کنکور سراسری ۹۸

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\pi<x<\frac{3\pi}{2})$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x}\,(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}(1-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}\times\cos^2 x=-\cos x$$

۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\Rightarrow\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1\Rightarrow 240(\frac{1}{100-v}-\frac{1}{100+v})=1$$

$$240(\frac{2v}{100^2-v^2})=1\Rightarrow 100^2-v^2=480v\Rightarrow v^2+480v-100^2=0$$

$$(v-20)(v+500)=0\Rightarrow v=20$$

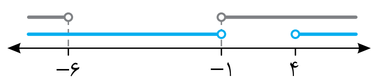
۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{2x-3}{x+1}>1\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-1>0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}>0\Rightarrow x>4 \text{ یا } x<-1 \qquad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-3<0\Rightarrow\frac{-x-6}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+6}{x+1}>0$$

$$x<-6 \text{ یا } x>-1 \qquad (2)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-6,4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و ۷− در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1<\frac{2\times5-3}{5+1}=\frac{7}{6}<3\,,\qquad 1<\frac{2\times(-7)-3}{-7+1}=\frac{17}{6}<3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۴- گزینهٔ ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شئ متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=70+56+28=154$$

۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\Rightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$$

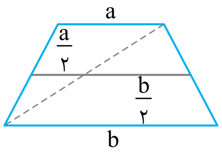
$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow(7a-2)(a-2)=0\Rightarrow a=\frac{2}{7}\,,\ a=2$$

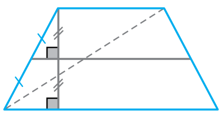
توجه کنید که اگر $a=2$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=4/5$.

۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{2}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{1}{2}h(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(\frac{a+b}{2}+b)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3a+b}{a+3b}=\frac{1}{2}$$

$$6a+2b=a+3b\Rightarrow 5a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$$





۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس

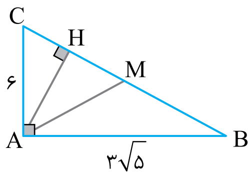
$$BC^2=AB^2+AC^2=(3\sqrt{5})^2+6^2=81\Rightarrow BC=9$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2=CH\times CB\Rightarrow 36=CH\times 9\Rightarrow CH=4$$

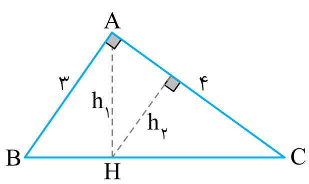
بنابراین $HM=CM-CH=\frac{BC}{2}-CH=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{9}{\frac{1}{2}}=18$$



۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر ۵ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}.$$



۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{17\pi}{3})=\sin(5\pi+\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6})=\cos(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4})=\tan(5\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin(\frac{-11\pi}{6})=-\sin(\frac{11\pi}{6})=-\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-(-\sin\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{3}$ است، پس $a+b=\sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{3}{2})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\\ a-b\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=((\frac{5}{2})^3)^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

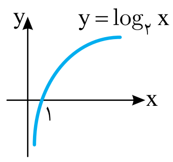
بنابراین

$$2x-1=-3x^2\Rightarrow 3x^2+2x-1=0\Rightarrow(3x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=-1$$

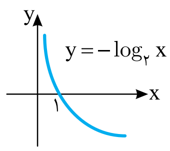
به ازای $x=-1$، مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1)=\log_8(3+1)=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2^2=\frac{2}{3}$$

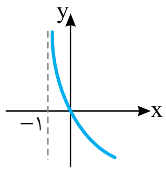
۱۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_2 x$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_2 x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_2(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_2(x+1)=\log_2(x+1)^{-1}$، بنابراین

$$U(x)=(x+1)^{-1}$$

۱۳- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{|x+2|}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^-}(-(4-2x+x^2))$$

$$=-(4-2(-2)+(-2)^2)=-12$$

چون $f(-2)=a$، پس باید $a=-12$. توجه کنید که $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=12$ و در نتیجه $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$.

۱۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A)=0/7$، $P(B)=0/6$ و $P(B|A)=0/8$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow 0/8=\frac{P(A\cap B)}{0/7}$$

$$P(A\cap B)=0/56$$

در نتیجه،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=0/7+0/6-0/56=0/74$$

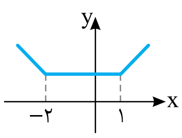
۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

گروه اول: $\bar{x}=80, \sigma^2=25\Rightarrow\sigma=5, CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$

گروه دوم: $\bar{x}=72, \sigma^2=16\Rightarrow\sigma=4, CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$4\sin x(-\cos x)=1\Rightarrow -2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi-\frac{\pi}{12}\le 2\pi$$

$$\frac{1}{12}\le k\le 2+\frac{1}{12}\Rightarrow k=1,2$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{12},\ x=2\pi-\frac{\pi}{12}\qquad (1)$$

$$2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi+\frac{7\pi}{12}\le 2\pi$$

$$-\frac{7}{12}\le k<2-\frac{7}{12}\Rightarrow k=0,1$$

$$x=\frac{7\pi}{12},\ x=\pi+\frac{7\pi}{12}\qquad (2)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $4\pi+\frac{14\pi-2\pi}{12}=5\pi$.

۱۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to -8}\left(\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}\times\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2^3+\sqrt[3]{x}^3}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{8+x}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to -8}\left((x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\right)$$

$$=\frac{1}{6}(-8+2)(4-2(-2)+2^2)=-12$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{-16+10}{6\times\frac{1}{3\times(-2)^2}}=\frac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$$

۱۹- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{2x}$$

چون $\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1$ ، $\lim_{x\to 0^+}(2x)=0$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر $2x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{2x}=-\infty$$

۲۰- گزینهٔ ۳ خارج از برنامهٔ درسی

۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(-3)+2(3)}{(-3)^2}=\frac{7}{12}$$

۲۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-1}$$

$$-4+2a+b=\frac{1}{2-1}=1\Rightarrow 2a+b=5$$

همچنین،

$$f'_-(2)=f'_+(2)\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}f'(x)=\lim_{x\to 2^+}f'(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-}(-2x+a)=\lim_{x\to 2^+}\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow -4+a=-1\Rightarrow a=3$$

بنابراین $b=5-2a=-1$.

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(2)=g'(2)\times f'(g(2))\qquad (1)$$

از طرف دیگر، $g'(x)=\frac{2(x-1)-(1)(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(2)=-3$.
همچنین، $g(2)=5$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $6=(-3)f'(5)$، پس $f'(5)=-2$.

۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{8-\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-1)}{3}=\frac{11}{4}$$

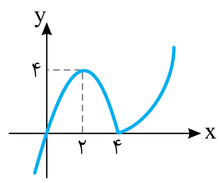
$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{1}{x^2}$، پس $f'(2)=\frac{9}{4}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{11}{4}-\frac{9}{4}=\frac{1}{2}=$ ۰/۵.

۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & x\le 4\\ x^2-4x & x>4\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(4,0)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(2,4)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.
فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



۲۶- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل زیر، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{12-x}$. بنابراین

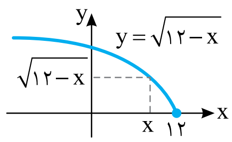
$$\text{مساحت مستطیل}=x\sqrt{12-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{12-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(1)\sqrt{12-x}+x(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}})$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \sqrt{12-x}(2\sqrt{12-x})=x\Rightarrow 2(12-x)=x\Rightarrow x=8$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=8$ به دست می‌آید و برابر است با $8\sqrt{4}=16$.



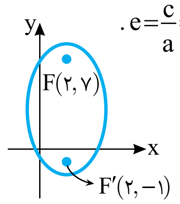
۲۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF'=2c\Rightarrow 8=2c\Rightarrow c=4$$

از طرف دیگر، $2b=6$، پس $b=3$ و در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2=9+16=25\Rightarrow a=5$$

به این ترتیب $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0/8$.



۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با n^2 دایره و ردیف‌هایی از ۱، ۲، ... و $n-1$ دایره درست شده است. بنابراین

$$9^2+1+2+3+\cdots+8=81+\frac{8\times9}{2}=117$$

۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4\Rightarrow f(x)+4=(x-1)^2$$

$$x=\sqrt{f(x)+4}+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های f^{-1} و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x+4}+2=x-9\Rightarrow 2\sqrt{x+4}=x-11 \qquad (1)$$

$$4(x+4)=x^2-22x+121\Rightarrow x^2-26x+105=0\Rightarrow (x-5)(x-21)=0$$

$$x=5\,,\ x=21$$

توجه کنید که $x=5$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=5$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=21$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-1)^2-4$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f^{-1} و g جواب معادلهٔ $f^{-1}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-1}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-1)^2-4\Rightarrow x+4=(\frac{x-9}{2}-1)^2\Rightarrow x+4=(\frac{x-11}{2})^2$$

$$4x+16=x^2-22x+121\Rightarrow x^2-26x+105=0\Rightarrow (x-5)(x-21)=0$$

$$x=5\,,\ x=21$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-1}}=D_f=[1,+\infty)$، پس مقادیر f^{-1} مثبت‌اند. اما $g(5)<0$، پس $x=5$ جواب معادلهٔ $f^{-1}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=21$.

۳۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A_1 پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سفید باشد و A_2 پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{5}{11}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{6}{11}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$=\frac{5}{11}\times\frac{6}{45}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{45}=\frac{90}{11\times45}=\frac{2}{11}$$

۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{2}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}}(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\cos^2 x$$

۳۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد. چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق باد برابر $v+5$ و در جهت مخالف باد برابر $v-5$ است. چون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{1}{v+5}$ و مدت زمان برگشت $\frac{1}{v-5}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{1}{v+5}+\frac{1}{v-5}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}\Rightarrow\frac{2v}{v^2-25}=\frac{3}{20}$$

$$3v^2-40v-75=0\Rightarrow(3v+5)(v-15)=0\Rightarrow v=15$$

۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2}>\frac{x}{x-2}\Rightarrow\frac{7x-8}{(x+1)(x-2)}-\frac{x}{x-2}>0\Rightarrow\frac{7x-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)}>0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}<0$$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		+	‖	−	‖	−	0	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-1,2)\cup(2,4)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{0-8}{0-0-2}>\frac{0}{0-2}\Rightarrow 4>0 \ , \quad \frac{21-8}{9-3-2}>\frac{3}{3-2}\Rightarrow\frac{13}{4}>3$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۳۴- گزینهٔ ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\binom{5}{3}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\binom{4}{1}$ طریق). بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=10\times4\times4\times4=640$$

۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

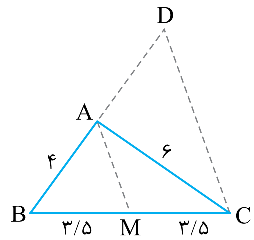
$$2a+\sqrt{3a+16}=1\Rightarrow\sqrt{3a+16}=1-2a\Rightarrow\sqrt{3a+16}^{\,2}=(1-2a)^2$$

$$3a+16=1-4a+4a^2\Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$(4a+5)(a-3)=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4}\ ,\ a=3$$

توجه کنید که $a=3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{5}{4}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ و $4a+9=4$.

۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطهٔ M، وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی $BD=2AB=8$.



راه‌حل دوم چون $AM||DC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BM}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{4}{3.5}=\frac{BD}{7}\Rightarrow BD=8$$

۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{AEF}\qquad(1)$$

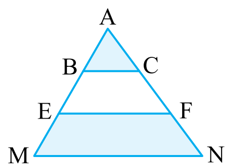
همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\Rightarrow S_{AMN}=\frac{9}{4}S_{AEF}$$

$$S_{AMN}-S_{AEF}=\frac{9}{4}S_{AEF}-S_{AEF}$$

$$S_{EFNM}=\frac{5}{4}S_{AEF}\qquad(2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

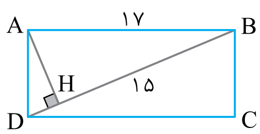


$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}}=\frac{1}{5}$$

۳۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^2=BH\times BD\Rightarrow 17^2=15\times BD\Rightarrow BD=\frac{17^2}{15}=\frac{289}{15}=19\frac{4}{15}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{4}{15}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\ ,\quad \cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<0$)

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{4}=0.27$.

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=3$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $\left(-\frac{5\pi}{6},0\right)$ گذشته است، پس

$$0=a+b\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=a+b\left(-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{b}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=3\\ a-\frac{b}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=1+2\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ برابر است با $1+2\sin\frac{\pi}{6}=2$.

۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2}=81^x=(3^4)^x=3^{4x}$. بنابراین

$$x^2-2=4x\Rightarrow x^2-4x-2=0$$

$$x=2-\sqrt{6}\ ,\quad x=2+\sqrt{6}$$

چون به ازای $x=2-\sqrt{6}$، مقدار $x-2$ منفی می‌شود و $\log_6(x-2)$ را می‌خواهیم، پس $x=2+\sqrt{6}$ و در نتیجه

$$\log_6(x-2)=\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\log_6 6=\frac{1}{2}$$

۴۲- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ است، پس $a=-1$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(2,0)$ گذشته است، پس $y(2)=0$:

$$-1+\log_b(4-1)=0$$

$$\log_b 3=1\Rightarrow b=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-1+\log_3(2x-1)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=1$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-1+\log_3(2x-1)=1\Rightarrow\log_3(2x-1)=2$$

$$2x-1=9\Rightarrow x=5$$

۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{2(-(x-2))}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2}=2$$

چون $f(2)=2$، پس تابع f در نقطهٔ $x=2$ فقط از راست پیوسته است.

۴۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A)=2P(B)\,,\quad P(A\cup B)=\frac{7}{9}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{(P(A))^2}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{7}{9}=P(A)+\frac{P(A)}{2}-\frac{(P(A))^2}{2}$$

$$(P(A))^2-3P(A)+\frac{14}{9}=0\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}\;,\quad P(A)=\frac{14}{6}\;\text{(غ.ق.ق)}$$

۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{x}_A=14$ و $\bar{x}_B=14/5$. بنابراین

$$\sigma_A^2=\frac{2^2+1^2+0^2+1^2+2^2}{5}=2$$

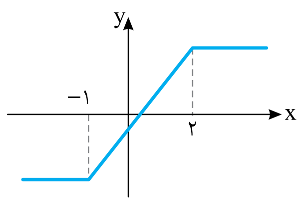
$$\sigma_B^2=\frac{2^2+1/5^2+1^2+1/5^2+3^2}{5}=3/7$$

چون

$$CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{\sqrt{2}}{14},\quad CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{\sqrt{3/7}}{14/5}$$

پس $CV_A<CV_B$، یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۴۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-1,2)$ اکیداً صعودی است.



۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x+\cos x=0\Rightarrow \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$3x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$3x=2k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}$$

چون باید $\cos x\neq 0$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{2}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{(5x-8)(x-2)}\times\frac{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{8-(3x+2)}{(5x-8)(x-2)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(5x-8)(x-2)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3}{(5x-8)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

$$=\frac{-3}{(2)(4+2\times 2+2^2)}=-\frac{1}{8}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

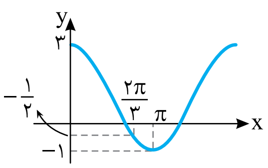
$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{-\dfrac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x-18}=\frac{-\dfrac{1}{2^2}}{20-18}=-\frac{1}{8}$$

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+}(1+2\cos x)=0$$

و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{2\pi}{3}$، مقادیر $1+2\cos x$ منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=-\infty$$



۵۰- گزینهٔ ۴ خارج از برنامهٔ درسی

۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}=f'(\frac{1}{4})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(-1)(\sqrt{x})-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

پس

$$f'(\frac{1}{4})=\frac{-\dfrac{1}{2}+(1)(\dfrac{1}{4}+1)}{\dfrac{1}{4}}=3$$

۵۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

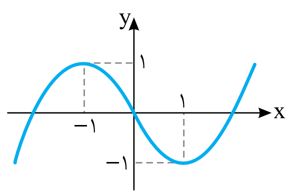
$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۴\ \ (\text{غ.ق})$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$.
معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\leq ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$.

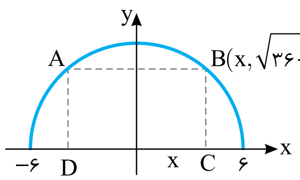


۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

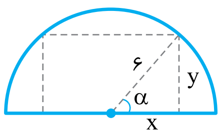
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل $۲x$ و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\leq ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۵۷- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y+۱=۰$ برابر است با

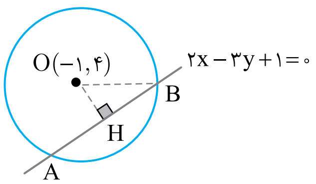
$$OH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

چون $HB=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۷}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۲۰\Rightarrow OB=۲\sqrt{۵}$$

یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=۲$ جواب معادلهٔ زیر هستند:

$$(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x=-۵\ ,\ x=۳$$



۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$. اکنون فرض کنید $f^{-1}(8)=a$. در این صورت

$$f(a)=8\Rightarrow \frac{2}{5}a-4=8\Rightarrow a=30$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(30)=b$. در این صورت

$$g(b)=30\Rightarrow b^3+b=30\Rightarrow b=3$$

بنابراین

$$(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))=g^{-1}(30)=3$$

۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X)=P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C)$$

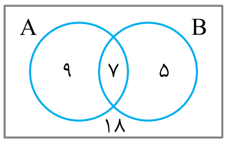
$$=\frac{5}{18}\times 0/7+\frac{7}{18}\times 0/8+\frac{6}{18}\times 0/9=\frac{35}{180}+\frac{56}{180}+\frac{54}{180}=\frac{145}{180}=\frac{29}{36}$$

۶۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=16$، $n(B)=12$ و $n(A-B)=9$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=16-9=7$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+12-7=21$$

بنابراین $39-21=18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{5}}\times 2^{\frac{4}{15}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^2=4$$

بنابراین

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0/5$$

۶۳- گزینهٔ ؟ ابتدا توجه کنید که معادلهٔ

$$(2m-1)x^2+6x+m-2=0$$

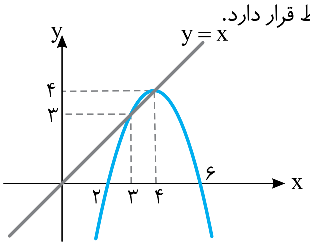
به ازای $m=\frac{1}{2}$ درجهٔ دوم نیست و به صورت $6x-\frac{3}{2}=0$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{1}{4}$ است. چون $\frac{1}{2}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta=36-4(2m-1)(m-2)>0\Rightarrow(m+1)(2m-7)<0\Rightarrow -1<m<3/5$$

یعنی منظور طراح، گزینهٔ (۳) بوده است.

۶۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول اگر نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را سه واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$ به دست می‌آید.

ساده شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=-x^2+8x-12$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(3,4)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^2+8x-12>x\Rightarrow x^2-7x+12<0$$

$$(x-3)(x-4)<0\Rightarrow 3<x<4$$

راه‌حل سوم در تابع

$$f(x)=-x^2+8x-12$$

مقادیر $f(3)$ و $f(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(3)=-9+24-12=3\ ,\quad f(4)=-16+32-12=4$$

بنابراین در نقاط $x=3$ و $x=4$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۶۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{20}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+9}=\frac{1}{20}\Rightarrow 20(t+9)+20t=t(t+9)\Rightarrow t^2-31t-180=0$$

$$(t-36)(t+5)=0\Rightarrow t=36, t=-5\ (\text{غ.ق.})$$

۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-1})(2)=g(1)=\text{تعریف نشده}\ ,\quad (gof^{-1})(5)=g(2)=3$$

$$(gof^{-1})(4)=g(3)=1\ ,\quad (gof^{-1})(6)=g(4)=2$$

بنابراین

$$D_{gof^{-1}}=\{5,4,6\}$$

در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-1}}}=D_g\cap D_{gof^{-1}}-\{x|(gof^{-1})(x)=0\}=\{4,5\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{4,5\}$ است.

۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^2-x$، آن‌گاه $g(1)=0$ و $g(2)=2$. بنابراین

$$f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B},\quad f(1)=0,\quad f(2)=2$$

بنابراین

$$f(1)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}=0\Rightarrow 2^{-A-B}=2\Rightarrow -A-B=1\Rightarrow A+B=-1$$

$$f(2)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B}=2\Rightarrow 2^{-2A-B}=4\Rightarrow -2A-B=2\Rightarrow 2A+B=-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}A+B=-1\\ 2A+B=-2\end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-1$ و $B=0$. در نتیجه

$$f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\Rightarrow f(3)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=6$$

۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{11\pi}{4}=\tan(3\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin\frac{15\pi}{4}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{4}=\cos(3\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین

$$\tan\frac{11\pi}{4}+\sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}=-1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(2)=2a-1$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1}=\frac{3(2+2)}{2+1}=4$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=2$ پیوسته باشد باید تساوی $2a-1=4$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{5}{2}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=1+\frac{a}{2}\sin 2bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|2b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $1+|\frac{a}{2}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین

$$\frac{2\pi}{|2b|}=\pi\Rightarrow |b|=1,\quad 1+\left|\frac{a}{2}\right|=\frac{3}{2}\Rightarrow |a|=1$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=0$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=-1$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲- باشد که فقط حالت $a+b=2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$(\sin x+\cos x-1)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=0$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos x-1=0\\ 1-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow \sin 2x=2\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-1=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ جواب‌های $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 2}(2x-5)=-1$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت x^2+ax+b در یک همسایگی نقطهٔ $x=2$ مثبت باشد. پس x^2+ax+b باید برابر $(x-2)^2$ باشد، در نتیجه

$$x^2+ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4,\ b=4$$

پس $a+b=0$.

۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(1)=2\\ g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(f\circ g)'(1)=g'(1)f'(g(1))=g'(1)f'(2)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$$

۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=2$ علامت عبارت x^2-2x منفی است، بنابراین $|x^2-2x|=2x-x^2$. در واقع تابع f به صورت زیر است

$$\begin{cases}x^2-2x & x\le 0\\ 2x-x^2 & 0<x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x\ge 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<0\\ 2-2x & 0<x<2\\ x+a & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_{+}(2)=f'_{-}(2)$. بنابراین

$$2+a=2-4 \Rightarrow a=-4$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x)=\lim_{x\to 2^{-}} f(x)=f(2)$$

بنابراین

$$2+2a+b=4-4 \Rightarrow b=-2a-2=6$$

در نتیجه $a+b=2$.

۷۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-2}{2}=5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ بیشتر است.

۷۶- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی

$$x+1<3<2x-1$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+1<3$ و $3<2x-1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+1<3 \Rightarrow x<2 \quad (1)$$

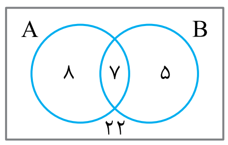
$$3<2x-1 \Rightarrow x>2 \quad (2)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۷۷- گزینهٔ ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم. آن‌گاه $n(A)=15$، $n(B)=12$ و $n(A\cap B)=7$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+15-7=20$$

بنابراین $42-20=22$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}\,(12)^{-1.5}=3^{\frac{2}{5}}\times 3^{\frac{1}{10}}\times 3^{-\frac{3}{2}}\times 2^{-3}=3^{-1}\times 2^{-3}=\frac{1}{24}$$

بنابراین $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}=(1+24)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$.

۷۹- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<0$ و $b^2-4ac<0$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m<0 \Rightarrow m>1$$

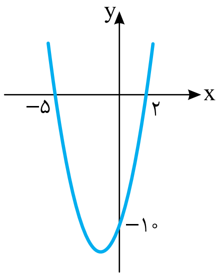
$$4(m-3)^2+4(1-m)<0 \Rightarrow m^2-7m+10<0$$

$$(m-2)(m-5)<0 \Rightarrow 2<m<5$$

بنابراین اگر $2<m<5$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۸۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را دو واحد به طرف xهای منفی سپس نُه واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=(x+2)^2-(x+2)-3-9$ به دست می‌آید. سادهٔ شدهٔ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$ است. نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که در بازهٔ $(-5,2)$ نمودار تابع f زیر محور xها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور xها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x)<0$. بنابراین

$$(x+5)(x-2)<0 \Rightarrow -5<x<2$$



۸۱- گزینهٔ ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\cdots+\frac{1}{17\times 20}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{20})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{20})=\frac{3}{20}=0.15$$

۸۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq\frac{1}{2}$، آن‌گاه معادله به صورت $2x-1+x+2=3$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{2}{3}$ است. اگر $-2<x<\frac{1}{2}$، آن‌گاه معادله به صورت $-2x+1+x+2=3$ در می‌آید که $x=0$ جواب آن است. اگر $x\leq -2$، آن‌گاه معادله به صورت $-2x+1-x-2=3$ در می‌آید که $x=-\frac{4}{3}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{2}{3}$ و $x=0$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}$$

$$f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$

بنابراین

$$g^{-1}of=\{(1,4),(4,5)\} \Rightarrow (g^{-1}of)-f=\{(1,2),(4,-1)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-1}of)-f$ مجموعهٔ $\{2,-1\}$ است.

۸۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=3^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(1,1)$ و $(3,9)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(1)=1 \Rightarrow 3^{A+B}=1 \Rightarrow A+B=0$$

$$f(3)=9 \Rightarrow 3^{3A+B}=9 \Rightarrow 3A+B=2$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=1$ و $B=-1$ و در نتیجه $f(x)=3^{x-1}$. پس عرض نقطهٔ تلاقی نمودار تابع f با محور yها برابر $f(0)=\frac{1}{3}$ است.

۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{17\pi}{6}=\tan(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3}+\cos\frac{10\pi}{3}=(-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=0$$

۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=a+b\,,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x[x]=\lim_{x\to 1^-} 0=0$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است، پس $a+b=0$. از طرف دیگر

$$f(-1)=-a+b\,,\quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} x[x]=\lim_{x\to(-1)^+}(-x)=1$$

تابع f در $x=-1$ پیوسته است، پس $-a+b=1$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=0\\-a+b=1\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$.

۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$$

$$=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}-\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$=\frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(2\pi x)}=-2\cot(2\pi x)=-2\tan(\frac{\pi}{2}-2\pi x)$$

پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-2\pi|}=\frac{1}{2}$ است.

۸۸- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Rightarrow(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^2 2x=1\Rightarrow\sin 2x=\pm 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}$، $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$، $\pi+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر 4π است.

۸۹- گزینهٔ ۴ خط $y=3x-5$ در نقطهٔ $(2,1)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(2)=1$ و $g'(2)=3$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'(1)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

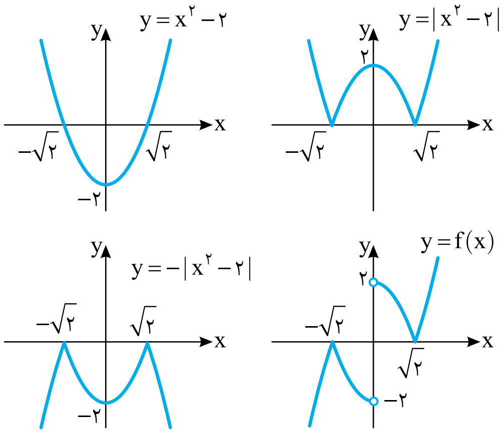
$$(fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))=g'(2)f'(1)=3\times\frac{4}{3}=4$$

۹۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت x^3-2x در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}=\frac{|x||x^2-2|}{x}=\begin{cases}|x^2-2| & x>0\\-|x^2-2| & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=0$، $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۹۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,4]$ برابر است با

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{(3+\frac{1}{5})-(1+1)}{4}=\frac{3}{10}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{2}$ برابر $f'(\frac{3}{2})$ است:

$$f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف $\frac{3}{10}$ و $\frac{17}{50}$ مورد سؤال است که برابر $0/04$ است.

۹۲- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x)=x(4x^2+3ax)=x^2(4x+3a)\,,\quad f'(3)=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$f(x)=x^4-4x^3\Rightarrow f(-2)=48$$

۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1\,,\,9-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 9$$

$$-3\leq x\leq 3\,,\,D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

برای این‌که بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-3,1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1,3]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2,3k+2)\subseteq[-3,1)$. در این حالت باید $k-2\geq -3$ و $3k+2\leq 1$. پس $-1\leq k\leq -\frac{1}{3}$.

حالت دوم $(k-2,3k+2)\subseteq(1,3]$. در این حالت باید $k-2\geq 1$ و $3k+2\leq 3$ که ممکن نیست. بنابراین $k\in[-1,-\frac{1}{3}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-1,-\frac{1}{3})$ آمده است.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6}$$

$$=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با $\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$

۲- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$1^2,2^2,3^2,\dots,8^2,9^2,\dots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد 9^2 است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم 8^2+1 است. پس واسطهٔ حسابی بین 8^2+1 و 9^2 را باید حساب کنیم که برابر است با $\frac{8^2+1+9^2}{2}=73$

۳- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است، پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-1)=p(1)=0$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x)=p(x-1)+p(1-x)\Rightarrow Q(2)=p(1)+p(-1)=0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۴- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ به‌ترتیب برابر $\frac{1-2m}{3}$ و $\frac{2-m}{3}$ هستند، پس

$$\frac{1-2m}{3}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow(1-2m)(2-m)=9\Rightarrow 2m^2-5m-7=0$$

$$(m+1)(2m-7)=0\Rightarrow m=-1\,,\,m=\frac{7}{2}$$

به‌ازای $m=-1$ معادله به‌صورت $3x^2-3x+3=0$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۵- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$1<\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow -1<\frac{x+1}{2x-1}-2<1\Rightarrow -1<\frac{-3x+3}{2x-1}<1$$

$$\left|\frac{-3x+3}{2x-1}\right|<1\Rightarrow|3x-3|<|2x-1|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(3x-3)^2<(2x-1)^2\Rightarrow(3x-3)^2-(2x-1)^2<0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1)<0$$

$$(5x-4)(x-2)<0\Rightarrow\frac{4}{5}<x<2\Rightarrow x\in(0/8,2)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $1<\frac{1+1}{2-1}<3$.

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند $1<\frac{\frac{3}{2}+1}{2(\frac{3}{2})-1}<3\Leftrightarrow 1<\frac{5}{4}<3$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow\frac{x+1-6x+3}{2x-1}<0\Rightarrow\frac{-5x+4}{2x-1}<0\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{4}{5},+\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1}>1\Rightarrow\frac{x+1-2x+1}{2x-1}>0\Rightarrow\frac{-x+2}{2x-1}>0\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},2)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{4}{5},2)=(0/8,2)$$

۶- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}\Rightarrow 0+0+c=5\Rightarrow c=5\,,\quad\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}\Rightarrow a+b+c=11\Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}\Rightarrow 4a-2b+c=5\Rightarrow 4a-2b=0\Rightarrow b=2a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=6\\b=2a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=4$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ از نقاط $(0,5)$، $(-2,5)$ و $(1,11)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c-5$ از نقاط $(0,0)$، $(-2,0)$ و $(1,6)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-0)(x+2)=a(x^2+2x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(1,6)$ می‌گذرد. پس $6=a(1+2)\Rightarrow a=2$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-2,5)$ و $(0,5)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -1 است. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌شکل کلی $y=m(x+1)^2+n$ است. این سهمی از نقاط $(0,5)$ و $(1,11)$ می‌گذرد. پس

$$(0,5)\in\text{سهمی}\Rightarrow m+n=5$$

$$(1,11)\in\text{سهمی}\Rightarrow 4m+n=11$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}m+n=5\\4m+n=11\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=2$ و $n=2$. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=2(x+1)^2+3$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

۷- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$
$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

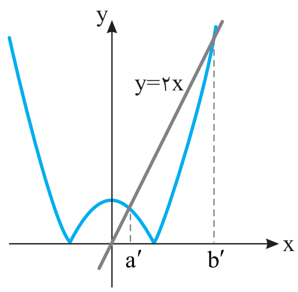
پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$
$$x\ge ۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\ x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\,,\,x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})\\ x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۲\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.



توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f=D_g=\mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof}=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^۲(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^۲$$
$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow -۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$
$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\le ۴\Rightarrow -۴\le-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$
$$۰\le ۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲<۳\Rightarrow ۰\le(gof)(x)<۳$$

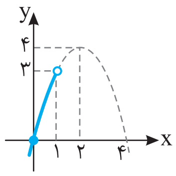
بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow ۰\le f(x)<۱$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^۲+۴t,\quad ۰\le t<۱$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $۰\le g(t)<۳$، یعنی

$$R_{gof}=[۰,۳)$$



۱۰- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$. بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow ۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x}\Rightarrow xy=x^۲-۲\Rightarrow x^۲-yx-۲=۰$$
$$\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^۲+۸}}{۲}>۰\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^۲+۸}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۸}=۳x\qquad(x>۰)$$
$$x^۲+۸=۹x^۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,\ x=-۱\quad(\text{غ.ق.ق})$$

۱۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_۴ ۳=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$\log_{۱۲} ۶=\frac{\log_۲ ۶}{\log_۲ ۱۲}=\frac{\log_۲ ۳+\log_۲ ۲}{\log_۲ ۳+۲\log_۲ ۲}=\frac{\frac{۸}{۵}+۱}{\frac{۸}{۵}+۲}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۴ ۳=۰/۸=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۴^{\frac{۴}{۵}}=۳\Rightarrow ۴^۴=۳^۵\Rightarrow ۲^۸=۳^۵$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\log_{۱۲}۳+\log_{۱۲}۲=\log_{۲^۲\times۳}۳+\log_{۲^۲\times۳}۲$$

$$=۴\log_{(۲^۸\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۳^۵)}۲=۴\log_{(۳^۵\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۲^۸)}۲$$

$$=۴\log_{۳^۹}۳+۵\log_{۲^{۱۸}}۲=\frac{۴}{۹}\log_{۳}۳+\frac{۵}{۱۸}\log_{۲}۲=\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

۱۳- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{۱}{۳})=۰$ و $f(۰)=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۴+۲^{ax+b}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۴+۲^{b}=-۲\\ f(-\frac{۱}{۳})=-۴+۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲^{b}=۲\Rightarrow b=۱\\ ۲^{-\frac{a}{۳}+۱}=۴\Rightarrow -\frac{a}{۳}+۱=۲\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

پس $f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱}\Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{۶}=۶۰$

۱۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $f^{-1}(۲)=a>۰$. در این صورت $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^{a}+(\frac{۱}{۲})^{a}}{۲}=۲\Rightarrow ۲^{a}+\frac{۱}{۲^{a}}=۴$$

با فرض $b=۲^{a}>۰$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{۱}{b}=۴\Rightarrow b^{۲}-۴b+۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۳},\ b=۲-\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

(اگر $b=۲-\sqrt{۳}$، آن‌گاه $a=\log_{۲}(۲-\sqrt{۳})<۰$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس $۲^{a}=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow a=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^{x}+\frac{۱}{۲^{x}}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t+\frac{۱}{t}\Rightarrow t^{۲}-۲yt+۱=۰\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}\Rightarrow ۲^{x}=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}$$

چون $x\geq۰$، پس فقط $y+\sqrt{y^{۲}-۱}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_{۲}(y+\sqrt{y^{۲}-۱})\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_{۲}(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$$

در نتیجه $f^{-1}(۲)=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$.

۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan ۳۰۰^\circ=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^\circ=\tan(۴۵۰^\circ+۳۰^\circ)=\tan(۵\times۹۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cot ۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^\circ=\sin(۸۱۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin(۹\times۹۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan ۳۰۰^\circ\cos ۲۱۰^\circ+\tan ۴۸۰^\circ\sin ۸۴۰^\circ$$

$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{۷\pi}{۳},۰)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{۷\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰$$

$$a+\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow a=-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$a+|b|=۳\Rightarrow-\frac{b}{۲}+|b|=۳$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{۲}-b=۳\Rightarrow b=-۲$$

۱۷- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳- نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=۱\\ -|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-۱\\ |a|=۲\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=۶\pi$ نشان داده شده است. پس

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۳}$$

پس

$$|\frac{a}{b}|=\frac{۲}{\frac{۱}{۳}}=۶\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm۶$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-۶$.

۱۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=(۲k+۱)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(۲k+۱)\pi$ قابل قبول نیست.

۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-۲$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-۳$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۳+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}۰=۰$$

۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2-1}}{x-3}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\left(\frac{8x^3-27(x^2-1)}{x-3}\times\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(8x^2-3x-9)}{x-3}$$

$$\times\lim_{x\to3}\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}(8x^2-3x-9)\times\frac{1}{36+36+36}$$

$$=\frac{1}{12}\times(72-9-9)\times\frac{1}{36\times3}=\frac{1}{24}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2\times3}{3\times4}}{4}=\frac{1}{24}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حد تابع رادیکالی در بی‌نهایت در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۱- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-2)=f'_+(-2),\quad f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le-2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x\le-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-2)=-\frac{1}{\sqrt{5+4}}=-\frac{1}{3}\\ f'_+(-2)=-(-2)+b=b+2\end{cases}\Rightarrow b+2=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

$$\begin{cases}f(-2)=\sqrt{5+4}=3\\ \lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-\frac{1}{2}x^2+bx+c)=-2-2b+c=c+\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$c+\frac{8}{3}=3\Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}=\frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3}=\frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)^3-(2x(x-1)^3+3(x-1)^2x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(2)=\frac{4\times1^3-(4(1)^3+3(1)^2\times4)(4)}{(4(1)^3)^2}=-\frac{15}{4}$$

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2}+2-x=0\Rightarrow\sqrt{4x-x^2}=x-2,\quad x>2$$

$$4x-x^2=x^2-4x+4\Rightarrow2x^2-8x+4=0$$

$$x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2+\sqrt{2},\ x=2-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین نقطهٔ $A(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با $\frac{|2+2\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

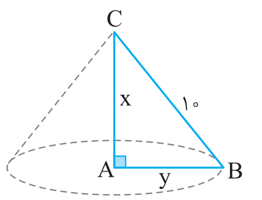
۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2+y^2=10$. پس $y^2=10-x^2$.
اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{3}y^2x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{3}x(10-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(10x-x^3)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{3}(10-3x^2)$$

$$V'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\Rightarrow y^2=10-\frac{10}{3}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}$$

بنابراین

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$



۲۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید فرد A و فرد B نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند. تعداد حالت‌های مورد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{A و B هیچ کدام دعوت نشوند}}+\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{B دعوت شود و A دعوت نشود}}+\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{A دعوت شود و B دعوت نشود}}=2\times35+21=91$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌هایی که دو فرد A و B با هم به مهمانی دعوت می‌شوند، برابر $\binom{۷}{۳}$ است و تعداد کل حالت‌های دعوت ۵ نفر از ۹ نفر برابر $\binom{۹}{۵}$ است، پس تعداد حالت‌هایی که دو نفر A و B با هم به مهمانی دعوت نشوند، برابر است با $\binom{۹}{۵}-\binom{۷}{۳}=۱۲۶-۳۵=۹۱$

۲۶- گزینهٔ ۳ تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۸ کتاب در کنار یکدیگر برابر $۸!$ است و تعداد حالت‌هایی که ۳ کتاب انگلیسی کنار هم و ۵ کتاب فارسی کنار هم قرار می‌گیرند، برابر $۲×۵!×۳!$ است. پس احتمال پیشامد مطلوب برابر است با

$$\frac{۲×۵!×۳!}{۸!}=\frac{۱}{۲۸}$$

۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا ۱۰ واحد از داده‌ها کم می‌کنیم، سپس میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که میانگین داده‌های اصلی ۱۰ واحد بیشتر از میانگین داده‌های جدید خواهد بود ولی انحراف معیار تغییری نخواهد کرد. ۰,۰,۰,۰,۰,۱,۱,۱,۱,۴,۴,۴,۴,۴,۴,۴

$$\bar{x}=\frac{۴×۱+۷×۴}{۱۶}=۲$$

$$\sigma^{۲}=\frac{۵(۰-۲)^{۲}+۴(۱-۲)^{۲}+۷(۴-۲)^{۲}}{۱۶}=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow\sigma=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

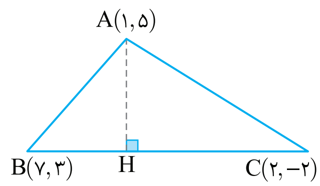
بنابراین میانگین داده‌های اصلی برابر ۱۲ و انحراف معیار آن‌ها برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ است و در نتیجه ضریب تغییرات آن‌ها برابر است با $cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴}\simeq ۰/۱۵$.

۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{۳-(-۲)}{۷-۲}=۱$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-۳=۱×(x-۷)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-۴=۰$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|۱-۵-۴|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$.

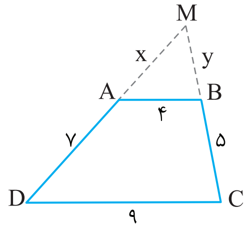


۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مطابق شکل زیر و با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت

$$\triangle MDC: AB||DC\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+۷}=\frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $۹x=۴x+۲۸\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۵},\quad ۹y=۴y+۲۰\Rightarrow y=۴$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با $x+y+۴=\frac{۲۸}{۵}+۴+۴=۱۳/۶$.



راه‌حل دوم چون AB||DC، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های MAB و MDC متشابه‌اند. پس نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست.

$$\frac{\text{محیط}(MAB)}{\text{محیط}(MDC)}=\frac{AB}{DC}=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل در}}\frac{\text{محیط}(MAB)}{\text{محیط}(MDC)-\text{محیط}(MAB)}$$

$$=\frac{۴}{۹-۴}\Rightarrow\frac{\text{محیط}(MAB)}{AD+DC+BC-AB}=\frac{۴}{۵}$$

$$\text{محیط}(MAB)=\frac{۴}{۵}(۷+۹+۵-۴)=\frac{۴}{۵}×۱۷=۱۳/۶$$

توجه برخلاف ادعای سؤال، چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه است. در واقع، اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه $AB=DC$ و $AD=BC$ که چنین نیست!

۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC=\sqrt{۳+۴}=\sqrt{۷}$

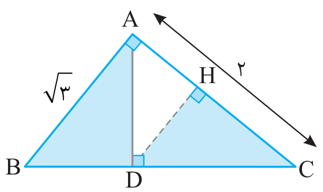
اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BD×BC=AB^{۲}\Rightarrow BD\sqrt{۷}=\sqrt{۳}^{۲}\Rightarrow BD=\frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

در نتیجه $DC=BC-BD=\sqrt{۷}-\frac{۳}{\sqrt{۷}}=\frac{۴}{\sqrt{۷}}$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و CDH متشابه هستند (زز) و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت اندازهٔ اضلاع آن‌هاست:

$$\frac{S_{CDH}}{S_{ABD}}=(\frac{CD}{AB})^{۲}=(\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}})^{۲}=\frac{\frac{۱۶}{۷}}{۳}=\frac{۱۶}{۲۱}$$



۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}×\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$

$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱$$

همچنین $(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$

بنابراین $\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$

۳۲- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+4d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d)=(a+4d)^2\Rightarrow a^2+13ad=a^2+8ad+16d^2$$

$$5ad=16d^2\Rightarrow a=\frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d\neq 0$. چون در غیر این صورت، $q=1$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.) بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+4d}{a}=\frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d}=\frac{36d}{16d}=\frac{9}{4}$$

۳۳- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(4)=3$ و $p(-2)=1$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ برابر $A(2)$ است و برابر است با $A(2)=p(4)+4p(-2)=3+4\times 1=7$

۳۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>0$، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ برقرار هستند. در اینجا $a=2$، $b=m$ و $c=m+6$. پس

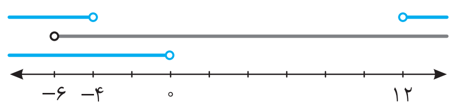
$$\Delta=b^2-4ac=m^2-4\times 2(m+6)>0\Rightarrow m^2-8m-48>0$$

$$(m-12)(m+4)>0\Rightarrow m>12 \text{ یا } m<-4 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a}>0\Rightarrow \frac{m+6}{2}>0\Rightarrow m>-6 \quad (2)$$

$$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow -\frac{m}{2}>0\Rightarrow m<0 \quad (3)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-6,-4)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-5$ معادله به صورت $2x^2-5x+1=0$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=17>0$، $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$ و $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}>0$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-1$ معادله به صورت $2x^2-x+5=0$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-39<0$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۳۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-1-3x-3}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+4}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty) \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x+1}>-1\Rightarrow\frac{2x-1+x+1}{x+1}>0\Rightarrow\frac{3x}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-[-4,0]$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1<\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow -2<\frac{2x-1}{x+1}-1<2\Rightarrow -2<\frac{x-2}{x+1}<2$$

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|<2\Rightarrow |x-2|<2|x+1|\Rightarrow x^2-4x+4<4x^2+8x+4$$

$$x^2+4x>0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۳۶- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-1,9)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+1)^2+9$ است. این سهمی از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس

$$1=a(3+1)^2+9\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ است که از نقطهٔ $(5,-9)$ می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2+9=-18+9=-9$$

۳۷- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-2x\,,(x>1)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x+16$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x=-x^2+2x+16\Rightarrow x^2-2x-8=0$$

$$(x-4)(x+2)=0\Rightarrow x=4, x=-2 \quad (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

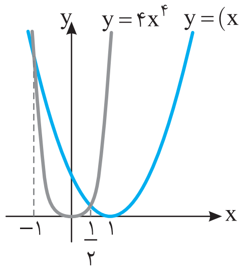
$$OA=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$$

۳۸- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-1)^2>4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4<(x-1)^2\Rightarrow(2x)^2-(x-1)^2<0\Rightarrow(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)<0$$

عبارت $2x^2-x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=1-8<0$. بنابراین باید نامعادلهٔ $2x^2+x-1<0$ را حل کنیم: $(x+1)(2x-1)<0\Rightarrow -1<x<\frac{1}{2}$

در بازهٔ $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-1)^2$ و $y=4x^4$ به صورت زیر است:

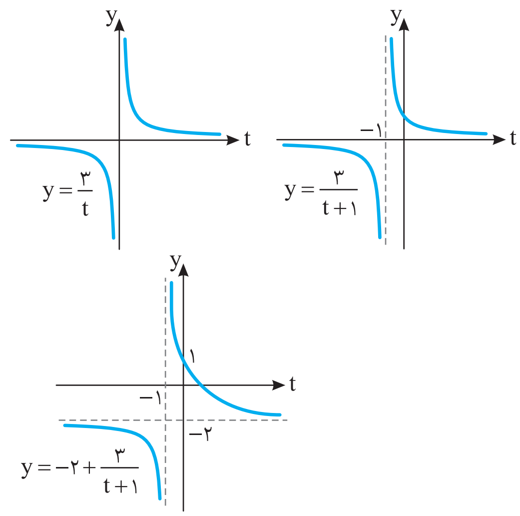


۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<[x]-x\le ۰\Rightarrow -۱<f(x)\le ۰$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-۱,۰]$ است، برابر است. برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود: $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}=-۲+\frac{۳}{t+۱}$



واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$

$$-۱<t\le ۰\Rightarrow ۰<t+۱\le ۱\Rightarrow \frac{۱}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow \frac{۳}{t+۱}\ge ۳\Rightarrow -۲+\frac{۳}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow y\ge ۱$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y\ge ۱$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+۲=\frac{۳}{t+۱}\Rightarrow t+۱=\frac{۳}{y+۲}\Rightarrow t=-۱+\frac{۳}{y+۲}$$

راه‌حل سوم تابع $g(t)=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ روی بازهٔ $(-۱,۰]$ پیوسته و نزولی است.

بنابراین برد آن برابر است با $[g(۰),\lim_{t\to(-۱)^+} g(t))=[۱,+\infty)$

۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱\Rightarrow(\sqrt{x}+۱)^۲=y+۱\quad (y\ge -۱)$$

$$\sqrt{x}+۱=\sqrt{y+۱}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱$$

$$x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲\quad(x\ge -۱)$$

$$g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases} f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱\\ f(۹)=۱۵\Rightarrow f^{-۱}(۱۵)=۹\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۴۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۱}{۲x},\quad x>۰$$

$$y=\frac{۲x^۲-۱}{۲x}\Rightarrow ۲xy=۲x^۲-۱\Rightarrow ۲x^۲-۲yx-۱=۰$$

$$\begin{cases} x=\frac{۲y+\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\\ x=\frac{۲y-\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{y+\sqrt{y^۲+۲}}{۲}\\ x=\frac{y-\sqrt{y^۲+۲}}{۲}<۰ \text{ (غ.ق.ق)}\end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}$$

طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۲}=-۳x\quad (x<۰)$$

$$x^۲+۲=۹x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\text{ (غ.ق.ق)},\ x=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<۰)$. بنابراین

$$f^{-۱}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{۱}{-۲a}=a$$

$$۲a=\frac{۱}{۲a}\Rightarrow ۴a^۲=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸}$، پس $\log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$. بنابراین

$$\log_{۱۸}۸=\frac{\log_۲ ۸}{\log_۲ ۱۸}=\frac{۳\log_۲ ۲}{\log_۲ ۹+\log_۲ ۲}=\frac{۳}{۲\log_۲ ۳+۱}=\frac{۳}{۲\times\frac{۸}{۵}+۱}=\frac{۵}{۷}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۳^{\frac{۵}{۸}}=۲\Rightarrow ۳^۵=۲^۸\Rightarrow ۳^{۱۰}=۲^{۱۶}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۸}۸=\log_{۳^۲\times ۲}۲^۳=۳\log_{۳^۲\times ۲}۲=۳\times ۵\log_{۳^{۱۰}\times ۲^۵}۲$$

$$=۱۵\log_{۲^{۱۶}\times ۲^۵}۲=۱۵\log_{۲^{۲۱}}۲=\frac{۱۵}{۲۱}\log_۲ ۲=\frac{۵}{۷}$$

۴۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0)=-6$ و $f(\frac{1}{2})=0$. بنابراین

$$f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(0)=-9+(\frac{1}{3})^{b}=-6 \\ f(\frac{1}{2})=-9+(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-b}=3 \Rightarrow b=-1 \\ 3^{-\frac{a}{2}+1}=9 \Rightarrow -\frac{a}{2}+1=2 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

پس $f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{-2x-1} \Rightarrow f(2)=-9+(\frac{1}{3})^{-5}=234$

۴۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2y=2^x-\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t-\frac{1}{t} \Rightarrow t^2-2yt-1=0 \Rightarrow \begin{cases} t=y+\sqrt{y^2+1} \\ t=y-\sqrt{y^2+1}<0 \ (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

$$2^x=y+\sqrt{y^2+1} \Rightarrow x=\log_2(y+\sqrt{y^2+1})$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt{5})$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2)=a$. پس $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a-(\frac{1}{2})^a}{2}=2 \Rightarrow 2^a-\frac{1}{2^a}=4 \Rightarrow (2^a)^2-4\times 2^a-1=0$$

اگر فرض کنیم $2^a=b>0$، آن‌گاه

$$b^2-4b-1=0 \Rightarrow b=2+\sqrt{5}, b=2-\sqrt{5}<0 \ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $2^a=2+\sqrt{5} \Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt{5})$

۴۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(270^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ)=\tan(-180^\circ+15^\circ)=\tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ=\sin(1080^\circ+15^\circ)=\sin(6\times 180^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ=\cos(270^\circ-15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\tan 285^\circ \tan(-165^\circ)-\sin 1095^\circ \cos 255^\circ \\ &=(-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ)-(\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) \\ &=-1+\sin^2 15^\circ=-\cos^2 15^\circ \end{aligned}$$

۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},0)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{3}{2}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{3}=0 \Rightarrow a+\frac{b}{2}=0$$

$$a=-\frac{b}{2} \Rightarrow a+|b|=\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2}+|b|=\frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2}-b=\frac{3}{2} \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۴۷- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -3 است، پس $-|a|+c=-3$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{6},1)$ عبور می‌کند، پس $1=a\sin(\frac{b\pi}{6})+c$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ است. پس $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$ و در نتیجه $|b|=3$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a+c=-3 \\ a\sin\frac{\pi}{2}+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=-3 \\ a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a+c=-3 \\ a\sin(\frac{-\pi}{2})+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=-3 \\ -a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

۴۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$4\sin 3x\cos 3x=1 \Rightarrow 2\sin 6x=1 \Rightarrow \sin 6x=\sin\frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 6x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 6x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{36} \\ x=\frac{k\pi}{3}+\frac{5\pi}{36} \end{cases}, \ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2})$ به‌ازای $k=0$ و $k=1$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{36}, x=\frac{5\pi}{36}, x=\frac{13\pi}{36}, x=\frac{17\pi}{36}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ چهار جواب دارد.

۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه

$$\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{-2\sin x-1}{1+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin x-1}{1+\sin x}=\frac{-2-1}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۵۰- گزینهٔ ۲ چون حد تابع f در بی‌نهایت برابر ۲ شده است، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسر $f(x)$ با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=۰$ و $n=۲$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۲-۶x^۲+۱}{۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲}{۷x^۲}=-\frac{۲}{۷}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=۳$ و $a\neq ۰$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳}{ax^۳}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(۲x-۱)(۲x^۲-۲x-۱)}{(۲x-۱)(x^۲+۴x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-۲x-۱}{x^۲+۴x+۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱۷}{۴}}=-\frac{۶}{۱۷}$$

۵۱- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(۲,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$ از نقطهٔ $(۲,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد.

در این صورت

$$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۴=۴a+۲b\Rightarrow ۴a=۴-۲b$$

$$f'(۲)=g'(۲)\Rightarrow -۳=۴a+b\Rightarrow ۴a=-۳-b$$

بنابراین $۴-۲b=-۳-b\Rightarrow b=۷$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$g(x)=ax^۲+bx\Rightarrow g'(x)=۲ax+b$$

۵۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)'}{۳\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

از طرف دیگر، $$y=\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲\big((۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)\big)}{۳(۳x+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

$$f'(-۲)=\frac{۲\big((۲+۴)(-۶+۵)-۳(-۴-۴)\big)}{۳(-۶+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{-۴-۴}{-۶+۵}}}=۶$$

۵۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{-۲(x^۲-۴x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۵},\ x=۲-\sqrt{۵}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
			min		max		

بنابراین $x=۲+\sqrt{۵}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۲(۲+\sqrt{۵})-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۱}$$

$$=\frac{۶\sqrt{۵}+۱۰}{۴\sqrt{۵}+۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}+۵}{۲\sqrt{۵}+۵}\times\frac{۲\sqrt{۵}-۵}{۲\sqrt{۵}-۵}$$

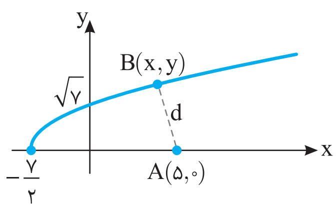
$$=\frac{۳۰-۱۵\sqrt{۵}+۱۰\sqrt{۵}-۲۵}{۲۰-۲۵}=\frac{۵-۵\sqrt{۵}}{-۵}=\sqrt{۵}-۱$$

۵۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۷}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-۵)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

کمترین مقدار عبارت $x^۲-۸x+۳۲$ به‌ازای $x=۴$ به‌دست می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۵۵- گزینهٔ ۴ اگر افراد را به صورت جایگاه‌هایی فرض کنیم که می‌خواهیم کتاب‌ها را در آن‌ها قرار دهیم، توزیع کتاب‌ها به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

$\boxed{۱}\ \boxed{۲}\ \boxed{۲}$ یا $\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۳}$

- اگر به یک نفر سه کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:

یکی از سه نفر را به ۳ حالت انتخاب می‌کنیم و سه تا از پنج کتاب را به $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم و کتاب‌ها را به او می‌دهیم. سپس دو کتاب باقی‌مانده به دو حالت بین دو نفر دیگر توزیع کنیم. پس در این صورت تعداد حالت‌ها برابر $۳\binom{۵}{۳}\times ۲=۶۰$ است.

- اگر به دو نفر دو کتاب برسد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:

یک نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و یک کتاب از پنج کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به ۳×۵ حالت انجام‌پذیر است. سپس یک نفر از دو نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم و دو کتاب از چهار کتاب را انتخاب می‌کنیم و به او می‌دهیم که این کار به $۲\binom{۴}{۲}=۱۲$ حالت انجام‌پذیر است ولی همهٔ حالت‌های ممکن دو بار شمرده می‌شوند. مثلاً اگر شخص (۱) انتخاب شود و کتاب‌های A و B را دریافت کند، کتاب‌های C و D به شخص (۲) می‌رسند و اگر شخص (۲) انتخاب شود و کتاب‌های C و D را دریافت کند، کتاب‌های A و B به شخص (۱) می‌رسد که این دو حالت یکسان هستند. پس تعداد حالت‌های غیر تکراری برابر ۶ است. (توجه کنید که دو کتاب باقی‌مانده به یک حالت به نفر آخر داده می‌شوند). در این صورت تعداد کل حالت‌ها برابر $۶\times۱۵=۹۰$ است. بنابراین کل حالت‌های ممکن برابر $۶۰+۹۰=۱۵۰$ است.

۵۶- گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌هایی ۱۰ نفر در یک صف می‌ایستند، برابر $۱۰!$ است که در $۲\times۹!$ حالت آن دو نفر خاص کنار هم ایستاده‌اند. پس احتمال کنار هم ایستادن این دو نفر برابر است با $\frac{۲\times۹!}{۱۰!}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$. بنابراین احتمال اینکه این دو نفر کنار هم نباشند، برابر $\frac{۴}{۵}$ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ اگر ۸ واحد از تمام داده‌ها کم کنیم، داده‌های جدید به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{array}{ccccccc} ۵ & ۷ & ۸ & ۸ & ۸ & ۱۰ & ۱۰ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -۳ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{array}$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با $\frac{(-۳)+(-۱)+۰+۰+۰+۲+۲}{۷}=۰$

پس میانگین داده‌های اصلی برابر ۸ است. اکنون واریانس داده‌های جدید را حساب می‌کنیم که با واریانس داده‌های اصلی برابر است:

$$\sigma^۲=\frac{(-۳-۰)^۲+(-۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۲-۰)^۲+(۲-۰)^۲}{۷}$$
$$=\frac{۹+۱+۴+۴}{۷}=\frac{۱۸}{۷}$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۱۸}{۷}}}{۸}=\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{۲}{۷}}\simeq\frac{۳}{۸}\times۰/۵۳۴=۰/۲۰$$

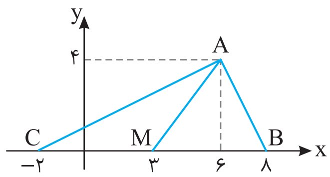
۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=۰ \\ ۲y-x=۲ \end{cases}\Rightarrow x=-۲,\quad \begin{cases} y=۰ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases}\Rightarrow x=۸$$

$$\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$$

پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازهٔ میانهٔ AM را می‌خواهیم.

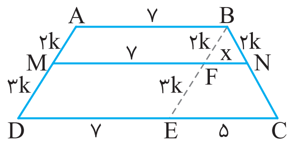
چون M نقطهٔ $(۳,۰)$ است، پس $AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$



۵۹- گزینهٔ ۳ از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در F و E قطع کند (شکل مقابل را ببینید). چهارضلعی‌های ABFM، MFED و ABED متوازی‌الاضلاع هستند. اندازهٔ اضلاع بر این اساس روی شکل نشان داده شده‌اند. در مثلث BEC طبق تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

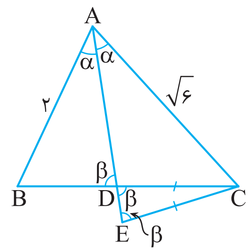
$$FN||EC\Rightarrow\frac{FN}{EC}=\frac{BF}{BE}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{۲k}{۲k+۳k}\Rightarrow x=۲$$

بنابراین $MN=۷+۲=۹$.

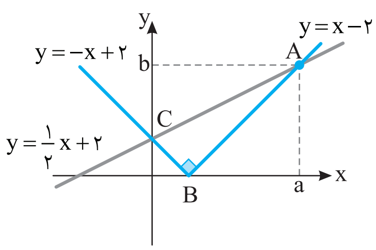


۶۰- گزینهٔ ۲ مطابق شکل مقابل مثلث‌های ABD و ACE دو زاویهٔ برابر به اندازه‌های α و β دارند. پس این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$. از طرف دیگر نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}=(\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$



۶۱- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=|x-۲|$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow x=۸\Rightarrow a=۸\Rightarrow b=۸-۲=۶$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(۸,۶)$، $B(۲,۰)$ و $C(۰,۲)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۶-۰)^۲}=۶\sqrt{۲},\quad BC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times۶\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}=۱۲$$

۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-1}of^{-1})(20)=a$، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=a\Rightarrow g(a)=f^{-1}(20)\Rightarrow f(g(a))=20$$

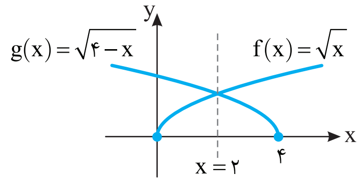
واضح است که $f(16)=20$، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20$$

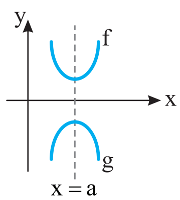
پس $f^{-1}(20)=16$. بنابراین

$$g(a)=16\Rightarrow \frac{9a+6}{1-a}=16\Rightarrow 9a+6=16-16a\Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

۶۳- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-4)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:



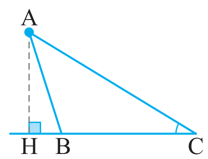
۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot\hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin\hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$1+\cot^2\hat{C}=\frac{1}{\sin^2\hat{C}}\Rightarrow 1+\cot^2\hat{C}=\frac{169}{25}$$

$$\cot^2\hat{C}=\frac{144}{25}\Rightarrow \cot\hat{C}=\frac{12}{5}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot\hat{C}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\frac{12}{5}=\frac{9}{AH}\Rightarrow AH=3/75$$



۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(3\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$، پس

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{2}{100}=\frac{49}{50}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-7}{5\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد و $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{7\sqrt{2}}{10})=\frac{3}{5}$.

۶۶- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با

$$(1+\cdots+210)-(1+\cdots+190)=\frac{210\times211}{2}-\frac{190\times191}{2}$$

$$=22155-18145=4010$$

۶۷- گزینهٔ ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزهٔ متوالی به‌صورت زیر است.

- در ابتدا $a=24$ گرم موجود است.
- پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با $a-\frac{1}{10}a=\frac{9}{10}a$
- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{9}{10}a-\frac{1}{10}(\frac{9}{10}a)=\frac{81}{100}a=(\frac{9}{10})^2a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $(\frac{9}{10})^3a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازهٔ زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$(\frac{9}{10})^na=24(\frac{9}{10})^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$24(\frac{9}{10})^n=8\Rightarrow(\frac{9}{10})^n=\frac{1}{3}\Rightarrow(\frac{10}{9})^n=3$$

$$n=\log_{\frac{10}{9}}3=\frac{1}{\log_3(\frac{10}{9})}=\frac{1}{\log_3 10-\log_3 9}=\frac{1}{\frac{1}{\log 3}-2}=\frac{1}{\frac{100}{48}-2}=12$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر ۳۶۰ روز است.

۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}(\frac{(2x+5)^2-49x}{4x^2-(3x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}})$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)}\times\frac{2+2}{2+5+7}=\frac{4}{14}\lim_{x\to1}\frac{4x-25}{4x+1}=\frac{2}{7}\times(-\frac{21}{5})=-1/2$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{2\times2}}=-1/2$$

۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-۱|<۱\Rightarrow -۱<x-۱<۱\Rightarrow ۰<x<۲$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ۰<x<۲\\ x^{۲}+ax+b & x\le ۰ \text{ یا } x\ge ۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته است، پس

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۰^-}(x^{۲}+ax+b)=\lim_{x\to ۰^+}((x-۱)[x])\Rightarrow b=۰$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$۴+۲a+b=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۲}+ax+b)=\lim_{x\to ۲^-}((x-۱)[x])$$

$$۴+۲a=(۲-۱)\times ۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۷۰- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{۳-۴}{۱}=-۱$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=-۱\quad (*)\Rightarrow ۲۱-x^{۲}+۴x=(x-۲)^{۲}$$

$$۲۱-x^{۲}+۴x=x^{۲}+۴-۴x\Rightarrow ۲x^{۲}-۸x-۱۷=۰$$

$$x=۲+\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\quad x=۲-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}=۵\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(۴)=۵\times ۲-\frac{۴}{۲}=۸$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}+\frac{۲}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(۴)=\frac{۵}{۴}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۴,۸)$ با شیب $\frac{۳}{۲}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲$$

اگر قرار دهیم $x=۰$، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۷۲- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، پس $P(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$P(\tfrac{۱}{۲})=۲(\tfrac{۱}{۲})^{۴}+a(\tfrac{۱}{۲})^{۳}+۲(\tfrac{۱}{۲})^{۲}-۳(\tfrac{۱}{۲})=۰\Rightarrow a=۷$$

$$P(x)=۲x^{۴}+۷x^{۳}+۲x^{۲}-۳x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲)=۲(-۲)^{۴}+۷(-۲)^{۳}+۲(-۲)^{۲}-۳(-۲)=-۱۰$$

۷۳- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ و $g(x)=x+۷$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow |x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

$$x\ge ۲\Rightarrow x-۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=۸$$

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -x+۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=-۴\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x\le -۱\Rightarrow -x+۲-x-۱=x+۷\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین $A(۸,۱۵)$ و $B(-۲,۵)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(۸+۲)^{۲}+(۱۵-۵)^{۲}}=۱۰\sqrt{۲}$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=a$، پس

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(-۹)$$

$$a\ge ۲\Rightarrow a^{۲}-۴a+۹=g^{-۱}(-۹)$$

$$g(a^{۲}-۴a+۹)=-۹\Rightarrow \frac{۳-(a^{۲}-۴a+۹)}{۲}=-۹$$

$$a^{۲}-۴a-۱۲=۰\Rightarrow (a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^{۲}-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^{۲}+۵\Rightarrow y-۵=(x-۲)^{۲}$$

$$|x-۲|=\sqrt{y-۵}\xrightarrow{x\ge ۲} x-۲=\sqrt{y-۵}$$

$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow ۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۳-۲(-۹))$$

$$=f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۷۵- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+۴$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x-۱)^{۲}=-(-x-۱)^{۲}+۴$$

$$x^{۲}-۲x+۱=-x^{۲}-۲x-۱+۴$$

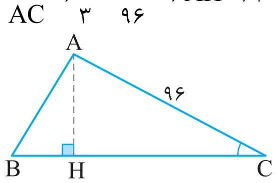
$$x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا از $۱+\cot^{۲}\hat{C}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}\Rightarrow \sin^{۲}\hat{C}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC:\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=۶۴$$



۷۷- گزینهٔ ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل که در آن $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$، نتیجه می‌شود

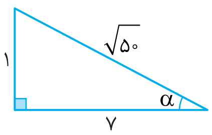
$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}},\quad \cos\alpha=\frac{۷}{\sqrt{۵۰}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin(۳\pi+(\frac{\pi}{۴}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}+\frac{۷}{\sqrt{۵۰}})=-\frac{۴}{۵}$$



۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+۴۰=\frac{۴۰}{۲}(۱+۴۰)=۸۲۰$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $۲\times۸۲۰-۱=۱۶۳۹$.

۷۹- گزینهٔ ۲ مقدار مادهٔ خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ٪۱۰۰)

روز دوم: $۱۰۰-۴=۹۶$ (غلظت ٪۹۶)

روز سوم: $۹۶-\frac{۹۶}{۱۰۰}\times۴=۹۶(۱-\frac{۴}{۱۰۰})$ (غلظت: ٪۹۲/۱۶)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$۱۰۰,۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰}),۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^۲,\ldots$$

بنابراین در روز $(n+۱)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار مادهٔ خالص برابر $۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^n$ خواهد بود که باید $\frac{۱}{۳}$ مادهٔ خالص اولیه، یعنی $\frac{۱۰۰}{۳}$ لیتر باشد. پس

$$۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^n=\frac{۱}{۳}\times۱۰۰\Rightarrow(\frac{۲۴}{۲۵})^n=\frac{۱}{۳}$$

$$n=\log_{\frac{۲۴}{۲۵}}(\frac{۱}{۳})=\frac{-\log۳}{\log\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-\log۳}{\log۲۴-\log۲۵}$$

$$=\frac{-\log۳}{\log۸+\log۳-\log(\frac{۱۰۰}{۴})}=\frac{-\log۳}{۳\log۲+\log۳-\log۱۰۰+\log۴}$$

$$=\frac{-\log۳}{۵\log۲+\log۳-۲}=\frac{-۰/۴۸}{۵\times۰/۳+۰/۴۸-۲}=۲۴$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to۰^-$، آن‌گاه

$$\sqrt{۱-\cos x}=\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=\sqrt{۲}|\sin\frac{x}{۲}|=-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}=\frac{(\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x})(\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x})}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

$$=\frac{۲+۳x-(۲-x)}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}=\frac{۴x}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{۴x}{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}$$

$$=\frac{۴}{-\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}=-۲$$

۸۱- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲,۲]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-۲,۲)$، توابع $y=[x]$ و $y=\sin\pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin\pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=۲$ و $x=-۲$ ناپیوسته است.

۸۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=۴$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(۴)=g(۴)\Rightarrow۸=۱۶+۴a+b\Rightarrow b=-۸-۴a\\ f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow۳=۸+a\Rightarrow a=-۵\Rightarrow b=۱۲\end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

$$g(x)=x^۲+ax+b\Rightarrow g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a$$

۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\le x<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$، تساوی $[\frac{x}{۴}]=۱$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2$$
$$=(((a-b)(a+b))^2)^2$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A=((a^2-b^2)^2)^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$a^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4=\sqrt{6}-2\,,\quad b^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4=\sqrt{6}+2$$
$$a^2b^2=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2\times(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2=\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\sqrt{\sqrt{6}+2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$$

بنابراین

$$A=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2=(\sqrt{6}-2-2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)^2$$
$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6+2-2\sqrt{12})$$

چون $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$، پس

$$A=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل مقابل در می‌آید:

$$(t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=2t\Rightarrow(\frac{t^4+1+t^2}{t^2})(t^2-1)=2t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4+t^2+1)(t^2-1)=2t^3$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^2)^3-1^3=2t^3\Rightarrow(t^3)^2-2t^3-1=0\qquad(*)$$

چون $\sqrt[3]{x}=t$، پس $x=t^3$، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^2-2x-1=0$، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-2)}{1}=2$.

۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-5=0$ هستند، پس $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_1+1+x_2+1)^3-3(x_1+1)(x_2+1)(x_1+1+x_2+1)}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{(x_1+x_2+2)^3-3(x_1+x_2+x_1x_2+1)(x_1+x_2+2)}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}$$
$$=\frac{(-1+2)^3-3(-1-5+1)(-1+2)}{(-1-5+1)^3}=\frac{1-3(-5)(1)}{(-5)^3}=-\frac{16}{125}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{1}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}=\frac{1}{(-1-5+1)^3}=-\frac{1}{125}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3+(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}=\frac{x_1^3+x_2^3}{125}$$

اکنون از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$، پس

$$S=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{125}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}=-\frac{16}{125}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3\times(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{5^3}\times\frac{x_2^3}{5^3}=\frac{(x_1x_2)^3}{5^3\times5^3}$$

چون $x_1x_2=-5$، پس $P=\frac{(-5)^3}{5^3\times5^3}$، یعنی $P=-\frac{1}{125}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{3\pi}{36}\cos^2\frac{6\pi}{36}\cos^2\frac{12\pi}{36}\cos^2\frac{24\pi}{36}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi}{12})=\frac{3}{8}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=\frac{3}{8}(\frac{2+\sqrt{3}}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

راه‌حل دوم عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=16(\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=16(\frac{\sin3x\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\sin3x\cos3x=\frac{1}{2}\sin6x$$

درنتیجه

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\sin6x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin6x\cos6x=\frac{1}{2}\sin12x$، پس

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin12x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin24x\cos24x}{\sin3x})^2$$
$$=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin48x}{\sin3x})^2=\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{3\pi}{36}}=\frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(\pi+\frac{\pi}{3})}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}\xrightarrow[2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha]{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{(-\sin\frac{\pi}{3})^2}{8(1-\cos\frac{2\pi}{12})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{8(1-\cos\frac{\pi}{6})}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{8(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{4(2-\sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2-\sqrt{3}$، یعنی $2+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{16(4-3)}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

راه‌حل سوم عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2\cos^2 3x)(2\cos^2 6x)(2\cos^2 12x)(2\cos^2 24x)$$
$$=(1+\cos6x)(1+\cos12x)(1+\cos24x)(1+\cos48x)$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=(1+\cos\frac{6\pi}{36})(1+\cos\frac{12\pi}{36})(1+\cos\frac{24\pi}{36})(1+\cos\frac{48\pi}{36})$$
$$=(1+\cos\frac{\pi}{6})(1+\cos\frac{\pi}{3})(1+\cos\frac{2\pi}{3})(1+\cos\frac{4\pi}{3})$$
$$=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin2\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin2\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan\alpha=\frac{3}{4}$، پس می‌توان نوشت

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. از طرف دیگر،

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{3}{4})}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{7}{25}$$

$$\cot2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$$

۶- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos^2x-\sin^2x\cos3x=1\Rightarrow1-\cos^2x+\sin^2x\cos3x=0$$

$$\sin^2x+\sin^2x\cos3x=0\Rightarrow\sin^2x(1+\cos3x)=0$$

$$\begin{cases}\sin^2x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos3x=-1\Rightarrow3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	0	1	2	3
$k\pi$	0	π	2π	$\cancel{3\pi}$
$\frac{(2k+1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\cancel{\frac{7\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر 0، $\frac{\pi}{3}$، π، $\frac{5\pi}{3}$ و 2π هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_۴(x^۲-x-۲)$ و $h(x)=\sqrt{x^۲-۱}+۱$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f ، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=۰$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x|x\in D_h, h(x)=۰\}$$

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^۲-x-۲>۰$ را حل کنیم:

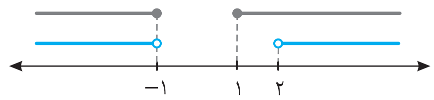
$$x^۲-x-۲>۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۲)(x+۱)>۰\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۲$$

پس $D_g=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^۲-۱\ge۰$ را حل کنیم:

$$x^۲-۱\ge۰\Rightarrow x^۲\ge۱\Rightarrow x\ge۱ \text{ یا } x\le-۱$$

پس $D_h=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=۰$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^۲-۱}+۱$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty))\cap((-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty))$$
$$=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$



راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(۳)=\frac{\log_۴(۹-۳-۲)}{\sqrt{۹-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۴}{\sqrt{۸}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(۲)=\frac{\log_۴(۴-۲-۲)}{\sqrt{۴-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۰}{\sqrt{۳}+۱}$$

چون $\log_۴ ۰$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$ ، پس $-\frac{۳}{۲}\le ۳x<\frac{۳}{۲}$. بنابراین

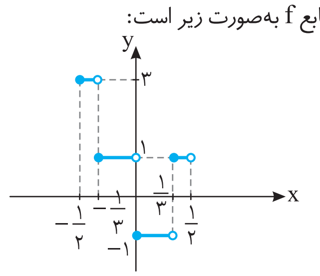
$$-\frac{۳}{۲}\le۳x<-۱\Rightarrow[۳x]=-۲, -\frac{۱}{۲}\le x<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|-۲|-۱=۳$$

$$-۱\le۳x<۰\Rightarrow[۳x]=-۱, -\frac{۱}{۳}\le x<۰\Rightarrow f(x)=۲|-۱|-۱=۱$$

$$۰\le۳x<۱\Rightarrow[۳x]=۰, ۰\le x<\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|۰|-۱=-۱$$

$$۱\le۳x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[۳x]=۱, \frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=۲|۱|-۱=۱$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $x\to۰^-$ ، آن‌گاه $۳x\to۰^-$ ، پس $[۳x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}(۲|[۳x]|-۱)=۲|-۱|-۱=۱$$

همچنین اگر $x\to۰^+$ ، آن‌گاه $۳x\to۰^+$ ، پس $[۳x]=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}(۲|[۳x]|-۱)=۲|۰|-۱=-۱$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}۲y=x^۲\\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\end{cases}$$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۲y$:

$$x^۲=(\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳})^۲\Rightarrow۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$۲y=۲y-۲\sqrt{y^۲-۹}\Rightarrow-۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y^۲-۹=۰\Rightarrow y=\pm۳$$

توجه کنید که چون $۲y=x^۲\ge۰$ ، پس فقط $y=۳$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}=\sqrt{۶}-\sqrt{۰}=\sqrt{۶}$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{۶},۳)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

راه‌حل دوم با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$ ، متوجه می‌شویم که $y\ge۳$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=۳$ ، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{۶}$ ، یعنی $(\sqrt{۶},۳)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$.

۱۰- گزینهٔ ۲ در صورت از ۳^x و در مخرج از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵)}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^x\times۳۶۴}{۲^{x-۲}\times۶۳}=۵۲$$

$$\frac{۳^{x-۲}\times۹\times۵۲\times۷}{۲^{x-۲}\times۹\times۷}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^{x-۲}}{۲^{x-۲}}=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{x-۲}=۱=(\frac{۳}{۲})^۰$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x در جهت مثبت معادل $\frac{\pi}{۲}$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y در جهت منفی معادل $\frac{۳}{۲}$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس

$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}\text{ واحد به راست}}y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$

چون که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$ ، پس

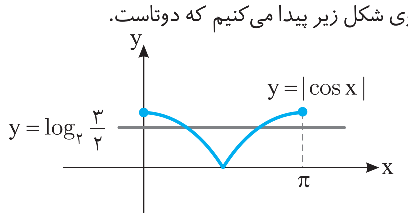
$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\frac{۳}{۲}\text{ واحد به پایین}}y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار

تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[0,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2}\Rightarrow |\cos x|=\log_2\frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\log_2 1<\log_2\frac{3}{2}<\log_2 2$، پس $0<\log_2\frac{3}{2}<1$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_2\frac{3}{2}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[0,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتاست.



۱۲- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\log_y x=\frac{1}{a}$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-2(\frac{1}{a})=1\xrightarrow{\times a}a^2-2=a\Rightarrow a^2-a-2=0$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+1)(a-2)=0\Rightarrow a=-1,\ a=2$$

چون $x,y>1$، پس $a=\log_x y>0$، در نتیجه فقط $a=2$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y=2\Rightarrow y=x^2$$

۱۳- گزینهٔ ۴ حالت مبهم $0\times\infty$ را داریم که برای رفع ابهام، عبارت $\sqrt{x}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و حد می‌گیریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$$

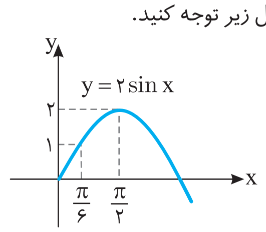
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)$$

$$=\sqrt{1+1}-\sqrt{0-0}=\sqrt{2}$$

۱۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر $x\to\frac{\pi}{6}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{1}{2}^-$ و در نتیجه $2\sin x\to 1^-$، پس $2\sin x-1\to 0^-$. بنابراین $[2\sin x-1]=-1$، یعنی

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=-1$$

راه‌حل دوم چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[2\sin x-1]=[2\sin x]-1$. اکنون به نمودار تابع $y=2\sin x$ در شکل زیر توجه کنید.



از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x\to\frac{\pi}{6}^-\Rightarrow 0<2\sin x<1\Rightarrow[2\sin x]=0$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}([2\sin x]-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(0-1)=-1$$

۱۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=2+\sqrt{x-1}\Rightarrow y-2=\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-2)^2=x-1\Rightarrow x=(y-2)^2+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(4)=f^{-1}(4-2)-3=f^{-1}(2)-3=(2-2)^2+1-3=-2$$

راه‌حل دوم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. بنابراین $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$. قرار می‌دهیم $g(4)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4)=f^{-1}(2)-3=a\Rightarrow f^{-1}(2)=a+3$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}f(a+3)=2$$

پس

$$2+\sqrt{a+3-1}=2\Rightarrow\sqrt{a+2}=0\Rightarrow a=-2$$

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & f(x)>0\\0 & f(x)=0\\-1 & f(x)<0\end{cases}$$

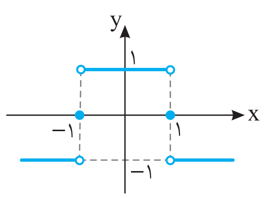
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\0 & x=\pm1\\-1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm1$ ناپیوسته است.



۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\geq ۴\\ \dfrac{-x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\leq ۴\,,\ x\neq \pm ۱\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\dfrac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱}=\dfrac{x^۴-۴x^۲}{x^۲-۱}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-(۲x)(x^۴-۴x^۲)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{۲x((x^۲-۱)^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ -g'(x) & -۲<x<۲\,,\ x\neq \pm ۱\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و −۲ مشـتق‌پذیر نیسـت، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=۰\Rightarrow g'(x)=۰\Rightarrow x=۰$$

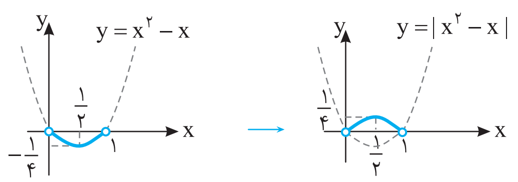
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، −۲ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq \pm ۱)$:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	۰	$-$		$+$	

۱۸- گزینهٔ ۳ اگـر مختصـات نقطـهٔ A واقـع بر سـهمی $f(x)=x^۲$ بـه‌صـورت $(x,x^۲)$ باشـد، مختصـات نقطـهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسـبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت $(x^۲,x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^۲)^۲+(x^۲-x)^۲}=\sqrt{۲(x^۲-x)^۲}=\sqrt{۲}|x^۲-x|$$

از طـرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمسـاز نواحی اول و سـوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ قرار دارد، پـس بایـد ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(۰,۱)$ پیـدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^۲-x|$ در بازهٔ $(۰,۱)$ از روش رسـم نمودار تابع اسـتفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشـترین مقدار AA' در بازهٔ $(۰,۱)$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دسـت می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{۲}\left|\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\right|=\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$$

توجـه کنیـد کـه $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^۲-۱}}=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$. پس بایـد مقـدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow g'(x)=(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}-۱}$$

$$=-\frac{۲}{۳}x(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{\sqrt{۸}})(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=-۸\sqrt{۲}$$

بـرای پیدا کـردن مقدار $f'(۲)$ ابتدا ضابطـهٔ تابع f را در یک همسـایگی نقطهٔ $x=۲$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x\to ۲\Rightarrow x^۲\to ۴\Rightarrow ۴<x^۲+\frac{۱}{۲}<۵\Rightarrow [x^۲+\frac{۱}{۲}]=۴$$

در نتیجه $f(x)=(۴x)^۲+۱=۱۶x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=(-۸\sqrt{۲})(۶۴)=۴(-۱۲۸\sqrt{۲})$

۲۰- گزینهٔ ۳ توجـه کنیـد کـه $g'(x)=۲ax+b$ و $g''(x)=۲a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^۲+bk+c=۲ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a\Rightarrow b=۲a-۲ak$$

اکنون از تساوی $b=۲a-۲ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

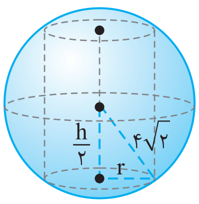
$$ak^۲+bk+a-b=۲a\Rightarrow ak^۲+(۲a-۲ak)k+a-(۲a-۲ak)=۲a$$

$$a(k^۲+۲k-۲k^۲+۱-۲+۲k)=۲a\xrightarrow{a\neq ۰}-k^۲+۴k-۱=۲$$

$$k^۲-۴k+۳=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-۱)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۱\,,\ k=۳$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۲۱- گزینهٔ ۲ شـکل مقابـل را ببینیـد.



مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=۲\pi rh$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$r^۲+(\frac{h}{۲})^۲=(۴\sqrt{۲})^۲\Rightarrow r^۲=۳۲-\frac{h^۲}{۴}$$

$$r=\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}}$$

$$S=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}}\times h=۲\pi\sqrt{\frac{(۱۲۸-h^۲)h^۲}{۴}}=\pi\sqrt{-h^۴+۱۲۸h^۲}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^۴+۱۲۸h^۲$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y=-h^۴+۱۲۸h^۲\Rightarrow y'=-۴h^۳+۲۵۶h$$

$$y'=۰\Rightarrow -۴h(h^۲-۶۴)=۰\Rightarrow h^۲=۶۴$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^۲=۶۴$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-۶۴^۲+۱۲۸\times ۶۴}=۶۴\pi$$

۲۲- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم A پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان اول قبول شود و B پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان دوم قبول شود. در این صورت $P(A)=P(B)=۰/۹$ و $P(A\cap B)=۰/۸۵$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۸۵}{۰/۹}=\frac{۸۵}{۹۰}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون a، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^۲-۴a(-c)=b^۲+۴ac>۰$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره جواب دارد. اکنون توجه کنید که چون مجموع جواب‌های هر معادله از حاصل‌ضرب آن‌ها دو واحد بیشتر است، پس

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a}-b=-c+۲a\Rightarrow c-b=۲a$$

چون $۲a$ عددی زوج است، پس b و c یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. همچنین چون $c-b=۲a>۰$، پس $c>b$. توجه کنید که در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$، اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). همین‌طور، در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$ عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که باز هم عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). با معلوم شدن b و c، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با $\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$

(توجه کنید که معادله‌های $ax^۲+bx-c=۰$ و $k(ax^۲+bx-c)=۰$ که $k\neq ۰$ متفاوت در نظر گرفته شده‌اند.)

