم یاد بگیریم.

با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در تست قبل، خیلی سریع برویم دنبال پیداکردن توان عددهای اول مختلف در تجزیهٔ $24!$:

$$a_1=\left[\frac{24}{2}\right]+\left[\frac{24}{4}\right]+\left[\frac{24}{8}\right]+\left[\frac{24}{16}\right]=12+6+3+1=22$$

$$a_2=\left[\frac{24}{3}\right]+\left[\frac{24}{9}\right]=8+2=10\ ,\ a_3=\left[\frac{24}{5}\right]=4$$

$$a_4=\left[\frac{24}{7}\right]=3\ ,\ a_5=\left[\frac{24}{11}\right]=2\ ,\ a_6=\left[\frac{24}{13}\right]=1$$

$$a_7=\left[\frac{24}{17}\right]=1\ ,\ a_8=\left[\frac{24}{19}\right]=1\ ,\ a_9=\left[\frac{24}{23}\right]=1$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}+\cdots$$
$$=22+10+4+3+2+1+1+1+1+0=45$$

۵۸- ۳ اگر بخواهیم رابطهٔ $7^{10} \mid n!$ برقرار باشد، باید کوچک‌ترین عدد $n!$ را طوری پیدا کنیم که کسر $\frac{n!}{7^{10}}$ عددی صحیح شود. به بیان دیگر $n!$ باید دست کم ۱۰ عامل ۷ داشته باشد. مضارب ۷ را می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که ۱۰ عامل ۷ دارد، کدام است.

$$1\times2\times3\times\cdots\times\underset{1}{7}\times\cdots\times\underset{2}{14}\times\cdots\times\underset{3}{21}\times\cdots\times\underset{4}{28}\times\cdots\times\underset{5}{35}\times\cdots\times\underset{6}{42}$$
$$\times\cdots\times\underset{7,8}{49}\times\cdots\times\underset{9}{56}\times\cdots\times\underset{10}{63}$$

دقت کنید ۴۹ دو عامل ۷ دارد. بنابراین کوچک‌ترین عدد $63!$ است.

اما می‌توانیم بررسی هم کنیم.

$$\left[\frac{63}{7}\right]+\left[\frac{63}{49}\right]=9+1=10$$

۵۹- ۱ رابطه را به کسر تبدیل می‌کنیم. توان ۲ در صورت باید بزرگ‌تر یا مساوی توان ۲ در مخرج باشد.

$$8^{n-1} \mid 2^{n+9} \xrightarrow{\text{تبدیل کسر}} \frac{2^{n+9}}{8^{n-1}}=\frac{2^{n+9}}{(2^3)^{n-1}}=\frac{2^{n+9}}{2^{3n-3}}$$

$$\Rightarrow n+9\geq 3n-3 \Rightarrow 2n\leq 12 \Rightarrow n\leq 6$$

پس به ازای ۶ عدد طبیعی رابطه برقرار است.

۶۰- ۲ اول باید ببینیم از $12 \mid x^2$ چه نتایجی می‌توان گرفت. اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{x^2}{2^2\times3}$. قرار است این کسر عدد صحیح باشد، پس x باید دست کم یک عامل ۲ و یک عامل ۳ داشته باشد یعنی: $x=6q$

حالا مضارب ۳رقمی ۶ را پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{999}{6}\right]-\left[\frac{99}{6}\right]=166-16=150$$

۶۱- ۱ هر دو رابطه را به کسر تبدیل می‌کنیم بعد توان‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$189 \mid a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{189}=\frac{a^2}{3^3\times7}$$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد a باید دست کم دو عامل ۳ *(چون یه دونه کافی نیست و یه ۳ تو مخرج می‌مونه)* و دست کم یک عامل ۷ داشته باشد، بنابراین:
$a_{min}=3^2\times7=63$

$$512 \mid b^3 \Rightarrow \frac{b^3}{2^9}$$

در این‌جا هم اگر بخواهیم کسر عددی صحیح شود، b باید دست کم سه عامل ۲ داشته باشد تا کسر ساده شود بنابراین: $b_{min}=2^3=8$.

و در نتیجه: $\min(a+b)=63+8=71$

۶۲- ۱ عدد x را فرض می‌کنیم. x باید مضرب ۴۸ باشد، پس $x=48q$. از طرفی x باید مکعب کامل باشد.

خب چه عددهایی مکعب کامل‌اند؟ عددهایی که در تجزیهٔ آن‌ها توان همهٔ عوامل مضرب ۳ است؛ بنابراین: $x=48q=2^4\times3\times q$

حالا q باید یک‌جوری باشد که توان همهٔ عوامل مضرب ۳ شود. بنابراین q باید حتماً یک 2^2 داشته باشد، یک 3^2 هم داشته باشد و هر عامل دیگری هم بخواهد داشته باشد باید به صورت توان ۳ باشد که $48q$ مربع کامل شود. یعنی: $q=2^2\times3^2\times p^3$

که در این صورت x می‌شود: $x=2^6\times3^3\times p^3$

عدد ۴رقمی یا ۵رقمی است، یعنی:

$$1000\leq x<100000 \Rightarrow 1000\leq 2^6\times3^3\times p^3<100000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} 10\leq 2^2\times3\times p<10\sqrt[3]{100}=46 \Rightarrow 10\leq 12p<46$$

$$\Rightarrow p=1,2,3$$

۶۳- ۲ **نکته** یک نکتهٔ خیلی کاربردی در درس‌نامه دربارهٔ این نوع سؤال‌ها گفتیم که اگر بخواهیم رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$$

نزدیک × نزدیک

دور × دور

باید $np\leq mq$ باشد؛ یعنی: دور در دور ≤ نزدیک در نزدیک

با این نکته سریع هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^3 \mid b^5 \Rightarrow 2\times3\leq5\ \times$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^2 \mid b^5 \Rightarrow 2\times2\leq5\ \checkmark$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^4 \mid b^7 \Rightarrow 2\times4\leq7\ \times$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^7 \mid b^{12} \Rightarrow 7\times2\leq12\ \times$$

۶۴- ۴ با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در تست قبل، اگر بخواهیم رابطهٔ $a^7 \mid b^{11} \Rightarrow a^x \mid b^7$ برقرار باشد، باید:

$$11x\leq 49 \Rightarrow x\leq 4/\ldots$$

یعنی حداکثر مقدار x می‌تواند برابر ۴ باشد یا به عبارت دیگر رابطهٔ $a^7 | b^{11} \Rightarrow a^4 | b^7$ رابطه‌ای درست است. حالا:

$\boxed{1}$ درست است. $a^4 | b^7 , b^7 | c^{11} \Rightarrow a^4 | c^{11}$

$\boxed{2}$ درست است. $a^7 | b^{11} \Rightarrow a^3 | b^5 \Rightarrow 3\times 11 \le 5\times 7$

$\boxed{3}$ درست است. $a^4 | c^{11} \Rightarrow a | c^3 \Rightarrow 11 \le 12$

$\boxed{4}$ نادرست است. $a^4 | c^{12} \Rightarrow a^5 | c^{12} \Rightarrow 55 \not\le 48$

برای این‌که خیالتان راحت باشد اگر $a = 2^{121}$، $b = 2^{77}$ و $c = 2^{49}$ باشد، رابطه‌های صورت سؤال درست می‌شود اما رابطهٔ چهارم نادرست می‌شود.

$$a^5 | c^{12} \Rightarrow (2^{121})^5 | (2^{49})^{12} \Rightarrow 2^{605} | 2^{588} \quad \times$$

۶۵- $\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{l} a | 4n+3 \xrightarrow{\times 5} a | 20m-15 \\ a | 5n+2 \xrightarrow{\times 4} a | 20n+8 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a | 7$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, \pm 7$$

اما دقت کنید $5n+2$ و $4n+3$ همواره بر ۱ و ۱- بخش‌پذیرند اما همواره بر ۷ و ۷- بخش‌پذیر نیستند. بنابراین فقط به ازای دو مقدار a، دو عبارت $4n+3$ و $5n+2$ همواره به a بخش‌پذیر است و به ازای برخی مقادیر n نیز می‌تواند بر ۷ و ۷- بخش‌پذیر باشد.

۶۶- $\boxed{2}$

$$\left.\begin{array}{l} a | 7k+m \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 11} a | 77k+11m \\ a | 11k+2 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 7} a | 77k+14 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} a | 11m-14$$

اگر بخواهیم a فقط ۴ مقدار صحیح داشته باشد $11m-14$ حتماً باید یک عدد اول باشد که ۴ مقسوم‌علیه صحیح داشته باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$m = 4 \Rightarrow 11m-14 = 30 \quad \times$

$m = 3 \Rightarrow 11m-14 = 19 \quad \checkmark$

$m = 7 \Rightarrow 11m-14 = 63 \quad \times$

$m = 6 \Rightarrow 11m-14 = 52 \quad \times$

۶۷- $\boxed{2}$ در هر مرحله n را از سمت راست رابطه حذف می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} d | 2n^2+3 \xrightarrow{\times 3} d | 6n^2+9 \\ d | 3n^2+n+2 \xrightarrow{\times 2} d | 6n^2+2n+4 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d | 2n-5$$

$$\left.\begin{array}{l} d | 2n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times (2n+5)} d | 4n^2-25 \\ d | 2n^2+3 \xrightarrow{\times 2} d | 4n^2+6 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d | 31$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 31$$

برای مثال به ازای $n = -13$ هر دو مقدار بر ۳۱ بخش‌پذیرند.

۶۸- $\boxed{3}$

$$a^2 | 2n-7 \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div a} \left.\begin{array}{l} a | 2n-7 \xrightarrow{\times 2} a | 4n-14 \\ \text{از طرفی}: a | 4n-7 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} a | 7 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 7$$

واضح است که به ازای $a = \pm 1$ هر دو رابطه برقرار است اما اگر $4n-7$ بخواهد بر ۷ بخش‌پذیر باشد، با توجه به این‌که ۷- بر ۷ بخش‌پذیر است پس باید 4n و در نتیجه n حتماً بر ۷ بخش‌پذیر باشد در این صورت $2n-7$ نمی‌تواند بر ۴۹ بخش‌پذیر باشد.

۶۹- $\boxed{2}$ می‌خواهیم هر دو رابطه برقرار باشد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} 11 | 2a+3b \xrightarrow{\times 3} 11 | 6a+9b \\ \qquad\qquad\qquad\quad 11 | 6a+kb \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} 11 | kb-9b$$

پس $(k-9)b$ باید همواره مضرب ۱۱ باشد، بنابراین اگر $k-9$ مضرب ۱۱ باشد رابطه همواره برقرار است.

$$k-9 = 11q \Rightarrow k = 11q+9 \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{q=0} k = 9 \\ \xrightarrow{q=-1} k = -2 \end{array}\right.$$

$$-11 \le 11q+9 < 11 \Rightarrow -20 \le 11q \le 2 \Rightarrow -\frac{20}{11} \le q \le \frac{2}{11}$$

پس به ازای ۲ مقدار k رابطه لزوماً برقرار است.

۷۰- $\boxed{4}$ **روش اول:** کاری که در این مدل سؤال‌ها می‌شود کرد این است که یک بار a و یک بار b را از سمت راست رابطه حذف کنیم تا ببینیم چه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+4b | 5a+9b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b | 15a+27b \\ 3a+4b | 3a+4b \xrightarrow{\times 5} 3a+4b | 15a+20b \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{-} 3a+4b | 7b$$

$$\Rightarrow 3a+4b | 7b \xrightarrow{\times 6} 3a+4b | 42b$$

خب همین‌جا سؤال حل شد و اصلاً لازم نشد b را حذف کنیم.

روش دوم: خیلی ساده فرض می‌کنیم $a = b = 1$ در این صورت فقط $42b$ بر $3a+4b$ بخش‌پذیر است.

۷۱- $\boxed{3}$ یک کار خوبی که در این مدل سؤال‌ها می‌شود کرد این است که اول کار دو عبارت را تقسیم به هم کرد و خارج قسمت را پیدا کرد. بعد می‌گوییم چرا.

$$\begin{array}{l|l} 16k^2 + 36k + m & 4k+1 \\ \cline{2-2} 16k^2 + 4k & 4k+8 \\ \hline \quad\ \ 32k + m & \\ \quad\ \ 32k + 8 & \\ \hline \qquad\quad m - 8 & \end{array}$$

معمولاً می‌شود ثابت کرد که عدد سمت چپ خارج قسمت و باقی‌مانده را نیز می‌شمارد. نگاه کنید:

$$\begin{array}{l} 7 | 4k+1 \\ 7 | 7 \end{array} \xrightarrow{(+)} 7 | 4k+8$$

حالا دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 7 | 4k+1 \\ 7 | 4k+8 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\times)} \left.\begin{array}{l} 49 | 16k+36k+8 \\ \text{از طرفی}: 49 | 16k^2+36k+m \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} \left.\begin{array}{l} 7 | m-8 \\ 7 | 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} 7 | m-1$$

پس m باید طوری باشد که $m-1$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. در میان گزینه‌ها عدد ۸ این ویژگی را دارد.

روش دوم: یک عدد کوچک پیدا می‌کنیم به طوری که رابطهٔ $7 | 4k+1$ برقرار باشد. با کمی دقت می‌شود فهمید $k = -2$ رابطه را برقرار می‌کند. حالا اگر در رابطهٔ دوم به جای k عدد ۲- را قرار دهیم، داریم:

$$49 | 64-72+m \Rightarrow 49 | m-8$$

و رابطه به ازای $m = 8$ برقرار است.

۷۲- $\boxed{1}$ مثل سؤال قبل اگر دو عبارت را به هم تقسیم کنیم، داریم:

$$\begin{array}{l|l} 30n^2 + 34n + 8 & 3n+1 \\ \cline{2-2} 30n^2 + 10n & 10n+8 \\ \hline \quad\ \ 24n + 8 & \\ \quad\ \ 24n + 8 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

از درستی $7 | 3n+1$ می‌شود نتیجه گرفت $7 | 10n+8$:

$$\left.\begin{array}{l} 7 | 3n+1 \\ 7 | 7n+7 \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} 7 | 10n+8$$

حالا اگر دو رابطه را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}7|3n+1\\7|10n+8\end{array}\right\} \xrightarrow{(\times)} 49|(3n+1)(10n+8)$$

اما اگر دقت کنید داریم: $(3n+1)(10n+8)=2(3n+1)(5n+4)$

خب از یک عامل ۲ که فاکتور گرفتیم؛ همچنین دقت کنید اگر n زوج باشد $5n+4$ زوج می‌شود و اگر n فرد باشد $3n+1$ زوج می‌شود. یعنی $(3n+1)(5n+4)$ همواره زوج است. بنابراین عبارت همواره بر ۴ نیز بخش‌پذیر است.

خب پس در نتیجه می‌توان گفت $30n^2+34n+8$ هم بر ۴۹ و هم بر ۴ بخش‌پذیر است پس همواره بر ۱۹۶ بخش‌پذیر است.

۷۳- $\boxed{3}$ در این نوع سؤال‌ها خوب است که بگردیم ببینیم دور و بر ۹۳ و ۲۵− چه مضرب‌هایی از ۱۳ وجود دارد. بعد با استفاده از ویژگی‌های بخش‌پذیری سؤال را ساده کنیم. داریم: $93=7\times13+2$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}13|91m\\13|93m-25\end{array}\right\}\xrightarrow{(-)} \left.\begin{array}{l}13|2m-25\\ \text{از طرفی: } 13|26\end{array}\right\}\xrightarrow{+}13|2m+1$$

۷۴- $\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{l}11|3m+7\\7|5m+3\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{هم ضرب می‌کنیم.}]{\text{دو رابطه را در}} 77|15m^2+44m+21$$

اما چنین چیزی در گزینه‌ها نیست. با کمی دقت می‌توان فهمید از آن‌جایی که $77|77m$ می‌توان این رابطه را از رابطهٔ اصلی کم کرد.

$$\left.\begin{array}{l}77|15m^2+44m+21\\77|77m\end{array}\right\}\xrightarrow{(-)}77|15m^2-33m+21$$

حالا دقت کنید می‌توان از یک عامل ۳ فاکتور گرفت؛ یعنی:

$$15m^2-33m+21=3(5m^2-11m+7)$$

این عبارت باید بر ۷۷ بخش‌پذیر باشد. ۳ که با ۷۷ عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارد، بنابراین $5m^2-11m+7$ باید بر ۷۷ بخش‌پذیر باشد.

