فهرست

فصل هفتم
بخش‌پذیری و هم‌نهشتی

درس ۱ بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری در اعداد صحیح
- الف) عادکردن
  - ① مفهوم عادکردن
  - ② خواص عادکردن
  - ③ کاربرد اتحادها در عادکردن
- ب) ب.م.م و ک.م.م
- پ) قضیهٔ تقسیم
  - ① افرازکردن $\mathbb{Z}$ با قضیهٔ تقسیم
  - ② کاربرد قضیهٔ تقسیم در تست‌ها

الف) عادکردن

۱- مفهوم عادکردن

وقتی عدد ۵۰ را به صورت ضرب دو عدد صحیح می‌نویسیم، اصطلاحاً می‌گوییم عدد ۵۰ را به وسیلهٔ این اعداد صحیح، شمارش کرده‌ایم.

عدد ۵۰ را با اعداد ۵ و ۱۰ شمارش کردیم $\Leftrightarrow$ $۵۰=۵\times۱۰$

عدد ۵۰ را با اعداد ۵− و ۱۰− شمارش کردیم $\Leftrightarrow$ $۵۰=(-۵)\times(-۱۰)$

و به هر یک از این اعداد، شمارندهٔ عدد ۵۰ می‌گوییم؛ مثلاً ۵، ۱۰، ۵− و ۱۰− شمارنده‌های ۵۰ به حساب می‌آیند.

تعریف بخش‌پذیری (عادکردن)، عدد صحیح مخالف صفر a را شمارندهٔ عدد صحیح b می‌نامیم، هرگاه عددی صحیح مانند q یافت شود به طوری که $b=aq$ و می‌نویسیم $a\,|\,b$ و می‌خوانیم: a، b را می‌شمارد؛ a، b را عاد می‌کند یا b بر a بخش‌پذیر است.

$a\,|\,b \Leftrightarrow b=aq \qquad a\nmid b \Leftrightarrow b\neq aq$

$-۷\,|\,۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=(-۷)(-۹) \qquad ۰\,|\,۰ \Leftrightarrow ۰=۰\times q$

$۹\,|\,۰ \Leftrightarrow ۰=۹\times ?$ تعریف نشده $\qquad ۷\nmid ۵۰ \Leftrightarrow ۵۰\neq ۷q$

تعداد اعداد طبیعی a که $a\,|\,۴۵۰۰۰$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۲» ما باید ۴۵۰۰۰ را تجزیه کنیم و به کمک بحث شمارش، اعداد طبیعی را که از درون این عدد استخراج می‌شود بیابیم:

بالأخره تجزیه شد $\Leftarrow$ $۴۵۰۰۰=۴۵\times۱۰۰۰=۹\times۵\times۱۰^{۳}=۲^{۳}\times۳^{۲}\times۵^{۴}$

حالا عامل‌هایی که می‌توان استخراج کرد را می‌یابیم:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۵^۰,۵^۱,۵^۲,۵^۳,۵^۴ \\ \text{۵ عامل}}}{۵^۴} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۳^۰,۳^۱,۳^۲ \\ \text{۳ عامل}}}{۳^۲} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۲^۰,۲^۱,۲^۲,۲^۳ \\ \text{۴ عامل}}}{۲^۳}$$

طبق اصل ضرب، تعداد شمارنده‌های طبیعی برابر است با: $۴\times۳\times۵=۶۰$

نکتهٔ مهم برای یافتن تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد n، ابتدا آن را تجزیه کرده؛ سپس به توان‌ها یک واحد اضافه نموده و در هم ضرب می‌کنیم:

$$n=۲^{\alpha_۱}\times۳^{\alpha_۲}\times۵^{\alpha_۳}\times\cdots \Rightarrow \text{تعداد شمارندهٔ مثبت}=(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)(\alpha_۳+۱)\ldots$$

- اگر این عدد را ۲ برابر کنیم، تعداد شمارنده‌های صحیح (هم مثبت‌ها و هم منفی‌ها) به دست می‌آید.

❓ تعداد اعداد طبیعی فرد a که $a \mid ۴۵۰۰۰$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۷

گزینهٔ «۳» $۴۵۰۰۰=\cancel{۲^۳}\times۳^۲\times۵^۴ \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌های طبیعی فرد $=۳\times۵=۱۵$

❓ تعداد اعداد صحیح a به طوری که $a \mid ۲۴۰۰$ و $a \nmid ۱۸۰۰$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

گزینهٔ «۴»

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

$$n(\underset{A}{\text{شمارندهٔ ۲۴۰۰}} - \underset{B}{\text{شمارندهٔ ۱۸۰۰}})$$

$$=n(\underset{A}{\text{شمارندهٔ ۲۴۰۰}}) - n(\underset{A}{\text{شمارندهٔ ۲۴۰۰}} \underset{\cap}{\text{و}} \underset{B}{\text{شمارندهٔ ۱۸۰۰}})$$

$$=n(\text{شمارندهٔ ۲۴۰۰})-n(\text{شمارندهٔ مشترک ۲۴۰۰,۱۸۰۰})=۳۶-۲۴=۱۲$$

شمارندهٔ ۲۴۰۰: $\downarrow$ $۲^۵\times۳\times۵^۲$ $\downarrow$ تعداد شمارندهٔ طبیعی $=۶\times۲\times۳$

شمارندهٔ مشترک یعنی ۶۰۰: $\downarrow$ $۲^۳\times۳\times۵^۲$ $\downarrow$ تعداد شمارندهٔ طبیعی $=۴\times۲\times۳$

این عدد باید ۲ برابر شود؛ چون تست، شمارنده‌های صحیح را خواسته است.

۲- خواص عاد کردن

۱) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad m\in\mathbb{Z}$

۲) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

۳) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c \wedge b \mid c$

۴) $a \mid b \Rightarrow ma \mid mb \quad (m\in\mathbb{Z})$

۵) $ma \mid mb \Rightarrow a \mid b \quad (m\neq ۰)$

۶) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

۷) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b\pm c$

۸) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid mb\pm nc \, (m,n\in\mathbb{Z})$

۹) $\begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \Rightarrow ac \mid bd$

۱۰) $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$

۱۱ $\begin{cases} a \mid b \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۲ $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases} \Rightarrow a = \pm b$

۱۳ $a \mid bc \xrightarrow{\text{غلط}} a \mid b$ یا $a \mid c$

: $15 \mid 9 \times 10$ ولی $15 \nmid 9$ و $15 \nmid 10$

۱۴ $a \mid b + c \xrightarrow{\text{غلط}} a \mid b$ یا $a \mid c$

: $10 \mid 7 + 3$ ولی $10 \nmid 7$ و $10 \nmid 3$

۱۵ $a^m \mid b^n \xrightarrow{\frac{m}{n} \geq \frac{p}{q}} a^p \mid b^q$

: $a^4 \mid b^9 \xrightarrow{\frac{4}{9} \ngtr \frac{6}{7}} a^6 \mid b^7$ غلط

: $a^7 \mid b^{12} \xrightarrow{\frac{7}{12} > \frac{5}{10}} a^5 \mid b^{10}$ درست

؟ تعداد اعداد طبیعی a را بیابید به طوری که $a \mid n^2 + 3$ و $a \mid 5n - 1$. $(n \in \mathbb{Z})$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

گزینهٔ «۳» باید تلاش کنیم به کمک خواص عادکردن، پارامتر n در سمت راست حذف شود.

$$\begin{cases} a \mid n^2 + 3 \xrightarrow{\times 5} a \mid 5n^2 + 15 \\ a \mid 5n - 1 \xrightarrow{\times n} a \mid 5n^2 - n \end{cases} \xrightarrow{-} a \mid n + 15$$

$$\begin{cases} a \mid n + 15 \xrightarrow{\times 5} a \mid 5n + 75 \\ a \mid 5n - 1 \end{cases} \xrightarrow{-} a \mid 76$$

$\Rightarrow$ $(76 = 2^2 \times 19)$ تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد $= 3 \times 2 = 6$

؟ تعداد اعداد طبیعی a به طوری که $3a - 1 \mid 7a + 4$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینهٔ «۱» حل این مدل از تست‌ها که در هر دو طرف رابطه یک مجهول وجود دارد، راه‌های متنوعی دارد.

