

مقدمه مؤلف

سلام

دانش‌آموزان عزیز و دبیران محترم! با توجه به تغییرات صورت‌گرفته در کنکور سراسری و اهمیت امتحان نهایی و تأثیر مستقیم آن بر قبولی در دانشگاه مصمم شدیم کتابی مناسب با این تغییرات فراهم کنیم. در این کتاب علاوه بر امتحانات نهایی داخل کشور، تمام امتحانات نهایی خارج کشور هم جمع‌آوری شده است و سعی شده است با تقسیم‌بندی مطالب هر فصل به بخش‌های کوچک‌تر، متناسب با آموزش هر هفته دانش‌آموزان، تمرین کافی وجود داشته باشد. در ابتدای هر فصل یک تحلیل آماری از سهم هر فصل در امتحان نهایی آورده شده است که می‌تواند میزان اهمیت مطالب و تأثیر آن‌ها را مشخص کند. البته توجه کنید که تمام فصل‌ها و بخش‌ها در امتحان نهایی دارای اهمیت هستند.

ویژگی‌های کتاب در یک نگاه:

- ۱ ارائه بانک کامل سؤالات امتحان‌های نهایی (داخل و خارج کشور) در نظام آموزشی جدید
- ۲ چیدمان موضوعی سؤالات با رویکرد آموزشی
- ۳ ادغام سؤالات تکراری و مشابه برای پرهیز از حجیم‌شدن کتاب
- ۴ ارائه پاسخ‌های آموزشی کامل با اولویت بررسی پاسخ آموزش و پرورش
- ۵ ارائه درس‌نامه‌های کامل ولی در عین حال جمع‌وجور
- ۶ ارائه چند دوره امتحانات نهایی سال‌های اخیر در انتهای کتاب با ریزبارم‌بندی برای آشنایی با نحوه تصحیح اوراق
- ۷ ارائه سؤالاتی در سطح بالاتر برای دانش‌آموزان سخت‌کوش
- ۸ ارائه کتابی با رویکردی اقتصادی و قیمت مناسب در عین حال کامل

در پایان باید از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند تشکر نمایم:

- ۱ آقایان دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم نمودند.
- ۲ مهندس احمد علی‌نژاد که در تمام مراحل تألیف کتاب، برادرانه و با حوصله و صبر زیاد در کنارم قرار داشت.
- ۳ مهندس بقایی و تیم خوب تولید که چاپ این کتاب، مرهون تلاش آن‌ها است.
- ۴ خانم لولاه مرادی به خاطر تمام دلسوزی‌هاشون و پیگیری‌هایی که انجام دادند.
- ۵ تمام اساتید و دوستان عزیزم که از آن‌ها در تمام مراحل زندگی آموخته‌ام.
- ۶ ویراستاران خوب کتاب، آقایان ابراهیم برایی‌نژاد و پیام ابراهیم‌نژاد و خانم‌ها زهرا فتاحی و نرجس تیمناک
- ۷ صدای ملکوتی و دلنشین استاد محمدرضا شجریان که در تمام مراحل تألیف کتاب یار و همدم من بود. روح استاد شجریان عزیز شاد و یادشان گرامی.

علم دریابست بی حد و کنار
طالب علم است غواص بحار
گر هزاران سال باشد عمر او
او نگردد سیر خود از جست‌وجو
(مولانا)

فهرست مطالب

درس نامه
+
پاسخ

سؤال

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس اول:

- | | | |
|----|----|--|
| ۲۷ | ۵ | قسمت اول: مثال نقض - اثبات مستقیم - اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت ها |
| ۲۹ | ۶ | قسمت دوم: برهان خلف و اثبات بازگشتی |
| ۳۲ | ۷ | قسمت اول: بخش پذیری و اعداد اول |
| ۳۴ | ۷ | قسمت دوم: ب.م.م و ک.م.م |
| ۳۶ | ۸ | قسمت سوم: قضیه تقسیم |
| ۳۸ | ۹ | قسمت اول: همنهشتی و قواعد تقسیم بر اعداد خاص |
| ۴۲ | ۱۰ | قسمت دوم: معادله همنهشتی و معادله سیاله خطی |

فصل دوم: گراف و مدل سازی

درس اول:

- | | | |
|----|----|------------------------------------|
| ۴۴ | ۱۱ | قسمت اول: گراف |
| ۴۸ | ۱۳ | قسمت دوم: مسیر، همبندی و دور |
| ۵۱ | ۱۶ | مدل سازی با گراف |

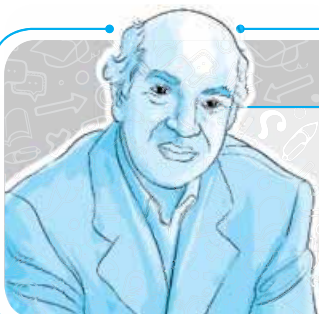
فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

درس اول:

- | | | |
|----|----|--|
| ۵۵ | ۲۰ | قسمت اول: جایگشت و ترکیب و جایگشت با تکرار |
| ۵۷ | ۲۱ | قسمت دوم: توزیع اشیای یکسان |
| ۶۰ | ۲۲ | قسمت سوم: مربع لاتین |
| ۶۳ | ۲۳ | قسمت اول: اصل شمول و عدم شمول |
| ۶۶ | ۲۴ | قسمت دوم: اصل لانه کبوتری |

ضمیمه: امتحانات نهایی

- | | | |
|----|----|--------------------------------|
| ۷۴ | ۶۹ | امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰ |
| ۷۴ | ۷۰ | امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰ |
| ۷۵ | ۷۱ | امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱ |
| ۷۶ | ۷۲ | امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱ |



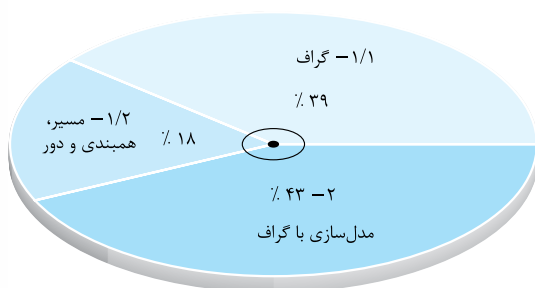
دکتر مهدی بهزاد

گراف و مدل سازی

فصل ۲

مشاوره

در فصل گراف مهم ترین مطلب، یادگیری تعاریف این فصل است. فصل گراف حجم زیادی ندارد به همین دلیل با کمی دقت و مطالعه مطالب می توانید از پس آن در امتحانات برآیید. از این فصل در امتحانات نوبت اول (میان سال) تا صفحه ۴۲، ۵ نمره، در امتحانات خردادماه ۷ نمره و در امتحانات شهریور و دی ۶ نمره است. در بخش مدل سازی تمامی گراف ها و تمرین های کتاب را به دقت بررسی کنید. معمولاً از همان تمرین ها سؤال های نهایی طراحی می شوند. میزان اهمیت هر مبحث در امتحانات نهایی در نمودار دایره ای روبه رو آورده شده است.