۷۵- $\boxed{4}$ $(x-1)(x-2)(x-3)$ مضرب ۷ است. این سه عدد متوالی‌اند. بنابراین یا $x-1$ مضرب ۷ است یا $x-2$ و یا $x-3$؛ بنابراین:

$$x-1=7q \Rightarrow x=7q+1$$
$$x-2=7q' \Rightarrow x=7q'+2$$
$$x-3=7q'' \Rightarrow x=7q''+3$$

پس اگر عددی در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۲ یا ۳ داشته باشد عبارت بر ۷ بخش‌پذیر است. حال با توجه به این‌که بزرگ‌ترین عدد دورقمی ۹۹ است که در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس خود ۹۹ پاسخ مسئله است.
مجموع ارقام $=9+9=18$

۷۶- $\boxed{3}$ حل این سؤال دقت زیادی می‌خواهد. ابتدا عبارت x^3-7x^2+12x را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-7x^2+12x=x(x^2-7x+12)=x(x-3)(x-4)$$

حال $x(x-3)(x-4)$ مضرب ۹ است، پس حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: x مضرب ۹ باشد:

$$x=9q \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=135 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 9$$

حالت دوم: $x-3$ مضرب ۹ باشد: $x-3=9q' \Rightarrow x=9q'+3$

$$\xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=120 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 3$$

حالت سوم: $x-4$ مضرب ۹ باشد: $x-4=9q'' \Rightarrow x=9q''+4$

$$\xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=130 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 4$$

حالت چهارم: اما دقت کنید! ۹ عدد مرکب است پس این حالت را هم باید در نظر بگیریم که ۲تا از عوامل x، $x-3$ و $x-4$ مضرب ۳ باشند، که برای این منظور تنها حالتی قبول است که x و $x-3$ مضرب ۳ باشند، یعنی $x=9q''+6$.

دقت کنید که وقتی x مضرب ۳ است اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر ۹ بنویسیم سه حالت رخ می‌دهد:

$$x=9q$$
$$x=9q'+3 \qquad x=9q''+6$$

دو حالت $x=9q$ و $x=9q'+3$ را قبلاً بررسی کردیم. بنابراین فقط باید حالت $x=9q''+6$ را در نظر بگیریم:

$$x=9q''+6 \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=105$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 6$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵ که در معادله صدق می‌کند، $x=105$ است با مجموع ارقام ۶.

روش دوم: اعداد صحیح به یکی از صورت‌های $9t$، $9t+1$، $9t+2$، ... و $9t+8$ هستند که اگر آن‌ها را در عبارت $x(x-3)(x-4)$ قرار دهیم فقط به ازای $x=9t$، $x=9t+3$، $x=9t+4$ و $x=9t+6$ بر ۹ بخش‌پذیر هستند:

$$x=9t \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=135$$
$$x=9t+3 \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=120$$
$$x=9t+4 \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=130$$
$$x=9t+6 \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵}} x=105$$

که در بین اعداد بالا کوچک‌ترین عدد ۳رقمی مضرب ۵، $x=105$ است که مجموع ارقام آن ۶ می‌باشد.

۷۷- $\boxed{4}$ نقاط روی منحنی $y=\frac{7x-1}{3x-1}$ هنگامی طبیعی هستند که x و y طبیعی باشند، یعنی $\frac{7x-1}{3x-1}$ طبیعی باشد، پس:

$$3x-1|7x-1 \xrightarrow[\text{در عبارت سمت راست}]{\text{ریشهٔ عبارت سمت چپ}} 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-1\left|7\times\frac{1}{3}-1\right. \Rightarrow 3x-1\left|\frac{4}{3}\right. \Rightarrow 3x-1|4$$

$$\begin{cases}3x-1=4 \Rightarrow x=\frac{5}{3} & \times\ \text{x طبیعی نیست}\\ 3x-1=-4 \Rightarrow x=-1 & \times\ \text{x طبیعی نیست}\\ 3x-1=2 \Rightarrow x=1, y=3 & \checkmark \\ 3x-1=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} & \times\ \text{x طبیعی نیست}\\ 3x-1=1 \Rightarrow x=\frac{2}{3} & \times\ \text{x طبیعی نیست}\\ 3x-1=-1 \Rightarrow x=0 & \times\ \text{x طبیعی نیست}\end{cases}$$

بنابراین روی منحنی $y=\frac{7x-1}{3x-1}$ تنها یک نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد.

روش دوم: سعی می‌کنیم x را از سمت راست حذف کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}3x-1|7x-1 \xrightarrow{\times3} 3x-1|21x-3\\3x-1|3x-1 \xrightarrow{\times7} 3x-1|21x-7\end{array}\right\}\xrightarrow{(-)}3x-1|4$$

ادامه مانند روش اول.

۷۸- $\boxed{۱}$ ابتدا y را تنها می‌کنیم:

$$yx-y=۵x+۳ \Rightarrow y(x-۱)=۵x+۳ \Rightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱}$$

x و y طبیعی هستند، پس:

$$x-۱ \mid ۵x+۳ \xrightarrow[\text{در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم.}]{\text{ریشهٔ عبارت سمت چپ را}} x-۱=۰$$

$$\Rightarrow x=۱ \Rightarrow x-۱ \mid ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۸ \Rightarrow x=۹ \Rightarrow y=۶ \\ x-۱=۴ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow y=۷ \\ x-۱=۲ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۹ \\ x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۱۳ \\ \left.\begin{matrix} x-۱=-۱ \\ x-۱=-۲ \\ x-۱=-۴ \\ x-۱=-۸ \end{matrix}\right\} \text{x طبیعی نیست.} \times \end{cases}$$

بنابراین b می‌تواند برابر مقادیر ۶، ۷، ۹ و ۱۳ باشد.

روش دوم: سعی می‌کنیم x را از سمت راست حذف کنیم. $x-۱ \mid ۵x+۳$

$$\begin{cases} x-۱ \mid ۵x+۳ \\ x-۱ \mid x-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۱ \mid ۵x+۳ \\ x-۱ \mid ۵x-۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x-۱ \mid ۸$$

ادامهٔ راه حل مانند روش اول.

۷۹- $\boxed{۲}$ $n+۲ \mid n^۳-۴n+۳$

باید n را از سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n+۲ \mid n^۳-۴n+۳ \xrightarrow{\times ۱} n+۲ \mid n^۳-۴n+۳ \\ n+۲ \mid n+۲ \xrightarrow{\times n^۲} n+۲ \mid n^۳+۲n^۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۲ \mid ۲n^۲+۴n-۳$$

$$\begin{cases} n+۲ \mid ۲n^۲+۴n-۳ \xrightarrow{\times ۱} n+۲ \mid ۲n^۲+۴n-۳ \\ n+۲ \mid n+۲ \xrightarrow{\times ۲n} n+۲ \mid ۲n^۲+۴n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۲ \mid ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+۲=۳ \Rightarrow n=۱ \checkmark \Rightarrow ۳ \mid ۰ \\ n+۲=۱ \Rightarrow n=-۱ \times \text{ طبیعی نیست.} \\ n+۲=-۱ \Rightarrow n=-۳ \times \text{ طبیعی نیست.} \\ n+۲=-۳ \Rightarrow n=-۵ \times \text{ طبیعی نیست.} \end{cases}$$

روش دوم: خیلی راحت‌تر می‌توانیم ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار بدهیم: $n+۲ \mid n^۳-۴n+۳ \Rightarrow n+۲=۰ \Rightarrow n=-۲$

$$\Rightarrow n+۲ \mid ۳$$

ادامه مانند روش اول.

۸۰- $\boxed{۴}$ باز هم x و y صحیح هستند، پس: $x+۱ \mid x^۳+x+۲$

سعی می‌کنیم x را از سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} x+۱ \mid x^۳+x+۲ \xrightarrow{\times ۱} x+۱ \mid x^۳+x+۲ \\ x+۱ \mid x+۱ \xrightarrow{\times x^۲} x+۱ \mid x^۳+x^۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x+۱ \mid x^۲-x-۲$$

$$\begin{cases} x+۱ \mid x^۲-x-۲ \xrightarrow{\times ۱} x+۱ \mid x^۲-x-۲ \\ x+۱ \mid x+۱ \xrightarrow{\times x} x+۱ \mid x^۲+x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x+۱ \mid ۲x+۲$$

$$\begin{cases} x+۱ \mid ۲x+۲ \xrightarrow{\times ۱} x+۱ \mid ۲x+۲ \\ x+۱ \mid x+۱ \xrightarrow{\times ۲} x+۱ \mid ۲x+۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x+۱ \mid ۰$$

که عبارت فوق به ازای بی‌شمار مقدار صحیح x برقرار است.

روش دوم:

$$x+۱ \mid x^۳+x+۲ \xrightarrow[\text{در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم.}]{\text{ریشهٔ عبارت سمت چپ را}} x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱ \Rightarrow x+۱ \mid ۰$$

ادامه مانند روش اول.

روش سوم:

$$y=\frac{x^۳+x+۲}{x+۱}=\frac{x^۳+۱+x+۱}{x+۱}=\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)+(x+۱)}{x+۱}$$

$$\Rightarrow y=\frac{(x+۱)(x^۲-x+۲)}{x+۱}=x^۲-x+۲ \Rightarrow y=x^۲-x+۲$$

که بی‌شمار نقطه با مختصات صحیح در معادلهٔ فوق صدق می‌کند.

۸۱- $\boxed{۱}$ سعی می‌کنیم n را از سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n^۲-۲ \mid ۳n+۲ \xrightarrow{\times ۳n-۲} n^۲-۲ \mid ۹n^۲-۴ \\ n^۲-۲ \mid n^۲-۲ \xrightarrow{\times ۹} n^۲-۲ \mid ۹n^۲-۱۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n^۲-۲ \mid ۱۴$$

$$\begin{cases} n^۲-۲=۱۴ \Rightarrow n^۲=۱۶ \Rightarrow n=\pm۴ \begin{cases} n=+۴ \Rightarrow ۱۴ \mid ۱۴ \checkmark \\ n=-۴ \Rightarrow ۱۴ \mid -۱۰ \times \end{cases} \\ n^۲-۲=۷ \Rightarrow n^۲=۹ \Rightarrow n=\pm۳ \begin{cases} n=+۳ \Rightarrow ۷ \mid ۱۱ \times \\ n=-۳ \Rightarrow ۷ \mid -۷ \checkmark \end{cases} \\ n^۲-۲=۲ \Rightarrow n^۲=۴ \Rightarrow n=\pm۲ \begin{cases} n=+۲ \Rightarrow ۲ \mid ۸ \checkmark \\ n=-۲ \Rightarrow ۲ \mid -۴ \checkmark \end{cases} \\ n^۲-۲=۱ \Rightarrow n^۲=۳ \times \\ n^۲-۲=-۱ \Rightarrow n^۲=۱ \Rightarrow n=\pm۱ \begin{cases} n=+۱ \Rightarrow -۱ \mid ۵ \checkmark \\ n=-۱ \Rightarrow -۱ \mid -۱ \checkmark \end{cases} \\ n^۲-۲=-۲ \Rightarrow n^۲=۰ \Rightarrow n=۰ \Rightarrow -۲ \mid ۲ \checkmark \\ n^۲-۲=-۷ \Rightarrow n^۲=-۵ \times \\ n^۲-۲=-۱۴ \Rightarrow n^۲=-۱۲ \times \end{cases}$$

دقت کنید که بهتر است جواب‌ها در معادلهٔ اصلی چک شوند، برای مثال به ازای $n=-۴$ داریم $n^۲-۲=۱۴$ اما $۳n+۲=-۱۰$ است که $۱۴ \nmid -۱۰$.

بنابراین معادلهٔ $n^۲-۲ \mid ۳n+۲$ به ازای $n=+۴,-۳,+۲,-۲,+۱,-۱,۰$ یعنی ۷ مقدار صحیح n برقرار است.

روش دوم:

> **نکته** ابتدا دقت کنید که در درس‌نامه گفتیم اگر $a \mid b$ آن‌گاه $|a| \le |b|$.

برای سؤالاتی از این روش استفاده می‌کنیم که روند رشد عبارت سمت چپ بیشتر از عبارت سمت راست است:

$$n^۲-۲ \mid ۳n+۲ \Rightarrow |n^۲-۲| \le |۳n+۲|$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$n^۴-۴n^۲+۴\le ۹n^۲+۱۲n+۴ \Rightarrow n^۴-۱۳n^۲-۱۲n\le ۰$$
$$\Rightarrow n(n^۳-۱۳n-۱۲)\le ۰ \Rightarrow n(n+۱)(n^۲-n-۱۲)\le ۰$$
$$\Rightarrow n(n+۱)(n-۴)(n+۳)\le ۰$$

	-۳		-۱		۰		۴	
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow n\in[-۳,-۱]\cup[۰,۴],\ n\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n=-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

حال باید همانند روش اول اعداد فوق را در معادله چک کنیم.

۸۲- ۳

$$n^۳-n=n(n^۲-۱)=(n-۱)n(n+۱)$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ است، پس کافی است $n^۳-n$ مضرب ۸ باشد تا مضرب ۲۴ شود. حالا برای n دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر n فرد باشد: $n=۲k+۱ \Rightarrow (n-۱)n(n+۱)$

$$=۲k(۲k+۱)(۲k+۲)=۴k(۲k+۱)(k+۱)$$
$$=۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{زوج}}(۲k+۱) \Rightarrow \text{همواره مضرب ۸ است.} \Rightarrow$$

به ازای ۴۵ عدد فرد دورقمی $n^۳-n$ مضرب ۲۴ می‌شود.

حالت دوم: اگر n زوج باشد:

$$n=۲k \Rightarrow (n-۱)^n(n+۱)=(۲k-۱)۲k(۲k+۱)$$

$۲k-۱$ و $۲k+۱$ فردند، پس برای این‌که عدد مضرب ۸ شود، k باید مضرب ۴ باشد، یعنی n باید مضرب ۸ شود که $[\frac{۹۹}{۸}]-[\frac{۹}{۸}]=۱۱$ عدد دورقمی مضرب ۸ داریم، پس جواب $۴۵+۱۱=۵۶$ می‌شود.

۸۳- ۴ عدد ۳^n را ببینید. فقط عامل سه دارد؛ یعنی فقط بر اعداد ۳^m که $۰\le m\le n$ است، بخش‌پذیر می‌باشد؛ یعنی n باید توانی از ۳ باشد. توان‌های ۳ که دو یا سه‌رقمی هستند را امتحان می‌کنیم:

$$n=۲۷ \Rightarrow (۲۷)^۳ \mid ۳^{۲۷} \Rightarrow ۳^۹ \mid ۳^{۲۷} \checkmark$$
$$n=۸۱ \Rightarrow (۸۱)^۳ \mid ۳^{۸۱} \Rightarrow ۳^{۱۲} \mid ۳^{۸۱} \checkmark$$
$$n=۲۴۳ \Rightarrow (۲۴۳)^۳ \mid ۳^{۲۴۳} \Rightarrow ۳^{۱۵} \mid ۳^{۲۴۳} \checkmark$$
$$n=۷۲۹ \Rightarrow (۷۲۹)^۳ \mid ۳^{۷۲۹} \Rightarrow ۳^{۱۸} \mid ۳^{۷۲۹} \checkmark$$

بنابراین به ازای ۴ مقدار طبیعی ۲ یا ۳رقمی، $n^۳ \mid ۳^n$.

۸۴- ۲ به ازای $n=۱$، $a=۳$ می‌شود، پس:

$$a \mid k^۲+۳ \Rightarrow ۳ \mid k^۲+۳$$

که عبارت فوق به ازای kهای مضرب ۳ برقرار است.

اما اگر $n\ge ۲$ باشد، $a=۹,۲۷,۸۱,\dots$؛ یعنی $a=۹t$ است. حال می‌دانیم هر عددی مثل k در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

۱) یا بر ۳ بخش‌پذیر است. $\Leftarrow k=۳q$

۲) یا بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد. $\Leftarrow k=۳q+۱$

۳) یا بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۲ دارد. $\Leftarrow k=۳q+۲$

در هر سه حالت $k^۲+۳$ را پیدا می‌کنیم: $k=۳q \Rightarrow k^۲+۳=۹q^۲+۳$

$$k=۳q+۱ \Rightarrow k^۲+۳=۹q^۲+۶q+۴$$
$$k=۳q+۲ \Rightarrow k^۲+۳=۹q^۲+۱۲q+۷$$

همان‌طور که می‌بینید هیچ‌کدام از این عبارت‌ها مضرب ۹ نیستند؛ پس $۹\nmid k^۲+۳$ پس $۹t\nmid k^۲+۳$، یعنی به ازای $n\ge ۲$، $a\nmid k^۲+۳$

(یه جور راحت‌تری هم همین‌ها رو می‌شه گفت. نگاه کن اگر k مضرب ۳ باشه، $k^۲$ مضرب ۹ می‌شه پس $k^۲+۳$ دیگه نمی‌تونه به ۹ بخش‌پذیر باشه. اگه هم که k مضرب ۳ نباشه، $k^۲$ هم مضرب ۳ نیست. $k^۲+۳$ حتی مضرب ۳ هم نیست چه برسه مضرب ۹).