راه‌حل اول

$$\begin{cases} 3a - 1 \mid 7a + 4 \xrightarrow{\times 3} 3a - 1 \mid 21a + 12 \\ \text{کمکی}: 3a - 1 \mid 3a - 1 \xrightarrow{\times 7} 3a - 1 \mid 21a - 7 \end{cases} \xrightarrow{-} 3a - 1 \mid 19$$

پس: $3a - 1 = \pm 1$ یا ± 19 که از این ۴ معادلهٔ درجه‌اول عدد طبیعی یافت نمی‌شود.

راه‌حل دوم

$$\begin{array}{r|l} 7a + 4 & 3a - 1 \\ \hline \underline{6a - 2} & 2 \\ a + 6 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 3a - 1 & a + 6 \\ \hline \underline{3a + 18} & 3 \\ -19 & \end{array} \Rightarrow 3a - 1 \mid -19$$

سمت راستی تقسیم بر سمت چپی

سمت چپی تقسیم بر باقی‌ماندهٔ قبلی تا بالأخره باقی‌مانده عدد ثابت شود.

سمت چپی عدد ثابت را عاد می‌کند.

$\Rightarrow 3a - 1 = \pm 1$ یا ± 19

راه‌حل سوم

$$ma+n \mid m'a+n' \Rightarrow ma+nb \mid \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}$$

$$۳a-۱ \mid ۷a+۴ \Rightarrow ۳a-۱ \mid \begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow ۳a-۱ \mid ۱۹ \Rightarrow ۳a-۱=\pm ۱, \pm ۱۹$$

- روش دیگری به نام روش ریشه وجود دارد که در حل تست‌های آخر بخش بیان شده است.

از رابطهٔ $a^۵ \mid b^۳$ کدام رابطه را می‌توان نتیجه گرفت؟

۱) $a^۷ \mid b^۴$ ۲) $a^۸ \mid b^۵$ ۳) $a^{۱۱} \mid b^۶$ ۴) $a^{۱۳} \mid b^۷$

گزینهٔ «۲»

۱ $a^۵ \mid b^۳ \xrightarrow{\frac{۵}{۳} \not> \frac{۷}{۴}} a^۷ \mid b^۴$ ×

۲ $a^۵ \mid b^۳ \xrightarrow{\frac{۵}{۳} > \frac{۸}{۵}} a^۸ \mid b^۵$ ✓

اگر $۴۵ \mid n^۲$ و $۴۸ \mid n^۳$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l} ۴۵ \mid n^۲ \Rightarrow ۳^۲ \times ۵ \mid n^۲ \Rightarrow n=۳\times ۵\times q \Rightarrow n=۱۵q \\ ۴۸ \mid n^۳ \Rightarrow ۲^۴ \times ۳ \mid n^۳ \Rightarrow n=۲^۲\times ۳\times q' \Rightarrow n=۱۲q' \end{array}\right\} \Rightarrow n_{min}=۶۰$$

منحنی $\frac{x}{x+۱}=\frac{y}{x}$ از چند نقطه با مختصات صحیح عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۱»

$$y=\frac{x^۲}{x+۱} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+۱ \mid x^۲$$

$$\text{کمکی}\begin{cases} x+۱ \mid x^۲ \\ x+۱ \mid x+۱ \xrightarrow{\times x} x+۱ \mid x^۲+x \end{cases} \xrightarrow{-} x+۱ \mid x$$

$$\begin{cases} x+۱ \mid x \\ x+۱ \mid x+۱ \end{cases} \xrightarrow{-} x+۱ \mid ۱ \Rightarrow x+۱=\pm ۱ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } -۲$$

عدد $x=۰$ در دامنهٔ تعریف تابع نیست؛ پس فقط یک نقطه وجود دارد.

۳-کاربرد اتحادها در بخش‌پذیری

۱ $a^n-b^m \mid a^{n'}-b^{m'} \Leftrightarrow \frac{n'}{n}=\frac{m'}{m}=k\in\mathbb{Z}$

۲ $a^n+b^m \mid a^{n'}+b^{m'} \Leftrightarrow \frac{n'}{n}=\frac{m'}{m}=۲k+۱$

$۵^۴+۸^۳ \mid ۵^{۱۲}+۸^۹ \Leftrightarrow \frac{۱۲}{۴}=\frac{۹}{۳}=۳$ (فرد)

۳ $a^n+b^m \mid a^{n'}-b^{m'} \Leftrightarrow \frac{n'}{n}=\frac{m'}{m}=۲k$

$۲^۳+۳^۲ \mid ۲^۶-۳^۴ \Leftrightarrow \frac{۶}{۳}=\frac{۴}{۲}=۲$ (زوج)

۴ $a^n-b^m \mid a^{n'}+b^{m'}$ در حالت کلی برقرار نیست.

؟ کدام نادرست است؟

۱) $۲۹ \mid ۲^{۹۰}+۵^{۹۰}$ ۲) $۱۳۰ \mid ۷^{۲۰}-۳^{۴۰}$ ۳) $۳۳ \mid ۲^{۸۰}+۱$ ۴) $۱۰۲۳ \mid ۲^{۸۰}-۱$

= گزینهٔ «۳»

۱ $۲^۲+۵^۲ \mid ۲^{۹۰}+۵^{۹۰} \Leftrightarrow \frac{۹۰}{۲}=۴۵$ (فرد) ✓

۲ $۷^۲+۳^۴ \mid ۷^{۲۰}-۳^{۴۰} \Leftrightarrow \frac{۲۰}{۲}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰$ (زوج) ✓

۳ $۲^۵+۱ \mid ۲^{۸۰}+۱ \Leftrightarrow \frac{۸۰}{۵}=۱۶$ (زوج) $\Rightarrow$ در صورتی که باید فرد می‌بود ×

۴ $۲^{۱۰}-۱ \mid ۲^{۸۰}-۱ \Leftrightarrow \frac{۸۰}{۱۰}=۸$ (چه فرد چه زوج) ✓

؟ تعداد عضوهای طبیعی و سه‌رقمی مجموعهٔ $\{n : ۳۵ \mid ۲^n+۳^n\}$ کدام است؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۴۴۷ ۴) ۴۴۸