صفحه ۳۲ تا ۳۸ کتاب درسی

قسمت اول: گراف

درس ۱

درس نامه ۱ - قسمت اول را در صفحه ۴۴ ببینید.

- ▣ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.
- ۱۵۵- گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. (دی ۹۷)
- ۱۵۶- گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست. (دی ۹۷ و ۹۸ - مشابه نهایی ۹۹)
- ۱۵۷- تعداد رأس زوج هر گراف، عددی فرد است. (دی ۹۸)
- ۱۵۸- مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است. (خرداد ۹۸ خارج)
- ▣ در هر مورد عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.
- ۱۵۹- تعداد رئوس یک گراف را (مرتبه، اندازه) می نامیم. (دی ۹۹ - خرداد ۹۹ خارج)
- ۱۶۰- اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1)/2)$ است. (خرداد ۹۹ خارج)
- ▣ جاهای خالی را با کلمات یا عدد مناسب پر کنید.
- ۱۶۱- اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می نامیم. (دی ۹۹ - دی ۹۸ خارج - خرداد ۱۴۰۱ خارج)
- ۱۶۲- تعداد رأس های فرد هر گراف عددی است. (دی ۹۹ - خرداد ۱۴۰۱ خارج)
- ۱۶۳- دو یال را می نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن ها را به هم متصل کند. (دی ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰ خارج)
- ۱۶۴- مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. (خرداد ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰ خارج)
- ۱۶۵- اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می نامیم. (خرداد ۱۴۰۱)
- ۱۶۶- گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف می نامیم. (خرداد ۱۴۰۱ - دی ۹۹ خارج)
- ۱۶۷- به رأسی که درجه آن صفر است یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد رأس می گوئیم. (خرداد ۱۴۰۱ خارج - شهریور ۱۴۰۱ خارج)
- ۱۶۸- گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور است، گراف نامیده می شود. (دی ۹۸ خارج)
- ۱۶۹- بیشترین تعداد یال در بین گراف های ساده متعلق به گراف است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)
- ۱۷۰- تعداد یال های گراف K_n ، برابر با است. (خرداد ۱۴۰۱)
- ۱۷۱- یک گراف کامل n رأسی، یال دارد. (خرداد ۹۸)

۱۷۲- در یک گراف k - منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است.

(خرداد ۹۹)

۱۷۳- ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

(دی ۹۷ - خرداد ۹۹ - خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۷۴- درجه رأس‌های گرافی از مرتبه ۴ به صورت $۱, a, ۳, ۲$ است.

(شهریور ۹۸ خارج)

الف) مقدار a چه قدر است؟

ب) این گراف را رسم کنید.

۱۷۵- در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه p رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل ارائه کنید.

(خرداد ۹۹ خارج - شهریور ۱۴۰۰ خارج)

الف) $r=۲$ و $p=۵$

ب) $r=۳$ و $p=۷$

(دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۷۶- یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k - منتظم رسم کنید که:

الف) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(شهریور ۹۸)

۱۷۷- یک گراف ۵ رأسی غیرتهی k - منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(خرداد ۹۹)

۱۷۸- در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ برابر ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۷۹- در گرافی با ۷ رأس که دارای ۱۲ یال است، تعداد یال‌های گراف مکمل را بیابید.

(دی ۹۹ خارج)

۱۸۰- تعداد یال‌های گراف ۵ رأسی ۲ - منتظم از مکمل آن چه مقدار بیشتر است؟

(خرداد ۹۹)

۱۸۱- گراف G ، ۳ - منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.

ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۰)

۱۸۲- گراف G ، ۳ - منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کم‌تر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورید و گراف G را رسم کنید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج - مشابه دی ۹۹ خارج)

۱۸۳- در یک گراف ۳ - منتظم داریم $۵ - 2p = q$ ، مرتبه و اندازه گراف را به دست آورده و آن را رسم کنید.

(شهریور ۹۹)

۱۸۴- گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج - دی ۹۹ خارج - دی ۹۷)

۱۸۵- گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه گراف و ماکزیمم درجه رأس آن را مشخص کنید.

(دی ۹۸ خارج)

۱۸۶- گراف کامل K_p دارای ۶۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را معین کنید.

(دی ۹۷)

۱۸۷- گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید.

ب) اندازه گراف را مشخص کنید.

ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۸۸- گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, bc, gc, gd, cd, de\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر پاسخ دهید.

(دی ۹۹ خارج)

الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.

ب) همسایگی باز رأس g را به صورت مجموعه بنویسید.

ج) درجه رأس f را معلوم کنید.

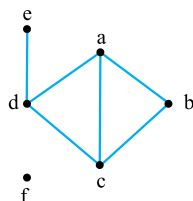
۱۸۹- گراف G مطابق شکل مقابل رسم شده است. با در نظر گرفتن این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(دی ۹۸ خارج)

الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.

ب) مجموعه $N_G[d]$ را بنویسید.

ج) مکمل گراف را رسم کنید.



(دی ۹۸)

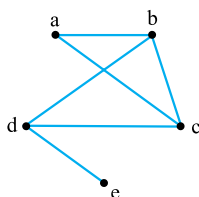
۱۹۰- گراف G را به صورت مقابل در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

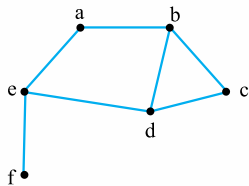
الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

ج) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بیابید.

د) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، x کدام است؟





(خرداد ۹۸)

۱۹۱- شکل مقابل نمودار گراف G می باشد.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

ج) مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید.

۱۹۲- ۵ نفر در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشند یا نباشند. (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

الف) چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان رابطه ای دوطرفه باشد، یعنی هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست. در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

۱۹۳- در گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴ اگر $\delta = 3$ و $\Delta = 5$ و دو رأس از درجه ۴ داشته باشد، تعداد رئوس درجه ۳ چند است؟

۱۹۴- گراف G با رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $N_G(a) = \{b\}$ ، $N_G(b) = \{a, c, d, e\}$ ، $N_G(c) = \{b, d\}$ ، $N_G(d) = \{b, c, e\}$ و $N_G(e) = \{b, d\}$ مفروض است. این گراف دارای چند زیرگراف با $\Delta = 4$ است؟

۱۹۵- گراف K_5 دارای چند زیرگراف کامل است؟

۱۹۶- در گرافی با مرتبه ۶ و اندازه ۱۳ چند رأس از درجه Δ وجود دارد؟

۱۹۷- گرافی با اضافه کردن ۱۱ یال به گراف کامل و با حذف ۹ یال به گراف ۵- منتظم تبدیل می شود. مرتبه گراف چند است؟

صفحه ۳۸ تا ۴۲ کتاب درسی

قسمت دوم: مسیر، همبندی و دور

درس ۱

درس نامه ۱ - قسمت دوم را در صفحه ۴۸ ببینید.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱۹۸- گراف G را می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

(خرداد ۱۴۰۱ - شهریور ۹۸ - خرداد ۹۹ خارج - دی ۹۸ خارج - شهریور ۹۸ خارج)

(خرداد ۹۸ خارج - دی ۹۸ خارج)

۱۹۹- p_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.