۸۵- ۳ **نکته** اگر a عددی صحیح و فرد باشد، مربع آن به صورت $a^۲=۸t+۱$ می‌باشد.

پس: همواره به ۸ بخش‌پذیر است $\rightarrow a^۲+۷=۸t+۸=۸(t+۱)$

به ازای $a=۱$، $a^۲+۷=۸$ است که مثال نقضی برای مابقی گزینه‌هاست.

۸۶- ۴ ابتدا y را تنها می‌کنیم:

$$۸y-x^۲=۷ \Rightarrow ۸y=x^۲+۷ \Rightarrow y=\frac{x^۲+۷}{۸}$$

x و y اعدادی صحیح هستند، پس: $۸ \mid x^۲+۷$

حالا دقت کنید هر عدد صحیح x به یکی از دو صورت زیر است:

۱) $x=۲t$ که در این حالت $x^۲=۴t^۲$ و $x^۲+۷=۴t^۲+۷$ که بر ۸ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

۲) $x=۲t+۱$ که در این حالت $x^۲$ مربع یک عدد صحیح فرد است پس به صورت $x^۲=۸m+۱$ نوشته می‌شود، پس $x^۲+۷=۸m+۸$ است که بر ۸ بخش‌پذیر می‌باشد.

بنابراین $۸ \mid x^۲+۷$ به ازای اعداد $x=۲t+۱$ یا به بیان دیگر اعداد فرد صحیح است که مجموعهٔ A شامل ۵ عدد فرد می‌باشد. اما دقت کنید به ازای $x=۹$، $y=۱۱$ می‌شود که در A نیست، پس جواب ۴ می‌شود.

۸۷- ۴ a عددی فرد است و $p+۲ \mid a$ پس $p+۲$ هم باید عددی فرد باشد (زیرا یک عدد فرد به یک عدد زوج بخش‌پذیر نیست)، بنابراین a و p هر دو اعداد فرد هستند، پس مربع آن‌ها در تقسیم بر ۸ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد:

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۸t+۱ \Rightarrow ۲a^۲=۱۶t+۲ \\ p^۲=۸k+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a^۲+p^۲+۲$$
$$=۱۶t+۲+۸k+۱+۲ \Rightarrow ۲a^۲+p^۲+۲=۱۶t+۸k+۵=۸(۲t+k)+۵$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد فوق بر ۸ برابر ۵ می‌باشد.

۸۸- ۳ a و b دو عدد صحیح هستند که ضربشان فرد است، پس a و b هر دو فرد هستند، بنابراین $a+۲$ نیز عددی فرد است، پس مربع آن به صورت $(a+۲)^۲=۸t+۱$ نوشته می‌شود:

$$(a+۲)^۲+۸(b-۲)+۱۲=۸t+۱+۸(b-۲)+۸+۴$$
$$=۸t+۸(b-۲)+۸+۵$$
$$\Rightarrow (a+۲)^۲+۸(b-۲)+۱۲=۸(t+b-۲+۱)+۵$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+۲)^۲+۸(b-۲)+۱۲$ بر ۸ برابر ۵ می‌باشد.

۸۹- ۳ ابتدا $p^{۱۶}-۱$ را تجزیه می‌کنیم:

$$p^{۱۶}-۱=(p^۸-۱)(p^۸+۱)=(p^۴-۱)(p^۴+۱)(p^۸+۱)$$
$$=(p^۲-۱)(p^۲+۱)(p^۴+۱)(p^۸+۱)$$

حال طبق گفتهٔ سؤال p عددی فرد است، پس مربع آن به صورت $p^۲=۸t+۱$ نوشته می‌شود: $p^۲=۸t+۱$

$$\Rightarrow p^۴=(۸t+۱)^۲=۶۴t^۲+۱۶t+۱=۸(۸t^۲+۲t)+۱=۸k+۱$$
$$\Rightarrow p^۴=۸k+۱ \Rightarrow p^۸=(۸k+۱)^۲=۶۴k^۲+۱۶k+۱$$
$$=۸(۸k^۲+۲k)+۱=۸m+۱ \Rightarrow p^۸=۸m+۱$$
$$p^{۱۶}-۱=(p^۲-۱)(p^۲+۱)(p^۴+۱)(p^۸+۱)$$
$$=(۸t+۱-۱)(۸t+۱+۱)(۸k+۱+۱)(۸m+۱+۱)$$
$$=\underbrace{۸t}_{\text{۳ عامل ۲}}\ \underbrace{(۸t+۲)}_{\text{(فقط ۱ عامل ۲)}}\ \underbrace{(۸k+۲)}_{\text{(فقط ۱ عامل ۲)}}\ \underbrace{(۸m+۲)}_{\text{(فقط ۱ عامل ۲)}}$$

پس $p^{۱۶}-۱$ حداکثر ۶ عامل ۲ دارد، بنابراین بزرگ‌ترین مقدار n که به ازای آن $p^{۱۶}-۱$ همواره بر ۲^n بخش‌پذیر باشد $n=۶$ می‌باشد.

۹۰- [۳] **نکته** می‌دانیم n اگر مضرب زوجی از t باشد، $a^n - b^n$ هم بر $a^t - b^t$ و هم بر $a^t + b^t$ بخش‌پذیر است.

۴۸ مضرب زوجی از ۲ است، پس: $3^{48} - 2^{48} = (3^2)^{24} - (2^2)^{24}$

$3^{48} - 2^{48}$ هم بر $3^2 - 2^2 = 5$ و هم بر $3^2 + 2^2 = 13$ بخش‌پذیر است.

(بر [۴] بخش‌پذیر است.) $3^{48} - 2^{48} = (3^3)^{16} - (2^3)^{16}$

۴۸ مضرب زوجی از ۳ است، پس $3^{48} - 2^{48}$ هم بر $3^3 - 2^3 = 19$ و هم بر $3^3 + 2^3 = 35$. (بر [۱] و [۲] هم بخش‌پذیر است.)

۹۱- [۱] **نکته** می‌دانیم اگر x مضرب فردی از t باشد، $a^n + b^n$ بر $a^t + b^t$ بخش‌پذیر است.

در این نوع سؤال‌ها اول باید توان‌ها را یکسان کنیم:

$$3^{21} + 7^{14} = (3^3)^7 + (7^2)^7 = 27^7 + 49^7$$

۷ مضرب فردی از ۱ است، پس $27^7 + 49^7$ بر $27^1 + 49^1 = 76$ یعنی بر 4×19 بخش‌پذیر است.

۹۲- [۱] با کمی دقت می‌توان فهمید $3^5 + 1 = 244$. حال اتحادهای بخش‌پذیری را در ذهنتان یک لحظه مرور کنید. با توجه به این کسر $3^5 + 1 \mid 3^m + 1$ به نظر شما از کدام اتحاد باید استفاده کنیم؟ بله $a + b \mid a^n + b^n$ که شرط آن هم این است که n باید فرد باشد.

a را برابر 3^5 و b را برابر یک فرض می‌کنیم. داریم: $1 + 3^5 \mid (3^5)^{2k+1} + 1^{2k+1}$

(دقت کنید چون n فرد است به صورت $2k+1$ نوشتیمش.)

$$\Rightarrow 244 \mid 1 + 3^{10k+5}$$

حالا این را با رابطهٔ صورت سؤال مقایسه کنید، به راحتی می‌توان متوجه شد که m باید به صورت $10k+5$ باشند. داریم:

$$10 \le 10k + 5 \le 99 \Rightarrow 5 \le 10k \le 94 \Rightarrow 0/5 \le k \le 9/4$$

پس رابطه به ازای $k = 1,2,3,\dots,9$ یعنی ۹ عدد برقرار است.

روش دوم: دیدیم: $3^5 + 1 \mid 3^m + 1$

پس m مضرب فرد ۵ است، یعنی $\frac{m}{5} = 2k + 1 \Rightarrow m = 10k + 5$

ادامه مانند روش اول

۹۳- [۲] با کمی دقت می‌توان فهمید $7^3 + 1 = 344$، حال دقت کنید

نکته می‌دانیم $a^t + b^t \mid a^n - b^n$ برقرار است. اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد.

حال داریم:

پس n باید مضرب زوج ۳ باشد، پس: $7^3 + 1 \mid 7^n - 1$

$$\frac{n}{3} = 2k \Rightarrow n = 6k$$

$$6k \le 1200 \Rightarrow k \le 200 \Rightarrow k = 1,2,3,\dots,200$$

پس رابطه به ازای ۲۰۰ عدد برقرار است.

۹۴- [۲] **نکته** ابتدا دقت کنید اگر n مضرب صحیح از t باشد، $a^n - b^n$ بر $a^t - b^t$ بخش‌پذیر است.

$$211 \mid 3^n - 2^n$$

اول از همه باید سمت چپ را به صورت توان‌های ۲ و ۳ بنویسیم:

$$211 = 243 - 32 = 3^5 - 2^5 \Rightarrow 3^5 - 2^5 \mid 3^n - 2^n$$

حال n باید مضرب صحیحی از ۵ باشد، یعنی: $n = 5t$

مقادیر دورقمی n مدنظر است، پس: $10 \le 5t \le 99$

$\Rightarrow 2 \le t \le 19/8 \Rightarrow t = 2,3,4,\dots,19 \rightarrow$ ۱۸ مقدار

بنابراین ۱۸ عدد دورقمی بخش‌پذیر بر ۵ داریم.

۹۵- [۱] $\frac{n(n+1)}{7}$ باید مضرب زوجی از n باشد، به بیان دیگر $\dfrac{\frac{n(n+1)}{7}}{\frac{n}{1}}$ باید عددی زوج باشد، بنابراین:

$$\dfrac{\frac{n(n+1)}{7}}{\frac{n}{1}} = \frac{n+1}{7} = 2t \Rightarrow n + 1 = 14t \Rightarrow n = 14t - 1$$

حال مقادیر دورقمی n مدنظر است، پس:

$$10 \le 14t - 1 \le 99 \Rightarrow 11 \le 14t \le 100 \Rightarrow 0/7 \le t \le 7/1$$

$\Rightarrow t = 1,2,3,\dots,7 \rightarrow$ ۷ مقدار

۹۶- [۲] **روش اول**: دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 468 = 2^2\times3^2\times13 \\ 378 = 2^1\times3^3\times7 \end{array}\right\} \Rightarrow (468,378) = 2^1\times3^2$$

$\Rightarrow (1+1)(2+1) = 6 \rightarrow$ مقسوم‌علیه

روش دوم: اگر دیدید عددها خوب تجزیه نمی‌شوند. برای پیداکردن ب.م.م دو عدد می‌توانیم از روش نردبانی استفاده کنیم.

q	۱	۴	۵
۴۶۸	۳۷۸	۹۰	ب.م.م
r	۹۰	۱۸	۰

$$\Rightarrow (468,378) = 18 = 3^2\times2^1$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $(2+1)(1+1) = 6$

۹۷- [۲] **نکته** ابتدا دقت کنید می‌دانیم: $(ax,bx) = |x|(a,b)$

پس: $(6m^2, 4m) = (2m\times3m, 2m\times2) = 2|m|(3m,2)$

$$\Rightarrow \frac{(6m^2,4m)}{|m|} = 2(3m,2)$$

حال دو حالت داریم:

۱) اگر m عددی زوج یعنی $m = 2t$ باشد، داریم:

$$2(3m,2) = 2(3\times2t,2) = 4(3t,1) = 4$$

۲) اگر m عددی فرد یعنی $m = 2t+1$ باشد، داریم:

$$2(3m,2) = 2(3(2t+1),2) = 2(\overbrace{6t+3}^{\text{فرد}},2) = 2$$

بنابراین حاصل $\frac{(6m^2,4m)}{|m|}$ یکی از مقادیر ۲ و یا ۴ است.

۹۸- [۲] ابتدا $2 \mid a$ را به تساوی تبدیل می‌کنیم: $2 \mid a \Rightarrow a = 2t$

حال با جای‌گذاری در $(3a^2, 420)$ داریم: (می‌دانیم $(ax,bx) = |x|(a,b)$):

$$(3a^2, 420) = (3\times4t^2, 2^2\times3\times5\times7) = 12(t^2, 5\times7)$$

دقت کنید t عددی صحیح است که می‌تواند عوامل اول مختلفی داشته باشد اما در بین عوامل اول t، تنها عامل‌های ۵ و ۷ به درد می‌خورند، پس ۴ حالت در نظر می‌گیریم:

۱) t نه عامل ۵ و نه عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5\times7) = 1$ است.

۲) t عامل ۵ داشته باشد ولی عامل ۷ نداشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5\times7) = 5$ است.

۳) t عامل ۵ نداشته باشد ولی عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5\times7) = 7$ است.

۴) و حالت آخر این‌که t هم عامل ۵ و هم عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5\times7)=35$ است.

بنابراین حاصل $(t^2, 5\times7)$ می‌تواند ۴ مقدار مختلف باشد، که در نتیجه $(3a^2, 420)$ هم می‌تواند ۴ مقدار مختلف باشد.

۹۹- [۲] $(a,18)=(a,2\times3^2)\neq1$

بنابراین a دارای عامل اول ۲ یا ۳ می‌باشد که مقادیر تک‌رقمی آن به صورت مقابل است: $a=2,3,4,6,8,9$

که مجموع آن‌ها برابر است با: $2+3+4+6+8+9=32$

۱۰۰- [۱] می‌دانیم:

$$(3n+2,36)=d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|36 \\ d|3n+2\end{array}\right\} \Rightarrow d|2^2\times3^2$$

$3n+2$ عامل ۳ ندارد اما می‌تواند عامل ۴ داشته باشد، پس بزرگ‌ترین مقدار d برابر ۴ است (برای مثال به ازای $n=2$، حاصل $(3n+2,36)=(8,36)=4$ می‌باشد.) که ۳ مقسوم‌علیه دارد.

۱۰۱- [۱] می‌دانیم ۱۱ عدد اول است، بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک یک عدد دیگر با ۱۱ یا برابر ۱ است و یا برابر ۱۱. (برای مثال $(12,11)=1$ ولی $(33,11)=11$.) حالا در این سؤال می‌دانیم $(n-8,11)$ بزرگ‌تر از ۱ است، پس برابر ۱۱ می‌باشد، پس:

$$(n-8,11)=11 \Rightarrow 11|n-8 \Rightarrow n-8=11t \Rightarrow n=11t+8$$

حال می‌خواهیم n دورقمی باشد، پس $10\le n\le 99$ داریم:

$$10\le 11t+8\le 99 \Rightarrow 2\le 11t\le 91 \Rightarrow 1\le t\le 8$$

$$\Rightarrow t=1,2,3,\dots,8$$

یعنی به ازای ۸ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

۱۰۲- [۲] **نکته** می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، آن‌گاه $d|a$ و $d|b$.

بنابراین: $(n,36)=18 \Rightarrow 18|n \Rightarrow n=18q$

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد، n مضرب ۳۶ می‌شود و در نتیجه $(n,36)$ برابر ۳۶ می‌شود پس q فرد است:

$$q=2k+1 \Rightarrow n=18(2k+1)=36k+18$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$10\le 36k+18\le 99 \Rightarrow -8\le 36k\le 81 \Rightarrow -0/2\le k\le 2/25$$

$$\Rightarrow k=0,1,2$$

پس به ازای ۳ عدد، رابطه برقرار است.

۱۰۳- [۲]

$$(15a,21b)=102 \Rightarrow 3(5a,7b)=102 \Rightarrow (5a,7b)=34$$

بنابراین 5a و 7b هر دو بر ۳۴ بخش‌پذیرند و چون ۵ و ۷ نسبت به ۳۴ اول‌اند پس a و b هر دو به ۳۴ بخش‌پذیرند و در نتیجه $(a,b)=34$.

۱۰۴- [۲] $(a,9)=3$ و $(b,9)=3$ پس a و b هر کدام فقط یک عامل ۳ دارند، پس ab فقط ۲ عامل ۳ دارد، پس: $(ab,27)=9$

$a=3$ و $b=6$ مثال نقض گزینه‌های [۱] و [۴] است:

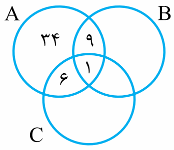
$$(a+b,9)=3 \Rightarrow (3+6,9)=(9,9)=9$$

$$(ab,27)=27 \Rightarrow (3\times6,27)=(18,27)=9$$

و $a=3$ و $b=3$ مثال نقض [۳] است:

$$(a+b,9)=9 \Rightarrow (3+3,9)=(6,9)=3$$

۱۰۵- [۴] چون $(n,70)=2$ است، پس n زوج است اما عامل ۵ و ۷ ندارد. این سؤال را با کمک از مجموعه‌ها حل می‌کنیم. A را اعداد بخش‌پذیر بر ۲، B را اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و C را اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در نظر می‌گیریم:



$$n(A)=[\frac{100}{2}]=50$$

$$n(A\cap B)=[\frac{100}{10}]=10$$

$$n(A\cap C)=[\frac{100}{14}]=7$$

$$n(A\cap B\cap C)=[\frac{100}{70}]=1$$

بنابراین ۳۴ عدد وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ و ۷ نباشد.