۲۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** دانش‌آموزان باید یکی در میان بنشینند. ابتدا، مثلاً، چهار دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را دور میز گرد می‌نشانیم. این کار به $(۴-۱)!=۶$ طریق امکان‌پذیر است. اکنون چهار صندلی خالی بین آن‌ها داریم که چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به $۴!$ طریق می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۶\times ۴!=۱۴۴$.

راه‌حل دوم ابتدا فرض کنید این دانش‌آموزان بخواهند در یک ردیف کنار هم و به‌صورت یکی در میان بنشینند. در این صورت طبق تعمیم اصل ضرب، تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها برابر است با $۲\times ۴!\times ۴!$. اکنون اگر این دانش‌آموزان دور یک میز گرد قرار بگیرند، چون نفرات ابتدا و انتها برای آن‌ها معنی ندارد، پس تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها $\frac{۱}{۸}$ برابر حالت قبل خواهد بود. در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با $\frac{۱}{۸}\times ۲\times ۴!\times ۴!=۱۴۴$

۲۵- گزینهٔ ۱ تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت $\underset{\text{دهگان}}{\bigcirc}\ \underset{\text{یکان}}{\bigcirc}$ در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۵×۴ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه ○○○ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times۴\times۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times۴\times۳\times۲$ و $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	۵×۴×۳	۵×۴×۳×۲	۵×۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$

اکنون اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۴ بر ۴ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، فقط اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ بر ۴ بخش‌پذیرند. توجه کنید که یک عدد زمانی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۴ دو رقم سمت راست را اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ در نظر می‌گیریم، سپس تعداد انتخاب‌های جایگاه‌های دیگر را می‌شماریم. مثلاً برای به‌دست آوردن تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن ۱۲ است، باید تعداد انتخاب‌های دو جایگاه را به‌دست آوریم: ○○۱۲ برای جایگاه اول ۳ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. برای جایگاه دوم ۲ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ و رقمی را که برای جایگاه اول انتخاب شد، نمی‌توانیم انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن‌ها ۱۲ است، برابر ۳×۲ است. توضیح بالا در جدول زیر جمع‌بندی شده است:

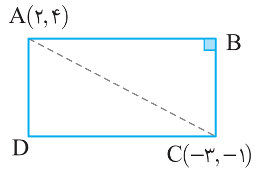
تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
شکل کلی عدد	۴	۱۲	○۱۲	○○۱۲	○○○۱۲
		۲۴	○۲۴	○○۲۴	○○○۲۴
		۳۲	○۳۲	○○۳۲	○○○۳۲
		۵۲	○۵۲	○○۵۲	○○○۵۲
تعداد عددها	۱	۴	۴×۳	۴×۳×۲	۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،

$$n(A)=۱+۴+۱۲+۲۴+۲۴=۶۵$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۵}{۳۲۵}=\frac{۱}{۵}$.

۲۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**



ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-4=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-2=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

از طرف دیگر، $AC=\sqrt{(2+3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{50}$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB^2+10=50\Rightarrow AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10}+2\sqrt{10})=6\sqrt{10}$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x-y-2=0$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC: x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\ x+3y+6=0\end{cases}\Rightarrow B(0,-2)$$

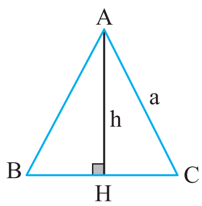
اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

در نتیجه $\text{محیط مستطیل}=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$

۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}a=h$، پس $a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$، در نتیجه $3a=\frac{3\times 2h}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}h$، یعنی $\text{محیط مثلث}=3a=2\sqrt{3}h$. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس



$$2\sqrt{3}h=\sqrt{270}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a-b-5|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{10}=15 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینهٔ معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3b-3=2-a\Rightarrow a=5-3b$$

بنابراین اگر در تساوی $(*)$ به‌جای a قرار دهیم $5-3b$، به‌دست می‌آید

$$|3(5-3b)-b-5|=15$$

$$|10-10b|=15\Rightarrow\begin{cases}10-10b=15\\ 10-10b=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{13}{2}\\ b=\frac{5}{2}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2},-\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ باشد.

۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y-3=0\\ x^2+y^2+2x-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم}}$$

$$2y-3-(2x-3)=0\Rightarrow 2y-2x=0\Rightarrow y=x$$

۲۹- گزینهٔ ۱ چون $EF\|BC$، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

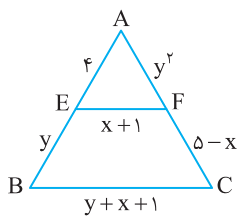
$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{4}{4+y}=\frac{x+1}{y+x+1}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{4}{y}=\frac{x+1}{y}$$

$$4=x+1\Rightarrow x=3$$

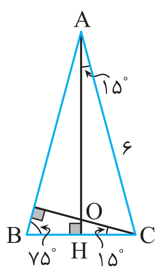
همچنین، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-3}\Rightarrow y^3=8\Rightarrow y=2$$

بنابراین $y-2x=2-6=-4$.



۳۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{C}B=A\hat{B}C=75^\circ$، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،



$$H\hat{A}C=90^\circ-75^\circ=15^\circ$$

$$\sin 15^\circ=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=6\sin 15^\circ$$

همین‌طور، چون $\hat{B}=75^\circ$، پس $O\hat{C}B=90^\circ-75^\circ=15^\circ$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC می‌توان نوشت

$$\tan 15^\circ=\frac{OH}{HC}\Rightarrow OH=HC\times\tan 15^\circ$$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 15^\circ=1-\sin^2 15^\circ=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

در نتیجه

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}}$$

صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در مزدوج $2+\sqrt3$، یعنی $2-\sqrt3$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tan 15^\circ=\sqrt{\frac{(2-\sqrt3)^2}{4-3}}=2-\sqrt3$$

بنابراین

$$HC=6\sin 15^\circ=6\times\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}=3\sqrt{2-\sqrt3}$$

$$OH=HC\times\tan 15^\circ=3\sqrt{2-\sqrt3}\times(2-\sqrt3)$$

در نتیجه

$$S_{OHC}=\frac12 HC\times OH=\frac12\times3\sqrt{2-\sqrt3}\times3\sqrt{2-\sqrt3}(2-\sqrt3)$$

$$=\frac92(2-\sqrt3)^2=\frac92(7-4\sqrt3)$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $7-4\sqrt3$، یعنی $7+4\sqrt3$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$S_{OHC}=\frac{9(49-48)}{2(7+4\sqrt3)}=\frac{9}{2(7+4\sqrt3)}$$

راه‌حل دوم مثلث‌های OHC و CHA به حالت (زز) متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{OH}{CH}$ است. از طرف دیگر، $\frac{OH}{CH}=\tan 15^\circ$. در راه‌حل اول، مقدار $\tan 15^\circ$ را برابر $2-\sqrt3$ به‌دست آوریم. پس

$$\frac{\text{مساحت }(OHC)}{\text{مساحت }(CHA)}=\left(\frac{OH}{CH}\right)^2=(2-\sqrt3)^2$$

اما مساحت مثلث CHA برابر است با

$$\text{مساحت }(CHA)=\frac{CH\times AH}{2}=\frac{6\sin 15^\circ\times 6\cos 15^\circ}{2}=9\sin 30^\circ=\frac92$$

بنابراین مساحت مثلث OHC برابر است با

$$\text{مساحت }(OHC)=\text{مساحت }(CHA)\times(2-\sqrt3)^2=\frac92(7-4\sqrt3)$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $7-4\sqrt3$، یعنی $7+4\sqrt3$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$\text{مساحت }(OHC)=\frac{9(49-48)}{2(7+4\sqrt3)}=\frac{9}{2(7+4\sqrt3)}$$

۳۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\left(a+\frac1a+\sqrt2\right)^2\left(a+\frac1a-\sqrt2\right)^2=\left(\left(a+\frac1a\right)^2-(\sqrt2)^2\right)^2$$

$$=\left(a^2+\frac1{a^2}+2-2\right)^2=\left(a^2+\frac1{a^2}\right)^2=a^4+\frac1{a^4}+2$$

اکنون توجه کنید که

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt3}\Rightarrow a^4=7-4\sqrt3$$

$$\frac1{a^4}=\frac1{7-4\sqrt3}\times\frac{7+4\sqrt3}{7+4\sqrt3}=\frac{7+4\sqrt3}{49-48}=7+4\sqrt3$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^4+\frac1{a^4}+2=(7-4\sqrt3)+(7+4\sqrt3)+2=16$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt3}=\sqrt[4]{(2-\sqrt3)^2}=\sqrt{2-\sqrt3}\Rightarrow a^2=2-\sqrt3$$

$$\frac1{a^2}=\frac1{2-\sqrt3}\times\frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3}=\frac{2+\sqrt3}{4-3}=2+\sqrt3$$

بنابراین

$$\left(a+\frac1a+\sqrt2\right)^2\left(a+\frac1a-\sqrt2\right)^2=\left(\left(a+\frac1a\right)^2-(\sqrt2)^2\right)^2=\left(a^2+\frac1{a^2}+2-2\right)^2$$

$$=\left(a^2+\frac1{a^2}\right)^2=(2-\sqrt3+2+\sqrt3)^2=16$$

۳۲- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد.

در این صورت

$$\begin{cases}x+y=100\\(x-10)(y+10)=475\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=100-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(100-y-10)(y+10)=475\Rightarrow(100-(y+10))(y+10)=475$$

$$100(y+10)-(y+10)^2=475\Rightarrow(y+10)^2-100(y+10)+475=0$$

اگر فرض کنیم $y+10=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^2-100A+475=0$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-5)(A-95)=0\begin{cases}A=5\Rightarrow y+10=5\Rightarrow y=-5\ \text{(غ.ق.ق)}\\A=95\Rightarrow y+10=95\Rightarrow y=85\ \text{تومان}\end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-4=0$ هستند، پس $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-4$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\left(x_1^3+\frac1{x_2}\right)+\left(x_2^3+\frac1{x_1}\right)=x_1^3+x_2^3+\frac1{x_1}+\frac1{x_2}$$

با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1-3(-4)(1)+\frac{1}{-4}=\frac{51}{4}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\left(x_1^3+\frac1{x_2}\right)\left(x_2^3+\frac1{x_1}\right)=x_1^3x_2^3+x_1^2+x_2^2+\frac1{x_1x_2}$$

$$=(x_1x_2)^3+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac1{x_1x_2}=(-4)^3+1-2(-4)+\frac1{-4}$$

$$=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2-51x-221=0$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\xrightarrow{\times x} x^3=x^2+4x=(x+4)+4x=5x+4$$

$$x=x^2-4 \Rightarrow x^2=x+4$$

بنابراین $x_1^3=5x_1+4$ و $x_2^3=5x_2+4$. از طرف دیگر،

$$x_1x_2=-4 \Rightarrow \frac{1}{x_1}=-\frac{x_2}{4},\quad \frac{1}{x_2}=-\frac{x_1}{4}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$S=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})+(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$

$$=\frac{19}{4}(x_1+x_2)+8=\frac{19}{4}(1)+8=\frac{51}{4}$$

$$P=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$

$$=(\frac{19}{4}x_1+4)(\frac{19}{4}x_2+4)=(\frac{19}{4})^2x_1x_2+19(x_1+x_2)+16=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-51x-221=0$$

۳۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{12})=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{2\pi}{12}\cos^2\frac{4\pi}{12}\cos^2\frac{8\pi}{12}\cos^2\frac{16\pi}{12}$$

$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\frac{4\pi}{3}$$

$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{3}{8}(\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{6}))=\frac{3}{16}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{32}$$
$$=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

راه‌حل دوم $f(x)=32(\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x)^2$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=32(\frac{\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$ ، پس

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2=32(\frac{\frac{1}{16}\sin 16x\cos 16x}{\sin x})^2$$

$$=32(\frac{\frac{1}{32}\sin 32x}{\sin x})^2=\frac{\sin^2 32x}{32\sin^2 x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{\sin^2\frac{32\pi}{12}}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(3\pi-\frac{4\pi}{12})}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{32\times\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{12})}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{16(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{3}{32(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{32(4-3)}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$. چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<0$ ، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4}-1|}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

۳۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$5\sin^2 x+2\cos 3x+2=0 \Rightarrow 5\sin^2 x+2(\cos 3x+1)=0$$

$$5\sin^2 x+2(2\cos^2\frac{3x}{2})=0 \Rightarrow 5\sin^2 x+4\cos^2\frac{3x}{2}=0$$

چون $5\sin^2 x$ و $4\cos^2\frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^2 x=0$ و $\cos^2\frac{3x}{2}=0$ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^2\frac{3x}{2}=0 \Rightarrow \cos\frac{3x}{2}=0 \Rightarrow \frac{3x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
$k\pi$	$\cancel{-2\pi}$	$-\pi$	0	π	$\cancel{2\pi}$
$(2k+1)\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\cancel{\frac{5\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۳۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** باید نامعادلهٔ $|x^۲-۲|-x>۰$ را حل کنیم:

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow|x^۲-۲|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^۲-۲|\ge ۰$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=۰$ در این نامعادله صدق می‌کنند: $x\in(-\infty,۰]$ (۱)

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^۲-۲|>x\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲>x\Rightarrow x^۲-x-۲=\underbrace{(x+۱)}_{+}(x-۲)>۰\\ x^۲-۲<-x\Rightarrow x^۲+x-۲=(x-۱)\underbrace{(x+۲)}_{+}<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-۲>۰\\ x-۱<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(۲,+\infty) & (۲)\\ x\in(۰,۱) & (۳)\end{cases}$$

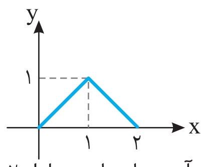
بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f=(-\infty,۰]\cup(۰,۱)\cup(۲,+\infty)=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

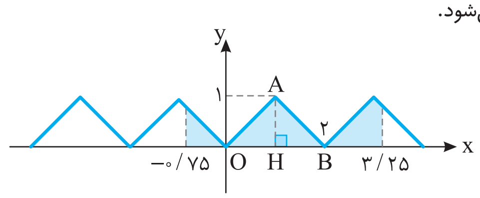
راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(۲)=\log_۴(|۴-۲|-۲)=\log_۴ ۰$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(۰)=\log_۴(|۰-۲|-۰)=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۳۸- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ $[۰,۲]$ رسم می‌کنیم:



چون f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است، پس نمودار آن در بازه‌هایی به‌طول ۲ تکرار می‌شود.



از روی این شکل معلوم است که مساحت مورد نظر دو برابر مساحت مثلث OAB است. بنابراین $S=۲S_{OAB}=۲(\frac{۱}{۲}AH\times OB)=۱\times۲=۲$

۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ با دامنهٔ $D_f=[-۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_۱,x_۲\ge-۳:x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow\sqrt{x_۱+۳}<\sqrt{x_۲+۳}$$

$$\sqrt{x_۱+۳}-۱<\sqrt{x_۲+۳}-۱\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-۱=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+۳=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=-۲$$

توجه کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=۱$ و عرض نقطهٔ M برابر است با $f(۱)=\sqrt{۱+۳}-۱=۲-۱=۱$

در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$.

۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=۶+۲(۰/۸\times۶+(۰/۸)^۲\times۶+\cdots+(۰/۸)^{۹۹}\times۶)$$

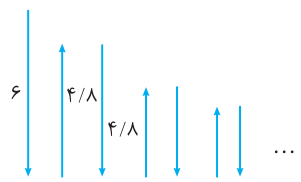
$$=۶+۲\times۶(۰/۸+(۰/۸)^۲+\cdots+(۰/۸)^{۹۹})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۰/۸$ و قدرنسبت $q=۰/۸$ است. بنابراین

$$S=۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{(۰/۸)^{۹۹}-۱}{۰/۸-۱}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $(۰/۸)^{۹۹}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین

$$S\simeq۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{۱}{۱-۰/۸}=۵۴\ \text{متر}$$



۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$ به‌دست می‌آید. برای یافتن طول نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$$

$$|x+۳|=-x-۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\\ -(x+۳)=-x-۲\quad\text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۴۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$۲\log_۹ a+\log_a\sqrt{۹}=۲\Rightarrow۲\log_{۳^۲}a+\log_a ۳=۲$$

$$۲\times(\frac{۱}{۲}\log_۳ a)+\log_a ۳=۲\Rightarrow\log_۳ a+\frac{۱}{\log_۳ a}=۲$$

دو طرف معادله را در $\log_۳ a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_۳ a)^۲+۱=۲\log_۳ a\Rightarrow(\log_۳ a)^۲-۲\log_۳ a+۱=۰$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_۳ a-۱)^۲=۰\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$2\log_x a+\log_a \sqrt{x}=2\Rightarrow \log_{x^{\frac{1}{2}}} a+\log_a\sqrt{x}=2$$

$$\log_{\sqrt{x}} a+\log_a\sqrt{x}=2\Rightarrow \log_{\sqrt{x}}a+\frac{1}{\log_{\sqrt{x}}a}=2$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم‌علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}} a>0$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=1 \xrightarrow{x=9} \log_{\sqrt{9}}a=1\Rightarrow\log_3 a=1\Rightarrow a=3^1=3$$

۴۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^2}-x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2|+|x|-x^2}{x}$$

اکنون توجه کنید که $|x^2|=x^2$ و چون $x\to-\infty$، پس $|x|=-x$.

بنابراین حد مورد نظر به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2|+|x|-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

۴۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون خط $x=2$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(4,0)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-0)(x-4)$ یا $y=ax(x-4)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(2,1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1=a\times2(2-4)\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)$. از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(0,1)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-1}{4-0}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}x(x-4)-\frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$
$$=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)}=\lim_{x\to4^-}\frac{x+1}{4}=\frac{5}{4}$$

راه‌حل دوم چون $f(4)=g(4)=0$، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=-\lim_{x\to4^-}\frac{(f(x)-f(4))+(g(x)-g(4))}{x-4}$$
$$=-(\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}+\lim_{x\to4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4})=-(f'_-(4)+g'_-(4))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(4)+g'(4))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)=-\frac{1}{4}x^2+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow f'(4)=-1$$

$$g'(4)=m=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-1-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow\sqrt{x}+1=y\sqrt{x}-y\Rightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-1$$

$$\sqrt{x}(1-y)=-(y+1)\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x)=2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{-2}{(x-1)^2})=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-1})'(2)=\frac{-4(2+1)}{(2-1)^3}=-12$$

۴۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(1)=0 & x>0\\ f(0)=0 & x=0\\ f(-1)=0 & x<0\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=0$. در نتیجه

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(0)=0$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $3-x^2$ روی بازهٔ $[-1/5,\sqrt{3}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1/5$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x^2$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

بنابراین $|3-x^2|=3-x^2$ و در نتیجه $f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

چون تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-1/5,\sqrt{3})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی آن در این بازه از حل معادلهٔ $f'(x)=0$ به‌دست می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2),\quad f'(x)=0\Rightarrow1-x^2=0\Rightarrow x=\pm1$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm 1)$، $f(-1/5)$ و $f(\sqrt{3})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(1)=2,\quad f(-1)=-2,\quad f(-1/5)=-\frac{9}{8},\quad f(\sqrt{3})=0$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-1)=-2$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۴۸- گزینهٔ ۲ اگر نقطهٔ A $(x,\sqrt[3]{-x})$، یعنی نقطهٔ $(x,-\sqrt[3]{x})$ باشد، آن‌گاه A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[3]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[3]{x})^2+(-\sqrt[3]{x}+x)^2}=\sqrt{2(x-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt{2}|x-\sqrt[3]{x}|$$

چون $x\in[0,1]$، پس $x\le\sqrt[3]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[0,1]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

چون $g(0)=g(1)=0$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}$، پس $\sqrt[3]{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-$، آن‌گاه $g(x)\to 2^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(2x)^3$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'_+\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)=g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'_+(2)$$

مقدار $g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-4\sqrt{5}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(2x)^3=8x^3\Rightarrow f'(x)=24x^2\Rightarrow f'_+(2)=96$$

پس

$$(fog)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=(-4\sqrt{5})\times 96=(-48\sqrt{5})(8)$$

یعنی $(fog)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ هشت برابر $-48\sqrt{5}$ است.