۲۰۰- گراف G با مجموعه رأس های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال های $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ را در نظر بگیرید: (شهریور ۹۸)

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

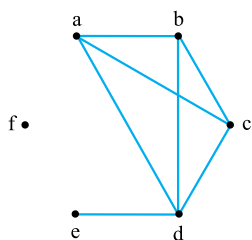
ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

۲۰۱- با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

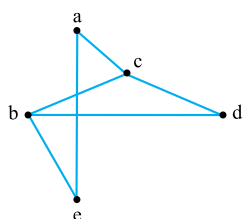
الف) مقدار $\Delta(G) - q$ را بیابید.

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

ج) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟



(دی ۱۴۰۰)

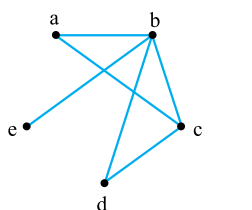


(دی ۹۸)

۲۰۲- گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.



(دی ۹۹)

۲۰۳- گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید.

الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

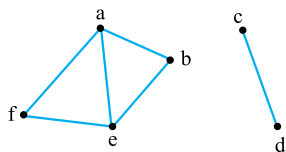
ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

ج) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

۲۰۴- گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید.

- الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.
- ب) دوری به طول ۴ برای b بنویسید.
- پ) مکمل گراف G را رسم کنید.
- ت) $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.

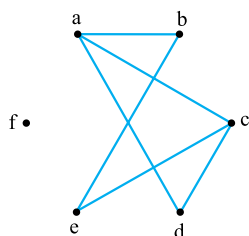
(خرداد ۹۹ خارج)



۲۰۵- گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.

- الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.
- ب) بزرگترین درجه در گراف \bar{G} مربوط به کدام رأس و چند است؟
- پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.
- ت) آیا گراف G همبند است؟

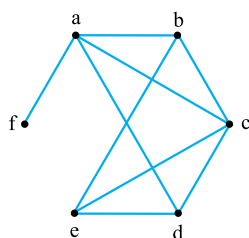
(خرداد ۱۴۰۰)



۲۰۶- گراف G (شکل مقابل) را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

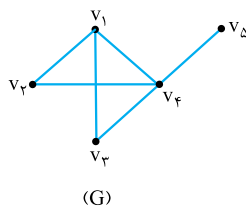
- الف) ماکزیمم درجه در گراف \bar{G} چند است؟
- ب) چند یال به گراف G اضافه کنیم تا به یک گراف کامل تبدیل شود؟
- پ) اگر $N_G[x] = \{a, c, e, x\}$ ، آن گاه x کدام رأس است؟
- ت) یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)



۲۰۷- در گراف G (شکل مقابل) تمام دورهای موجود را نوشته و طول آن‌ها را مشخص کنید.

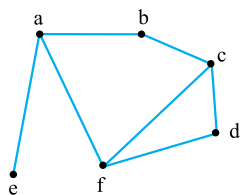
(دی ۹۹ خارج)



۲۰۸- گراف G (شکل مقابل) را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- الف) مرتبه و اندازه گراف G را مشخص کنید.
- ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.
- پ) $N_G(b)$ را با اعضا مشخص کنید.
- ت) یک مسیر از رأس e به رأس b به طول ۴ بنویسید.
- ث) درجه رأس e در گراف مکمل G را به دست آورید.

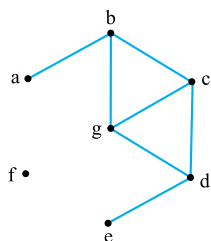
(دی ۱۴۰۰ خارج)



۲۰۹- با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.
- ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
- پ) درجه رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.
- ت) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟
- ث) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.
- ج) $N_G(f)$ را معین کنید.

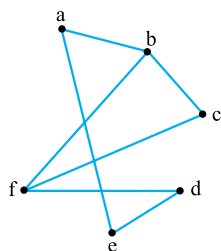
(دی ۹۷ - مشابه خرداد ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰)



۲۱۰- با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- الف) $\Delta(G)$ را تعیین کنید.
- ب) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.
- پ) یک دور به طول ۵ برای a بنویسید.
- ت) درجه رأس c در گراف مکمل چند است؟
- ث) یک زیرگراف با سه یال رسم کنید.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج)



تعاریف و اصطلاحات گراف

مرتبه: به تعداد رئوس گراف، مرتبه می‌گوییم و آن را با p نمایش می‌دهیم.
 $|V(G)| = p$

اندازه: به تعداد یال‌های گراف، اندازه گراف می‌گوییم و آن را با q نمایش می‌دهیم.
 $|E(G)| = q$

درجه یک رأس: به تعداد یال‌هایی که به رأس a متصل است درجه رأس a می‌گوییم و آن را با $\deg(a)$ یا به طور خلاصه $d(a)$ نمایش می‌دهیم.

رأس زوج و فرد: رأسی که درجه آن زوج است را رأس زوج و رأسی که درجه آن فرد است را رأس فرد می‌گوییم.

رأس تنها (ایزوله): به رأسی که درجه آن صفر است (به هیچ رأسی متصل نباشد) رأس تنها یا ایزوله می‌گوییم.

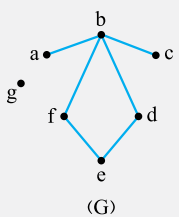
دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس a و b را مجاور می‌گوییم هرگاه توسط یک یال به هم متصل شده باشند.

دو یال مجاور: دو یال را مجاور می‌گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند.

مجموعه همسایگی یک رأس: به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس a متصل هستند همسایگی باز رأس a می‌گوییم و آن را با $N_G(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر رأس a را به $N_G(a)$ اضافه کنیم به آن همسایگی بسته رأس a می‌گوییم و با نماد $N_G[a]$ نمایش می‌دهیم.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف را با Δ و کوچک‌ترین درجه را با δ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجه رئوس گراف می‌نامیم.



مثال با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف را به دست آورید.
 ب) درجه تمام رئوس را بنویسید و رئوس فرد و زوج را مشخص کنید.

پ) آیا گراف دارای رأس تنها می‌باشد؟
 ت) رأس f با کدام رئوس مجاور است؟
 ث) یال bd با کدام یال‌ها مجاور است؟
 ج) مجموعه همسایگی باز و بسته رأس e را بنویسید.
 چ) Δ و δ گراف را به دست آورید.