۱۰۶- [۳] اول از همه اعداد را تجزیه می‌کنیم:

$$(n,180)=6 \Rightarrow (n,2^2\times3^2\times5^1)=2^1\times3^1$$

پس n فقط ۱ عامل ۲ و فقط ۱ عامل ۳ دارد و عامل ۵ ندارد. یعنی $n=6t$ است که t عامل ۲ و ۳ و ۵ ندارد. t می‌تواند عوامل دیگر داشته باشد برای مثال:

$$n=6\times7=42 \qquad n=6\times11=66 \qquad n=6\times13=78$$

از ۱۷ به بعد n، عدد بزرگ‌تر از صد است. $n=6\times17=102>100$

و یا این‌که هیچ عامل دیگری نداشته باشد $n=6$. بنابراین n می‌تواند ۳ عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد.

۱۰۷- [۱] a عامل ۳ ندارد و دقیقاً ۲ عامل ۷ دارد.

$$(a,7^3\times3)=49=7^2 \Rightarrow 49|a \Rightarrow a=49q$$

b عامل ۷ ندارد و دقیقاً ۳ عامل ۳ دارد.

$$(b,3^4\times7)=27=3^3 \Rightarrow 27|b \Rightarrow b=27q'$$

$$(a^2b^3,21^5)=(\underbrace{(7^2)^2q^2\times(3^3)^3q'^3}_{7^4\times3^9\times q^2\times q'^3},3^5\times7^5)=7^4\times3^5$$

بنابراین $x=5$ و $y=4$ و در نتیجه $xy=20$ است.

۱۰۸- [۳] اول از همه عددها را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$(a,18)=6 \Rightarrow (a,2\times3^2)=2\times3$$

که نتیجه می‌شود a حداقل ۱ عامل دو دارد و دقیقاً یک عامل ۳.

$$(a,121)=11 \Rightarrow (a,11^2)=11$$

بنابراین a دقیقاً یک عامل ۱۱ دارد.

پس در کل a حداقل ۱ عامل ۲، دقیقاً یک عامل ۳ و یک عامل ۱۱ دارد.

حالا می‌دانیم: $(a,2^2\times3^2\times7^2\times11^2)=2^\alpha\times3^\beta\times7^\theta\times11^\gamma$

که مشخص است $\beta=1$ و $\gamma=1$ می‌باشد (زیرا a فقط ۱ عامل ۳ و یک عامل ۱۱ دارد). اما α دو حالت دارد؛ اگر a فقط یک عامل ۲ داشته باشد $\alpha=1$ و اگر a بیش از یک عامل ۲ داشته باشد $\alpha=2$ می‌باشد. برای بررسی θ اگر a عامل ۷ نداشته باشد $\theta=0$، اگر a فقط ۱ عامل ۷ داشته باشد $\theta=1$ و اگر a بیش از ۱ عامل ۷ داشته باشد $\theta=2$ می‌باشد. پس در کل α دو حالت، β یک حالت، θ سه حالت و γ یک حالت دارد که طبق اصل ضرب جواب مسئله ۶ مقدار متمایز می‌تواند باشد.

۱۰۹- [۴] تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(5a+1,5a+6)=d \Rightarrow \left.\begin{array}{l}d|5a+1\\d|5a+6\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d|5$$

$\Rightarrow d=1$ یا ۵

اما d نمی‌تواند ۵ باشد، زیرا $5\nmid 5a+1$، بنابراین $d=1$ است و [۱] صحیح است.

$$(7a+2,7a+9)=d \Rightarrow \left.\begin{array}{l}d|7a+2\\d|7a+9\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d|7$$

$\Rightarrow d=1$ یا ۷

اما d نمی‌تواند ۷ باشد، زیرا $7\nmid 7a+2$ بنابراین $d=1$ است و [۲] نیز صحیح است.

$$(۳a-۱,۳a+۲)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۳a-۱ \\ d|۳a+۲\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۳$$

$\Rightarrow d=۱$ یا ۳

اما d نمی‌تواند ۳ باشد، زیرا $۳ \nmid ۳a-۱$ بنابراین $d=۱$ است و ۳ صحیح است.

$$(۲a-۲,۲a+۱)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۲a-۲ \\ d|۲a+۱\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۳$$

$\Rightarrow d=۱$ یا ۳

که حاصل ب.م.م هم ۳ و هم ۱ می‌تواند باشد، برای مثال به ازای $a=۴$:

$(۲a-۲,۲a+۱)=(۶,۹)=۳$

و به ازای $a=۳$ داریم: $(۴,۷)=۱$

بنابراین ۳ یا ۱ $=(۲a-۲,۲a+۱)$ می‌باشد و ۴ نادرست است.

۱۱۰- ۳ اگر $a=۶$ و $b=۸$ باشد $(a,b)=(۶,۸)=۲$ پس ۱ نادرست است.

اگر $a=۹$ و $b=۸$ باشد، $(a,b+۱)=(۹,۹)=۹$ پس ۲ نادرست است.

اگر $a=۹$ و $b=۸$ باشد، $(a+b-۱,۳)=(۱۶,۳)=۱$ پس ۴ هم نادرست است.

حال برای اثبات درستی ۳ داریم:

$$\begin{matrix} ۳|a \\ ۳|b+۱\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ۳|a+b+۱ \\ ۳|۳\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a+b+۱,۳)=۳$$

۱۱۱- ۲ ابتدا داریم:

$$(a,b)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|a \xrightarrow{\times ۴a} d|۴a^۲ \\ d|b \Rightarrow d|b\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۴a^۲-b$$

طبق گفتهٔ سؤال $d|۴a^۲-b+۱۳$ پس:

$$\left.\begin{matrix} d|۴a^۲-b \\ d|۴a^۲-b+۱۳\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۱۳ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۳$$

حال $(a,b)=d>۱$ پس $d=۱۳$. بنابراین a مضرب ۱۳ است که در بین گزینه‌ها فقط ۳۹ مضرب ۱۳ است.

۱۱۲- ۳ حاصل (b,c) را برابر d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(b,c)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|b \\ d|c\end{matrix}$$

در صورت سؤال گفته شده $c|۲a-۳b$، بنابراین:

$$d|c,c|۲a-۳b \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۲a-۳b \Rightarrow d|۲a-۳b \\ \text{از طرفی: } d|b \xrightarrow{\times ۳} d|۳b\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(+)} d|۲a$$

اما طبق گفتهٔ سؤال b عددی فرد است و $d|b$، پس d نیز عددی فرد است، بنابراین از $d|۲a$ می‌توان نتیجه گرفت $d|a$ (چون d عامل ۲ ندارد). در نتیجه $d|a$ و $d|b$.

$$\left.\begin{matrix} d|a \\ d|b\end{matrix}\right\} \Rightarrow d|(a,b)=۷ \Rightarrow d|۷ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷$$

به عنوان مثال نقض ۴، $a=-۷$ و $b=۷$ را در نظر بگیرید:

$c|۲a-۳b \Rightarrow c|-۳۵$ که واضح است ب.م.م $|c|$ نمی‌شود.

۱۱۳- ۱ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(۱۵n+۷,۱۳n+۶)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۱۵n+۷ \xrightarrow{\times ۱۳} d|۱۹۵n+۹۱ \\ d|۱۳n+۶ \xrightarrow{\times ۱۵} d|۱۹۵n+۹۰\end{matrix}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۱ \Rightarrow d=۱$$

یعنی به ازای همهٔ مقادیر n دو عدد نسبت به هم اول‌اند. ۹۰۰ عدد سه‌رقمی داریم، پس جواب سؤال ۹۰۰ است.

۱۱۴- ۲

$$(۷n-۲,۱۳n+۵)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۱۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d|۹۱n+۳۵ \\ d|۷n-۲ \xrightarrow{\times ۱۳} d|۹۱n-۲۶\end{matrix}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۶۱ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۶۱$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند، ب.م.م ۶۱ است.

۱۱۵- ۴ ب.م.م دو عدد را d در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} d|۲۱n+۱ \xrightarrow{\times ۲} d|۴۲n+۲ \\ d|۱۴n+۳ \xrightarrow{\times ۳} d|۴۲n+۹\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۷ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷$$

اما d نمی‌تواند ۷ باشد زیرا $۷ \nmid ۲۱n+۱$ پس d همواره برابر ۱ است، پس به ازای ۹۰ عدد دورقمی دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۱۱۶- ۲ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$(۳n+۷,۴n+۵)=d \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۴n+۵ \xrightarrow{\times ۳} d|۱۲n+۱۵ \\ d|۳n+۷ \xrightarrow{\times ۴} d|۱۲n+۲۸\end{matrix}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۱۳ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۳$$

دو عدد نسبت به هم اول نیستند پس $d=۱۳$.

بنابراین می‌دانیم هر دو عبارت مضرب ۱۳ هستند، یعنی:

$$\left.\begin{matrix} ۱۳|۳n+۷ \\ ۱۳|۴n+۵\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(+)} ۱۳|۷n+۱۲$$

۱۱۷- ۲ گزینه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم:

۱ $(an+۷,۳n+۲)=d \xrightarrow{a=۱۵} (۱۵n+۷,۳n+۲)=d$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۱۵n+۷ \xrightarrow{\times ۱} d|۱۵n+۷ \\ d|۳n+۲ \xrightarrow{\times ۵} d|۱۵n+۱۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۳$$

$\Rightarrow d=۱$ یا ۳

اما d نمی‌تواند برابر ۳ باشد، زیرا $۳n+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

۲ $(an+۷,۳n+۲)=d \xrightarrow{a=۸} (۸n+۷,۳n+۲)=d$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۸n+۷ \xrightarrow{\times ۳} d|۲۴n+۲۱ \\ d|۳n+۲ \xrightarrow{\times ۸} d|۲۴n+۱۶\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۵$$

$\Rightarrow d=۱$ یا ۵

که برای مثال به ازای $n=۱$ داریم: $(۸n+۷,۳n+۲)=(۱۵,۵)=۵$

بنابراین دو عدد همواره نسبت به هم اول نیستند.

۳ $(an+۷,۳n+۲)=d \xrightarrow{a=۱۱} (۱۱n+۷,۳n+۲)=d$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۱۱n+۷ \xrightarrow{\times ۳} d|۳۳n+۲۱ \\ d|۳n+۲ \xrightarrow{\times ۱۱} d|۳۳n+۲۲\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۱ \Rightarrow d=۱$$

بنابراین دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

۴ $(an+۷,۳n+۲)=d \xrightarrow{a=۶} (۶n+۷,۳n+۲)=d$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۶n+۷ \xrightarrow{\times ۱} d|۶n+۷ \\ d|۳n+۲ \xrightarrow{\times ۲} d|۶n+۴\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d|۳ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۳$$

اما d نمی‌تواند برابر ۳ باشد زیرا $۳n+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

۱۱۸- [۳] ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم، داریم:

$$(۵n-۲,n+۳)=d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d\mid ۵n-۲ \xrightarrow{\times ۱} d\mid ۵n-۲ \\ d\mid n+۳ \xrightarrow{\times ۵} d\mid ۵n+۱۵\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} d\mid ۱۷ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۷$$

ابتدا حالاتی را می‌شماریم که $d=۱۷$ باشد یعنی دو عدد بر ۱۷ بخش‌پذیر باشند:

$$n+۳=۱۷k \Rightarrow n=۱۷k-۳$$

n دورقمی است، پس: $۱۰\leq ۱۷k-۳\leq ۹۹ \Rightarrow ۱۳\leq ۱۷k\leq ۱۰۲$

$$\Rightarrow ۰/۷\leq k\leq ۶ \Rightarrow k=۱,۲,۳,\dots,۶ \rightarrow \text{۶ مقدار}$$

یعنی به ازای ۶ مقدار دورقمی n، دو عدد نسبت به هم اول نیستند، پس به ازای $۹۰-۶=۸۴$ مقدار دورقمی، دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

۱۱۹- [۳] بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، هر دو عدد را می‌شمارد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۲n^۲+۳n \xrightarrow{\times ۳} d\mid ۶n^۲+۹n \\ d\mid ۳n+۲ \xrightarrow{\times ۲n} d\mid ۶n^۲+۴n\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۵n$$

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۵n \xrightarrow{\times ۳} d\mid ۱۵n \\ d\mid ۳n+۲ \xrightarrow{\times ۵} d\mid ۱۵n+۱۰\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۱۰$$

$$\xrightarrow{\text{d می‌تواند مقسوم‌علیه‌های ۱۰ باشد}} d=۱,۲,۵,۱۰$$

برای مثال به ازای $n=۱$ داریم: $(۳n+۲,۲n^۲+۳n)=(۵,۵)=۵$

به ازای $n=۲$ داریم: $(۳n+۲,۲n^۲+۳n)=(۸,۱۴)=۲$

به ازای $n=۳$ داریم: $(۳n+۲,۲n^۲+۳n)=(۱۱,۲۷)=۱$

به ازای $n=۶$ داریم: $(۳n+۲,۲n^۲+۳n)=(۲۰,۹۰)=۱۰$

روش دوم: می‌توانیم ریشهٔ $۳n+۲$ را در عبارت $۲n^۲+۳n$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$۳n+۲=۰ \Rightarrow n=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲n^۲+۳n=-\frac{۱۰}{۹} \Rightarrow d\mid -۱۰$$

و ادامهٔ راه حل مانند روش اول است.

۱۲۰- [۲] **نکته** برای پیداکردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را تجزیه کرده، توان‌ها را با یک جمع کرده و در هم ضرب کنیم:

$$n=p_۱^{\alpha_۱}\times p_۲^{\alpha_۲}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$$

ابتدا دقت کنید A و B دارای ۵۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر ۱ هستند، یعنی A و B دارای ۵۴ مقسوم‌علیه مثبت هستند، به بیان دیگر ب.م.م A و B، ۵۴ مقسوم‌علیه مثبت دارد. عامل‌های اول مشترک A و B، ۲ و ۳ و ۵ و ۷ هستند، پس:

$$(A,B)=(۲^۵\times ۳^۲\times ۵^m\times ۷^۳\times ۱۷,\ ۲^۲\times ۳^۶\times ۵^۷\times ۷^n\times ۱۳^۲)$$
$$=۲^a\times ۳^b\times ۵^c\times ۷^d$$

که $a=۲$، $b=۲$، $c\leq ۷$ و $d\leq ۳$ است، پس:

$$(A,B)=۲^۲\times ۳^۲\times ۵^c\times ۷^d$$

از طرفی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد ۵۴تاست، یعنی:

$$۳\times ۳\times (c+۱)(d+۱)=۵۴ \Rightarrow (c+۱)(d+۱)=۶$$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۶ شده است. حالات ممکن را بررسی می‌کنیم:

$(c+۱)$	$(d+۱)$	
۶	۱	$\rightarrow c=۵,d=۰$ ✓
۳	۲	$\rightarrow c=۲,d=۱$ ✓
۲	۳	$\rightarrow c=۱,d=۲$ ✓
۱	۶	$\rightarrow c=۰,d=۵$ ✗ غلط

اما با توجه به این‌که در یکی از عددها $۷^۳$ داریم ب.م.م نمی‌تواند $۷^۵$ شود.

۱۲۱- [۲] $(۲a+۳b,۳a+۴b)=d$ می‌گیریم، پس:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۳} d\mid ۶a+۹b \\ d\mid ۳a+۴b \xrightarrow{\times ۲} d\mid ۶a+۸b\end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d\mid b$$

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۴} d\mid ۸a+۱۲b \\ d\mid ۳a+۴b \xrightarrow{\times ۳} d\mid ۹a+۱۲b\end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d\mid a$$

در نتیجه d مقسوم‌علیه a و b است و با توجه به این‌که $(a,b)=۷$ می‌باشد، d نیز برابر ۷ است.