= گزینهٔ «۲»

$$۳۵ \mid ۲^n+۳^n \Rightarrow ۲^۳+۳^۳ \mid ۲^n+۳^n \Rightarrow \frac{n}{۳}=۲k+۱ \Rightarrow n=۶k+۳$$

$$۱۰۰ \le ۶k+۳ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۹۷ \le ۶k < ۹۹۷ \Rightarrow ۱۶/۱ \le k < ۱۶۶/۱$$

$$\Rightarrow k=۱۷,\dots,۱۶۶ \Rightarrow \text{تعداد}=۱۵۰$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۴۷- اگر $۲ \mid ۵a-۴b$، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

۱) $۲ \mid ۵a+۴b$ ۲) $۴ \mid ۱۰a-۸b$ ۳) $۲ \mid a^۲$ ۴) $۲ \mid b^۲$

۱۴۸- اگر $a \mid b^۲$ و $b^۳ \mid c^۲$، کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

۱) $a^۲ \mid bc^۲$ ۲) $a \mid c^۲$ ۳) $a^۳ \mid c^۴$ ۴) $a^۴ \mid b^۲c^۳$

۱۴۹- اگر اعداد $a+۳b+k$ و $۵a+۲b+۱۷$ بر عدد ۱۳ بخش‌پذیر باشند، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی ۲رقمی k، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۵۰- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی n که مربع آن مضرب ۲۴ و مکعب آن مضرب ۴۵ باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۱- منحنی $y=\dfrac{2x^2-3x+3}{2x+1}$ از چند نقطه با مختصات طبیعی عبور می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۲- یک عدد دورقمی، مساوی دو برابر حاصل‌ضرب ارقام خودش است، مجموع ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

۱۵۳- تعداد اعداد طبیعی n از مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots,100\}$ که در مجموعه‌های $A=\{n:82 \mid 3^n+1\}$ و $B=\{n:126 \mid 5^n-1\}$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۴- چند عدد چهاررقمی طبیعی وجود دارد که بر ۶۰ بخش‌پذیر بوده ولی مضرب ۹ نباشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

۱۵۵- به ازای چند مقدار x، عدد $\dfrac{\overline{xx5}-\overline{x2x}}{6x+6}$ عددی گویا و غیرصحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹

ب) ب.م.م و ک.م.م

تعریف ب.م.م با عادکردن، دو عدد صحیح a و b مفروض‌اند (لااقل یکی مخالف صفر است). عدد طبیعی d را ب.م.م a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه:

۱ $d \mid a, d \mid b$

۲ $\forall m>0: m \mid a \ , \ m \mid b \Rightarrow m \le d$

$$(12,18)=6 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ 6 \mid 12 \ , \ 6 \mid 18 \\ 2)\ \forall m>0: m \mid 12 \ , \ m \mid 18 \Rightarrow m \le 6 \end{cases}$$

اگر $(a,b)=1$، می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

تعریف ک.م.م با عادکردن، دو عدد صحیح ناصفر a و b مفروض‌اند. عدد طبیعی c را ک.م.م a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه

۱ $a \mid c, b \mid c$

۲ $\forall m>0: a \mid m \ , \ b \mid m \Rightarrow c \le m$

$$[12,18]=36 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ 12 \mid 36 \ , \ 18 \mid 36 \\ 2)\ \forall m>0: 12 \mid m \ , \ 18 \mid m \Rightarrow 36 \le m \end{cases}$$

چندنمونه

$(0,-15)=15 \qquad (0,a)=|a|$

$(0,0)=$ تعریف نشده

$[0,a]=$ تعریف نشده

به ازای چند عدد طبیعی $n<300$، دو عدد طبیعی $9n+2$ و $11n-5$ نسبت به هم غیراول‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ «۲»

$$(9n+2,11n-5)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 9n+2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 99n+22 \\ d \mid 11n-5 \xrightarrow{\times 9} d \mid 99n-45 \end{cases} \xrightarrow{-} d \mid 67$$

البته می‌توانستیم بنویسیم:

$$\begin{matrix} d \mid 9n+2 \\ d \mid 11n-5 \end{matrix} \Rightarrow d \,\Big|\, \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow d \mid -67$$

خلاصه آن‌که ۶۷ یا $d=1$ است. از آن‌جایی که صورت تست اشاره کرده، دو عدد نسبت به هم غیراولند؛ پس $d=67$ قبول می‌شود.

حالا این سؤال مطرح است که چه زمانی $d=67$ است؟ وقتی که هر دو جمله مضرب ۶۷ باشند که در حل تست فقط یکی را مضرب ۶۷ قرار دهیم، کافی است.

$$9n+2=67q \Rightarrow 9n+2\overset{67}{\equiv}0 \Rightarrow 9n\overset{67}{\equiv}-2 \Rightarrow 9n\overset{67}{\equiv}-69 \xrightarrow{\div 3} 3n\overset{67}{\equiv}-23$$

$$\Rightarrow 3n\overset{67}{\equiv}-90 \xrightarrow{\div 3} n\overset{67}{\equiv}-30 \Rightarrow n=67q-30$$

$$1\le 67q-30<300 \Rightarrow +31\le 67q<330 \Rightarrow 0/4\le q<4/9 \Rightarrow q=1,2,3,4$$

$\Rightarrow$ ۴تا عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ حاصل شد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵۶- اگر $11 \mid 41k$، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $(11,k)=11$ ۲) $(11,k)=1$ ۳) $k \mid 11$ ۴) $[11,k]=11$

۱۵۷- اگر $a \mid 21$، آن‌گاه حاصل $(12a,84b)$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶۸ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۱۵۸- اگر $(a,7)=7$ و $(5a,b)=5$، آن‌گاه: $(a,b\in\mathbb{N})$

۱) $(b,7)=7$ ۲) $(a,5)=5$ ۳) $[ab,105]=105$ ۴) $(ab,35)=35$

۱۵۹- اگر $[a,(5,a)]=3$ و $(b,[b,7])=2$، آن‌گاه $[a^3,b^3]$ کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۵

۱۶۰- اگر n عددی طبیعی و دو عدد $9n+5$ و $n+4$ دارای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک غیر از یک باشد، تعداد اعداد دورقمی n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۱- اگر $(a,b)=3$، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $5a+7b$ و $3a+4b$ چند مقدار می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۲- به ازای چند عدد a متعلق به مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,100\}$، $(a,6)=3$ است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۷ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پ) قضیهٔ تقسیم و کاربردها

اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، اعداد صحیح منحصربه‌فرد r و q به دست می‌آید به طوری که:

$$\underset{\text{مقسوم}}{a} = \underset{\text{مقسوم‌علیه}}{b}\,\underset{\text{خارج‌قسمت}}{q} + \underset{\text{باقی‌مانده}}{r} \qquad 0 \le r < b$$

مثال: $-60 = 9(\underset{\text{خارج‌قسمت}}{-7}) + \overset{\text{باقی‌مانده}}{3}$

مثال: $73 = 11(\underset{\text{خارج‌قسمت}}{6}) + \overset{\text{باقی‌مانده}}{7}$

تذکر مهم در تقسیم a بر b، خارج قسمت از فرمول مقابل به دست می‌آید: $q = [\frac{a}{b}]$

که البته بعد از یافتن q، به دست آوردن باقی‌مانده هم راحت خواهد بود.