✓ پاسخ: الف) گراف دارای رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ است، پس $p = 7$ و دارای یال‌های $E = \{ab, bc, bd, bf, de, ef\}$ است پس $q = 6$.

ب) $d(a) = 1, d(b) = 4, d(c) = 1, d(d) = 2, d(e) = 2, d(f) = 2, d(g) = 0$

در این گراف رئوس a و c رئوس فردند و باقی رئوس، رئوس زوج‌اند.
 پ) در این گراف رأس g رأس تنها یا ایزوله است.
 ت) رأس f با رئوس b و e مجاور است.
 ث) یال bd با یال‌های ba, bf, bc و de مجاور است.

ج) $N_G(e) = \{d, f\}$ $N_G[e] = \{d, f, e\}$
 چ) $\Delta = 4$ $\delta = 0$

قسمت اول:

گراف

فصل ۲

درس ۱

صفحه ۳۲ تا ۳۸ کتاب درسی

گراف

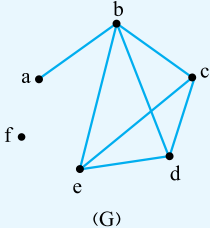
به مجموعه‌ای از نقاط و پاره‌خط‌هایی که بعضی از این نقاط را به هم وصل کرده باشد، گراف می‌گوییم.

به زبان ریاضی اگر مجموعه نقاط $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و مجموعه تمام پاره‌خط‌های ممکن بین نقاط V باشد، در این صورت $G(V, E)$ یک گراف ساده است اگر $E \subseteq A$.

به نقاط در گراف، رأس و به پاره‌خط‌ها، یال می‌گوییم.
 توجه: در رسم گراف دقت کنید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و از رأس عبور نکند (به جز رأس شروع و پایان).

برای رسم یال نیازی نیست حتماً پاره‌خط رسم شود و می‌توانیم از خط شکسته یا خط انحنا دار استفاده کنیم.

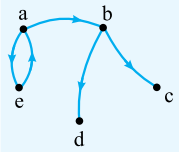
برای نمونه در گراف زیر داریم:



$V = \{a, b, c, d, e, f\}$
 $E = \{ab, bc, cd, de, bd, ce, be\}$

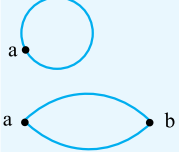
گراف جهت‌دار

در بعضی از گراف‌ها، یال‌ها دارای جهت هستند و برای نمایش آن‌ها از زوج مرتب استفاده می‌کنیم که جهت یال از مؤلفه اول به سمت مؤلفه دوم است.



$V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{(a, b), (b, c), (b, d), (a, e), (e, a)\}$

توجه: به یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل می‌کند طوقه می‌گوییم.



یال چندگانه (یال موازی): هرگاه بین دو رأس، چند یال وجود داشته باشد به آن یال چندگانه یا یال موازی می‌گوییم.

توجه کنید که گراف ساده طوقه و یال چندگانه ندارد و در این فصل منظور از گراف، گراف ساده است.

مثال گراف ۸ رأسی ۵ - منتظم با افزودن چند یال به گراف کامل

تبدیل می‌شود؟

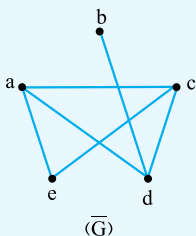
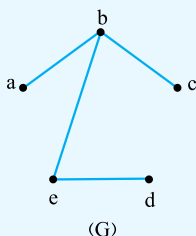
✓ پاسخ:

$$۸ \times ۷ = ۲۸ \Rightarrow ۲۸ - ۲۰ = ۸$$

$$۵ \times ۸ = ۴۰ \Rightarrow ۴۰ - ۲۰ = ۲۰$$

با افزودن ۸ یال به گراف کامل تبدیل می‌شود.

مکمل یک گراف: مکمل گراف G که آن را با \bar{G} یا G^c نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن همان رئوس گراف G است و هر یالی که در G وجود ندارد در \bar{G} رسم می‌شود و هر یالی که در G وجود دارد در \bar{G} رسم نمی‌شود.



ویژگی‌های گراف مکمل:

$$\overline{\overline{G}} = G$$

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - 1$$

$$p_G = p_{\bar{G}}$$

$$q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2}$$

مثال گراف G با رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و یال‌های

$E = \{ab, ac, be, bf, cd, cf, df\}$ مفروض است. بدون رسم گراف

G به سؤالات پاسخ دهید.

الف) مجموعه همسایگی باز و بسته رئوس b و f را بنویسید.

ب) Δ , δ , p و q را به دست آورید.

پ) تعداد یال‌های گراف مکمل G و درجه رئوس a در گراف \bar{G} را به دست آورید.

ت) گراف \bar{G} را رسم کنید.

✓ پاسخ: الف) باید رئوسی که به b و f متصل‌اند را بنویسیم:

$$N_G(b) = \{a, e, f\}, N_G[f] = \{a, e, f, b\}$$

$$N_G(f) = \{b, c, d\}, N_G[f] = \{b, c, d, f\}$$

$$p = |V| = 6, q = |E| = 7 \quad \text{ب)}$$

رئوس f, a, b و c هر کدام به ۳ رأس متصل‌اند و بیشترین تعداد یال از آن‌ها رسم شده است؛ پس $\Delta = 3$.

رأس e فقط به یک رأس متصل است و کمترین تعداد یال از آن رسم شده است؛ پس $\delta = 1$.

$$q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q_{\bar{G}} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \quad \text{پ)}$$

$$\Rightarrow q_{\bar{G}} = 8$$

قضیه مجموع درجات رئوس هر گراف، دو برابر اندازه آن گراف است.

$$\sum_{i=1}^p \deg(a_i) = 2q$$

اثبات در شمارش مجموع درجه رئوس گراف هر یال مانند ab را یک بار برای رأس a و یک بار برای رأس b شمارش کرده‌ایم پس هر یال دو بار شمارش شده است و مجموع درجات رئوس برابر است با دو برابر تعداد یال‌های (اندازه) گراف.

مثال ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی زوج است.

✓ پاسخ: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس

فرد و B مجموعه همه رئوس زوج گراف باشد. در این صورت داریم $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ می‌دانیم مجموع

درجات رئوس، زوج است و همچنین مجموع درجه‌های زوج هم زوج است پس باید مجموع درجات فرد گراف زوج باشد. پس $\sum_{v \in A} \deg(v)$ عددی

زوج است و مجموع چند عدد فرد زمانی زوج است که تعداد آن‌ها زوج باشد.

مثال در هر قسمت مشخص کنید با درجه‌های داده‌شده، آیا گراف

قابل رسم است. در صورت قابل رسم بودن، گراف را رسم کنید.