روش دوم:

نکته اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a,b)=d$ باشد، آن‌گاه اگر x، y، z و t اعداد صحیح باشند داریم:

$$(xa+yb,za+tb)\,\Big|\,\begin{vmatrix} x & y \\ z & t\end{vmatrix} d$$

حال برای حل این سؤال می‌دانیم $(a,b)=۷$، پس:

$$(۲a+۳b,۳a+۴b)\,\Big|\,\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴\end{vmatrix}\times ۷ \Rightarrow (۲a+۳b,۳a+۴)\mid -۷$$

همچنین:

$$(a,b)=۷ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۷\mid a \xrightarrow{\times ۲} ۷\mid ۲a \\ ۷\mid b \xrightarrow{\times ۳} ۷\mid ۳b\end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} ۷\mid ۲a+۳b$$

به طور مشابه $۷\mid ۳a+۴b$ پس: $(۲a+۳b,۳a+۴b)=۷$

۱۲۲- [۲] **نکته** یک نکتهٔ خیلی مهمی که باید بدانید این است که اگر $(a,b)=d$ باشد، d نه‌تنها ب.م.م دو عدد a و b است، بلکه بر بقیهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b نیز بخش‌پذیر است. به بیانی دیگر اگر $(a,b)=d$ و x یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد، یعنی $x\mid a$ و $x\mid b$ می‌توان نتیجه گرفت $x\mid d$.

$$x\mid a,x\mid b \Rightarrow x\mid d$$

نکته همچنین می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، داریم: $(a^n,b^n)=d^n$

$$(ax,bx)=|x|d$$

$$\Rightarrow (a^۲,b^۲)-(۲۰a,۲۰b)+۱۰۰=۰ \Rightarrow d^۲-۲۰d+۱۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (d-۱۰)^۲=۰ \Rightarrow d=۱۰$$

حال طبق نکتهٔ اول: $x\mid a,x\mid b \Rightarrow x\mid d \Rightarrow x\mid ۱۰$

یعنی x یک مقسوم‌علیه ۱۰ است:

$$\text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۰}=\{۱,۲,۵,۱۰\}$$

۱۲۳- [۲] x عددی است که هم ۲۱ و هم ۲۸ آن را عاد می‌کند. حال کوچک‌ترین عدد x همان ک.م.م دو عدد ۲۱ و ۲۸ است:

$$[۲۱,۲۸]=[۳\times ۷,۲^۲\times ۷]=۲^۲\times ۳\times ۷=۸۴$$

که مقسوم‌علیه‌های غیر اول آن به صورت زیر است:

$$\{۱,۴,۶,۱۲,۱۴,۲۱,۲۸,۴۲,۸۴\}$$

یعنی ۹ مقسوم‌علیه غیر اول دارد.

روش دوم: برای شمارش مقسوم‌علیه‌های غیر اول ۸۴، ابتدا دقت کنید $۸۴=۲^۲\times ۳^۱\times ۷^۱$ تعداد کل مقسوم‌علیه‌های ۸۴ برابر است با:

$$\xrightarrow{\text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (۲+۱)(۱+۱)(۱+۱)=۱۲$$

که از این ۱۲ مقسوم‌علیه، ۲، ۳ و ۷ مقسوم‌علیه‌های اول هستند، پس ۹ مقسوم‌علیه غیر اول باقی می‌ماند.

۱۲۴- $\boxed{3}$
$[385,186]=[5\times7\times11,2\times3\times31]$
پس: $([385,186],341)=(2\times3\times5\times7\times11\times31,11\times31)$
$=11\times31=341$

۱۲۵- $\boxed{4}$ **نکته** خیلی ساده می‌توانید ثابت کنید که اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b مساوی باشند، (یعنی $(a,b)=[a,b]$) نتیجه می‌گیریم $|a|=|b|$.

$$|n^2-7n+9|=3 \Rightarrow \begin{cases} n^2-7n+9=3 \\ \Rightarrow n^2-7n+6=0 \Rightarrow n=1,6 \\ n^2-7n+9=-3 \\ \Rightarrow n^2-7n+12=0 \Rightarrow n=3,4 \end{cases}$$

۱۲۶- $\boxed{3}$
$m|m^2 \Rightarrow (m,m^2)=|m|$
$m|m^3 \Rightarrow [m,m^3]=|m^3|$
به بیان دیگر: $[\underbrace{(m,m^2)}_{|m|},m^3]=|m^3|=64 \Rightarrow m=\pm4$

۱۲۷- $\boxed{1}$
$3a^2|6a^4 \Rightarrow (3a^2,6a^4)=|3a^2|=3a^2$
$4a|12a^3 \Rightarrow [4a,12a^3]=|12a^3|$
$3a^2||12a^3| \Rightarrow (3a^2,|12a^3|)=3a^2$
به بیان دیگر: $(\underbrace{(3a^2,6a^4)}_{3a^2},\underbrace{[12a^3,4a]}_{|12a^3|})=3a^2$

۱۲۸- $\boxed{2}$ **یادآوری** اگر $(a,b)=d$ باشد، $(a^n,b^n)=d^n$ است.

پس: $(a,b)=d \Rightarrow (a^2,b^2)=d^2 \Rightarrow (a^2,b^2)=(a,b)^2$
همچنین می‌دانیم:
$(a,b)|[a,b] \xrightarrow{\text{دو طرف}\times(a,b)} (a,b)^2|(a,b)[a,b]$
$,(a,b)^2=(a^2,b^2) \Rightarrow (a^2,b^2)|(a,b)[a,b]$
$\Rightarrow ((a,b)[a,b],(a^2,b^2))=(a^2,b^2)$

۱۲۹- $\boxed{3}$ **نکته** اگر $[a,b]=m$ باشد، $[ax,bx]=m|x|$ است.

$[18!,17!-16!-15!]=[15!\times16\times17\times18,15!(17\times16-16-1)]$
$=15![16\times17\times18,17\times16-16-1]=15![16\times17\times18,255]$
$=15![2^5\times3^2\times17,3\times5\times17]=15!\times2^5\times3^2\times5\times17$
$=15!\times2^4\times17\times2^1\times3^2\times5=15!\times16\times17\times18\times5=18!\times5$

۱۳۰- $\boxed{4}$
$(24,18)=(2^3\times3,2\times3^2)=6$
$\Rightarrow [(24,18),m]=90 \Rightarrow [6,m]=90$
$\Rightarrow [2\times3,m]=2\times3^2\times5$
یعنی m دارای حداکثر ۱ عامل ۲، دقیقاً ۲ عامل ۳ و دقیقاً یک عامل ۵ است، در نتیجه m یکی از اعداد $m=90$ یا $m=45$ است که در میان گزینه‌ها $m=45$ وجود دارد.
روش دوم: گزینه‌ها را تک‌تک امتحان می‌کنیم: $[6,m]=90$
$m=40 \Rightarrow [6,m]=[6,40]=[2\times3,2^3\times5]=120$
$m=60 \Rightarrow [6,m]=[6,60]=[2\times3,2^2\times3\times5]=60$
$m=36 \Rightarrow [6,m]=[6,36]=[2\times3,2^2\times3^2]=36$
$m=45 \Rightarrow [6,m]=[6,45]=[2\times3,3^2\times5]=90$

۱۳۱- $\boxed{3}$ **نکته** برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

عددها را تجزیه می‌کنیم. داریم:
$[m,180]=900 \Rightarrow [m,2^2\times3^2\times5]=2^2\times3^2\times5^2$
m فقط می‌تواند عوامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد و عامل‌های دیگری ندارد. (*چون اگه برای مثال m عامل ۷ هم داشت باید جواب ک.م.م هم عامل ۷ داشته باشه.*)
پس فرم کلی m به صورت $m=2^\alpha\times3^\beta\times5^\theta$ است.
θ حتماً برابر ۲ است چون در تجزیهٔ ۱۸۰ توان ۵ برابر ۱ است ولی در ک.م.م توان عدد ۵ برابر ۲ است، پس $\theta=2$.
β می‌تواند صفر یا ۱ یا ۲ باشد چون در تجزیهٔ ۱۸۰ و جواب ک.م.م ۲ عامل ۳ داریم، پس m نیز دارای حداکثر ۲ عامل ۳ است.
α نیز می‌تواند صفر یا ۱ یا ۲ باشد چون در تجزیهٔ ۱۸۰ و جواب ک.م.م ۲ عامل ۲ داریم، پس m نیز دارای حداکثر ۲ عامل ۲ است.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \theta \\ 3\times & 3\times & 1=9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & \end{array}$$

پس به ازای ۹ مقدار m رابطه برقرار می‌شود. برای درک بهتر، این ۹ حالت را می‌نویسیم:
$m=5^2,5^2\times2,5^2\times2^2,5^2\times3,5^2\times3^2,5^2\times2\times3,5^2\times2^2\times3$
$,5^2\times2\times3^2,5^2\times2^2\times3^2$

۱۳۲- $\boxed{3}$ **نکته** در درس‌نامه گفتیم، اگر $(a,b)=d$ باشد، داریم:
$a=da', b=db', (a',b')=1$
$[a,b]=da'b'$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)=7 \Rightarrow d=7 \\ ab=1764 \Rightarrow a'b'd^2=1764\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b'=36$$

a'	b'	
۱	۳۶	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=7\times37=259$
۲	۱۸	× $(2,18)=2$ غیر قابل قبول زیرا
۳	۱۲	× $(3,12)=3$ غیر قابل قبول زیرا
۴	۹	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=7\times13=91$
۶	۶	× $(6,6)=6$ غیر قابل قبول زیرا

$\Rightarrow 259+91=350$

۱۳۳- $\boxed{3}$ با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در تست قبل:
$[a^2,b^2]=[d^2a'^2,d^2b'^2]=d^2[a'^2,b'^2]=d^2a'^2b'^2$
$(\frac{a^2b^2}{d^2},[a^2,b^2])=(\frac{d^4a'^2b'^2}{d^2},d^2a'^2b'^2)$
$(d^2a'^2b'^2,d^2a'^2b'^2)=d^2a'^2b'^2=[a^2,b^2]$

۱۳۴- $\boxed{4}$ دو رابطه را برحسب a' و b' می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l}(a,b)=11 \Rightarrow d=11 \\ [a,b]=330 \Rightarrow a'b'd=330\end{array} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b'=30$$

a'	b'	
۱	۳۰	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۱\times۳۱=۳۴۱$
۲	۱۵	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۱\times۱۷=۱۸۷$
۳	۱۰	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۱\times۱۳=۱۴۳$
۵	۶	$\Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۱\times۱۱=۱۲۱$

بنابراین $a+b$ نمی‌تواند ۳۵۲ باشد.

۱۳۵- ۲

$$(a,b)=۹ \Rightarrow \begin{cases} a=۹a' \\ b=۹b' \end{cases}$$

$$a+b=۱۲۶ \Rightarrow da'+db'=۹a'+۹b'=۱۲۶$$

$$\Rightarrow a'+b'=۱۴$$

a'	b'	
۱	۱۳	$\Rightarrow [a,b]=da'b'=۹\times۱\times۱۳=۱۱۷$
۲	۱۲	× غیر قابل قبول زیرا $(۲,۱۲)=۲$
۳	۱۱	$\Rightarrow [a,b]=da'b'=۹\times۳\times۱۱=۲۹۷$
۴	۱۰	× غیر قابل قبول زیرا $(۴,۱۰)=۲$
۵	۹	$\Rightarrow [a,b]=da'b'=۹\times۵\times۹=۴۰۵$
۶	۸	× غیر قابل قبول زیرا $(۶,۸)=۲$
۷	۷	× غیر قابل قبول زیرا $(۷,۷)=۷$

در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار $[a,b]$ برابر ۴۰۵ می‌باشد.

۱۳۶- ۲

$$۲ab=۳(a,b)^۲+۱ \Rightarrow ۲d^۲a'b'=۳d^۲+۱$$

$$\Rightarrow ۲d^۲a'b'-۳d^۲=۱ \Rightarrow d^۲(۲a'b'-۳)=۱$$

ضرب دو عدد $d^۲$ و $۲a'b'-۳$ برابر ۱ شده و $d^۲\geq ۰$ است، پس هر دو برابر ۱ هستند: $d^۲=۱ \Rightarrow d=۱$

$$۲a'b'-۳=۱ \Rightarrow ۲a'b'=۴ \Rightarrow a'b'=۲ \Rightarrow \begin{cases} a'=۱ \\ b'=۲ \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$a^۲+b^۲=d^۲a'^۲+d^۲b'^۲=d^۲(a'^۲+b'^۲)=۱\times۵=۵$$

۱۳۷- ۲

$$۲[a,b]=۴۱(a,b)+۱۳ \Rightarrow ۲da'b'=۴۱d+۱۳$$

$$\Rightarrow ۲da'b'-۴۱d=۱۳ \Rightarrow d(۲a'b'-۴۱)=۱۳$$

حال با توجه به این‌که $(a,b)\neq ۱$ و d مثبت است، پس: $d=۱۳$

$$۲a'b'-۴۱=۱ \Rightarrow ۲a'b'=۴۲ \Rightarrow a'b'=۲۱$$

$$a'=۱, b'=۲۱ \Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۳\times۲۲=۲۸۶$$

$$a'=۳, b'=۷ \Rightarrow a+b=da'+db'=d(a'+b')=۱۳\times۱۰=۱۳۰$$

که در بین گزینه‌ها ۱۳۰ موجود است.

۱۳۸- ۲

$$a+b=۴۲ \Rightarrow da'+db'=۴۲ \Rightarrow d(a'+b')=۴۲$$

$$\Rightarrow a'+b' \mid ۴۲$$

$$\frac{[a,b]}{(a,b)}=۱۲ \Rightarrow \frac{da'b'}{d}=۱۲ \Rightarrow a'b'=۱۲$$

a'	b'	
۱	۱۲	× نادرست است، زیرا $a'+b'=۱۳$ که $۱۳ \nmid ۴۲$
۱۲	۱	× به طور مشابه نادرست
۲	۶	× نادرست است؛ زیرا $(۲,۶)=۲$
۶	۲	× به طور مشابه نادرست
۳	۴	✓ $\Rightarrow a'+b'=۷ \Rightarrow d=۶ \Rightarrow a=۱۸, b=۲۴$
۴	۳	✓ $\Rightarrow a'+b'=۷ \Rightarrow d=۶ \Rightarrow a=۲۴, b=۱۸$

بنابراین ۲ زوج طبیعی a و b وجود دارد.

۱۳۹- ۲

$$۲a=۷b \Rightarrow ۲da'=۷db' \Rightarrow ۲a'=۷b' \Rightarrow \begin{cases} a'=۷ \\ b'=۲ \end{cases}$$

به علاوه: $[a^۲,b^۲]=[d^۲a'^۲,d^۲b'^۲]=d^۲a'^۲b'^۲$

پس:

$$۳ab+\frac{[a^۲,b^۲]}{۱۴}=۵۰۴ \Rightarrow ۳d^۲a'b'+\frac{d^۲a'^۲b'^۲}{۱۴}=۵۰۴$$

به جای $a'=۷$ و $b'=۲$ قرار می‌دهیم:

$$۴۲d^۲+۱۴d^۲=۵۰۴ \Rightarrow ۵۶d^۲=۵۰۴ \Rightarrow d^۲=۹ \Rightarrow d=۳$$

۱۴۰- ۲

$$[a,b]=۴۲ \Rightarrow da'b'=۴۲ \Rightarrow d \mid ۴۲$$

$$۲a+۳b=۹۱ \Rightarrow ۲da'+۳db'=۹۱ \Rightarrow d(۲a'+۳b')=۹۱$$

$$\Rightarrow d \mid ۹۱$$

بنابراین $d\mid۴۲$ و $d\mid۹۱$ پس d، ب.م.م ۴۲ و ۹۱ یعنی $(۴۲,۹۱)=(۲\times۳\times۷,۷\times۱۳)=۷$ را عاد می‌کند.

$$d \mid ۷ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷ \xrightarrow{(a,b)>۱} d=۷$$

در نتیجه:

$$da'b'=۴۲ \Rightarrow ۷a'b'=۴۲ \Rightarrow a'b'=۶$$

a'	۱	۲	۳	۶
b'	۶	۳	۲	۱

به علاوه:

$$d(۲a'+۳b')=۹۱ \Rightarrow ۲a'+۳b'=۱۳$$

a'	۲	۵
b'	۳	۱

که تنها جوابی که هم در $a'b'=۶$ و $۲a'+۳b'=۱۳$ صدق می‌کند، $a'=۲$ و $b'=۳$ است، پس:

$$۳a+۴b=۳da'+۴db'=۴۲+۸۴=۱۲۶ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۹$$

۱۴۱- ۳ $۱۰k+۵$ مضرب ۵ است و نمی‌تواند اول باشد.

۱۴۲- ۲ ۳۰۸ را تجزیه می‌کنیم: $۳۰۸=۲^۲\times۷\times۱۱$

بنابراین رابطهٔ $p\mid۳۰۸$ به ازای $p=۲$ و $p=۷$ و $p=۱۱$ برقرار است.

۱۴۳- ۲

$$\frac{۹}{۱۳}=\frac{۲a-۴p}{a} \Rightarrow ۹a=۲۶a-۵۲p \Rightarrow ۵۲p=۱۷a$$

سمت راست عبارت مضرب ۱۷ است پس $۵۲p$ نیز باید مضرب ۱۷ باشد، پس $p=۱۷$ و $a=۵۲$ ⇐ $a+p=۶۹$ که مضرب ۲۳ است.