مثال: در تقسیم -713 بر ۱۵، خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید.

$$q = [-\frac{713}{15}] = -48 \qquad -713 = \underbrace{15(-48)}_{-720} + 7$$

؟ خارج قسمت تقسیم عدد $17! - 5$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) $16!$ ۲) $16! - 1$ ۳) $16! + 1$ ۴) $16! - 11$

گزینهٔ «۲»

$$q = [\frac{17! - 5}{17}] = [16! - \frac{5}{17}] = 16! - 1$$

۱- افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

می‌دانیم که وقتی اعداد صحیح را مثلاً بر ۴ تقسیم می‌کنیم، انتظار ۴ مدل باقی‌مانده خواهیم داشت که عبارت‌اند از: $0, 1, 2, 3$ و به فرم مقابل می‌نویسیم: $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$

در این حالت می‌گوییم اعداد صحیح به ۴ دسته افراز شده‌اند و به فرم مقابل نمایش می‌دهیم:

$$\overbrace{\boxed{4k \mid 4k+1 \mid 4k+2 \mid 4k+3}}^{\mathbb{Z}}$$

در حالت کلی وقتی اعداد صحیح را بر m تقسیم می‌کنیم، انتظار m مدل باقی‌مانده داریم که عبارت‌اند از: $0, 1, 2, \dots, m-1$ و می‌نویسیم:

$$\overbrace{\boxed{mk \mid mk+1 \mid mk+2 \mid \dots \mid mk+(m-1)}}^{\mathbb{Z}}$$

راستی می‌دانید که وقتی باقی‌مانده از نصف مقسوم‌علیه بزرگ‌تر باشد به فرم دیگری نیز مانند نمونه‌های روبه‌رو می‌نویسند؟

مثال: $4k + 3 = 4k + 4 - 1 = 4(k+1) - 1 = 4k' - 1$

$12k + 7 = 12k + 12 - 5 = 12(k+1) - 5 = 12k' - 5$

مثلاً اگر اعداد صحیح را بر ۶ تقسیم کنیم، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۶ دسته افراز می‌شود:

$$6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$$

که معمولاً به فرم مقابل نمایش می‌دهند: $6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k + 3$

کدام معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $a^۲ = ۷k + ۱$ ۲) $a^۲ = ۷k + ۲$ ۳) $a^۲ = ۷k + ۳$ ۴) $a^۲ = ۷k + ۴$

گزینهٔ «۳»

وقتی الگوریتم تقسیم را به توان می‌رسانیم، این اجازه را داریم که فقط باقی‌مانده‌اش را به آن توان برسانیم.

$$a = ۷k, ۷k \pm ۱, ۷k \pm ۲, ۷k \pm ۳ \rightarrow a^۲ = ۷q, ۷q + ۱, ۷q + ۴, \underbrace{۷q + ۹}_{۷q' + ۲}$$

یعنی باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۷ نمی‌تواند ۳ باشد.

به ازای چند عدد متعلق به مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ مانند a، باقی‌مانده $a^۲$ بر ۷ برابر ۲ است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۵۶

گزینهٔ «۲»

$$\begin{array}{l} a = ۷k, ۷k \pm ۱, ۷k \pm ۲, ۷k \pm ۳ \\ \quad\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad\ \downarrow \qquad\ \downarrow \\ a^۲ = ۷q, ۷q + ۱, ۷q + ۴, \underbrace{۷q + ۹}_{۷q' - ۲} \end{array}$$

پس آن aای که ما به دنبالش هستیم باید $a = ۷k \pm ۳$ باشد.

$$\begin{array}{l} ۱ \le ۷k + ۳ \le ۱۰۰ \Rightarrow k \text{ تعداد} = ۱۴ \\ ۱ \le ۷k - ۳ \le ۱۰۰ \Rightarrow k \text{ تعداد} = ۱۴ \end{array} \xrightarrow{+} \text{۲۸ عدد وجود دارد.}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد فرد a بر ۱۰ برابر ۷ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a - ۳}{۲}$ بر ۱۰ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۲ یا ۷

گزینهٔ «۴»

اگر بخواهیم عبارت $a = bq + r$ را بر k تقسیم کنیم، سراغ q می‌رویم و آن را با پیمانهٔ k افراز کرده و عمل تقسیم را در تمام حالات بررسی می‌کنیم.

$$a = ۱۰q + ۷ \Rightarrow a - ۳ = ۱۰q + ۴$$

چون می‌خواهیم طرفین را بر ۲ تقسیم کنیم، q را افراز می‌کنیم:

(حالت اول) $q = ۲k \Rightarrow a - ۳ = ۱۰(۲k) + ۴ \Rightarrow \frac{a - ۳}{۲} = ۱۰k + ۲$

(حالت دوم) $q = ۲k + ۱ \Rightarrow a - ۳ = ۱۰(۲k + ۱) + ۴ \Rightarrow \frac{a - ۳}{۲} = ۱۰k + ۷$

۲-کاربرد قضیهٔ تقسیم

الف) تست‌هایی که باقی‌مانده، مورد سؤال قرار می‌گیرد.

این مدل از تست‌ها بیشتر در قسمت هم‌نهشتی مطرح می‌شود. در این‌جا به ساده‌ترین آن‌ها می‌پردازیم.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ «۱»

$$a=۹۹q+۲۵=۹\underbrace{(۱۱q)}_{q'}+۲۵=۹q'+۲۵ \xrightarrow[\text{۹تایی جدا کنیم.}]{\text{باید از ۲۵، دسته‌های}} a=۹q'+۱۸+۷$$

$$a=۹\underbrace{(q'+۲)}_{q''}+۷ \Rightarrow a=۹q+۷$$

اگر a مضربی از ۶ و b مضربی از ۱۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b چند مقدار ۳رقمی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳۳۳ ۲) ۶۶۶ ۳) ۳۰۰ ۴) ۶۰۰

گزینهٔ «۳»

$$\underset{۶t}{a}=\underset{۱۵t'}{b}q+r \quad ۰\le r<b \Rightarrow ۶t-۱۵t'q=r \Rightarrow ۳(۲t-۵t'q)=r$$

$$\Rightarrow r=۳k \Rightarrow \text{یعنی } r\neq ۱ \text{ باید مضرب ۳ باشد.} \Rightarrow \text{تعداد } r=[\frac{۹۹۹}{۳}]-[\frac{۹۹}{۳}]=۳۰۰$$

ب) تست‌هایی که قسمت b.q، یعنی مقسوم‌علیه یا خارج قسمت مورد سؤال قرار می‌گیرد.