الف) ۵, ۴, ۴, ۳, ۲, ۱

ب) ۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۰

پ) ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱

✓ پاسخ: الف) تعداد رئوس فرد باید، عددی زوج باشد که در این

قسمت ۳ تا رأس فرد داریم پس قابل رسم نیست.

ب) این گراف دارای ۶ رأس است و رأس درجه ۵ دارد؛ پس یک رأس باید به همه رئوس متصل باشد. بنابراین نمی‌توانیم رأس درجه صفر داشته باشیم پس گراف قابل رسم نیست.

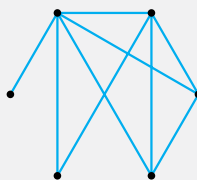
نکته گراف مرتبه p هم‌زمان نمی‌تواند

رئوس با درجه صفر و $p-1$ داشته باشد.

پ) این گراف دارای ۶ رأس است و حداکثر

درجه آن ۵ است و تعداد رئوس فرد آن، ۴ تا

است و گراف مقابل متناظر با آن است.



معرفی چند گراف

گراف تهی: گرافی که هیچ یالی نداشته باشد را گراف تهی می‌نامیم و آن را

با \bar{K}_p نمایش می‌دهیم.

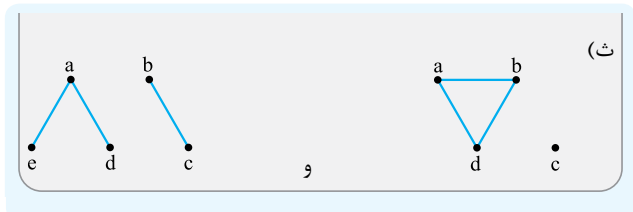
گراف k - منتظم: گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر k

باشد را گراف k - منتظم می‌نامیم و تعداد یال‌های آن برابر است با $\frac{kp}{2}$.

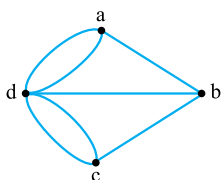
گراف کامل: گرافی که در آن تمام یال‌های ممکن رسم شده باشد (هر رأس به

تمام رئوس دیگر متصل باشد) را گراف کامل می‌نامیم گراف کامل مرتبه p را

با K_p نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های آن برابر با $\frac{p(p-1)}{2}$ است.



پاسخ سوالات



۱۵۵. نادرست، گراف حاصل از این مدل سازی دارای یال چندگانه است و به صورت مقابل است.

۱۵۶. درست، چون تعداد رئوس فرد گراف باید زوج باشد.
 ۱۵۷. نادرست، تعداد رئوس زوج هر گراف بسته به مرتبه آن می تواند زوج یا فرد باشد.
 ۱۵۸. نادرست، در گراف ساده می تواند درجه مینیمم صفر باشد، مثلاً در گراف تهی درجه مینیمم، صفر است.

۱۵۹. مرتبه $\frac{n(n-1)}{2}$.۱۶۰

۱۶۱. طوقه ۱۶۲. زوج

۱۶۳. مجاور ۱۶۴. دو برابر

۱۶۵. فرد ۱۶۶. تهی

۱۶۷. تنها (ایزوله) ۱۶۸. کامل

۱۶۹. کامل $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.۱۷۰

۱۷۱. $\frac{\lambda \times \gamma}{\gamma} = 28$.۱۷۲

۱۷۳. رجوع کنید به متن درس

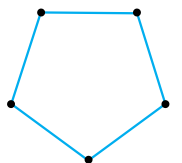
۱۷۴. الف) با توجه به این که تعداد رئوس فرد هر گراف، زوج است باید a زوج باشد. پس $a = 0$ یا $a = 2$ و با توجه به این که در گراف ۴ رأسی، رأس درجه ۳ داریم پس یک رأس به همه رئوس متصل است و نمی توانیم درجه صفر داشته باشیم بنابراین $a = 2$.

ب)



۱۷۵. الف)

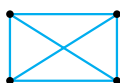
ب) گراف ۷ رأسی ۳- منتظم وجود ندارد، چون تعداد رئوس فرد باید عددی زوج باشد.



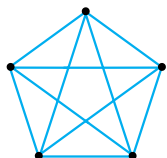
۱۷۶. الف) چون گراف ۴ رأسی و غیرتهی است، $4 > k > 1$ کمترین مقدار k برابر ۱ است.



ب) بیشترین مقدار k ، ۳ است.

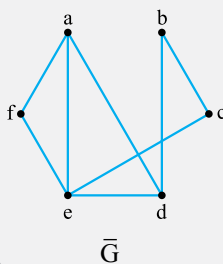


۱۷۷. الف) چون گراف ۵ رأسی است پس $5 > k > 0$ ؛ ولی گراف غیرتهی است پس $k \neq 0$ ، بیشترین مقدار k ، برابر ۴ است.

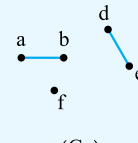
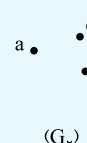
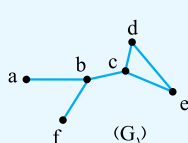
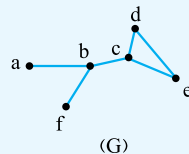


$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - 1 \Rightarrow 2 + \deg_{\bar{G}}(a) = 6 - 1$
 $\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 3$

ت)



زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال های آن زیرمجموعه ای از مجموعه یال های گراف G باشد. برای مثال گراف های G_1, G_2, G_3 زیرگراف G هستند.



مثال گراف G با رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ و همسایگی رئوس $N_G(a) = \{b, d, e\}$ ، $N_G(b) = \{a, c, d\}$ ، $N_G(c) = \{b\}$ ، $N_G(d) = \{a, b\}$ و $N_G(e) = \{a\}$ تعریف شده است. الف) گراف را رسم کنید.

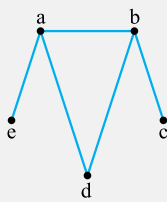
ب) تعداد یال های گراف \bar{G} را به دست آورید.

پ) دو زیرگراف ۳ رأسی شامل رأس a رسم کنید.

ت) زیرگرافی رسم کنید که $\Delta = 3$ باشد.

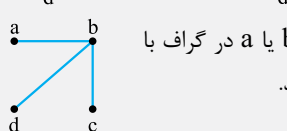
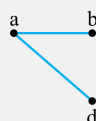
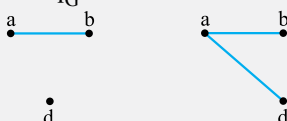
ث) دو زیرگراف شامل ۳ یال رسم کنید.

پاسخ: الف) با توجه به همسایگی ها گراف را رسم می کنیم؛ مثلاً رأس a باید به رئوس b, c, d, e متصل باشد و رأس b به رئوس a, c, d و d به همین ترتیب باقی رئوس.