۱۴۴- ۲ مشخص است که اگر n عدد اول باشد $۸۰!$ بر آن بخش‌پذیر نیست. بنابراین $۸۰!$ بر $۹۷,۸۹,۸۳$ بخش‌پذیر نیست. *(دقت کنید که $۸۰!$ بر عددهای مرکب بخش‌پذیر است؛ برای مثال $۹۱=۷\times۱۳$ که در تجزیهٔ $۸۰!$ هم عامل ۷ وهم ۱۳ وجود دارد.)*

۱۴۵- ۳ **نکته** فقط عددهای اول دارای ۲ مقسوم‌علیه طبیعی هستند.

پس a عددی اول است.

همچنین اگر عددی به صورت حاصل‌ضرب ۲ عدد متفاوت یا بیشتر از ۲ عدد متفاوت باشد تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن دست کم ۴تاست. (برای مثال عدد $۶=۲\times۳$ دارای چهار مقسوم‌علیه $۱,۲,۳,۶$ است.) بنابراین عددهایی به فرم $p^۲$ دارای سه مقسوم‌علیه طبیعی هستند: $۱,p,p^۲$

(یعنی عددهایی مثل $۴,۹,۲۵,۴۹,\ldots$)

حالا می‌خواهیم تعداد مقسوم‌علیه‌های ab را پیدا کنیم:

$$ab=ap^۲ \Rightarrow \text{مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های } ab=\{۱,a,p,ap,p^۲,ap^۲\}$$

۱۴۶- ۱ نکته مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $24k+1$ نوشت.

بنابراین چون $24k$ بر ۶ بخش‌پذیر است باقی‌ماندهٔ p^2 بر ۶ همواره برابر ۱ است.

۱۴۷- ۴ می‌دانیم باقی‌ماندهٔ یک عدد صحیح در تقسیم به ۱۸ می‌تواند از صفر تا ۱۷ تغییر کند و آن‌ها را می‌توان به صورت $18k$، $18k+1$، $18k+2$ تا $18k+17$ نوشت. از این میان ۹تا از عددها زوج‌اند و بنابراین نمی‌توانند اول باشند. بقیهٔ حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$18k+1$	$18k+11$
$18k+3 \rightarrow$ مضرب ۳	
$18k+5$	$18k+13$
$18k+7$	$18k+15 \rightarrow$ مضرب ۳
$18k+9 \rightarrow$ مضرب ۳	$18k+17$

بنابراین باقی‌ماندهٔ p بر ۱۸ می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ یا ۱۳ و یا ۱۷ باشد؛ یعنی ۶ مقدار.

۱۴۸- ۳ یادآوری مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $p^2=24k+1$ نوشت.

بنابراین:

$\frac{p^2+1}{2}=\frac{24k+2}{2}=12k+1$ ممکن است مرکب یا اول باشد.

$\frac{p^2+3}{2}=\frac{24k+4}{2}=12k+2$ چون زوج است پس همواره مرکب است.

$\frac{p^2+5}{2}=\frac{24k+6}{2}=12k+3$ مضرب ۳ است پس همواره مرکب است.

$\frac{p^2+7}{2}=\frac{24k+8}{2}=12k+4$ زوج است پس حتماً مرکب است.

۱۴۹- ۳ یادآوری a^n+b^n اگر n فرد باشد همواره بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

بنابراین 2^p+1 بر $3=2+1$ بخش‌پذیر است و بنابراین همواره مرکب است. $p=5$ مثال نقض ۱ و ۲ و $p=3$ مثال نقض ۴ است.

۱۵۰- ۱ $n=2\times3\times5\times7\times\cdots\times97+1$ به تک‌تک عددهای $2,3,5,7,\ldots,97$ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. حالا فرض کنید $k=2\times3\times5\times7\times\cdots\times97$ باشد، واضح است که k بر ۹۸ و ۹۹ هم بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۹۸ و ۹۹ هم برابر ۱ می‌شود، بنابراین n بر هیچ عدد دورقمی نمی‌تواند بخش‌پذیر باشند. (*دقت کنید این عدد ممکنه بر ۱۰۱ بخش‌پذیر باشه اما زیر ۱۰۰ به چیزی نمی‌تونه بخش‌پذیر شه.*)

۱۵۱- ۲ یکی از این عددها همواره بر ۵ بخش‌پذیر است و بنابراین امکان این‌که هر ۵تای آن‌ها اول باشند وجود ندارد.

$n=5k \Rightarrow$ خود n بر ۵ بخش‌پذیر است.

$n=5k+1 \Rightarrow n+14 \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

$n=5k+2 \Rightarrow n+8 \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

$n=5k+3 \Rightarrow n+2 \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

$n=5k+4 \Rightarrow n+6 \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

ولی خود ۵ عدد اول است و اگر یکی از این اعداد خود ۵ باشند، ممکن است همهٔ اعداد اول شوند، پس باید بررسی کنیم:

$n=5 \Rightarrow$ اعداد: $5,7,11,13,19$ ✓

$n+2=5 \Rightarrow$ اعداد: $3,5,9,11,17$ × ۹ اول نیست

۱۵۲- ۲ اگر بخواهیم $p^3 \mid 50!$ با توجه به این‌که کسر $\frac{50!}{p\times p\times p}$ عددی صحیح باشد، $50!$ باید دست کم سه عامل p داشته باشد؛ بنابراین $3p\le 50$ و در نتیجه بیشترین مقدار p عدد ۱۳ است. (توجه کنید که در تجزیهٔ $50!$ عددهای ۱۳ و ۲۶ و ۳۹ هر کدام یک عامل ۱۳ دارند و در نتیجه $13^3 \mid 50!$.)

اما رابطهٔ $17^3 \mid 50!$ برقرار نیست چون در تجزیهٔ $50!$ فقط دو عدد ۱۷ و ۳۴ عامل ۱۷ دارند.

۱۵۳- ۳ اگر a فرد باشد $7a$ و a^2 هر دو فردند بنابراین $a^2-7a+12$ همواره زوج می‌شود.

اگر هم a زوج باشد، a^2 و $7a$ هر دو زوج‌اند و باز هم $a^2-7a+12$ همواره زوج می‌شود.

حالا فقط باید بررسی کنیم آیا مقداری از a وجود دارد که به ازای آن $a^2-7a+12=2$ شود. داریم:

$$a^2-7a+12=2 \Rightarrow a^2-7a+10=0$$

$$(a-5)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=2 \end{cases}$$

پس به ازای ۲ مقدار صحیح a، $a^2-7a+12$ می‌تواند برابر ۲ شود.

۱۵۴- ۳ a,b,c سه عدد اول‌اند که مجموع آن‌ها عددی زوج شده؛ بنابراین این امکان وجود ندارد که هر سه آن‌ها فرد باشد؛ بنابراین یکی از آن‌ها برابر ۲ و مجموع دو عدد دیگر برابر ۱۲ است که تنها حالت قابل قبول برای آن عددهای ۵ و ۷ است.

حالا: $2^2+5^2+7^2=4+25+49=78=2\times3\times13$

بنابراین بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۵۵- ۳ می‌دانیم عدد مربع کامل به صورت a^2 است؛ بنابراین:

$$11p+16=a^2 \Rightarrow 11p=a^2-16 \Rightarrow 11p=(a-4)(a+4)$$

حالت‌های ممکن عبارت است از:

$$\begin{cases} a-4=11 \\ a+4=p \end{cases} \Rightarrow a=15 \Rightarrow p=19 \checkmark$$

$$\begin{cases} a-4=p \\ a+4=11 \end{cases} \Rightarrow a=7 \Rightarrow p=3 \checkmark$$

۱۵۶- ۲ مکعب کامل را a^3 فرض می‌کنیم. داریم:

$$p+27=a^3 \Rightarrow a^3-27=p \Rightarrow (a-3)(a^2+9+3a)=p$$

حاصل‌ضرب دو عدد، برابر با عددی اول شده، پس:

$$\begin{cases} a-3=1 \Rightarrow a=4 \\ a^2+3a+9=p \Rightarrow p=37 \end{cases}$$

۱۵۷- ۱ $x=y^2-z^2 \Rightarrow x=(y-z)(y+z)$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی برابر ۱ و دیگری برابر آن عدد اول است:

$$\begin{cases} y-z=1 \\ y+z=x \end{cases}$$

یعنی دو عدد اولی که متوالی‌اند. تنها دو عدد اول پشت سر هم ۲ و ۳ هستند. بنابراین $y=3$، $z=2$ و $x=5$ است.

پس عدد $\overline{xyz}$ ما ۵۳۲ است و باقی‌ماندهٔ آن بر ۷ صفر می‌شود.

۱۵۸- ۱ اگر b و c هر دو فرد باشند، a زوج می‌شود و تنها عدد اول زوج ۲ است، پس $4=b^2+c^2$ که اعداد اول b و c نداریم که در این رابطه صدق کنند. پس یکی از b و c حتماً ۲ است، فرض کنید $b=2$ باشد، داریم: $a=4+c^2$

اگر c زوج باشد، a زوج می‌شود و اول نیست پس مقادیر فرد c را در نظر می‌گیریم. با توجه به این شرط که a باید دورقمی باشد:

$c=3 \Rightarrow a=9+4=13$ ✓

$c=5 \Rightarrow a=25+4=29$ ✓

$c=7 \Rightarrow a=49+4=53$ ✓

پس سه مقدار برای a وجود دارد.

۱۵۹- [۱] اگر b و c هر دو فرد باشند a زوج می‌شود که قابل قبول نیست. پس b یا c برابر ۲ است. فرض کنید $b=2$ باشد، داریم:

$$a^2=4+c^2 \Rightarrow a^2-c^2=4 \Rightarrow (a-c)(a+c)=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ a+c=4 \end{cases} \times$$

دستگاه جواب ندارد بنابراین هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۱۶۰- [۲] $a=7q+2$

می‌خواهیم عدد سه‌رقمی باشد، پس:

$$100 \le a \le 999 \Rightarrow 100 \le 7q+2 \le 999 \Rightarrow \frac{98}{7} \le q \le \frac{997}{7}$$

$$\Rightarrow 14 \le q \le 142/7$$

پس q از ۱۴ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد، می‌دانیم تعداد عددهای بزرگ‌تر مساوی a و کوچک‌تر مساوی b برابر است با $b-a+1$، بنابراین:

$$142-14+1=129$$

۱۶۱- [۲] $a=bq+r \quad (I)$

به مقسوم ۵۰ و به مقسوم‌علیه ۶ واحد اضافه شده. خارج قسمت تغییری نکرده و باقی‌مانده ۴ واحد کم شده است. بنابراین:

$$a+50=(b+6)q+r-4 \quad (II)$$

با جای‌گذاری (I) در (II) داریم:

$$bq+r+50=bq+6q+r-4 \Rightarrow 6q=54 \Rightarrow q=9$$

۱۶۲- [۳] $a=17q+r\,,\,0 \le r<17$

مجموع باقی‌مانده و خارج قسمت برابر ۹ است یعنی $r+q=9$، بنابراین:

$$a=16q+q+r \Rightarrow a=16q+9 \xrightarrow{+7} a+7=16(q+1)$$

۱۶۳- [۱] در حالت اول داریم: $a=17q+7 \quad (I)$

فرض کنید x واحد از مقسوم کم کرده‌ایم و باقی‌مانده ۱۳ شده است؛ بنابراین: $a-x=17q'+13 \quad (II)$

اگر دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$(I)-(II) \Rightarrow x=17(q-q')-6$$

می‌خواهیم x کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد، بنابراین $q-q'$ را یک فرض می‌کنیم و در نتیجه: $x=17-6=11$

۱۶۴- [۲] $q=5$ و $r=24$ است، داریم: $a=5b+24\,,\,b>24$

می‌خواهیم مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند، بنابراین:

$$a=5(b+x)+r\,,\,0 \le r<b+x$$

اگر دو رابطه را برابر قرار دهیم، داریم:

$$5b+24=5b+5x+r \Rightarrow 5x+r=24$$

حالا اگر بخواهیم x بیشترین مقدار خود را داشته باشد، با توجه به این‌که $0 \le r$ است b حداکثر برابر ۴ است. $x=4\,,\,r=4$

روش دوم: $a=5b+24$

باید ۲۴ را یک جوری باز کنیم که بشود با $5b$ فاکتور گرفت.

$$a=5b+20+4=5(b+4)+4$$

پس مقسوم‌علیه حداکثر ۴ واحد اضافه می‌شود.

۱۶۵- [۲] $a=12q+7 \quad (I)$

با اضافه‌کردن ۷۰ واحد به مقسوم داریم:

$$a+70=12(q+m)+7-n \quad (II)\,,\,0 \le 7-n<12$$

رابطهٔ (I) را در (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$12q+7+70=12q+12m+7-n \Rightarrow 70=12m-n$$

$$\Rightarrow m=\frac{70+n}{12}$$

اما دقت کنید n حداکثر می‌تواند برابر ۷ باشد، چون باقی‌مانده منفی نمی‌شود. حالا دور و بر ۷۰، مضرب ۱۲ چه عددی را داریم؟ بله، ۷۲.

بنابراین: $n=2 \Rightarrow 72=12m \Rightarrow m=6 \Rightarrow m+n=8$

۱۶۶- [۴] $a=31b+24\,,\,24<b$

می‌خواهیم a مضرب ۵ باشد، بنابراین:

$$a=30b+b+25-1=\underbrace{5(6b+5)}_{\text{مضرب ۵}}+b-1$$

اگر بخواهیم a مضرب ۵ باشد، $b-1$ باید مضرب ۵ باشد:

$$b-1=5k \Rightarrow b=5k+1 \Rightarrow a=31(5k+1)+24$$

$$a=155k+55$$

a طبیعی و سه‌رقمی است، بنابراین:

$$100 \le a<1000 \Rightarrow 100 \le 155k+55<1000$$

$$\Rightarrow k=1,2,3,4,5,6$$

اما دقت کنید گفتیم $24<b$، پس $24<5k+1$ است که در این صورت فقط $k=5,6$ قابل قبول است.

۱۶۷- [۴] عدد را a فرض می‌کنیم. چون خارج قسمت مضرب ۵ است آن را $5q$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 11 \\ \hline & 5q \\ r & \end{array} \Rightarrow a=55q+r\,,\,0 \le r<11$$

باقی‌مانده مضرب ۷ است، پس باقی‌مانده یا صفر است یا ۷:

$a=55q$	یا $a=55q+7$
$100 \le 55q \le 999$	$100 \le 55q+7 \le 999$
$1/8 \le q \le 18/1$	$93 \le 55q<992$
$\Rightarrow q=\underbrace{2,3,\dots,18}_{\text{۱۷ مقدار}}$	$1/6 \le q \le 18/03$
	$\Rightarrow q=\underbrace{2,3,4,\dots,18}_{\text{۱۷ مقدار}}$

بنابراین جواب $17+17=34$ می‌شود.

۱۶۸- [۱] $a=117q+28$

حالا می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ a را بر ۱۳ به دست آوریم. دقت کنید در این مدل سؤال‌ها اگر قسمت qدار مضرب عددی باشد که می‌خواهیم باقی‌مانده را به دست بیاوریم، سؤال خیلی راحت حل می‌شود اما اگر قسمت qدار مضرب آن عدد نباشد، سؤال *داستان‌دار!* خواهد شد که بعداً یاد می‌گیریم آن مدل سؤال‌ها را چه‌طور حل کنیم.

خب برویم سر حل سؤال خودمان: $a=117q+28=\underbrace{13\times 9q}_{\text{مضرب ۱۳}}+28$

$117q$ خوشبختانه مضرب ۱۳ است و باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۳ برابر صفر است پس فقط می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ ۲۸ بر ۱۳ که ۲ می‌شود.