در یک تقسیم اگر ۲۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، از باقی‌مانده به اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ مقسوم‌علیه کم می‌شود و یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌گردد. مجموع ارقام مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases} a=bq+r & ۰\le r<b \\ a+۲۵=b(q+۱)+r-\frac{۳}{۴}b \end{cases} \Rightarrow \cancel{bq}+\cancel{r}+۲۵=\cancel{bq}+b+\cancel{r}-\frac{۳}{۴}b$$

$$\Rightarrow ۲۵=\frac{۱}{۴}b \Rightarrow b=۱۰۰ \Rightarrow \text{جمع ارقام}=۱$$

اگر عدد ۶۰۰ را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج قسمت برابر ۶ و باقی‌مانده مخالف صفر است. برای b چند حالت وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

گزینهٔ «۳»

$$۶۰۰=b(۶)+r \qquad ۰<r<b$$

$$r=۶۰۰-۶b \xrightarrow{۰<r<b} ۰<۶۰۰-۶b<b \begin{cases} ۶b<۶۰۰ \Rightarrow b<۱۰۰ \\ ۶۰۰<۷b \Rightarrow b>۸۵/۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۸۵/۷<b<۱۰۰ \Rightarrow b=\{۸۶,۸۷,\dots,۹۹\} \Rightarrow \text{تعداد}=۱۴$$

؟ در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت و باقی‌مانده مساوی qاند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر q کدام است؟

۱) ۸ و ۵ ۲) ۹ و ۴ ۳) ۱۰ و ۵ ۴) ۱۰ و ۸

گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} a = bq + q & \circ \le q < b \\ a = (b-۳)(q+۵) + \circ \end{cases} \Rightarrow bq + q = (b-۳)(q+۵)$$

$$\Rightarrow \cancel{bq} + q = \cancel{bq} + ۵b - ۳q - ۱۵ \Rightarrow ۴q = ۵b - ۱۵ = ۵(b-۳) = ۵k$$

$\Rightarrow$ q باید مضرب ۵ باشد.

؟ در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج قسمت مجذور باقی‌مانده است. چند عدد b می‌توان یافت؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲»

$$۱۶۵ = br^۲ + r \quad \circ \le r < b \Rightarrow ۱۶۵ = r(br+۱)$$

r	۱	۳	۵	۱۱
br + ۱	۱۶۵	۵۵	۳۳	۱۵
	$b=۱۶۴$	$b=۱۸$	$b=\frac{۳۲}{۵}$	$b=\frac{۱۴}{۱۱}$
	✓	✓	×	×

؟ در یک تقسیم، مقسوم ۵۰۰ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه است و باقی‌مانده برابر ۵۰ است. حداکثر خارج قسمت کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینهٔ «۲»

$$\underbrace{a}_{b+۵۰۰} = bq + \underbrace{r}_{۵۰} \quad \circ \le \underbrace{r}_{۵۰} < b \Rightarrow b + ۵۰۰ = bq + ۵۰ \quad ۵۰ < b$$

$۴۵۰ = b(q-۱)$

b	۴۵۰	۲۲۵	۱۵۰	۹۰	۷۵	۵۰
q − ۱	۱	۲	۳	۵	۶	۹
	✓	✓	✓	✓	✓	×

$q_{max} = ۷$

پ) تست‌هایی که مقسوم مورد سؤال قرار می‌گیرد.

چند عدد صحیح وجود دارد که در تقسیم بر ۱۳، باقی‌ماندهٔ آن‌ها از $\frac{۱}{۳}$ خارج قسمت، ۴ واحد کم‌تر است؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

گزینهٔ «۳» $a = ۱۳q + \frac{۱}{۳}q - ۴ \quad ۰ \le \frac{۱}{۳}q - ۴ < ۱۳ \Rightarrow ۱۲ \le q < ۵۱$

دقت کنید که q باید مضرب ۳ باشد؛ زیرا در غیر این صورت عبارت $\frac{۱}{۳}q$ عدد صحیح نخواهد شد

که این با مفهوم الگوریتم تقسیم، تناقض دارد؛ پس: q تعداد $= [\frac{۵۰}{۳}] - [\frac{۱۱}{۳}] = ۱۶ - ۳ = ۱۳$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۶۳- در یک تقسیم خارج قسمت ۷ و باقی‌مانده ۱۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد، بدون آن‌که خارج قسمت و مقسوم تغییر کنند؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۳

۱۶۴- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷، باقی‌مانده $\frac{۱}{۱۰}$ خارج قسمت شده است. مجموع ارقام بیشترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۱۶۵- در یک تقسیم طبیعی، مقسوم ۲۴ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار ممکن را دارد، مقسوم کدام است؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۵۱۲ ۳) ۵۲۸ ۴) ۵۴۲

۱۶۶- در یک تقسیم، اگر ۴۰ واحد به مقسوم و ۲ واحد به مقسوم‌علیه اضافه شود، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و از باقی‌مانده ۴ واحد کم می‌شود. خارج قسمت کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۶۷- اگر در یک تقسیم، مقسوم ۷۴۸ و باقی‌مانده ۱۰۰ و مقسوم‌علیه سه برابر مربع خارج قسمت باشد، خارج قسمت کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۶۸- عدد صحیح n مکعب کامل است. کدام معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $n = ۷k$ ۲) $n = ۷k + ۱$

۳) $n = ۷k + ۵$ ۴) $n = ۷k + ۶$

۱۶۹- چند عدد طبیعی b وجود دارد به طوری که در تقسیم ۱۱۱ بر b، باقی‌مانده برابر ۷ باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۷۰- در یک تقسیم با افزودن مقدار x به مقسوم، باقی‌مانده برابر صفر و خارج قسمت یک واحد زیاد می‌شود و با کم‌کردن مقدار y از مقسوم، باقی‌مانده برابر صفر و خارج قسمت یک واحد کم می‌شود. اگر $\frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه مقسوم‌علیه چند برابر باقی‌مانده است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۵

۱۷۱- در یک تقسیم خارج قسمت و مقسوم‌علیه برابرند. اگر باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و مقسوم برابر ۱۵۵ باشد، مقدار باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۱۱ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ۳) ۱۳ ‏ ۴) ۱۴

۱۷۲- مجموع دوازده عدد صحیح و مثبت برابر ۱۷۳ است. حداکثر چند عدد بیشتر از ۱۸ است؟

۱) ۱۱ ‏ ۲) ۱۰ ‏ ۳) ۹ ‏ ۴) ۸

۱۷۳- به ازای چند عدد متعلق به مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۵۰\}$ مانند a، باقی‌ماندهٔ $a^{۲}$ بر ۶ برابر ۳ است؟

۱) ۶ ‏ ۲) ۷ ‏ ۳) ۸ ‏ ۴) ۹

۱۷۴- اگر a یک عدد فرد باشد، عبارت $A=(a^{۲}+۳)(a^{۲}+۷)$ بر کدام‌یک از اعداد زیر همواره بخش‌پذیر است؟

۱) ۳۲ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ۳) ۱۸ ‏ ۴) ۲۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱۴۷- گزینهٔ «۴»

① $\begin{matrix} ۲ \mid ۵a-۴b \\ \text{بدیهی } ۲ \mid ۸b \end{matrix} \xrightarrow{+} ۲ \mid ۵a+۴b$

② $۲ \mid ۵a-۴b \xrightarrow{\times ۲} ۴ \mid ۱۰a-۸b$

③ $\begin{matrix} ۲ \mid ۵a-۴b \\ \text{بدیهی } ۲ \mid ۴b \end{matrix} \xrightarrow{+} ۲ \mid ۵a \Rightarrow ۲ \mid a \rightarrow ۲ \mid a^۲$