ب) $q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 5 + q_{\bar{G}} = \frac{5 \times 4}{2}$

$\Rightarrow q_{\bar{G}} = 10 - 5 = 5$



ت) چون $\Delta = 3$ است، باید رئوس b یا a در گراف با تمام یال های متصل به آن رسم شوند.

۱۸۵. K_p تعداد یال‌های گراف $= \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72$

$\Rightarrow p^2 - p - 72 = 0 \Rightarrow (p-9)(p+8) = 0$

غقق $p = 9$ یا $p = -8$

$\Delta = p - 1 = 9 - 1 = 8$

۱۸۶. K_p تعداد یال‌ها در گراف $= \frac{p(p-1)}{2} = 66 \Rightarrow p(p-1) = 132$

$\Rightarrow p^2 - p - 132 = 0 \Rightarrow (p-12)(p+11) = 0$

غقق $p = 12$ یا $p = -11$

$\Delta = \delta = p - 1 = 11$

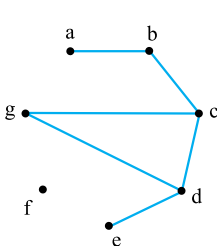
در گراف کامل تمام رئوس از درجه $p-1$ هستند.

۱۸۷. الف) باید رئوسی که به d متصل هستند را بنویسیم.

$N_G(d) = \{b, e\}$

ب) تعداد اعضای مجموعه E ، اندازه گراف است. $|E(G)| = q = 6$

پ) می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف دو برابر اندازه گراف است، پس جواب $2 \times 6 = 12$ است.



الف) $q = |E| = 6$ و $p = |V| = 7$

ب) $N_G(g) = \{c, d\}$

پ) $\deg(f) = 0$

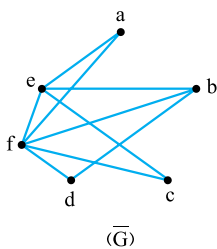
۱۸۸

۱۸۹. الف) $p = 6$ = تعداد رئوس = مرتبه گراف

$q = 6$ = تعداد یال‌ها = اندازه گراف

ب) $N_G[d] = \{d, a, c, e\}$

پ) هر یالی که در گراف G وجود ندارد را رسم می‌کنیم.



(\bar{G})

۱۹۰. الف) مینیمم درجه گراف مربوط به رأس e است. پس: $\delta = 1$

ب) تعداد یال‌های گراف $q = 6$ است.

$N_G[b] = \{a, b, c, d\}$ (پ)

ت) رأس d به رئوس b, c و e متصل است، پس $x = c$.

۱۹۱. الف) گراف دارای $p = 6$ رأس و $q = 7$ یال است.

ب) $N_G(b) = \{a, c, d\}$

پ) $q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q_{\bar{G}} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

$\Rightarrow q_{\bar{G}} = 8$

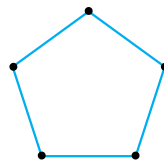
$2 \times 8 = 16$ = دو برابر تعداد یال‌های \bar{G} = مجموع درجات رأس‌های گراف \bar{G}

۱۹۲. الف) قسمت اول سؤال مانند گراف جهت‌دار ۵ رأسی است. رابطه دوستی

ممکن است بین دو نفر a و b به ۴ صورت باشد، هیچ‌کدام در دوستان هم نباشند

یا a در دوستان b باشد یا b در دوستان a باشد یا هر دو در دوستان هم باشند.

ب) گراف نمی‌تواند ۱- منتظم باشد، چون تعداد رئوس فرد عددی فرد می‌شود که نشدنی است، پس باید $k = 2$ باشد.



۱۷۸. $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \Rightarrow 9 + 12 = 21 = p - 1$

$\Rightarrow p = 22$

۱۷۹. $q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2}$

تعداد یال‌های گراف کامل ۷ رأسی $= \frac{7 \times 6}{2} = 21$

تعداد یال‌های گراف $= 12$

\Rightarrow تعداد یال‌های گراف مکمل $= 21 - 12 = 9$

۱۸۰. $\frac{2 \times 5}{2} = 5$ = تعداد یال‌های گراف ۵ رأسی ۲- منتظم

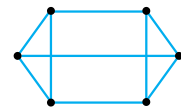
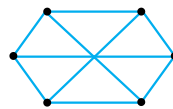
$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ = تعداد یال‌های گراف کامل ۵ رأسی

تعداد یال‌های گراف مکمل $= 10 - 5 = 5$

پس تعداد یال‌های گراف و گراف مکمل آن برابر است.

۱۸۱. الف) $q = \frac{kp}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$

ب) به دو صورت گراف را می‌توان رسم کرد.

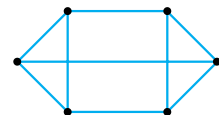
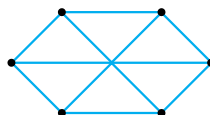


۱۸۲

$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{3p}{2} \Rightarrow 3 - \text{منتظم} \\ q = 2p - 3 \end{array} \right.$

$2p - 3 = \frac{3p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$

گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ به دو صورت قابل رسم است.

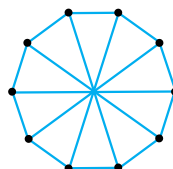


۱۸۳

$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{3p}{2} \Rightarrow \text{گراف ۳- منتظم} \\ q = 2p - 5 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 5 \Rightarrow \frac{p}{2} = 5$

$\Rightarrow p = 10$

$q = 2 \times 10 - 5 = 15$

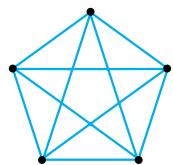


۱۸۴. تعداد یال‌های گراف K_p برابر با $\frac{p(p-1)}{2}$ است، پس:

$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p(p-1) = 20$

$\Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow (p-5)(p+4) = 0$

غقق $p = 5$ یا $p = -4$



در گراف K_5 درجه تمام رئوس ۵ است؛ پس اگر از رئوس یالی حذف نشده باشد، درجه ۵ است و در صورت حذف، درجه کمتر می شود.

با توجه به اعداد نوشته شده روی شکل (الف)، این گراف دارای ۳ رأس درجه ۵ $\Delta = 5$ است و در گراف شکل (ب) دارای ۲ رأس درجه ۵ $\Delta = 5$ است.

۱۹۷. اگر تعداد یال گراف q باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} q+11 &= \frac{p(p-1)}{2} \\ q-9 &= \frac{5p}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} 20 = \frac{p(p-1)}{2} - \frac{5p}{2}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times 2} 40 &= p^2 - p - 5p = p^2 - 6p \\ \Rightarrow p^2 - 6p - 40 &= 0 \Rightarrow (p-10)(p+4) = 0 \\ \Rightarrow p &= 10 \text{ یا } p = -4 \text{ غقیق} \end{aligned}$$

با توجه به این که ۵ نفرند و به تعداد $\binom{5}{2} = 10$ حالت دو نفر را می توان انتخاب کرد، پس 41° حالت می توانیم داشته باشیم.