۱۶۹- [۳] با توجه به این‌که $a=91k+23$ است، اول باقی‌ماندهٔ a را بر ۷ به دست می‌آوریم:

$$a=91k+23=\underbrace{7\times 13k+21}_{\text{مضرب ۷}}+2$$

همان‌طور که می‌بینید باقی‌ماندهٔ a بر ۷ برابر ۲ است. حالا برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ a^3-2a^2-9 بر ۷ سرراست به جای a خود ۲ را قرار می‌دهیم و باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم:

$$2^3-2\times2^2-9=8-8-9=-9$$

باید باقی‌ماندهٔ ۹− را بر ۷ به دست آوریم. راحت‌ترین کار آن است که طبق آن‌چه در درس‌نامه گفتیم اول باقی‌ماندهٔ ۹ را بر ۷ به دست آوریم و از رابطهٔ $r=b-r'$ باقی‌ماندهٔ ۹− بر ۷ را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \hline -7 & 1 \\ 2 & \end{array} \Rightarrow r'=2 \Rightarrow r=7-2=5$$

۱۷۰- [۲] **روش اول:**

$$a=17q+3 \xrightarrow{\times 2} 2a=34q+6$$

$$b=17q'+5 \xrightarrow{\times 3} 3b=51q'+15$$

حالا $2a+3b+ab$ را برحسب q و q' بازنویسی می‌کنیم:

$$2a+3b+ab=34q+6+51q'+15+(17q+3)(17q'+5)$$

$$=34q+6+51q'+15+289qq'+51q'+85q+15$$

$$=\underbrace{119q+102q'+289qq'}_{\text{مضرب ۱۷}}+36$$

قسمت‌های q و q' دار همگی بر ۱۷ بخش‌پذیرند پس فقط کافی است باقی‌ماندهٔ ۳۶ را بر ۱۷ به دست آوریم که برابر ۲ می‌شود.

روش دوم: در این مدل سؤال‌ها می‌توان به جای a و b سرراست باقی‌مانده‌ها را جایگزین کنیم. یعنی $a=3$ و $b=5$ داریم:

$$2a+3b+ab=6+15+15=36$$

و باقی‌ماندهٔ ۳۶ بر ۱۷ برابر ۲ است.

۱۷۱- [۲] خارج قسمت‌ها را به ترتیب q و q' فرض می‌کنیم، داریم:

$$2a=xq+5,\ 5<x \Rightarrow 2a-5=xq \Rightarrow x\mid 2a-5 \quad (I)$$

$$3a=xq'+23,\ 23<x \Rightarrow 3a-23=xq' \Rightarrow x\mid 3a-23 \quad (II)$$

با توجه به (I) و (II) داریم:

$$x\mid 2a-5 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} x\mid 6a-15$$

$$x\mid 3a-23 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 2} x\mid 6a-46 \quad \xrightarrow{(-)} x\mid 31$$

$$x>1 \Rightarrow x=31$$

۱۷۲- [۴] a زوج است پس آن را برابر با $2k$ می‌گیریم، باقی‌ماندهٔ a بر ۱۷ برابر ۳ است؛ بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} 2k & 17 \\ \hline & q \\ 3 & \end{array} \Rightarrow 2k=17q+3 \Rightarrow 2k-3=17q$$

$2k-3$ عددی فرد است پس $17q$ نیز باید فرد باشد و در نتیجه q نیز فرد است، پس $q=2q'+1$؛ بنابراین:

$$2k-3=17(2q'+1) \Rightarrow 2k-3=34q'+17$$

$$\Rightarrow 2k=34q'+20 \xrightarrow{\div 2} k=17q'+10$$

پس باقی‌ماندهٔ $\frac{a}{2}$ یا همان k بر ۱۷ برابر ۱۰ است.

۱۷۳- [۴] **نکته** می‌دانیم برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم a بر b باید $[\frac{a}{b}]$ را پیدا کنیم.

بنابراین: $[\frac{13!-7}{13}]=[12!-0/53]=[12!]+[-0/53]=12!-1$

بنابراین $a=12$ و $b=-1$ است و در نتیجه $a+b=11$.

۱۷۴- [۳] اول باقی‌ماندهٔ ۵۵ را بر ۱۲ به دست می‌آوریم. همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم باقی‌ماندهٔ ۵۵ را بر ۱۲ به دست می‌آوریم و بعد باقی‌ماندهٔ ۵۵ را با استفاده از فرمول $r=b-r'$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 55 & 12 \\ \hline -48 & 4 \\ 7 & \end{array} \Rightarrow r=12-7=5$$

حالا اگر از مقسوم ۵ واحد کم و به مقسوم‌علیه ۵ واحد اضافه کنیم، باید باقی‌ماندهٔ ۶۰− را بر ۱۷ به دست آوریم. دوباره مثل قبلی عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 17 \\ \hline -51 & 3 \\ 9 & \end{array} \Rightarrow r=17-9=8$$

بنابراین باقی‌مانده ۳ واحد اضافه می‌شود.

۱۷۵- [۴]

$$7a-97=7(15q+7)-97=105q-48$$

$105q$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است بنابراین فقط کافی است باقی‌ماندهٔ ۴۸− را بر ۲۱ به دست آوریم. چون عدد منفی است، اول باقی‌ماندهٔ ۴۸ را به ۲۱ به دست می‌آوریم و بعد از رابطهٔ $b-r$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 21 \\ \hline -42 & 2 \\ 6 & \end{array} \Rightarrow r=21-6=15$$

حالا خارج قسمت عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{105q-48}{21}\right]=[5q-2/2]=[5q]+[-2/2]=5q-3$$

۱۷۶- [۳] عدد a را فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & 26 \\ \hline - & q \\ 4q & \end{array} \Rightarrow a=26q+4q,\ 0\le 4q<26 \Rightarrow q_{max}=6$$

دقت کنید $r=4q$ است و باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کوچک‌تر است.

$$\Rightarrow a_{max}=30\times6=180$$

۱۷۷- [۲] باقی‌مانده یک‌سوم خارج قسمت است؛ یعنی $r=\frac{q}{3}$ یا $q=3r$. داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & 7 \\ \hline - & 3r \\ r & \end{array} \Rightarrow a=21r+r,\ 0\le r<7$$

r حداکثر برابر ۶ است؛ بنابراین: $a=22\times6=132$

۱۷۸- [۳]

$$a=17q+7 \quad (I)$$

$$a+m=17q'+7 \quad (II)$$

$$a-n=17q+r \quad (III),\ 0\le r<17$$

با جای‌گذاری (I) در (II) داریم:

$$17q+7+m=17q'+7 \Rightarrow m=17(q'-q)$$

چون m طبیعی است پس حداقل مقدار m برابر ۱۷ است.

با جای‌گذاری (I) در (III) داریم: $17q+7-n=17q+r \Rightarrow r+n=7$

r دست کم برابر صفر است پس n حداکثر می‌تواند برابر ۷ باشد، بنابراین:

$$7+17=24$$

۱۷۹- [۲]

$$a=bq+12,\ 12<b$$

$$a\le26 \Rightarrow bq+12\le26 \Rightarrow bq\le14$$

می‌دانیم $q_{min}=1$ و $b_{min}=13$ است، بنابراین تنها حالت‌های قابل قبول برای برقراری رابطهٔ $bq\le14$ دو حالت $b=13$ و $q=1$ و $b=14$ و $q=1$ است.

۱۸۰- **۲** عدد را b می‌نامیم، بنابراین: $۴۵۱ = ۷b + r , ۰ \le r < b$

حالا با توجه به شرط باقی‌مانده داریم: $r = ۴۵۱ - ۷b$

$۰ \le r \Rightarrow ۴۵۱ - ۷b \ge ۰ \Rightarrow ۷b \le ۴۵۱ \Rightarrow b \le ۶۴$

$r < b \Rightarrow ۴۵۱ - ۷b < b \Rightarrow ۸b > ۴۵۱ \Rightarrow b > ۵۶/۳$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای b عبارت‌اند از:

$۵۷,۵۸,۵۹,۶۰,۶۱,۶۲,۶۳,۶۴$

یعنی ۸ عدد.

۱۸۱- **۲** عدد را b می‌نامیم، داریم: $۶۷ = bq + ۷ , b > ۷ \quad (I)$

$\Rightarrow ۶۰ = bq \Rightarrow b \mid ۶۰ \quad (II)$

با توجه به (I) و (II) باید مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌تر از ۷ عدد ۶۰ را پیدا کنیم:

$۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۳۰,۶۰$

یعنی ۶ عدد.

۱۸۲- **۳** بنابراین $r > q^۳$: $a = ۱۳q + r , ۰ \le r < ۱۳$

$q^۳ < r < ۱۳ \Rightarrow q = ۰,۱,۲$

$q = ۰ \Rightarrow r = ۱,۲,\ldots,۱۲ \rightarrow$ ۱۲ عدد

$q = ۱ \Rightarrow r = ۲,\ldots,۱۲ \rightarrow$ ۱۱ عدد

$q = ۲ \Rightarrow r = ۹,\ldots,۱۲ \rightarrow ۱۲ - ۹ + ۱ =$ ۴ عدد

$\Rightarrow ۴ + ۱۱ + ۱۲ = ۲۷$

۱۸۳- **۴** **نکته** باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد، یعنی $r = b - ۱$

داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & q \\ b-۱ & \end{array} \Rightarrow a = bq + b - ۱ \Rightarrow a + ۱ = b(q+۱)$$

$\Rightarrow b \mid a + ۱ \quad (I)$

از طرفی می‌دانیم $b \mid ۱۵ + ۴a$ بنابراین:

$b \mid a + ۱ \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۴} b \mid ۴a + ۴ \xrightarrow{(-)} b \mid ۱۱$

$b \mid ۴a + ۱۵ \Rightarrow b \mid ۴a + ۱۵$

$\Rightarrow b = ۱۱$

دقت کنید که گفته $b > ۱$ است پس فقط یک مقدار برای b وجود دارد.

۱۸۴- **۳** با توجه به اطلاعات داده‌شده، $a = b + ۷۰$ و $r = ۱۰$ است، بنابراین:

$b + ۷۰ = bq + ۱۰ , b > ۱۰$

$\Rightarrow ۶۰ = bq - b \Rightarrow ۶۰ = b(q - ۱) \quad (II)$

می‌خواهیم خارج قسمت حداکثر شود؛ بنابراین باید b کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد و با توجه به این‌که $b > ۱۰$ است، $b_{min} = ۱۲$ و در نتیجه:

$۶۰ = ۱۲(q - ۱) \Rightarrow q - ۱ = ۵ \Rightarrow q = ۶$

۱۸۵- **۱** $a = bq + ۵ \quad (I) , b > ۵$

$a + ۹۰ = bq' + ۱۵ \quad (II) , b > ۱۵$

با قراردادن (I) در (II) داریم:

$bq + ۵ + ۹۰ = bq' + ۱۵ \Rightarrow ۸۰ = b(q' - q)$

با توجه به این‌که $b > ۱۵$ است پس $b_{min} = ۲۰$ و $b_{max} = ۸۰$ و در نتیجه اختلاف حداکثر و حداقل مقدار b برابر ۶۰ است.

۱۸۶- **۱** عدد a را فرض می‌کنیم. $r = \frac{۴}{۵}q^۲$، بنابراین:

$a = ۲۰۰q + \frac{۴}{۵}q^۲ , ۰ \le \frac{۴}{۵}q^۲ < ۲۰۰$

$\Rightarrow ۰ \le ۴q^۲ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۰ \le q^۲ < ۲۵۰ \Rightarrow ۰ \le q < ۱۵/\ldots$

دقت کنید که به ازای $q = ۰$ عدد a طبیعی نمی‌شود، همچنین حواستان باشد که q حتماً باید مضرب ۵ باشد وگرنه عدد a طبیعی نمی‌شود. پس مقادیر قابل قبول q عبارت‌اند از: $q = ۵,۱۰,۱۵$

۱۸۷- **۲** باقی‌مانده ۶ واحد کم‌تر از مقسوم‌علیه است یعنی $r = b - ۶$، داریم:

$$\begin{array}{l|l} -۳۶ & b \\ \hline & q \\ b-۶ & \end{array} \Rightarrow -۳۶ = bq + b - ۶ , ۰ \le b - ۶$$

$\Rightarrow -۳۰ = b(q+۱) \Rightarrow$

a'	۶	۱۰	۱۵	۳۰
$q+۱$	-۵	-۳	-۲	-۱

(دقت کنید که b باید بزرگ‌تر مساوی ۶ باشه.)

چون گفته b کم‌ترین مقدار قابل قبول است پس $b = ۶$ و $q + ۱ = -۵$ در نتیجه: $q = -۶$.

۱۸۸- **۲** باقی‌مانده مجذور خارج قسمت است یعنی $r = q^۲$ داریم:

$۲۳۱ = bq + q^۲ , q^۲ < b$

$\Rightarrow ۲۳۱ = q(b+q) \Rightarrow ۳ \times ۷ \times ۱۱ = q(b+q)$

حالا دسته‌بندی می‌کنیم:

q	b+q	
۱	۲۳۱	$\Rightarrow b = ۲۳۰$
۳	۷۷	$\Rightarrow b = ۷۴$
۷	۳۳	$\Rightarrow b = ۲۶$ غقق
۱۱	۲۱	$\Rightarrow b = ۱۰$ غقق

دقت کنید این دو حالت در شرط $q^۲ < b$ صدق نمی‌کند.

پس فقط دو مقدار $b = ۲۳۰$ و $b = ۷۴$ قابل قبول است.

۱۸۹- **۱** می‌دانیم $a = ۵۲$ و $b + q + r = ۳۲$ داریم:

$۵۲ = bq + r , ۰ \le r < b$

$\Rightarrow ۵۲ = bq + ۳۲ - b - q$

$\Rightarrow ۲۰ = bq - b - q \Rightarrow ۲۱ = bq - b - q + ۱$

$\Rightarrow ۲۱ = (b-۱)(q-۱)$

حالا حالت‌بندی می‌کنیم:

(b-۱)	(q-۱)	
۲۱	۱	$\Rightarrow b = ۲۲, q = ۲, r = ۸$ ✓
۷	۳	$\Rightarrow b = ۸, q = ۴, r = ۲۰$ غقق
۳	۷	$\Rightarrow b = ۴, q = ۸, r = ۲۰$ غقق
۱	۲۱	$\Rightarrow b = ۲, q = ۲۲, r = ۸$ غقق

پس فقط یک مقدار قابل قبول برای r وجود دارد.

۱۹۰- **۳** باقی‌مانده و خارج قسمت را در تقسیم به ۷ برابر q و باقی‌مانده و خارج قسمت را در تقسیم به ۱۱ برابر q' فرض می‌کنیم، داریم:

$a = ۷q + q = ۸q , ۰ \le q < ۷$

$a = ۱۱q' + q' = ۱۲q' , ۰ \le q' < ۱۱$

اگر دو رابطه را برابر قرار دهیم، داریم: $۸q = ۱۲q' \Rightarrow ۲q = ۳q'$

q باید مضرب ۳ باشد؛ از طرفی بنا به شرط باقی‌مانده کوچک‌تر از ۷ است؛ بنابراین مقادیر قابل قبول برای q این‌ها هستند:

$q = ۰ \Rightarrow q' = ۰ \Rightarrow a = ۰$

$q = ۳ \Rightarrow q' = ۲ \Rightarrow a = ۲۴$

$q = ۶ \Rightarrow q' = ۴ \Rightarrow a = ۴۸$

بنابراین مجموع مقادیر a عبارت است از: $۰ + ۲۴ + ۴۸ = ۷۲$

۱۹۱- [۳]

$$a=۱۱q+۴ \xrightarrow{\times ۱۲} ۱۲a=۱۳۲q+۴۸$$
$$a=۱۲q'+۷ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱a=۱۳۲q'+۷۷$$
$$\xrightarrow{(-)} a=۱۳۲(q-q')-۲۹$$

خب $۱۳۲(q-q')$ که بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است فقط باید باقی‌ماندهٔ ‎-۲۹ را بر ۱۳۲ پیدا کنیم. راه پیداکردن باقی‌ماندهٔ یک عدد منفی را که بلدید:

$$\begin{array}{r|l} ۲۹ & ۱۳۲ \\ \hline ۰ & ۰ \\ ۲۹ & \end{array} \Rightarrow r=۱۳۲-۲۹=۱۰۳$$

توجه یک سری هم دوست دارند این‌جوری باقی‌مانده را پیدا کنند که هیچ ایرادی ندارد.

$$a=۱۳۲(q-q')\underbrace{-۲۹+۱۳۲}_{\text{این دو را با هم جمع می‌کنیم}}-۱۳۲$$

از ۱۳۲ فاکتور می‌گیریم.

$$a=۱۳۲(q-q'-۱)+۱۰۳$$

۱۹۲- [۳] داریم:

$$a=۱۳a+۵ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱a=۱۴۳q+۵۵$$
$$a=۱۱q'+۳ \xrightarrow{\times ۱۳} ۱۳a=۱۴۳q'+۳۹$$
$$\xrightarrow{(-)} ۲a=۱۴۳(q'-q)-۱۶ \Rightarrow \underbrace{۲a+۱۶}_{\text{زوج}}=۱۴۳(q'-q)$$

$۲a+۱۶$ زوج است پس $۱۴۳(q-q')$ نیز باید زوج باشد، در نتیجه $q-q'$ زوج است.

$$q-q'=۲k \Rightarrow ۲a=۱۴۳\times ۲k-۱۶$$
$$\Rightarrow a=۱۴۳k-۸$$

حالا چون گفته $a<۲۰۰$ است پس $k=۱$ و در نتیجه: $a=۱۳۵$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $=۱+۳+۵=۹$

۱۹۳- [۳] **یادآوری** می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸q+۱$ نوشت.