۵۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g'(x)=2ax+5$ و $g''(x)=2a$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le 2\\ g'(x) & x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\le 2\\ g''(x) & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(2)=g'(2)\Rightarrow 4a+10+b=4a+5\Rightarrow b=-5$$

$$g'(2)=g''(2)\Rightarrow 4a+5=2a\Rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{15}{2}$$

۵۱- گزینهٔ ۳ هر نقطه روی سهمی $y^2=4x$ به‌صورت $A\left(\frac{t^2}{4},t\right)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(3,0)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{\left(\frac{t^2}{4}-3\right)^2+(t-0)^2}=\sqrt{\frac{t^4}{16}-\frac{3}{2}t^2+9+t^2}$$

$$=\sqrt{\frac{t^4-8t^2+144}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(t^2-4)^2+128}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^2=4$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{4}\sqrt{128}=2\sqrt{2}$$

۵۲- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در اولین بارداری مادر متولد شده باشد و B پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در دومین بارداری مادر متولد شده باشد. در این صورت $P(A)=P(B)=0/7$ و $P(A\cap B)=0/6$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

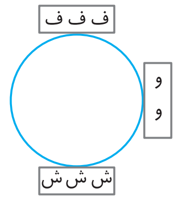
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/6}{0/7}=\frac{6}{7}$$

۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون a، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^2-4a(-c)=b^2+4ac>0$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد. اکنون توجه کنید که چون فاصلهٔ حاصل‌ضرب جواب‌های هر معادله با مجموع جواب‌های آن معادله دو واحد است، پس

$$\left|-\frac{c}{a}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=2\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a}|b-c|=2|a|=2a$$

چون $2a$ عددی زوج است، پس $b-c$ نیز زوج است، یعنی b و c یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. اکنون توجه کنید که در مجموعهٔ $\{1,2,\dots,9\}$، اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{4}{2}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و به دو حالت می‌توانیم یکی را b و دیگری را c بگیریم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب در این حالت برابر است با $2\times\binom{4}{2}=12$. همین‌طور، در مجموعهٔ $\{1,2,\dots,9\}$ عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $2\times\binom{5}{2}=20$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. با معلوم شدن b و c، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ برابر $12+20=32$ است. (توجه کنید که معادله‌های $ax^2+bx-c=0$ و $k(ax^2+bx-c)=0$ که $k\neq 0$ متفاوت در نظر گرفته شده‌اند.)

۵۴- گزینهٔ ۲ ۳ گروه بازیکنان فوتبال، بازیکنان والیبال و شناگران را داریم که می‌خواهند دور یک میز گرد قرار بگیرند، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $(۳-۱)!=۲!$. در گروه بازیکنان فوتبال، افراد را به $۳!$ طریق، در گروه بازیکنان والیبال، افراد را به $۲!$ طریق و در گروه شناگران افراد را به $۳!$ طریق می‌توان مرتب کرد.
بنابراین طبق تعمیم اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۲!۳!۲!۳!=۱۴۴$.



۵۵- گزینهٔ ۴ تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت ○ ○ (یکان دهگان) در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۵×۴ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه ○○○ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times۴\times۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times۴\times۳\times۲$ و $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	۵×۴×۳	۵×۴×۳×۲	۵×۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$

اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۳ بر ۳ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱ و ۲، ۱ و ۵، ۲ و ۴ یا ۴ و ۵ ساخته می‌شوند. توجه کنید یک عدد زمانی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین تعداد اعداد دورقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۳ برابر است با $۴\times۲!$. به همین ترتیب، تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S که بر ۳ بخش‌پذیرند، به‌دست می‌آید. مثلاً از میان اعداد چهاررقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخته می‌شوند و تعدادشان برابر است با $۴!$. توضیح بالا در جدول بعدی جمع‌بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
رقم‌های به‌کار رفته	۳	۱,۲	۱,۲,۳	۱,۲,۴,۵	۱,۲,۳,۴,۵
		۱,۵	۱,۳,۵		
		۲,۴	۲,۳,۴		
		۴,۵	۳,۴,۵		
تعداد عددها	۱	۴×۲!	۴×۳!	۴!	۵!

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،

$$n(A)=۱+۸+۲۴+۲۴+۱۲۰=۱۷۷$$

پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$.

۵۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر ۱− است، پس این خط از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

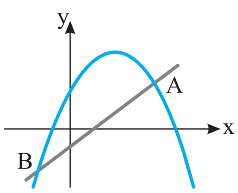
$$y-۰=\frac{۰+۱}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^۲+۲x+۱=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_A=۲, x_B=-۱$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-۱$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=۲-۱=۱$ و $y_B=-۱-۱=-۲$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(۲,۱)$ و $B(-۱,-۲)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $M(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۱-۲}{۲})$ ، یعنی $M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$. پس این فاصله $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.



۵۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر $m_{AM}=\frac{b-۲}{a-۳}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC\perp AM\Rightarrow m_{BC}\times m_{AM}=-۱$$

$$-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵}\xrightarrow{b=۲a-۴}\frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\ ۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و ۲− می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.

۵۸- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+2y=3$ نقطهٔ $(0,-1)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2-4(-3)}=2$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{3}{2}\times 2=3$. اگر مرکز این دایره نقطهٔ (α,β) باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=9$ است. چون نقطهٔ $(0,-3)$ روی این دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند، یعنی

$$(0-\alpha)^2+(-3-\beta)^2=9\Rightarrow\alpha^2+(3+\beta)^2=9 \qquad (1)$$

چون دایره‌ها مماس داخل (درون) هستند، پس فاصلهٔ مرکزهای آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌هایشان است، یعنی

$$\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta+1)^2}=3-2\Rightarrow\alpha^2+(\beta+1)^2=1 \qquad (2)$$

اکنون اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(3+\beta)^2-(\beta+1)^2=9-1\Rightarrow 9+\beta^2+6\beta-\beta^2-2\beta-1=8\Rightarrow\beta=0$$

از تساوی (۲) مقدار α را به‌دست می‌آوریم: $\alpha^2+(0+1)^2=1\Rightarrow\alpha=0$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+y^2=9$ است.

۵۹- گزینهٔ ۳ چون $CD\|EF$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های OCD و OFE متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{OC}{OF}=\frac{CD}{FE}=\frac{OD}{OE}\Rightarrow\frac{OC}{3}=\frac{y}{1}=\frac{4}{y}\Rightarrow y=2,\ OC=6$$

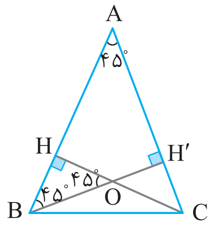
همین‌طور، چون $CD\|AB$، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، مثلث‌های OCD و OAB متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{4}{4+x}=\frac{y}{2x}\Rightarrow\frac{4}{4+x}=\frac{2}{2x}\Rightarrow 4x=4+x\Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

در نتیجه بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OAB می‌توان نوشت

$$CD\|AB\Rightarrow\frac{OC}{AC}=\frac{OD}{BD}\Rightarrow\frac{6}{AC}=\frac{4}{\frac{4}{3}}\Rightarrow AC=2$$

۶۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$$

از طرف دیگر،

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}CH\times AB\Rightarrow 16\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times CH\times 8\Rightarrow CH=\frac{16\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2}$$

اکنون اگر فرض کنیم $BH=x$، آن‌گاه $AH=8-x$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC

$$AH^2+CH^2=AC^2\Rightarrow(8-x)^2+32=64$$

$$(8-x)^2=32\xrightarrow{\sqrt{32}=4\sqrt{2}}8-x=4\sqrt{2}\Rightarrow x=8-4\sqrt{2}$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH'، چون $\hat{A}=45^\circ$، پس $A\hat{B}H'=45^\circ$. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH متساوی‌الساقین نیز هست. پس $OH=BH=8-4\sqrt{2}$. در نتیجه

$$S_{OBH}=\frac{1}{2}\times BH\times OH=\frac{1}{2}(8-4\sqrt{2})^2=8(2-\sqrt{2})^2=8(6-4\sqrt{2})$$

$$=16(3-2\sqrt{2})=\frac{16(9-8)}{3+2\sqrt{2}}=\frac{16}{3+2\sqrt{2}}$$

۶۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\geq 0$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^2-7t-5=0$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{7+\sqrt{69}}{2},\quad t=\frac{7-\sqrt{69}}{2}<0\ (\text{غ.ق.ق})$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_1x_2=-\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)^2=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

$$S=x_1+x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}=0$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$2P^2-3SP+2S=2P^2-0+0=2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{4}\right)=59+7\sqrt{69}$$

۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$$

$$=\log 10\times\log\frac{5}{2}=1\times\log\frac{5}{2}=\log_{10}\frac{5}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$$

$$\log_{10}(3x-2)=1\Rightarrow 3x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$$

۶۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\log_{21}1323=\log_{21}9\times 147=\log_{21}9+\log_{21}147$$

$$=2\log_{21}3+\log_{21}147$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{21}3)^2+\log_{21}147(2\log_{21}3+\log_{21}147)$$

$$=(\log_{21}3)^2+2\log_{21}3\log_{21}147+(\log_{21}147)^2$$

$$=(\log_{21}3+\log_{21}147)^2=(\log_{21}(3\times 147))^2=(\log_{21}441)^2$$

$$=(\log_{21}21^2)^2=(2\log_{21}21)^2=(2\times 1)^2=4$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{21}3=\log_{21}\frac{21}{7}=\log_{21}21-\log_{21}7=1-\log_{21}7$$

$$\log_{21}147=\log_{21}(21\times7)=\log_{21}21+\log_{21}7=1+\log_{21}7$$

$$\log_{21}1323=\log_{21}(21^2\times3)=2\log_{21}21+\log_{21}3=2+\log_{21}3$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(1-\log_{21}7)^2+(1+\log_{21}7)(2+\log_{21}3)$$
$$=1+(\log_{21}7)^2-2\log_{21}7+2+\log_{21}3$$
$$+2\log_{21}7+\log_{21}7\log_{21}3$$
$$=3+\log_{21}3+(\log_{21}7)(\log_{21}7+\log_{21}3)$$
$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7\log_{21}21$$
$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7=3+\log_{21}21=3+1=4$$

۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x>\frac{3}{2}$، آن‌گاه عبارت $2x-3$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)>0$$

از طرف دیگر،

$$A=x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{3}{2}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		۴		$+\infty$
A			$-$	۰	$+$	

چون علامت A روی بازهٔ (۲,۴) منفی است و این بازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(\frac{3}{2},2)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=2$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^2-1)4-8m+4=0\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\m=0\end{cases}$$

اگر $m=2$، آن‌گاه

$$B=(3x^2-8x+4)=(3x-2)(x-2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ (۲,۴) مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=0$، آن‌گاه

$$B=-x^2+4=-(x-2)(x+2)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ (۲,۴) منفی است و قابل قبول است.

۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

۶۶- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)(1+\cos8\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}{\sin\alpha})^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$(\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha\Rightarrow(\frac{1}{8}\sin8\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1-\cos16\alpha}{2}=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$
$$\cos16\alpha=\cos2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}16\alpha=2k\pi+2\alpha\\16\alpha=2k\pi-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k\pi}{7}\\\alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۶۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $P(x)=ax^2+bx+c$. در این صورت $P'(x)=2ax+b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$
$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases} 2a+\frac{b}{2}=b \Rightarrow b=4a \\ c=b-2 \Rightarrow c=4a-2\end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ است که مجموع ضرایب آن برابر است با $a+4a+4a-2=9a-2$
واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

۶۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1 \Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1 \Rightarrow \frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$

$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow \frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow \frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۶۹- گزینهٔ ۱ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases} 2^k & n=3k \\ -2k+4 & n=3k+1 \\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases} a_0=2^0=1 \\ a_1=-2\times0+4=4 \\ a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases} a_3=2^1=2 \\ a_4=-2\times1+4=2 \\ a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases} a_6=2^2=4 \\ a_7=-2\times2+4=0 \\ a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر ۲- است.

۷۰- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2 x\le1\Rightarrow 0\le 9\cos^2 x\le 9\Rightarrow -1\le 9\cos^2 x-1\le 8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}\le2\Rightarrow -1\le t\le 2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم.
توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le 2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)$$

$$-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$.

۷۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow 6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow (t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow 0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $0\le\sqrt{|x|}$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow -9<x<9$$

راه‌حل دوم واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد ۴- فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۷۲- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{4-(x-(k-2))}+k=\sqrt{k+2-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{k+2-a}+k=1$$

$$\sqrt{k+2-a}=1-k\xrightarrow{1-k\ge0}a=k+2-(1-k)^2$$

$$f^{-1}(a)=1\Rightarrow f(1)=a\Rightarrow\sqrt{k+2-1}+k=a\xrightarrow{k\ge-1}a=\sqrt{k+1}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1\le k\le 1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2-(1-k)^2=\sqrt{k+1}+k\Rightarrow 1+2k-k^2=\sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k-k^2\ge 0$، یعنی $1-\sqrt{2}\le k\le 1+\sqrt{2}$، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4-4k^3+2k^2+3k=0\Rightarrow k(k^3-4k^2+2k+3)=0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=3\\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

چون $-1\le k\le 1$ و $1-\sqrt{2}\le k\le 1+\sqrt{2}$، پس $1-\sqrt{2}\le k\le 1$، پس فقط $k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{2-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-1$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow\sqrt{2-x}=1\Rightarrow x=1$$

۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

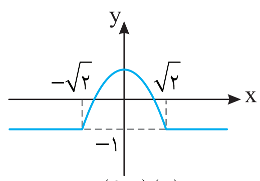
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

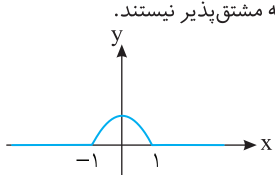
$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.



$y=(fog)(x)$

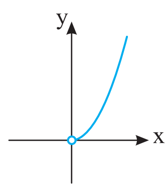


$y=(gof)(x)$

۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=9^{\log_3 x}=(3^2)^{\log_3 x}=(3^{\log_3 x})^2=x^2$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(0,+\infty)$ است. پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که توابع $y=\frac{3}{x^2}$ و $y=\frac{-2}{x^2}$ روی بازهٔ $(-\infty,0)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{1}{2})^-$، آن‌گاه

$$\frac{3}{x^2}\to 12^-,\quad \frac{-2}{x^2}\to(-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{1}{2}$، توابع $y=[\frac{3}{x^2}]$ و $y=[\frac{-2}{x^2}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=11$ و $y=-8$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=-\infty$$

۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(0,+\infty)-\{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=2-(+\infty)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=2-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

۷۷- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[0,2)$ است که برابر ۲ است.

۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow y=-2-3+12+1=8\\ x=2\Rightarrow y=16-12-24+1=-19\end{cases}$$

پس نقاط $A(-۱,۸)$ و $B(۲,-۱۹)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{-۱۹-۸}{۲-(-۱)}=-۹$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-۹$ برقرار است.

$$f'(a)=۶(a+۱)(a-۲)=-۹\Rightarrow ۲a^۲-۲a-۴=-۳\Rightarrow ۲a^۲-۲a-۱=۰$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=۱\Rightarrow \frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱$$

$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b\Rightarrow \log_c (ab)=\log_c a\times\log_c b$$

۸۰- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_۲(۴^x+۱۵)=x+۳\Rightarrow ۴^x+۱۵=۲^{x+۳}$$

$$(۲^x)^۲-۸\times۲^x+۱۵=۰\Rightarrow(۲^x-۵)(۲^x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲^x-۵=۰\Rightarrow ۲^x=۵\Rightarrow x=\log_۲ ۵\\ ۲^x-۳=۰\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲ ۳\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_۲ ۵+\log_۲ ۳=\log_۲ ۵\times۳=\log_۲ ۱۵$$

۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید برای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^۲+۶x-۸\ge۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸\le۰\Rightarrow(x-۲)(x-۴)\le۰$$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$(x-۲)(x-۴)$		+	۰	−	۰	+	

$۲\le x\le۴ \quad (I)$

$$-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰\ge۰\Rightarrow x^۳-۴x^۲-۲۵x+۱۰۰\le۰$$

$$(x^۳-۲۵x)-(۴x^۲-۱۰۰)\le۰\Rightarrow x(x^۲-۲۵)-۴(x^۲-۲۵)\le۰$$

$$(x^۲-۲۵)(x-۴)\le۰\Rightarrow(x-۵)(x+۵)(x-۴)\le۰$$

x	$-\infty$		-۵		۴		۵		$+\infty$
$(x-۵)(x+۵)(x-۴)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

$x\le-۵$ یا $۴\le x\le۵ \quad (II)$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به‌ازای $x=۴$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=۴$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}=x+۲$$

$$\sqrt{۴+۰}+\sqrt{۱۶+۰}=۴+۲\Rightarrow ۲+۴=۴+۲$$

پس $x=۴$ تنها جواب معادله است.

۸۲- گزینهٔ ۲و۳ ابتدا توجه کنید که

$$x-۳\sqrt{x}+۲=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\frac{۲x-۳}{x-۳\sqrt{x}+۲}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
A				−	∥	+	۰	−	∥	+	

اکنون فرض کنید $B=(m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴$، می‌خواهیم مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge۰$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد و ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge۰$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{۳}{۲}$ و ۴ باشند، بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=۱$ ریشهٔ B است.

$$m^۲-۱-۴m+۴=۰\Rightarrow m^۲-۴m+۳=۰\Rightarrow m=۳\,,\,m=۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$B=۸x^۲-۱۲x+۴=۴(x-۱)(۲x-۱)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	۰	+	∥	+	۰	−	∥	+	

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge۰$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x=\frac{۳}{۲}$ ریشهٔ B است.

$$(m^۲-۱)\frac{۹}{۴}-۴(\frac{۳}{۲})m+۴=۰\Rightarrow ۹m^۲-۹-۲۴m+۱۶=۰$$

$$۹m^۲-۲۴m+۷=۰\Rightarrow(۳m-۱)(۳m-۷)=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}\,,\,m=\frac{۷}{۳}$$

اگر $m=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{۸}{۹}x^۲-\frac{۴}{۳}x+۴=(۲x-۳)(-\frac{۴}{۹}x-\frac{۴}{۳})$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	∥	+	۰	+	∥	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge۰$ بازهٔ $(۱,۴)$ است.

اگر $m=\frac{۷}{۳}$، آن‌گاه

$$B=\frac{۴۰}{۹}x^۲-\frac{۲۸}{۳}x+۴=\frac{۴}{۹}(۵x-۳)(۲x-۳)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۵}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB				−	۰	+	∥	−	۰	−	∥	+	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\ge۰$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x=4$ ریشهٔ B است.

$$16(m^2-1)-16m+4=0 \Rightarrow 4m^2-4m-3=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}, m=\frac{3}{2}$$

اگر $m=-\frac{1}{2}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{3}{4}x^2+2x+4=(x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	//////	//////		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $(1,\frac{3}{2}]$ است.

اگر $m=\frac{3}{2}$، آن‌گاه

$$B=\frac{5}{4}x^2-6x+4=(x-4)(\frac{5}{4}x-1)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{5}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	//////	//////		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m=1$ یا $m=-1$، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m=1$، آن‌گاه $B=-4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	//////	//////		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $[\frac{3}{2},4)$ است.

اگر $m=-1$، آن‌گاه $B=4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	//////	//////		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{1}{3}$، $m=-\frac{1}{2}$ و $m=1$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه است.

۸۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{4\times\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}+\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

گزینهٔ (۲) $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۳) $2\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

گزینهٔ (۴) $2\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۸۴- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\frac{\alpha}{2})(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha)^2=1$$

واضح است که $\alpha=2k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=1$$

$$(4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{1-\cos 8\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos 8\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\\ 8\alpha=2k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2k\pi}{7}\\ \alpha=\frac{2k\pi}{9}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq 2k\pi$)

$$0<\frac{2k\pi}{7}<2\pi\Rightarrow 0<k<7\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$0<\frac{2k\pi}{9}<2\pi\Rightarrow 0<k<9\Rightarrow k\in\{1,2,\ldots,8\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2+1=3\Rightarrow a_2=\frac{2\times2-1}{2\times2-3}$$

$$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow a_3=\frac{2\times3-1}{2\times3-3}$$

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\Rightarrow a_4=\frac{2\times4-1}{2\times4-3}$$

$$a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}\Rightarrow a_5=\frac{2\times5-1}{2\times5-3}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{99}=\frac{2\times99-1}{2\times99-3}=\frac{197}{195},\quad a_{100}=\frac{2\times100-1}{2\times100-3}=\frac{199}{197}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_1a_2\cdots a_{100}=(-1)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{9}{7}\right)\cdots\left(\frac{197}{195}\right)\left(\frac{199}{197}\right)=-199$$

۸۶- گزینهٔ ۲ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\ -2k+4 & n=3k+1\\ \left[\frac{n}{k+2}\right]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times0+4=4\\ a_2=\left[\frac{3\times0+2}{0+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times1+4=2\\ a_5=\left[\frac{3\times1+2}{1+2}\right]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times2+4=0\\ a_8=\left[\frac{3\times2+2}{2+2}\right]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28}=-2\times9+4=-14,\quad a_{29}=\left[\frac{29}{9+2}\right]-2=2-2=0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با

$$\frac{-14+0}{2}=-7$$

۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$0\le\sin^2x\le1\Rightarrow0\le5\sin^2x\le5\Rightarrow-1\le5\sin^2x-1\le4$$

$$0\le\sqrt{5\sin^2x-1}\le2\Rightarrow-2\le-\sqrt{5\sin^2x-1}\le0$$

$$2^{-2}\le2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le2^0\Rightarrow\frac{1}{4}\le f(x)\le1$$

بنابراین $R_f=[\frac{1}{4},1]$. در نتیجه

$$a=\frac{1}{4},\ b=1\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}$$

۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2 t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}-1=\log_2 t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2 t-1=\log_2 3\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2 t-1=\log_2 5\Rightarrow\log_2 t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\ge0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3,\ u=-2\ (\text{غ.ق.ق})\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2,\ u=-1\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow[x]=4\Rightarrow4\le x<5$$

$$\sqrt{[x]}=3\Rightarrow[x]=9\Rightarrow9\le x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

۸۹- گزینهٔ ۳ تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1}+3}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

۹۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

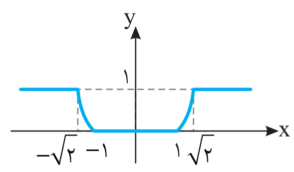
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2}\le x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\le x\le 1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\le\sqrt{2}\\ 0-(-1) & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\ge\sqrt{2}\\ x^2-1 & -\sqrt{2}\le x<-1\ \text{یا}\ 1<x\le\sqrt{2}\\ 0 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۹۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to(-\frac{1}{2})^+$، آن‌گاه $\frac{-2}{x^2}\to(-8)^-$ و $\frac{3}{x^2}\to 12^+$. بنابراین $[-\frac{2}{x^2}]=-9$ و $[\frac{3}{x^2}]=12$. پس حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۹۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=3\sqrt[3]{x}+|x|=\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+x & x\ge 0\\ 3\sqrt[3]{x}-x & x\le 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1 & x>0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1 & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1=0\ (\text{غ.ق.ق})\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است.