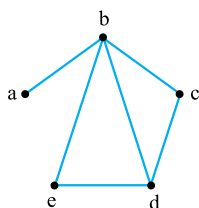
(ب) چون دوستی در این قسمت دوطرفه است مثل گراف ساده است. یا هر دو نفر با هم دوستانند یا دوست نیستند، پس 21° حالت وجود دارد.

۱۹۳. چون $\delta = 3$ و $\Delta = 5$ است پس درجه رئوس گراف فقط ۴، ۳ و ۵ می تواند باشد.

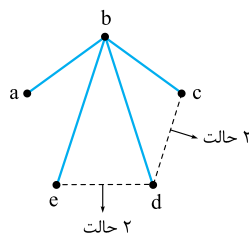
$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 3 & x \\ 4 & 2 \\ 5 & y \end{matrix} \\ & x + 2 + y = 8 \\ & \sum \text{deg} = 3x + 4 \times 2 + 5y = 2 \times 14 = 28 \\ & \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 1 \end{aligned}$$

پس این گراف ۵ رأس درجه ۳ دارد.

۱۹۴. ابتدا گراف را با توجه به همسایگی های داده شده رسم می کنیم. چون زیرگراف باید رئوس با $\Delta = 4$ داشته باشد پس در زیرگراف مورد نظر رأس b با تمام یال های متصل به آن وجود دارد.



فقط یال های cd و ed هستند که ممکن است در زیرگراف باشند یا نباشند، پس هر کدام ۲ حالت دارند و در کل $2^2 = 4$ زیرگراف مختلف می توان رسم کرد.



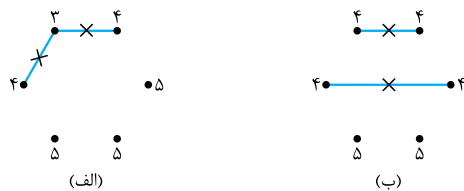
۱۹۵. در گراف K_5 می توانیم زیرگراف های کامل به صورت K_5, K_4, K_3, K_2, K_1 داشته باشیم و چون K_p تمام یال ها را دارد، فقط کافی است برای هر زیرگراف، فقط رئوس را انتخاب کنیم.

$$\left. \begin{aligned} K_5 &= \binom{5}{1} = 5 \\ K_4 &= \binom{5}{2} = 10 \\ K_3 &= \binom{5}{3} = 10 \\ K_2 &= \binom{5}{4} = 5 \\ K_1 &= \binom{5}{5} = 1 \end{aligned} \right\}$$

تعداد کل زیرگراف های مورد نظر $= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$

نکته هر گراف کامل (K_p) دارای $2^p - 1$ زیرگراف کامل است.

۱۹۶. گراف کامل ۶ رئوس دارای $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ یال است؛ پس گراف مورد نظر ۲ یال از گراف K_6 کمتر دارد. با توجه به این که رسم ۱۳ یال نسبت به ۲ یال کار سخت تری هست پس ۲ یال حذف شده را رسم می کنیم. این ۲ یال یا از یک رأس حذف شدند (شکل الف) یا ۲ یال حذف شده رأس مشترک ندارند (شکل ب).



قسمت دوم:

مسیر، همبندی و دور

توضیح
درس ۱

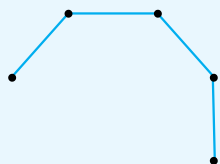
مسیر

اگر a و b دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از a به b (یک $a-b$ مسیر) در G دنباله ای از رئوس دوهده و متمایز در G است که از a شروع و به b ختم می شود. به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس).

قرارداد دنباله متشکل از تنها یک رأس a یک مسیر است با طول صفر از رأس a به خودش.

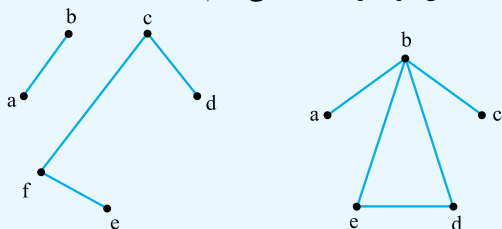
تعریف گرافی که تنها از یک مسیر n رئوسی تشکیل شده باشد را P_n نمایش می دهیم.

مثلاً گراف روبه رو یک P_5 است.



همبندی و ناهمبندی گراف

گراف G را همبند می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر در گرافی حداقل دو رأس وجود داشته باشد که بین آن ها مسیر نباشد آن گراف را ناهمبند می نامیم.

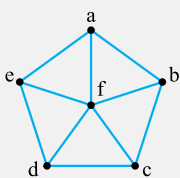
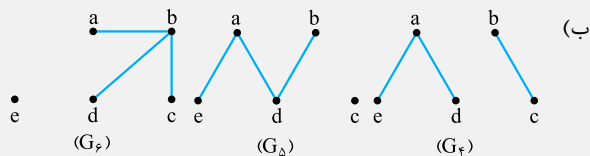


گراف ناهمبند است چون بین رئوس a و c مسیر وجود ندارد.

گراف همبند است چون بین هر دو رأس آن مسیری وجود دارد.

دور

دنباله $a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دوهده و متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می نامیم.

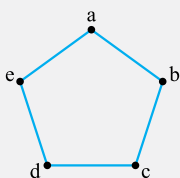


مثال تمام دورهای به طول ۵ در گراف

مقابل را بنویسید.

✓ **پاسخ:** هر بار یک رأس را باید کنار بگذاریم و با ۵ رأس دیگر دور تشکیل دهیم.

abcdea, abcdfa, bcdefb
cdeafc, deabfd, eabcfb



مثال در گراف C_5 تمام زیرگرافها به

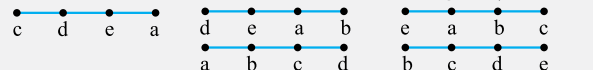
صورت P_3 را بنویسید.

✓ **پاسخ:** با توجه به تعریف گراف C_5

شکل آن به صورت مقابل است:

گراف P_3 به صورت مسیری به طول ۳ است $(\bullet - \bullet - \bullet)$ با

توجه به نام رئوس، زیرگرافهای زیر قابل قبول اند.



✓ **پاسخ سؤالات**

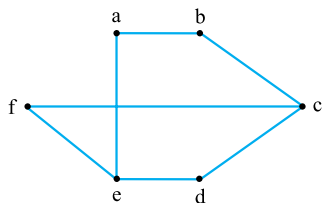
۱۹۸. همیند

۱۹۹. n رأسی

(الف. ۲۰۰)

(ب) $N_G[b] = \{a, b, c\}$

(پ) $baefcd$



۲۰۱. (الف) در این گراف تعداد یالها $q = 7$ است و بیشترین درجه را رأس d

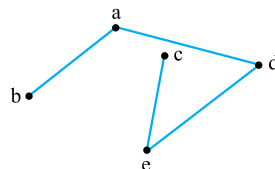
دارد پس $\Delta = 4$ بنابراین $q - \Delta = 7 - 4 = 3$.