بنابراین: $a^۲=۸q+۱ \quad (I)$

از طرفی باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۹ برابر ۴ است، در نتیجه: $a^۲=۹q'+۴ \quad (II)$

حالا برای این‌که باقی‌مانده را بر ۷۲ پیدا کنیم، رابطهٔ (I) را در ۹ و (II) را در ۸ ضرب می‌کنیم:

$$a^۲=۸q+۱ \xrightarrow{\times ۹} ۹a^۲=۷۲q+۹$$
$$a^۲=۹q'+۴ \xrightarrow{\times ۸} ۸a^۲=۷۲q'+۳۲$$
$$\xrightarrow{(-)} a^۲=\underbrace{۷۲\times(q-q')}_{\text{مضرب ۷۲}}-۲۳$$

حالا باید باقی‌مانده ‎-۲۳ را بر ۷۲ پیدا کنیم. طبق معمول باقی‌ماندهٔ ‎$+۲۳$ را بر ۷۲ پیدا می‌کنیم بعد از $b-r$ می‌رویم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۳ & ۷۲ \\ \hline ۰ & ۰ \\ ۲۳ & \end{array} \Rightarrow r=۷۲-۲۳=۴۹$$

۱۹۴- [۴] مجموعه‌های $A=\{k\in\mathbb{Z} \mid ۲|k+۱\}$ و $B=\{k\in\mathbb{Z} \mid ۳|k+۱\}$ را پیدا می‌کنیم:

$$۲|k+۱ \Rightarrow k+۱=۲q \Rightarrow k=۲q-۱$$

پس این مجموعه، مجموعهٔ اعداد صحیح فرد است. یعنی:

$$A=\{\dots,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,۷,\dots\}$$
$$۳|k+۱ \Rightarrow k+۱=۳q \Rightarrow k=۳q-۱$$

این مجموعه، مجموعهٔ عددهایی است که در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. یعنی: $B=\{\dots,-۷,-۴,-۱,۲,۵,۸,۱۱,\dots\}$

خب توی همین چند عضوی که نوشتیم $A\cap B$ شامل چه عددهایی است؟ $A\cap B=\{\dots,-۷,-۱,۵,۱۱,\dots\}$

این یعنی عددهایی که هم فرد باشند و هم در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشند. اما این مجموعه را به چه صورتی می‌توان نوشت؟

دقت کنید که در $A\cap B$، $k+۱$ هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد و هم بر ۳، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۲|k+۱ \\ ۳|k+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶|k+۱ \Rightarrow k+۱=۶q \Rightarrow \begin{cases} k=۶q-۱ \\ \text{یا} \\ k=۶q+۵ \end{cases}$$

یا به عبارت دیگر: $A\cap B=\{۶q+۵ : q\in\mathbb{Z}\}$

۱۹۵- [۳] دو عدد را $۷q+۳$ و $۷q'+۳$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$(۷q+۳)(۷q'+۳)=۴۹qq'+۲۱q+۲۱q'+\underbrace{۹}_{۷+۲}$$
$$=۷(۷qq'+۳q+۳q'+۱)+۲=۷k+۲$$

پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در تقسیم به ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد که در میان گزینه‌ها ۹۳ این ویژگی را دارد.

۱۹۶- [۲] اگر a فرد باشد، با توجه به این‌که $۱۲q$ زوج است، پس r حتماً باید فرد باشد.

$$\begin{array}{r|l} a & ۱۲ \\ \hline & q \\ r & \end{array} \Rightarrow a=۱۲q+r, ۰\le r<۱۲$$

عددهای فرد $۰\le r<۱۲$ عبارت‌اند از: $۱,۳,۵,۷,۹,۱۱$

یعنی r، ۶ حالت می‌تواند داشته باشد.

۱۹۷- [۳] a بر ۷ بخش‌پذیر است، پس: $a=۷q$

اما a باید فرد باشد پس q نمی‌تواند زوج باشد و در نتیجه q نیز فرد است:

$$q=۲k+۱ \Rightarrow a=۷(۲k+۱)=۱۴k+۷$$

۱۹۸- [۳] باقی‌ماندهٔ a بر ۷ برابر ۲ است، یعنی: $a=۷q+۲$

حالا اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ a را بر ۳۵ پیدا کنیم، باید q یک عامل ۵ داشته باشد تا قسمت qدار عبارت مضرب ۳۵ شود و فقط یک عدد ثابت بماند که باقی‌ماندهٔ آن را بر ۳۵ به دست می‌آوریم.

اما از طرفی می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد در تقسیم به ۵، پنج حالت دارد. بنابراین q را باید در هر کدام از این ۵ حالت در نظر بگیریم و باقی‌مانده را پیدا کنیم.

خب تا این‌جا سؤال حل شد ولی برای محکم‌کاری شما هر ۵ حالت را ببینید:

$$q=۵k \Rightarrow a=۳۵k+۲ \Rightarrow r=۲$$
$$q=۵k+۱ \Rightarrow a=۷(۵k+۱)+۲ \Rightarrow a=۳۵k+۹$$
$$\Rightarrow r=۹$$
$$q=۵k+۲ \Rightarrow a=۷(۵k+۲)+۲ \Rightarrow a=۳۵k+۱۶$$
$$\Rightarrow r=۱۶$$
$$q=۵k+۳ \Rightarrow a=۷(۵k+۳)+۲ \Rightarrow a=۳۵k+۲۳$$
$$\Rightarrow r=۲۳$$
$$q=۵k+۴ \Rightarrow a=۷(۵k+۴)+۲ \Rightarrow a=۳۵k+۳۰$$
$$\Rightarrow r=۳۰$$

۱۹۹- [۱] باقی‌ماندهٔ a بر ۳۰ برابر ۸ است، پس:

$$\begin{array}{r|l} a & 30 \\ \hline & q \\ 8 & \end{array} \Rightarrow a = 30q + 8$$

حالا می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ a را بر ۲۰ به دست آوریم. در سؤال قبل دیدیم که قسمت q‌دار مضرب عدد داده‌شده بود اما این‌جا $30q$ مضرب ۲۰ نیست، بنابراین باید q را طوری حالت‌بندی کنیم که $30q$ بر ۲۰ بخش‌پذیر شود. خب $30 = 3 \times 10$ یعنی ۱۰ را توی خودش دارد.
پس q باید یک جوری باشد که یک عامل ۲ توی خودش داشته باشد که قسمت q‌دار ماجرا مضرب ۲۰ شود. بنابراین q را در دو حالت فرد و زوج در نظر می‌گیریم:

$$q \text{ زوج باشد} \Rightarrow q = 2k \Rightarrow a = \underbrace{60k}_{\text{مضرب } 20} + 8$$

در این حالت باقی‌ماندهٔ a بر ۲۰ برابر ۸ است.

$$q \text{ فرد باشد} \Rightarrow q = 2k+1 \Rightarrow a = 30(2k+1) + 8 = \underbrace{60k}_{\text{مضرب } 20} + 38$$

باقی‌ماندهٔ ۳۸ بر ۲۰ برابر ۱۸ است؛ پس باقی‌ماندهٔ a بر ۲۰ یا ۸ است یا ۱۸ و دو حالت دارد.

۲۰۰- [۱] **یادآوری** می‌دانیم به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ می‌توان p^2 را به صورت $24k+1$ نوشت.

$$p^2 = 24k + 1$$

حالا اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ p^2 را بر ۳۶ پیدا کنیم، باید کاری کنیم که $24k$ مضرب ۳۶ باشد، بنابراین اگر k یک عامل ۳ داشته باشد، با توجه به این‌که $72 = 24 \times 3$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است، $24k$ بر ۳۶ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین باید k را در سه حالت در نظر گرفت:

$$k = 3q \Rightarrow p^2 = 72q + 1 \Rightarrow r = 1 \quad \text{باقی‌مانده بر } 36$$

$$k = 3q+1 \Rightarrow p^2 = 24(3q+1) + 1 = 72q + 25 \Rightarrow r = 25$$

$$k = 3q+2 \Rightarrow p^2 = 24(3q+2) + 1 = 72q + 49 \Rightarrow r = 13$$

پس باقی‌ماندهٔ p^2 بر ۳۶ سه حالت دارد.

۲۰۱- [۳] در تقسیم یک عدد بر ۴، باقی‌مانده ۴ حالت دارد:
عددهای بخش‌پذیر بر ۴ یا $4k$.
عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند یا $4k+1$.
عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند یا $4k+2$.
و بالأخره عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارند یا $4k+3$.
از طرفی می‌دانیم باقی‌ماندهٔ ۸۱ در تقسیم به ۴ برابر ۱، باقی‌ماندهٔ ۲۸ در تقسیم به ۴ برابر صفر و باقی‌ماندهٔ ۱۲۲ در تقسیم به ۴ برابر ۲ است، بنابراین اگر ما بخواهیم هر ۴ نوع باقی‌مانده را داشته باشیم، باید k یا $a+x$ طوری باشد که باقی‌ماندهٔ x در تقسیم به ۴ برابر ۳ شود که در میان گزینه‌ها $a+75$ این ویژگی را دارد. برای درک بهتر:

$a+81$ هم‌باقی‌مانده است با: $a+1$
$a+28$ هم‌باقی‌مانده است با: a
$a+122$ هم‌باقی‌مانده است با: $a+2$
و $a+75$ هم‌باقی‌مانده است با: $a+3$

حالا اگر a به هر کدام از فرم‌های $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ باشد، یکی از a یا $a+1$ یا $a+2$ یا $a+3$ حتماً مضرب ۴ می‌شود:

$a = 4k \rightarrow$ خود a مضرب ۴ است.
$a = 4k+1 \rightarrow$ $a+3$ مضرب ۴ است.
$a = 4k+2 \rightarrow$ $a+2$ مضرب ۴ است.
$a = 4k+3 \rightarrow$ $a+1$ مضرب ۴ است.

۲۰۲- [۳] هر عدد صحیحی مثل a در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

$$a = 3k \qquad a = 3k+1 \qquad a = 3k+2$$

اگر $a = 3k$ باشد چون یکی از عبارات حاصل‌ضرب $4a$ است، پس حاصل‌ضرب مضرب ۳ می‌شود.
اگر $a = 3k+1$ باشد، $a+17 = 3k+18$ مضرب ۳ می‌شود.
پس اگر بخواهیم این عبارت همواره مضرب ۳ باشد، اگر $a = 3k+2$ باشد نیز $7a+b$ باید مضرب ۳ بشود. $7(3k+2) + b = 21k + 14 + b$
که در میان گزینه‌ها به ازای $b = 43$ عبارت مضرب ۳ می‌شود.

۲۰۳- [۴] می‌دانیم در تقسیم بر ۳ عددها سه جور باقی‌مانده ممکن است داشته باشند و چون عدد ما اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس نمی‌تواند مضرب ۳ باشد، در دو حالت دیگر مربع عدد را پیدا می‌کنیم:
$n = 3k+1$ بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند.

$$\Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = \underbrace{9k^2 + 6k + 3}_{\text{مضرب } 3}$$

$n = 3k+2$ بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشند.

$$\Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow n^2 + 2 = \underbrace{9k^2 + 12k + 6}_{\text{مضرب } 3}$$

بنابراین n^2+2 همواره مضرب ۳ است و این گزینه مثال نقض ندارد.

۲۰۴- [۱] اگر x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشد یعنی ممکن است باقی‌مانده‌های آن‌ها در تقسیم به ۳ برابر ۱ یا ۲ باشد که در هر دو حالت باقی‌ماندهٔ مربع آن‌ها در تقسیم به ۳ برابر ۱ است.

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 1 = \text{باقی‌مانده بر } 3$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow 1 = \text{باقی‌مانده بر } 3$$

پس باقی‌ماندهٔ هر دوی x^2 و y^2 در تقسیم به ۳ برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$x^2 + y^2 + 7 = 3k + 1 + 3k' + 1 + 7 = 3(k + k' + 3)$$

که همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۰۵- [۳] باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۳ برابر صفر یا ۱ و یا ۲ است.
بنابراین باقی‌ماندهٔ a^2 در تقسیم بر ۳ برابر ۰ یا ۱ است.

$$a = 3k \Rightarrow a^2 = 9k^2$$
$$\Rightarrow r = 0 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر ۳ برابر صفر است.}$$
$$a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$$
$$\Rightarrow r = 1 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر ۳ برابر ۱ است.}$$
$$a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$$
$$\Rightarrow r = 1 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر ۳ برابر ۱ است.}$$

برای b^2 نیز همین‌طور است یعنی باقی‌ماندهٔ b^2 در تقسیم به ۳ برابر صفر یا ۱ است، بنابراین a^2+b^2 زمانی بر ۳ بخش‌پذیر است که هم a و هم b بر ۳ بخش‌پذیر باشند بنابراین $2a-b$ نیز حتماً مضرب ۳ است که در میان گزینه‌ها ۱۵ این ویژگی را دارد.

۲۰۶- [۴] اگر عددی به ۴ بخش‌پذیر نباشد یعنی در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۲ یا ۳ دارد. در هر کدام از قسمت‌ها عدد را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16k^2 + 8k + 1 = 8k(2k+1) + 1 = 8q + 1$$

$$4k+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) = 4q$$

$$4k+3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16k^2 + 24k + \underbrace{9}_{8+1}$$
$$= 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8q_1$$

بنابراین عدد یا $4q$ است یا $8q+1$.

۲۰۷- **۲** **نکته** گفتیم برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ مربع کامل بر یک عدد، می‌توان خود باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ رساند.

در تقسیم یک عدد بر ۵ باقی‌مانده‌ها از صفر تا ۴ می‌توانند تغییر کنند. در هر کدام از این پنج حالت، باقی‌مانده‌های مربع کامل را بر ۵ پیدا می‌کنیم:

$r=۰ \Rightarrow r^۲=۰\,,\quad r=۱ \Rightarrow r^۲=۱\,,\quad r=۲ \Rightarrow r^۲=۴$

$r=۳ \Rightarrow r^۲=۹ \Rightarrow$ باقی‌مانده به ۵ $=۴$

$r=۴ \Rightarrow r^۲=۱۶ \Rightarrow$ باقی‌مانده به ۵ $=۱$

پس باقی‌ماندهٔ یک مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر صفر یا ۱ یا ۴ است و چون در دو حالت $r=۲$ و $r=۳$ باقی‌ماندهٔ مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر ۴ می‌شود، بنابراین احتمال این‌که یک مربع کامل در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ داشته باشد، برابر است با: $\frac{۲}{۵}$

۲۰۸- **۳** هر عدد طبیعی را در تقسیم به ۶ به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت. اگر هر کدام از آن‌ها را به توان ۲ برسانیم داریم:

$۶k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}}$ صفر

$۶k+۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲+۱۲k+۱ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۱$

$۶k+۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲+۲۴k+۴ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۴$

$۶k+۳ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲+۳۶k+۹ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۳$

$۶k+۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲+۴۸k+۱۶ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۴$

$۶k+۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶k^۲+۶۰k+۲۵ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۱$

یعنی باقی‌ماندهٔ یک مربع کامل در تقسیم به ۶ برابر صفر یا ۱ یا ۳ یا ۴ است و نمی‌تواند برابر ۲ باشد.

توجه برای راحتی کار می‌شد فقط خود باقی‌مانده‌ها را به توان رساند.

$۶k \to$ صفر $,\ ۶k+۱ \to ۱\,,\quad ۶k+۲ \to ۴$

$۶k+۳ \to ۹ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۳$

$۶k+۴ \to ۱۶ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۴$

$۶k+۵ \to ۲۵ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده به ۶}} ۱$

۲۰۹- **۱** می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد در تقسیم بر ۵ برابر است با صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴، بنابراین باقی‌ماندهٔ مربع یک عدد در تقسیم به ۵ برابر است با: (برای راحتی کار می‌توان خود باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ رساند.)

$r=۰ \Rightarrow r^۲=۰\,,\quad r=۱ \Rightarrow r^۲=۱\,,\quad r=۲ \Rightarrow r^۲=۴$

$r=۳ \Rightarrow r^۲=۹ \Rightarrow$ باقی‌مانده به ۵ $=۴$

$r=۴ \Rightarrow r^۲=۱۶ \Rightarrow$ باقی‌مانده به ۵ $=۱$

بنابراین باقی‌ماندهٔ یک مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر است با صفر یا ۱ یا ۴ اما باقی‌ماندهٔ $۵^n+۲$ در تقسیم به ۵ برابر ۲ است، بنابراین به ازای هیچ مقداری از n این عبارت مربع کامل نیست.