۱۴۸- گزینهٔ «۴»

① $\begin{matrix} a \mid b^۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲ \mid b^۴ \\ b^۳ \mid c^۲ \xrightarrow{\times b} b^۴ \mid bc^۲ \end{matrix} \Rightarrow a^۲ \mid bc^۲$

② $\begin{matrix} a \mid b^۲ \xrightarrow{\text{ضرب در b سمت راست}} a \mid b^۳ \\ b^۳ \mid c^۲ \end{matrix} \Rightarrow a \mid c^۲$

③ $\begin{matrix} a \mid b^۲ \xrightarrow{\text{توان ۳}} a^۳ \mid b^۶ \\ b^۳ \mid c^۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} b^۶ \mid c^۴ \end{matrix} \Rightarrow a^۳ \mid c^۴$

۱۴۹- گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} ۱۳ \mid a+۳b+k \xrightarrow{\times ۵} ۱۳ \mid ۵a+۱۵b+۵k \\ ۱۳ \mid ۵a+۲b+۱۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۱۳ \mid ۱۳b+۵k-۱۷$$

$$\begin{cases} ۱۳ \mid ۱۳b+۵k-۱۷ \\ ۱۳ \mid ۱۳b \end{cases} \xrightarrow{-} ۱۳ \mid ۵k-۱۷ \Rightarrow ۵k-۱۷=۱۳ \Rightarrow k=۶$$

برای یافتن kهای بعدی باید ۱۳تا ۱۳تا به ۶ بیفزاییم که کوچک‌ترین عدد ۲رقمی برای k، ۱۹ خواهد بود.

۱۵۰- گزینهٔ «۱»

$$۲۴ \mid n^۲ \Rightarrow ۲^۳ \times ۳ \mid n^۲ \Rightarrow ۲^۲ \times ۳ \mid n \Rightarrow ۱۲ \mid n$$

$$۴۵ \mid n^۳ \Rightarrow ۳^۲ \times ۵ \mid n^۳ \Rightarrow ۳ \times ۵ \mid n \Rightarrow ۱۵ \mid n$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی n که هم بر ۱۲ و هم بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، همان ک.م.م ۱۲ و ۱۵، یعنی عدد ۶۰ است؛ پس:

$$n_{min} = ۶۰ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۶$$

۱۵۱- گزینهٔ «۲»

$$y = \frac{۲x^۲-۳x+۳}{۲x+۱} \in \mathbb{N} \Rightarrow ۲x+۱ \mid ۲x^۲-۳x+۳$$

$$\text{کمکی} \begin{cases} ۲x+۱ \mid ۲x^۲-۳x+۳ \\ ۲x+۱ \mid ۲x+۱ \xrightarrow{\times x} ۲x+۱ \mid ۲x^۲+x \end{cases} \xrightarrow{-} ۲x+۱ \mid ۴x-۳$$

$$\text{کمکی} \begin{cases} ۲x+۱ \mid ۴x-۳ \\ ۲x+۱ \mid ۲x+۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲x+۱ \mid ۴x+۲ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲x+۱ \mid ۵$$

$$\Rightarrow ۲x+۱ = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۵$$

پس $x=2$ تنها عدد طبیعی است که صدق می‌کند. حال آن را در معادلهٔ منحنی قرار می‌دهیم تا y را نیز بیابیم:

$$y=\frac{2(2^2)-3(2)+3}{2(2)+1}=1$$

یعنی منحنی فقط از نقطهٔ $(2,1)$ که هر دو مؤلفهٔ آن طبیعی است، عبور می‌کند.

راه‌تستی اگر سمت چپ را مساوی صفر قرار دهیم و ریشهٔ به دست آمده ساده نشود، می‌توانیم آن را در سمت راست گذاشته و در آخر فقط صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$\underbrace{2x+1}_{=0\ \to\ x=-\frac{1}{2}}\mid 2x^2-3x+3 \Rightarrow 2x+1\mid 2(-\frac{1}{2})^2-3(-\frac{1}{2})+3 \Rightarrow 2x+1\mid 5$$

در نتیجه $2x+1=\pm1,\pm5$ و در نهایت $x=2$ حاصل می‌شود.

اما اگر ریشه در سمت چپ به عددی ساده شود، دیگر این راه تستی قابل استفاده نیست؛ زیرا گاهی جواب درست و گاهی جواب غلط به دست می‌آید.

$$\underbrace{4x+2}_{=0\ \to\ x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}}\mid 5x-1 \Rightarrow 4x+2\mid -\frac{7}{2} \Rightarrow 4x+2\mid 7 \Rightarrow 4x+2=\pm1 \text{ یا } \pm7$$

در این روش x ای به دست نمی‌آید، در صورتی که با روش اصلی ۴تا x به دست می‌آید.

۱۵۲- گزینهٔ «۴»

$$\overline{ab}=2a\cdot b \Rightarrow 10a+b=2ab \Rightarrow 10a=b(2a-1)$$

$$b=\frac{10a}{2a-1}\in\mathbb{N} \Rightarrow 2a-1\mid 10a$$

$$\begin{cases}2a-1\mid 10a\\ 2a-1\mid 2a-1 \text{ بدیهی} \xrightarrow{\times5} 2a-1\mid 10a-5\end{cases} \xrightarrow{-} 2a-1\mid 5$$

$$\Rightarrow 2a-1=\pm1,\pm5$$

$$a=1,0,3,-1$$

که فقط $a=1,3$ قبول است که باید برای آن‌ها b را هم بیابیم.

$a=1,\ b=10$ ✗

$a=3,\ b=6$

پس عدد موردنظر $\overline{ab}=36$ است.

۱۵۳- گزینهٔ «۳»

$$82\mid 3^n+1 \Rightarrow 3^4+1\mid 3^n+1 \Rightarrow \frac{n}{4}=2t+1 \Rightarrow n=8t+4$$

$$126\mid 5^n-1 \Rightarrow 5^3+1\mid 5^n-1 \Rightarrow \frac{n}{3}=2k \Rightarrow n=6k$$

$$\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\begin{cases}n=8t+4\\ n=6k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3n=24t+12\\ 4n=24k\end{cases} \xrightarrow{-} n=24q-12 \Rightarrow n=12,36,60,84$$

۱۵۴- گزینهٔ «۲»

$$n(\text{مضرب } ۶۰ - \text{مضرب } ۹) = n(\text{مضرب } ۶۰) - n(۶۰,۹ \text{ مضرب مشترک})$$

$$= n(\text{مضرب } ۶۰) - n(\text{مضرب } ۱۸۰) = ۱۵۰ - ۵۰ = ۱۰۰$$

$$\underbrace{[\tfrac{۹۹۹۹}{۶۰}]}_{۱۶۶} - \underbrace{[\tfrac{۹۹۹}{۶۰}]}_{۱۶} \qquad \underbrace{[\tfrac{۹۹۹۹}{۱۸۰}]}_{۵۵} - \underbrace{[\tfrac{۹۹۹}{۱۸۰}]}_{۵}$$

۱۵۵- گزینهٔ «۳»

$$\frac{\overline{xx۵} - \overline{x۲x}}{۶x+۶} = \frac{۱۰۰x + ۱۰x + ۵ - ۱۰۰x - ۲۰ - x}{۶x+۶} = \frac{۹x - ۱۵}{۶x+۶} = \frac{۳x-۵}{۲x+۲}$$

$$\begin{cases} ۲x+۲ \mid ۳x-۵ \xrightarrow{\times ۲} ۲x+۲ \mid ۶x-۱۰ \\ ۲x+۲ \mid ۲x+۲ \xrightarrow{\times ۳} ۲x+۲ \mid ۶x+۶ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲x+۲ \mid ۱۶ \Rightarrow x+۱ \mid ۸$$

$$\Rightarrow x+۱ = ۲,۴,۸ \Rightarrow x = ۱,۳,۷$$

فقط یادتان باشد که در رابطهٔ اصلی $۲x+۲ \mid ۳x-۵$ باید $|۲x+۲| \le |۳x-۵|$ باشد؛ پس فقط $x=۷$ قبول است.