(ب) $abcd$

(پ) $q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q_{\bar{G}} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \Rightarrow q_{\bar{G}} = 8$

(الف. ۲۰۲) $acdbea$

(ب) هر یالی که در گراف G وجود ندارد در گراف \bar{G} رسم می‌شود.



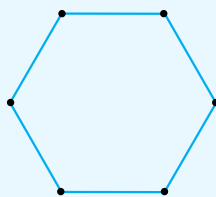
۲۰۳. (الف) $\deg_G(e) + \deg_{\bar{G}}(e) = p - 1 \Rightarrow 1 + \deg_{\bar{G}}(e) = 5 - 1$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e) = 3$

تعریف گرافی که تنها از یک دور n رأسی

تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.

برای مثال گراف مقابل C_6 است.

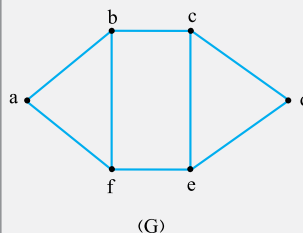


مثال با توجه به گراف مقابل

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(الف) دو مسیر به طول ۳ از a به d بنویسید.

(ب) تمام دورهای گراف را بنویسید.



(G)

(پ) مسیر به طول ۴ و ۵ از a به f بنویسید.

(ت) درجه رئوس c و d در گراف مکمل را به دست آورید.

(ث) دو زیرگراف 4 رأسی شامل رأس a با ۳ یال رسم کنید.

$afed$ و $abcd$

✓ **پاسخ:** (الف)

$abfa$ و $cdec$

(ب) به طول ۳

$bcefb$

به طول ۴

$bcdefb$ و $abcefa$

به طول ۵

$abcdefa$

به طول ۶

$abcef$

(پ) مسیر به طول ۴

$abcdef$

مسیر به طول ۵

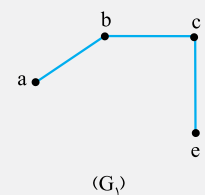
(ت) $\deg_G(c) + \deg_{\bar{G}}(c) = p - 1 \Rightarrow 3 + \deg_{\bar{G}}(c) = 5$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 2$

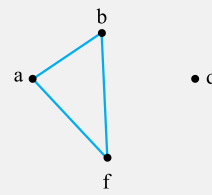
$\deg_G(d) + \deg_{\bar{G}}(d) = p - 1 \Rightarrow 2 + \deg_{\bar{G}}(d) = 5$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(d) = 3$

(ث)



(G_1)

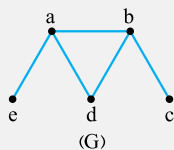


(G_2)

مثال گراف G مفروض است.

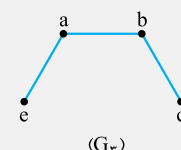
(الف) ۳ زیرگراف همبند با ۳ یال رسم کنید.

(ب) ۳ زیرگراف ناهمبند با ۳ یال رسم کنید.

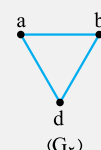


(G)

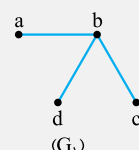
✓ **پاسخ:**



(G_1)



(G_2)



(G_3)

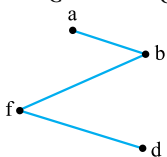
(الف)

۲۱۰. الف) بیشترین درجه رأس مربوط به رئوس f و b است. $\Delta = 3$

ب) $N_G[a] = \{a, b, c\}$

پ) $abfdea$

ت) $\deg_G(c) + \deg_{\bar{G}}(c) = p - 1 \Rightarrow 2 + \deg_{\bar{G}}(c) = 6 - 1$



$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 3$

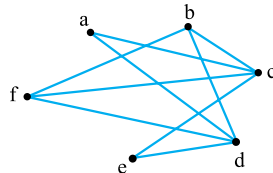
ث)

ب) دور به طول 3

دور به طول 4

پ) بیشترین درجه رأس مربوط به رأس b است که $\Delta = 4$.

۲۰۴. الف) بیشترین درجه مربوط به رئوس a و e و کمترین درجه مربوط به رئوس c و d است، پس $\Delta = 3$ و $\delta = 1$.



ب) $bafeb$

پ) هر یالی که در G وجود ندارد را باید رسم کنیم.

ت) رئوس متصل به e را باید نام ببریم. $N_G(e) = \{a, b, f\}$

۲۰۵. الف) باید رئوسی که به c متصل هستند را بنویسیم. $N_G(c) = \{a, e, d\}$

ب) رأسی در \bar{G} بیشترین درجه را دارد که در G کمترین درجه را داشته باشد پس رأس f که درجه آن صفر است در \bar{G} بیشترین درجه را دارد و درجه آن برابر ۵ است؛ بنابراین $\Delta_{\bar{G}} = 5$.

پ) $abecda$

ت) خیر، چون بین رئوس f و a مسیری وجود ندارد.

۲۰۶. الف) ماکزیمم درجه در گراف \bar{G} برای رأسی است که در G مینیمم درجه باشد پس رأس f است.

$\deg_G(f) + \deg_{\bar{G}}(f) = p - 1 \Rightarrow 1 + \deg_{\bar{G}}(f) = 6 - 1$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(f) = \Delta_{\bar{G}} = 4$

ب)
$$\left. \begin{aligned} K_6 \text{ تعداد یال های گراف} &= \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ G \text{ تعداد یال های گراف} &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 15 - 9 = 6$$

۶ یال باید اضافه شود.

پ) x رأسی است که به رئوس a, c, e و متصل است پس می تواند b یا d باشد.

ت) $abedc$

۲۰۷. دور به طول 3: $v_1v_3v_4v_1$ و $v_1v_2v_4v_1$

دور به طول 4: $v_1v_2v_3v_4v_1$

۲۰۸. الف) $\Delta = 7$ = تعداد یال ها و $p = 6$ = تعداد رئوس

ب) $\Delta = 3$ و $\delta = 1$

پ) باید رئوس متصل به b را بنویسیم. $N_G(b) = \{a, c\}$

ت) $eafeb$

ث) $\deg_G(e) + \deg_{\bar{G}}(e) = p - 1 \Rightarrow 1 + \deg_{\bar{G}}(e) = 6 - 1$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e) = 4$

۲۰۹. الف) $abgc$

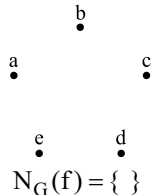
ب) $bcdgb$

پ) $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - 1 \Rightarrow 1 + \deg_{\bar{G}}(a) = 6$

$\Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 5$

ت) خیر، چون بین رئوس a و f مسیری وجود ندارد.

ث)



ج) $N_G(f) = \{ \}$