۹۳- گزینهٔ ۳ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-2)-2x(x^4-3)}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{2x^5-8x^3+6x}{(x^2-2)^2}=\frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-2)^2}=\frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-2,-\sqrt{3})$، $(-1,0)$، $(1,\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{3}$، -1، 0، 1 و $\sqrt{3}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^{۲}}$$

$$=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}\times(۱+\sqrt{۷})^{۲}}=\sqrt[۴]{\frac{۱+۷+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{\frac{۸+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}}$$

$$=\sqrt[۴]{\frac{۲(۴+\sqrt{۷})}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{۲}$$

۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $a_n=An+B$، در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\ a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵A+B=۸\\ ۱۰A+B=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{۳}{۵}\\ B=۱۱\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱\Rightarrow a_{۱۶}=-\frac{۳}{۵}\times۱۶+۱۱=۱/۴$

راه‌حل دوم فرض کنید جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases}a_۵=۸\\ a_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+۴d=۸\\ a_۱+۹d=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-\frac{۳}{۵}\\ a_۱=\frac{۵۲}{۵}\end{cases}$$

بنابراین $a_{۱۶}=a_۱+۱۵d=\frac{۵۲}{۵}+۱۵(-\frac{۳}{۵})=\frac{۷}{۵}=۱/۴$

۳- گزینهٔ ۱ باید $a>۰$، $\Delta>۰$، $\frac{c}{a}\ge۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$.

$$a>۰,\quad \frac{c}{a}\ge۰\Rightarrow\frac{۰}{a}\ge۰\ ✓$$

$$\Delta>۰\Rightarrow(۳+۲a)^{۲}>۰\Rightarrow a\neq-\frac{۳}{۲}$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{۳+۲a}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}۳+۲a<۰\Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a>۰$ و $a<-\frac{۳}{۲}$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادلهٔ $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\ge۰$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۲		$+\infty$
$\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$		$-$		$+$	۰	$-$	

بنابراین $-\frac{۱}{۳}<x\le۲$. اکنون توجه کنید که $-۱<۳x\le۶$. پس $[۳x]$ می‌تواند عددهای ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد که تعداد آن‌ها هشت تاست.

۵- گزینهٔ ۳ چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$$f(x)=b-۳ax\Rightarrow-۳a=۰\Rightarrow a=۰\Rightarrow f(x)=b$$

$$g(x)=c-(۳b-۳)x\Rightarrow-(۳b-۳)=۰\Rightarrow b=۱\Rightarrow g(x)=c$$

از طرف دیگر،

$$(f+g)(x)=۵\Rightarrow f(x)+g(x)=۵\Rightarrow b+c=۵\Rightarrow۱+c=۵\Rightarrow c=۴$$

بنابراین $bc=۴$.

۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^{۲}=-x^{۲}+۴$$

بنابراین

$$f(x)=g(x)\Rightarrow۴x-x^{۲}=-x^{۲}+۴\Rightarrow۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

در نتیجه عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $f(۱)=۴\times۱-۱^{۲}=۳$. پس نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $(۱,۳)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{۱^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۱۰}$$

۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=\frac{a}{۳},\quad x_۱x_۲=\frac{۴}{۳},\quad x_۱=۳x_۲$$

بنابراین $x_۱x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow(۳x_۲)x_۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow x_۲^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x_۲=\pm\frac{۲}{۳}$

اگر $x_۲=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه

$$x_۱=۳x_۲=۳(\frac{۲}{۳})=۲\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۸$$

اگر $x_۲=-\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه

$$x_۱=۳x_۲=۳(-\frac{۲}{۳})=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow-\frac{۸}{۳}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=-۸$$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر ۱۶ است.

۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

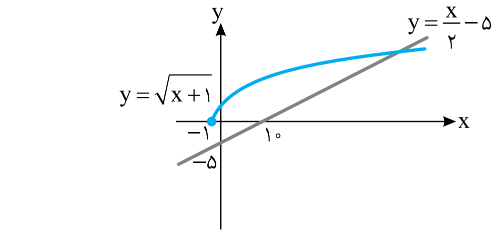
$$\frac{\sqrt{x+۱}(۳-\sqrt{x-۱})-\sqrt{x+۱}(\sqrt{x-۱}+۳)}{(\sqrt{x-۱}+۳)(۳-\sqrt{x-۱})}=\frac{(\sqrt{x-۱})^{۲}}{\sqrt{x-۱}}$$

$$\frac{۳\sqrt{x+۱}-\sqrt{x^{۲}-۱}-\sqrt{x^{۲}-۱}-۳\sqrt{x+۱}}{۹-(x-۱)}=\sqrt{x-۱}$$

$$\frac{-۲\sqrt{x^{۲}-۱}}{۱۰-x}=\sqrt{x-۱}\Rightarrow-۲\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x+۱}=(۱۰-x)\sqrt{x-۱}$$

$$-۲\sqrt{x+۱}=۱۰-x\ (\text{توجه کنید } \sqrt{x-۱}\neq۰)\Rightarrow\sqrt{x+۱}=\frac{x}{۲}-۵$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۹- گزینهٔ ۲ گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(-۱,-۲)\Rightarrow(-۲,-۱): -۱\neq(-۲)^۳-(-۲)+۱$

گزینهٔ (۲): $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})\Rightarrow(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸}): \frac{۵}{۸}=(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینهٔ (۲) است. لازم نیست بقیهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)$.

بنابراین

$$g(۲x)=۵x^۲+۱۱\xrightarrow{x\to\frac{x}{۲}}g(x)=۵(\frac{x}{۲})^۲+۱۱$$

$$g(x-۷)=۵(\frac{x-۷}{۲})^۲+۱۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=g(x-۷)$ برابر ۱۱ است.

۱۱- گزینهٔ ۱ باید $-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow -۳<k<۳$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow-\frac{\pi}{۴}<-x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)>۰\Rightarrow\frac{۱-m}{۲+m}>۰$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{۱-m}{۲+m}$		−	‖	+	۰	−	

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m بازهٔ $(-۲,۱)$ است.

۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲x)+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$$

$$۲-\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\cos^۲x=۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$

۱۴- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین

$$c=\frac{\text{ماکزیمم}+\text{مینیمم}}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۸\cos x-\tan^۲x=۱\Rightarrow ۸\cos x=۱+\tan^۲x\Rightarrow ۸\cos x=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

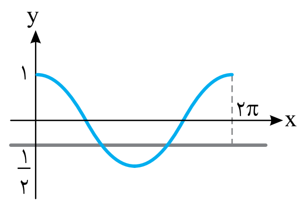
$$۸\cos^۳x=۱\Rightarrow\cos^۳x=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

k	-۱	صفر	۱
$۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}$
$۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ هستند و بقیهٔ جواب‌ها خارج از این بازه هستند. بنابراین معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر دوتاست.



۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۸ ۱۸=m\Rightarrow\log_{۲^۳}۱۸=\frac{۱}{۳}\log_۲ ۱۸=m\Rightarrow\log_۲ ۱۸=۳m$$

$$\log_۲(۲\times۹)=۳m\Rightarrow\log_۲ ۲+\log_۲ ۳^۲=۳m\Rightarrow ۱+۲\log_۲ ۳=۳m$$

$$\log_۲ ۳=\frac{۳m-۱}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\log_۴ ۱۲=\log_۴(۳\times۴)=\log_۴ ۳+\log_۴ ۴=\log_{۲^۲}۳+۱$$

$$=\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳+۱=\frac{۱}{۲}(\frac{۳m-۱}{۲})+۱=\frac{۳m-۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۱۷- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^۰=۰\Rightarrow a+b=۰\quad(۱)$$

همچنین

$$f^{-۱}(-۱)=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۱\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{-۱}=-۱\Rightarrow a+۲b=-۱\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

بنابراین $a-b=2$.

۱۸- گزینهٔ ۴ اگر $x_1, \dots, x_9$ داده‌ها باشند و $\bar{x}$ میانگین آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_1-\bar{x})^2=(x_2-\bar{x})^2=\cdots=(x_8-\bar{x})^2=(+1 \text{ یا } -1)^2=1$$

و $(x_9-\bar{x})^2=0$. بنابراین

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_8-\bar{x})^2+(x_9-\bar{x})^2}{9}=\frac{8\times 1+0}{9}=\frac{8}{9}$$

در نتیجه $\sigma=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

۱۹- گزینهٔ ۱ میانگین و میانهٔ داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد. در این‌صورت میانگین و میانهٔ داده‌های جدید برابر $a+2$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.

۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x \to 2^+$، آن‌گاه $x^3 \to 8^+$، پس $[x^3]=8$. بنابراین

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{3x}=\frac{1}{3}$$

۲۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to 1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to 1^+}3g(x)=6$$

بنابراین $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\frac{6}{3}=2$، یعنی

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

چون $\lim_{x\to 1^+}|x-1|=0$، پس $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{ax^2+bx+c}=0$، یعنی $x=1$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است. از طرف دیگر، $x=1$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت زیر رادیکال باشد چون در غیر این صورت درجهٔ $x-1$ در صورت از درجهٔ $x-1$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به‌صورت $\sqrt{a(x-1)^2}$ باشد. پس

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a}\,|x-1|}{|x-1|}=2 \Rightarrow \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2|x-1|}{|x-1|}=2$$

۲۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0+1}{0+9}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

۲۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که شیب خط $4y-3x=n$ برابر با $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$f'(1)=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1+6+3m-1}{16}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2+m}{4}=1 \Rightarrow m=2$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+3} \Rightarrow f(1)=\frac{1+2+1}{1+3}=1$$

چون نقطهٔ $(1, f(1))$، یعنی $(1,1)$ روی خط $4y-3x=n$ نیز قرار دارد، پس $4\times 1-3\times 1=n \Rightarrow n=1$. بنابراین $m+n=2+1=3$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2+mx+1}{x+3}=\frac{3x+n}{4} \Rightarrow 4(x^2+mx+1)=(x+3)(3x+n)$$

$$4x^2+4mx+4=3x^2+nx+9x+3n$$

$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $(x-1)^2$ است. بنابراین

$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 4m-n-9=-2 \\ 4-3n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$$

پس $m+n=2+1=3$.

۲۴- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(0,4)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع است، پس

$$f(0)=4 \Rightarrow c=4 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(0)=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4$$

اگر طول نقطهٔ تماس نمودار با محور طول‌ها برابر x_0 باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^3+ax_0^2+4=0 & (1) \\ 3x_0^2+2ax_0=0 & (2) \end{cases}$$

از تساوی (۲) به‌دست می‌آید

$$x_0(3x_0+2a)=0 \Rightarrow x_0=0 \text{ یا } x_0=-\frac{2a}{3}$$

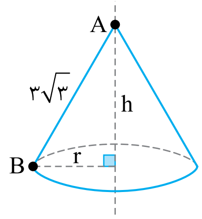
نقطهٔ با طول صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر $-\frac{2a}{3}$ است. اکنون از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+4=0$$

$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27}=-4 \Rightarrow a^3=-27 \Rightarrow a=-3$$

بنابراین $x_0=-\frac{2(-3)}{3}=2$.

۲۵- گزینهٔ ۲ اگر شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^۲+h^۲=AB^۲=(۳\sqrt{۳})^۲=۲۷$$

پس $r^۲=۲۷-h^۲$. از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}(۲۷-h^۲)h=-\frac{\pi}{۳}h^۳+۹\pi h\Rightarrow V'=-\pi h^۲+۹\pi$$

$$V'=۰\Rightarrow -\pi h^۲+۹\pi=۰\Rightarrow h^۲=۹\Rightarrow h=-۳\ (\text{غ.ق.ق})\ ,\ h=۳$$

۲۶- گزینهٔ ۳ شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ‌کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این‌صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۴}=۱$ طریق ممکن است.

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب باقی‌مانده دو تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۲}=۶$ طریق ممکن است.

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۴}{۳}=۴$ طریق ممکن است.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با

$$۱+۶+۴+۴=۱۵$$

۲۷- گزینهٔ ۲ اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه $P(A)=۰/۸$ و $P(B|A)=۰/۵$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=۰/۰۸\times۰/۵=۰/۰۴$$

۲۸- گزینهٔ ۱ نقطهٔ B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases}y+۲x=۷\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲y-۴x=-۱۴\\ ۲y-۷x=-۱۹\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}-۱۱x=-۳۳$$

$$x=۳\Rightarrow y=۱$$

پس باید فاصلهٔ نقطهٔ $B(۳,۱)$ را از خط $۴y-۳x-۱۷=۰$ به‌دست آوریم که برابر است با

$$BH=\frac{|۴\times۱-۳\times۳-۱۷|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۲۲}{۵}=۴/۴$$

۲۹- گزینهٔ ۴ چون $DE\|BC$، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{۵+۷}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۳۰- گزینهٔ ۲ چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $۲b=۱۸$، یعنی $b=۹$. همچنین $c=۱۲$. بنابراین

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow a=۱۵$$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۱۲}{۱۵}=۰/۸$$

۳۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$A=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$A^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$=۶-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$

$$=۶-۲\sqrt{۹-۵}=۶-۲\sqrt{۴}=۶-۲\times۲=۲$$

توجه کنید که چون $\sqrt{۳-\sqrt{۵}}<\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$، پس A عددی منفی است. در نتیجه $A=-\sqrt{۲}$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times(-\sqrt{۲})=-۱$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲}\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۲}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}-\sqrt{(۱+\sqrt{۵})^۲}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(|۱-\sqrt{۵}|-|۱+\sqrt{۵}|\right)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱-۱-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$$

۳۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $a_n=An^۲+Bn+C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases}A=-\frac{۱}{۷۰}a_۵=-\frac{۱}{۵}\\ a_۵=۱۴\\ a_۷=۱۷/۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{۱}{۵}\times۵^۲+۵B+C=۱۴\\ -\frac{۱}{۵}\times۷^۲+۷B+C=۱۷/۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}۵B+C=۱۹\\ ۷B+C=۲۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=۴\\ C=-۱\end{cases}$$

بنابراین

$$a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+۴n-۱\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۵}=-\frac{۱}{۵}\times۱۵^۲+۴\times۱۵-۱=۱۴\\ a_۱=-\frac{۱}{۵}\times۱^۲+۴\times۱-۱=\frac{۱۴}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=۵$، پس $a_{۱۵}$ پنج برابر $a_۱$ است.

۳۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=-ax^2+ax+2$ برابر است با

$$-\frac{a}{2(-a)}=\frac{1}{2}$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f(\frac{1}{2})=-a(\frac{1}{2})^2+a(\frac{1}{2})+2=-\frac{a}{4}+\frac{a}{2}+2=\frac{a+8}{4}$$

طول رأس سهمی $g(x)=2bx^2-bx-1$ برابر است با $-\frac{-b}{2(2b)}=\frac{1}{4}$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$g(\frac{1}{4})=2b(\frac{1}{4})^2-b(\frac{1}{4})-1=\frac{-b-8}{8}$$

اکنون توجه کنید که نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{a+8}{4})$ روی سهمی g است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+8}{4}=2b(\frac{1}{2})^2-b(\frac{1}{2})-1=\frac{b}{2}-\frac{b}{2}-1=-1\Rightarrow a+8=-4\Rightarrow a=-12$$

بنابراین $f(x)=12x^2-12x+2$. چون نقطهٔ $(\frac{1}{4},\frac{-b-8}{8})$ روی این سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-8}{8}=12(\frac{1}{4})^2-12(\frac{1}{4})+2=\frac{3}{4}-3+2=-\frac{1}{4}\Rightarrow b=-6$$

بنابراین $b-a=-6-(-12)=6$.

۳۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌های $-2<\frac{1-3x}{x+1}<0$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادلهٔ $\frac{1-3x}{x+1}<0$ جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\frac{1-3x}{x+1}$		$-$		$+$	0	$-$	

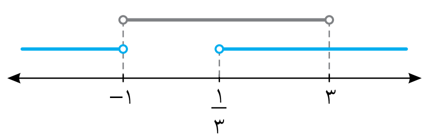
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-3x}{x+1}<0$ مجموعهٔ $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$ است. برای حل کردن نامعادلهٔ $-2<\frac{1-3x}{x+1}$ ابتدا آن را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-2<\frac{1-3x}{x+1}\Rightarrow\frac{1-3x}{x+1}+2>0\Rightarrow\frac{1-3x+2x+2}{x+1}>0\Rightarrow\frac{3-x}{x+1}>0$$

اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\frac{3-x}{x+1}$		$-$		$+$	0	$-$	

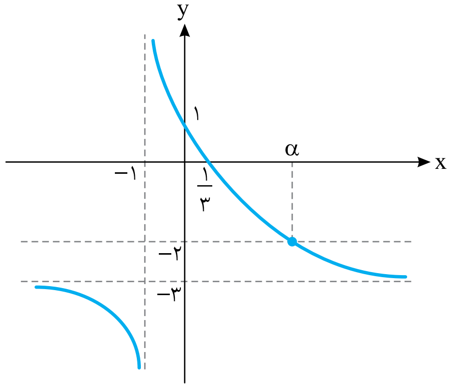
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{3-x}{x+1}>0$ مجموعهٔ $(-1,3)$ است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac{1}{3},3)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac{1}{3}<x<3\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow[\frac{x}{2}]=0$ یا ۱

یعنی مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{2}]$ دو عضو دارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع $f(x)=\frac{1-3x}{x+1}$ به‌صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{3},\alpha)$ است. برای پیدا کردن α، توجه کنید که α طول نقطهٔ برخورد خط $y=-2$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادلهٔ زیر است:

$$-2=\frac{1-3x}{x+1}\Rightarrow-2x-2=1-3x\Rightarrow x=3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{3},3)$ است. اکنون توجه کنید که $\frac{1}{3}<x<3\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow[\frac{x}{2}]=0$ یا ۱

بنابراین مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{2}]$ دو عضو دارد.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$
$$=-(a+7)x^2+(ab-2)x+2b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+7)=0\Rightarrow a=-7,\quad ab-2=0\Rightarrow-7b-2=0\Rightarrow b=-\frac{2}{7}$$

پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=2b=-\frac{4}{7}$ است و برد آن مجموعهٔ $\{-\frac{4}{7}\}$ است.

۳۶- گزینهٔ ۴ تبدیل‌های گفته شده را به‌ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=f(x-1)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$
$$y=-f(x-1)\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-f(x-1)-2$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x)=-f(x-1)-2=-\frac{1}{x-1}-2=\frac{-1-2x+2}{x-1}=\frac{1-2x}{x-1}$$

اکنون توجه کنید طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و g جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1-2x}{x-1}\Rightarrow x-1=x-2x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

چون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هستند، عرض آن‌ها برابر $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ و $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ است. بنابراین نقطه‌های برخورد $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$ هستند که فاصلهٔ هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. همین طور، حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است. بنابراین

$$\begin{cases} a+b=a^2+b^2-12 \\ ab=a+b-1 \end{cases}$$

چون $S=a+b$ را می‌خواهیم، پس از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ به‌دست می‌آوریم:

$$a+b=(a+b)^2-2ab-12\Rightarrow S=S^2-2(S-1)-12$$

$$S=S^2-2S+2-12\Rightarrow S^2-3S-10=0$$

$$(S+2)(S-5)=0\Rightarrow S=-2,\ S=5$$

چون a و b عددهای طبیعی‌اند، پس مجموع‌شان مثبت است، یعنی $S=-2$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S=5$.

راه‌حل دوم چون حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-1$ است، پس

$$ab=a+b-1\Rightarrow a+b-ab-1=0\Rightarrow a(1-b)+b-1=0$$

$(1-b)(a-1)=0\Rightarrow a=1$ یا $b=1$

از طرف دیگر، مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. بنابراین $a+b=a^2+b^2-12$. پس اگر $a=1$، آن‌گاه

$$1+b=1+b^2-12\Rightarrow b^2-b-12=0\Rightarrow (b-4)(b+3)=0$$

$b=4$ یا $b=-3$ (غ.ق.ق)

در این حالت $a+b=5$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=1$، آن‌گاه $a=4$ و باز هم $a+b=5$.