$x=۱ \Rightarrow ۴ \mid -۲$ ✗

$x=۳ \Rightarrow ۸ \mid ۴$ ✗

$x=۷ \Rightarrow ۱۶ \mid ۱۶$ ✓

حالا از بین اعداد $\{۱,۲,\dots,۹\}$ که برای x می‌توانیم عدد اختیار کنیم، باید عدد $x=۷$ را حذف کنیم.

۱۵۶- گزینهٔ «۱» از رابطهٔ $۱۱ \mid ۴۱k$ متوجه می‌شویم که چون ۴۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست؛ پس قطعاً k بر ۱۱ بخش‌پذیر خواهد بود؛ یعنی $۱۱ \mid k$.

$$۱۱ \mid k \begin{cases} (۱۱,k) = ۱۱ \\ [۱۱,k] = k \end{cases}$$

۱۵۷- گزینهٔ «۲» از رابطهٔ $۲۱ \mid a$ متوجه می‌شویم که a بر ۲۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی $a = ۲۱q$.

$$(۱۲a, ۸۴b) = (۱۲ \times ۲۱q, ۸۴b) = (\underline{\underline{۸۴}} \times ۳q, \underline{\underline{۸۴}}b) = ۸۴t$$

یعنی حاصل ب.م.م مضرب ۸۴ است و تنها گزینه‌ای که مضرب ۸۴ است، ۲ است.

۱۵۸- گزینهٔ «۴»

$(a,۷) = ۷ \Rightarrow$ مضرب ۷ است. $a \Rightarrow a = ۷t$

$(۵a,b) = ۵ \Rightarrow$ مضرب ۵ است. $b \Rightarrow b = ۵t'$

۱ و ۲ قطعاً نادرست هستند.

۳ $[ab,۱۰۵] = [۷t \times ۵t', ۱۰۵] = [۳۵tt', ۱۰۵] = ۱۰۵$ نادرست

۴ $(ab,۳۵) = (۷t \times ۵t', ۳۵) = (۳۵tt', ۳۵) = ۳۵$ درست

۱۵۹- گزینهٔ «۱»

نکته‌تستی

$$[a,(b,a)] = |a|$$
$$(a,[b,a]) = |a|$$

$$\begin{rcases} [a,(۵,a)] = ۳ \Rightarrow |a| = ۳ \\ (b,[b,۷]) = ۲ \Rightarrow |b| = ۲ \end{rcases} \Rightarrow [a^۳, b^۳] = [(\pm۳)^۳, (\pm۲)^۳] = ۳^۳ \times ۲^۳ = ۲۱۶$$

۱۶۰- گزینهٔ «۳»

$$(9n+5,n+4)=d \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,9n+5 \\ d\,|\,n+4 \xrightarrow{\times 9} d\,|\,9n+36 \end{cases} \xrightarrow{-} d\,|\,31$$

پس ۳۱ یا $d=1$ است. از آن‌جایی که صورت تست گفته ب.م.م غیر ۱ است؛ پس باید ب.م.م برابر ۳۱ باشد؛ یعنی هر دو جمله الزاماً مضرب ۳۱ هستند. در حل تست اگر ما یکی از جملات را مضرب ۳۱ قرار دهیم، کافی است.

$$n+4=31t \Rightarrow n=\underset{1\;\;2\;\;3\;\;\cancel{4}}{31t}-4 \Rightarrow n=\{27,58,89\}$$

۱۶۱- گزینهٔ «۲»

$$(3a+4b,5a+7b)=d \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,3a+4b \xrightarrow{\times 5} d\,|\,15a+20b \\ d\,|\,5a+7b \xrightarrow{\times 3} d\,|\,15a+21b \end{cases} \xrightarrow{-} d\,|\,b$$

یک بار هم تلاش می‌کنیم b را حذف کنیم:

$$\begin{cases} d\,|\,3a+4b \xrightarrow{\times 7} d\,|\,21a+28b \\ d\,|\,5a+7b \xrightarrow{\times 4} d\,|\,20a+28b \end{cases} \xrightarrow{-} d\,|\,a$$

حال $d\,|\,a$ و $d\,|\,b$، پس d، ب.م.م a و b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی:

$d\,|\,(a,b) \Rightarrow d\,|\,3 \Rightarrow d=1$ یا $3 \Rightarrow d=3$ قابل قبول است.

فراموش نکنید که d نباید از (a,b) کوچک‌تر باشد (d خود (a,b) یا مضارب (a,b) است).

راه‌تستی

$$(a,b)=d \Rightarrow (ma+nb,m'a+n'b)=d'$$

که d' باید در رابطهٔ مقابل صدق کند:

$$d'\,\left|\,\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}\times d\,,\ d'\geq d\right.$$

مثال: $(a,b)=5 \Rightarrow (4a+3b,7a-b)=d' \qquad d'\,\left|\,\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}\times 5 \Rightarrow d'\,\right|\,-125$

$\Rightarrow d'=\cancel{1}$ یا ۵ یا ۲۵ یا ۱۲۵

$$(a,b)=3 \Rightarrow (3a+4b,5a+7b)=d' \Rightarrow d'\,\left|\,\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}\times 3 \Rightarrow d'\,\right|\,3 \Rightarrow d=3$$

۱۶۲- گزینهٔ «۳»

a مضرب ۲ نیست و مضرب ۳ است. $(a,6)=3 \Rightarrow (a,2\times 3)=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a=3k \\ a\neq 2t \Rightarrow a=2t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{cases} a=3k \\ a=2t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=6k \\ 3a=6t+3 \end{cases} \xrightarrow{-} a=6q+3$$

$$1\leq 6q+3\leq 100 \Rightarrow -2\leq 6q\leq 97 \Rightarrow -\frac{1}{3}\leq q\leq 16/3$$

پس $q=0,1,2,\dots,16$؛ یعنی ۱۷ مقدار متفاوت می‌تواند باشد.

۱۶۳- گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases} a=b(7)+17 \quad 17<b \\ a=(b+x)(7)+r \end{cases} \Rightarrow 7b+17=(b+x)7+r$$

$$7b+17=7b+7x+r \Rightarrow 17=7x+r \Rightarrow r=17-7x$$

می‌دانیم که $r\geq 0$ است؛ پس $17-7x\geq 0$؛ در نتیجه x حداکثر ۲ خواهد بود.

راه‌تستی وقتی می‌خواهیم در تساوی $a = b(7) + 17$، پارامترهای مقسوم (a) و خارج قسمت (۷) تغییری نکند ولی پارامتر b تغییر کند، چاره‌ای نداریم که از باقی‌مانده یعنی ۱۷ کمک بگیریم. بیایید تلاش کنیم از ۱۷، دسته‌های ۷تایی جدا کنیم: $a = b(7) + 14 + 3 \Rightarrow a = (b+2)7 + 3$

پس حداکثر ۲ واحد می‌توان به b اضافه کرد.

۱۶۴- گزینهٔ «۳»

$$a = 17q + \frac{1}{10}q \qquad 0 \le \frac{1}{10}q < 17$$

فقط باید دقت کنیم که q مضرب ۱۰ باشد؛ چرا که اگر نباشد، باقی‌مانده عددی غیرصحیح خواهد بود و با تعریف قضیهٔ تقسیم که می‌گوید همهٔ پارامترها اعداد صحیح هستند، مغایرت خواهد داشت.

$$0 \le \frac{1}{10}q < 17 \xrightarrow{\times 10} 0 \le q < 170 \Rightarrow q_{max} = 160$$

$$\Rightarrow a_{max} = 17(160) + \frac{1}{10}(160) \Rightarrow a_{max} = 2736 \Rightarrow \text{جمع ارقام} = 18$$

۱۶۵- گزینهٔ «۳»

$$a = bq + r \qquad 0 \le r < b \Rightarrow 24r = (r+1)q + r$$

- وقتی می‌گوید باقی‌مانده حداکثر مقدار ممکن را دارد؛ یعنی باقی‌مانده از مقسوم‌علیه تقسیم ۱ واحد کم‌تر است. حال دوست داشته باشیم، باقی‌مانده را $b - 1$ در نظر می‌گیریم و شاید هم باقی‌مانده همان r و مقسوم‌علیه را $r + 1$ فرض می‌کنیم. در این‌جا مقسوم‌علیه را $r + 1$ در نظر می‌گیریم.

$$23r = (r+1).q$$

حال دوتا عدد بیابید که ضرب آن‌ها $23r$ شود که قطعاً یکی از حالات زیر خواهد شد:

$r+1$	23	$23r$	1
q	r	1	$23r$
	↓	↓	↓
	$r = 22$	$22r = 1$ ×	$r = 0$, $q = 0$ ×

$$\Rightarrow \text{مقسوم} \quad 24r = 24 \times 22 = 528$$

۱۶۶- گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} a = bq + r & 0 \le r < b \\ a + 40 = (b+2)q + (r-4) \end{cases} \Rightarrow \cancel{bq} + \cancel{r} + 40 = \cancel{bq} + 2q + \cancel{r} - 4 \Rightarrow q = 22$$

۱۶۷- گزینهٔ «۱»

$$748 = (3q^2) \cdot q + 100 \qquad 100 < 3q^2$$

$$648 = 3q^3 \Rightarrow q^3 = 216 \Rightarrow q = 6$$

۱۶۸- گزینهٔ «۳» عدد صحیح a به طوری که $a^3 = n$ را در نظر می‌گیریم:

$a = 7k$ یا $7k \pm 1$ یا $7k \pm 2$ یا $7k \pm 3$

$a^3 = n = 7q$ یا $7q \pm 1$ یا $7q \pm 8$ یا $7q \pm 27$

بنابراین $n = a^3$ یکی از حالات مقابل خواهد بود: $n = 7q, 7q+1, 7q+6$

۱۶۹- گزینهٔ «۲»

$$۱۱۱ = bq + ۷ \qquad ۷ \le b \Rightarrow ۱۰۴ = bq \qquad ۷ \le b$$

b	۱۰۴	۵۲	۲۶	۱۳
q	۱	۲	۴	۸

پس برای b، ۴ مقدار طبیعی حاصل می‌شود.

۱۷۰- گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} a = bq + r & ۰ \le r < b \\ a + x = b(q+۱) \end{cases} \Rightarrow bq + r + x = bq + b \Rightarrow x = b - r$$

$$\begin{cases} a = bq + r & ۰ \le r < b \\ a - y = b(q-۱) \end{cases} \Rightarrow bq + r - y = bq - b \Rightarrow y = b + r$$

$$\frac{y}{x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{b+r}{b-r} = \frac{۳}{۲} \quad ۲b + ۲r = ۳b - ۳r \Rightarrow b = ۵r$$

۱۷۱- گزینهٔ «۱»

$$a = b.b + b - ۱ \Rightarrow a = b^۲ + b - ۱ \Rightarrow ۱۵۵ = b^۲ + b - ۱$$

$$b(b+۱) = ۱۵۶ \Rightarrow b = ۱۲ \Rightarrow \text{باقی‌مانده } r = b - ۱ = ۱۱$$

۱۷۲- گزینهٔ «۴» تصور کنید می‌خواهیم ۱۷۳ مداد را بین ۱۲ نفر توزیع کنیم، به طوری که به نفرات حداقل ۱۹تا مداد برسد. $۱۷۳ = ۱۹(۹) + ۲$

با توجه به الگوریتم تقسیم بالا، به ۹ نفر ۱۹تا مداد می‌دهیم و ۲تای باقی‌مانده را بین ۳ نفر دیگر توزیع می‌کنیم که نشدنی است؛ زیرا دست یکی از این ۳ نفر خالی می‌ماند و ما این را نمی‌خواهیم.

پس الگوریتم را ناچاراً به فرم مقابل تغییر می‌دهیم: $۱۷۳ = ۱۹(۸) + ۲۱$

یعنی به ۸ نفر ۱۹ مداد می‌دهیم و ۲۱تای بقیه را بین ۴ نفر دیگر توزیع می‌کنیم که دست هیچ کسی خالی نماند؛ در نتیجه حداکثر ۸ نفر بیشتر از ۱۸تا مداد خواهند داشت.

۱۷۳- گزینهٔ «۳»

$$a = ۶k, ۶k \pm ۱, ۶k \pm ۲, ۶k + ۳$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a^۲ = ۶q, ۶q + ۱, ۶q + ۴, ۶q + \underset{۳}{\cancel{۹}}$$

پس اگر بخواهیم $a^۲ = ۶q + ۳$ باشد، باید $a = ۶k + ۳$ در نظر گرفته شود.

$$۱ \le ۶k + ۳ \le ۵۰ \Rightarrow -۲ \le ۶k \le ۴۷ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \le k < ۷/۸$$

که $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۷$ صدق می‌کند؛ یعنی ۸ تا عدد به دست آمد.

۱۷۴- گزینهٔ «۱»

تذکرمهم مربع هر عدد فرد به صورت $۸t + ۱$ نوشته می‌شود.

$$A = (a^۲ + ۳)(a^۲ + ۷) = (۸t + ۱ + ۳)(۸t + ۱ + ۷) = (۸t + ۴)(۸t + ۸) = ۳۲(۴t + ۱)(t + ۱)$$

همواره بر ۳۲ بخش‌پذیر است.

روش‌تستی با توجه به گزینه‌ها، با قراردادن $a = ۱$: $A = (۱ + ۳)(۱ + ۷) = ۳۲$