۳۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

$$\frac{2-\sqrt{2-x}-(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)(2-\sqrt{2-x})}=\frac{(\sqrt{2-x})^2}{5\sqrt{2-x}}\Rightarrow\frac{-2\sqrt{2-x}}{4-(2-x)}=\frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

چون $x=2$ مخرج کسر سمت راست معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست، یعنی $x\neq 2$، پس $\sqrt{2-x}\neq 0$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\sqrt{2-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-2}{2+x}=\frac{1}{5}\Rightarrow 2+x=-10\Rightarrow x=-12$$

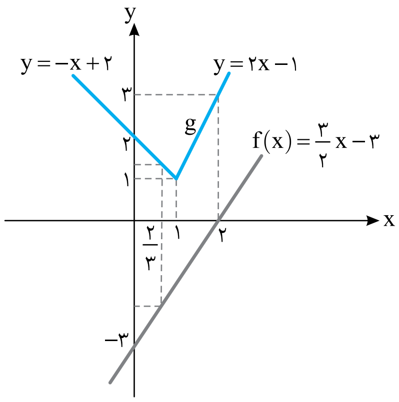
بنابراین معادلهٔ مورد نظر جواب مثبت ندارد.

۳۹- گزینهٔ ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(9,-2)\Rightarrow(-2,9):\ 9=-3(-2)^3+2(-2)-11$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم:



برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ فرض می‌کنیم $a=f^{-1}(-2)$. در این صورت $f(a)=-2$، پس $f(a)=-2\Rightarrow\frac{3}{2}a-3=-2\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2}{3}$

در نتیجه $(gof^{-1})(-2)=g(f^{-1}(-2))=g(\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

همچنین $g(0)=2$، پس $(gog)(0)=g(g(0))=g(2)=3$

پس $(gof^{-1})(-2)\times(gog)(0)=\frac{4}{3}\times 3=4$

۴۱- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع g مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر است:

$$x^2f(x)\geq 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

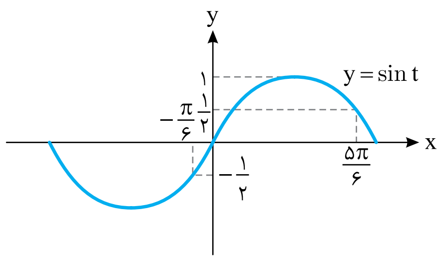
x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
x^2		+	۰	+		+	
$f(x)$		+		+	۰	−	
$x^2f(x)$		+	۰	+	۰	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2f(x)\geq 0$ بازهٔ $(-\infty,3]$ است که عددهای صحیح نامنفی در آن ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند و تعداد آن‌ها چهارتاست.

۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}\Rightarrow-\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$$

پس اگر $t=2x$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2}<\sin t\leq 1$.



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱\Rightarrow -۲<m-۱\le ۴\Rightarrow -۱<m\le ۵\Rightarrow m\in(-۱,۵]$$

۴۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$۱+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۲}{۵}$$

چون مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\sin x$ و $\cos x$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^۲-\frac{۳}{\sqrt{۵}}t+\frac{۲}{۵}=۰\xrightarrow{\times ۵}۵t^۲-۳\sqrt{۵}t+۲=۰$$

$$t=\frac{۳\sqrt{۵}\pm\sqrt{(۳\sqrt{۵})^۲-۴(۵)(۲)}}{۲\times ۵}=\frac{۳\sqrt{۵}\pm\sqrt{۵}}{۱۰}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\\ t=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه

$$\sin x=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=۲$$

یا

$$\cos x=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \sin x=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۹}{۵}-۱=\frac{۴}{۵}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}\Rightarrow ۲+۲\tan^۲ x=۵\tan x$$

$$۲\tan^۲ x-۵\tan x+۲=۰\Rightarrow \tan x=\frac{۵\pm\sqrt{(-۵)^۲-۴(۲)(۲)}}{۲\times ۲}=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۴}=\frac{۵\pm ۳}{۴}$$

پس $\tan x=۲$ یا $\tan x=\frac{۱}{۲}$.

۴۴- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

ماکزیمم تابع $=\frac{۵}{۲}\Rightarrow |a|+c=\frac{۵}{۲}$,

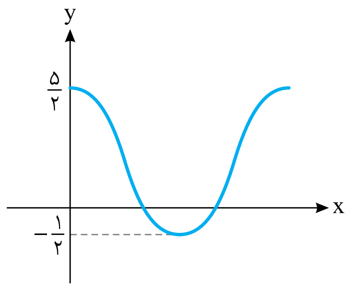
مینیمم تابع $=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -|a|+c=-\frac{۱}{۲}$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید $۲c=۲$، پس $c=۱$. از طرف دیگر،

$$|a|+c=\frac{۵}{۲}\Rightarrow |a|+۱=\frac{۵}{۲}\Rightarrow |a|=\frac{۳}{۲}$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a=-\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $ac=-\frac{۳}{۲}$.

توجه کنید که اگر $a=\frac{۳}{۲}$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{۳}{۲}\cos bx+۱$ می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



۴۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=\cos(-(x-\frac{\pi}{۳}))=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$$

اکنون توجه کنید که چون $x+\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۳}-x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۳}-x)\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱$$

$$\cos^۲(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=\pm ۱\Rightarrow\frac{\pi}{۳}-x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{۳}-k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	−۲	−۱	۰	۱
$\frac{\pi}{۳}-k\pi$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}-\pi=\frac{-۲\pi}{۳}$

بنابراین جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر $\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ هستند، که تعداد آنها دوتاست.

راه‌حل دوم چون $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ و $\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ عددهایی در بازهٔ $[-۱,۱]$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو -۱ هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\\ \cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}\\ x-\frac{\pi}{۳}=۰\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$$

یا

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\\ \cos(x-\frac{\pi}{۳})=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=\frac{۳\pi}{۲}\\ x-\frac{\pi}{۳}=\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}$$

پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.

۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\log_۲ ۳=a\Rightarrow ۲^a=۳$

$$\log_۸ b=\frac{۲}{۳}(۱+a)\Rightarrow ۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)}=b\Rightarrow(۲^۳)^{\frac{۲}{۳}(۱+a)}=b\Rightarrow ۲^{۲(۱+a)}=b$$

$$(۲^{۱+a})^۲=b\Rightarrow(۲\times ۲^a)^۲=b\Rightarrow(۲\times ۳)^۲=b\Rightarrow b=۳۶$$

بنابراین $\log(۳b-۸)=\log(۳\times۳۶-۸)=\log۱۰۰=۲$

۴۷- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{۱}{۲})=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}}=۱\Rightarrow۲^{\frac{a}{۲}+b}=۱\Rightarrow\frac{a}{۲}+b=۰$$

از طرف دیگر،

$$f^{-۱}(۸)=۵\Rightarrow f(۵)=۸\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}=۸\Rightarrow۲^{۵a+b}=۸^{۳}=۲^{۹}$$

$۵a+b=۹$

بنابراین

$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+b=۰\\ ۵a+b=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۱\end{cases}$$

در نتیجه $a-b=۲+۱=۳$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sigma=۲$، پس $\sigma^{۲}=۲^{۲}=۴$. از طرف دیگر،

$$\sigma^{۲}=\frac{a^{۲}+۰^{۲}+(-۱)^{۲}+b^{۲}+(-۱)^{۲}+۳^{۲}}{۶}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+۱۱}{۶}=۴$$

پس $a^{۲}+b^{۲}+۱۱=۶\times۴=۲۴\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۱۳ \quad (۱)$

چون مجموع اختلاف‌های داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+۰+(-۱)+b+(-۱)+۳=۰\Rightarrow a+b=-۱\Rightarrow a=-۱-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-۱-b)^{۲}+b^{۲}=۱۳\Rightarrow۱+b^{۲}+۲b+b^{۲}=۱۳\Rightarrow۲b^{۲}+۲b=۱۲$$

$$b^{۲}+b-۶=۰\Rightarrow b=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۱)(-۶)}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۵}}{۲}=\frac{-۱\pm۵}{۲}$$

در نتیجه $b=-۳$ یا $b=۲$. اگر $b=۲$، آن‌گاه $a=-۱-b=-۳$ که چون طبق فرض $a>۰$، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $b=-۳$.

۴۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{x_{۱},x_{۲},\dots,x_{k}}_{\text{داده‌های کوچک‌تر از میانه}}\ \underset{\text{میانه}}{\uparrow}\ \underbrace{x_{k+۱},\dots,x_{۲k}}_{\text{داده‌های بزرگ‌تر از میانه}}$$

فرض کنید $\bar{x}_{۱}$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_{۲}$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشد، یعنی

$$\bar{x}_{۱}=\frac{x_{۱}+\dots+x_{k}}{k}\ ,\ \bar{x}_{۲}=\frac{x_{k+۱}+\dots+x_{۲k}}{k}$$

اگر دو طرف این تساوی‌ها را در k ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$k\bar{x}_{۱}=x_{۱}+\dots+x_{k}\ ,\ k\bar{x}_{۲}=x_{k+۱}+\dots+x_{۲k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $-\bar{x}_{۱}=\bar{x}_{۲}-۶$، پس $\bar{x}_{۱}+\bar{x}_{۲}=۶$. اکنون توجه کنید که میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\frac{(x_{۱}+\dots+x_{k})+(x_{k+۱}+\dots+x_{۲k})}{۲k}=\frac{k\bar{x}_{۱}+k\bar{x}_{۲}}{۲k}=\frac{\bar{x}_{۱}+\bar{x}_{۲}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۵۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x\to(-۱)^{+}$، آن‌گاه $[x]=-۱$ و

$$x>-۱\Rightarrow-x<۱\Rightarrow[-x]=۰$$

همچنین $x>-۱\Rightarrow x+۱>۰\Rightarrow|x+۱|=x+۱$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{x+۱+(-۱)}{x-۰}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{x}{x}=۱$$

۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^{۲}+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}$. از طرف دیگر، اگر $x\to(-۱)^{-}$، آن‌گاه

$$x<-۱\Rightarrow\frac{۱}{x}>-۱\Rightarrow[\frac{۱}{x}]=-۱$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(-۱)^{-}}[\frac{۱}{x}]f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}(-۱)\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}=-\sqrt{\frac{۱}{۴}-۱+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۵۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۲x\sqrt{x}}{۲x^{۲}+x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{۲(x-۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})+(۱-x)}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})+(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(۱-\sqrt{x})(۲x\sqrt{x}+۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{-(۲x\sqrt{x}+۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}=\frac{-(۲+۱+۱)}{۲(۱+۱)(۲+۱-۱)}$$

$$=-\frac{۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۲x\sqrt{x}}{۲x^{۲}+x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{۲(x-۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۲(۲x^{۲}+x-۱)}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲\sqrt{x}+۲x\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۴x-۱}{۱}$$

$$=۲+۲\times\frac{۱}{۲}-۴-۱=-۲$$

همچنین

$$\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۲(۲x^{۲}+x-۱)}=\frac{۱}{۲(۲+۱-۱)}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $(-۲)\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۲}$

۵۳- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=۲x+b$ برابر با ۲ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x+a}{ax+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱\times(ax+۱)-a(x+a)}{(ax+۱)^{۲}}=\frac{۱-a^{۲}}{(ax+۱)^{۲}}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2}=\frac{1-a}{1+a}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$2=\frac{1-a}{1+a}\Rightarrow 2+2a=1-a\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}\Rightarrow f(1)=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=1$$

چون نقطهٔ $(1,f(1))=(1,1)$ روی خط $y=2x+b$ قرار دارد، پس

$$1=2\times 1+b\Rightarrow b=-1$$

در نتیجه $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$2x+b=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow 2ax^2+2x+abx+b=x+a$$

$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $2a(x-1)^2$ است. بنابراین

$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=2a(x^2-2x+1)=2ax^2-4ax+2a$$

در نتیجه

$$\begin{cases}1+ab=-4a\\ b-a=2a\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $b=3a$ و در نتیجه معادلهٔ اول می‌شود

$$1+a(3a)=-4a\Rightarrow 3a^2+4a+1=0\Rightarrow a=-1\ ,\ a=-\frac{1}{3}$$

اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-1}{-x+1}=-1$، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط $y=2x+b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $b=3a=-1$.

بنابراین $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^3+ax^2-2bx-4\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax-2b$$

بنابراین

$$f'(0)=-2b\Rightarrow 0=-2b\Rightarrow b=0$$

پس $f'(x)=3x^2+2ax$. پس

$$f'(-2)=3\times(-2)^2+2a(-2)=12-4a\Rightarrow 0=12-4a\Rightarrow a=3$$

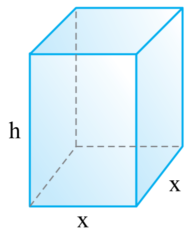
بنابراین $f(x)=x^3+3x^2-4$. اکنون توجه کنید که

$$f(0)=-4\ ,\ f(-2)=-8+12-4=0$$

در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(0,-4)$ و $(-2,0)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-2-0)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مساحت کل این قوطی حلبی درباز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S=x^2+4xh$



از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعدهٔ آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود x^2h. بنابر فرض $x^2h=4$، پس $h=\frac{4}{x^2}$ و در نتیجه

$$S=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}$$

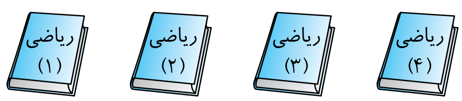
باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که $S'=2x-\frac{16}{x^2}$

$$S'=0\Rightarrow 2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x=\frac{16}{x^2}\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

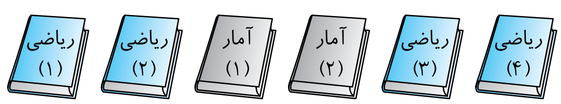
بنابراین مینیمم مطلق S به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$S=2^2+\frac{16}{2}=12$$

۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به !۴ طریق ممکن است.

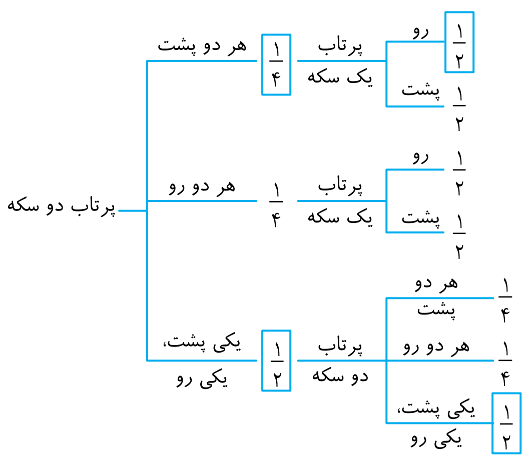


اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به‌جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به !۲ طریق ممکن است.



در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $4!\times 2!=48$.

۵۷- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دقیقاً دو سکه پشت بیایند برابر است با $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

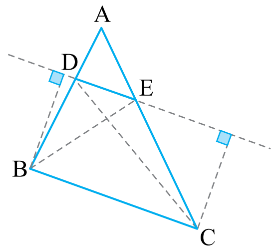
۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۳=\frac{۱۱-۳}{۷-۳}(x-۳)\Rightarrow y-۳=۲(x-۳)\Rightarrow y-۳=۲x-۶$$
$$۲x-y-۳=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۹)$ از این خط برابر است با

$$AH=\frac{|۲\times۱-۹-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر اندازه‌های داده شده،



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $DE||BC$. بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون قاعدهٔ DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است، یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۰\Rightarrow \text{مرکز}: O_۱(-\frac{-۴}{۲},-\frac{۲}{۲})=(۲,-۱)$$
$$r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+۲^۲-۴\times۰}=\sqrt{۵}$$

$$x^۲+y^۲-۲y-۲=۰\Rightarrow \text{مرکز}: O_۲(-\frac{۰}{۲},-\frac{-۲}{۲})=(۰,۱)$$
$$r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(-۲)^۲-۴\times(-۲)}=\sqrt{۳}$$

اکنون توجه کنید که

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=۲\sqrt{۲}\simeq۲\times۱/۴=۲/۸$$

از طرف دیگر،

$$r_۱+r_۲=\sqrt{۵}+\sqrt{۳}\simeq۲/۲+۱/۷=۳/۹$$
$$|r_۱-r_۲|=|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}|\simeq۲/۲-۱/۷=۰/۵$$

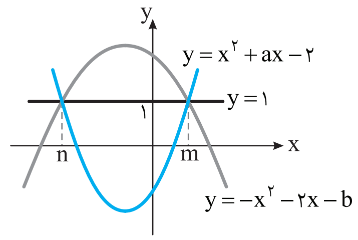
چون $|r_۱-r_۲|<O_۱O_۲<r_۱+r_۲$، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.

کنکور سراسری ۱۴۰۲

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۳ محور تقارن سهمی $y=x^2+ax-2$ خط $x=-\frac{a}{2}$ و محور تقارن سهمی $y=-x^2-2x+b$ خط $x=-1$ است. چون این دو خط بر هم منطبق‌اند، پس $-\frac{a}{2}=-1$، یعنی $a=2$. اکنون توجه کنید که طبق فرض مسئله، دو سهمی در نقطه‌هایی روی خط $y=1$ متقاطع‌اند. این نقطه‌ها را $(m,1)$ و $(n,1)$ بگیرید. چون نقطهٔ $(m,1)$ روی سهمی به معادلهٔ $y=x^2+2x-2$ است، پس

$$m^2+2m-2=1\Rightarrow m^2+2m-3=0\Rightarrow m=1,\ m=-3$$



اگر $m=1$، آن‌گاه نقطهٔ $(1,1)$ روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^2-2x+b$ است، پس $-1-2\times1+b=1\Rightarrow b=4$

اگر $m=-3$، آن‌گاه نقطهٔ $(-3,1)$ روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^2-2x+b$ است، پس $-(-3)^2-2\times(-3)+b=1\Rightarrow b=4$

در نتیجه در هر دو حالت $ab=2\times4=8$.

۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$y=15x^2+73x+14=(3x+14)(5x+1)$$

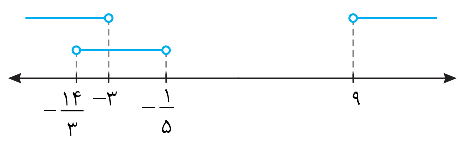
x	$-\infty$		$-\frac{14}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
y		+	0	−	0	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $15x^2+73x+14<0$ بازهٔ $(-\frac{14}{3},-\frac{1}{5})$ است. از طرف دیگر،

$$\left|\frac{x-1}{2}-1\right|>3\Rightarrow\left|\frac{x-3}{2}\right|>3\Rightarrow|x-3|>6$$

$$x-3>6\Rightarrow x>9,\quad x-3<-6\Rightarrow x<-3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\left|\frac{x-1}{2}-1\right|>3$ به‌صورت $(-\infty,-3)\cup(9,+\infty)$ است. اشتراک مجموعه‌های جواب‌های این نامعادله‌ها روی محور اعداد به‌صورت زیر است:



بنابراین بازهٔ $(-\frac{14}{3},-3)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که روی آن هر دو نامعادله برقرارند. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $-3-(-\frac{14}{3})=\frac{5}{3}$.

۳- گزینهٔ ۳ چون تابع f هم صعودی و هم نزولی است، پس ثابت است. بنابراین ضریب‌های x^2 و x در $f(x)$ برابر صفر هستند، یعنی $m=n=0$. بنابراین $f(x)=-k$. در نتیجه مجموعهٔ داده شده به‌صورت زیر است:

$$\{(0,-1),(0,k),(-1,-1),(3k+2,2k+1)\}$$

چون زوج‌های مرتب $(0,-1)$ و $(0,k)$ در این مجموعه هستند و این مجموعه یک تابع است، پس $k=-1$. در نتیجه $f(\sqrt{5})=-(-1)=1$. توجه کنید که اگر $k=-1$، آن‌گاه $(0,k)=(0,-1)$ و $(3k+2,2k+1)=(-1,-1)$ که تابع بودن مجموعهٔ داده شده را به هم نمی‌زنند.

۴- گزینهٔ ۳ چون f تابع همانی است، پس $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$. اگر نمودار این تابع را a واحد در جهت مثبت محور x انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{x-a}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $|g(x)|=\frac{1}{|x-a|}$. اکنون نمودار این تابع را دو واحد در جهت منفی محور y انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $h(x)=\frac{1}{|x-a|}-2$ به‌دست بیاید.

برای به‌دست آوردن طول نقطهٔ برخورد نمودارهای تابع‌های $\frac{1}{|f|}$ و h باید معادلهٔ $\frac{1}{|f(x)|}=h(x)$ را حل کنیم:

$$\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x-a|}-2$$

چون جواب این معادله $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ در این معادله صدق می‌کند:

$$\frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right|}-2\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right|}-2\Rightarrow\sqrt{2}+2=\frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right|}$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right|=\frac{1}{\sqrt{2}+2}\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right|=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}-a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}-a=-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}-1\\ a=1\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که چون $f(x)=x$، پس

$$f(x+a)=3\Rightarrow x+a=3\Rightarrow x=3-a$$

در نتیجه دو مقدار برای x به‌دست می‌آید:

$$x_1=3-(\sqrt{2}-1)=4-\sqrt{2},\quad x_2=3-1=2$$

در نتیجه $|x_۱-x_۲|=|۴-\sqrt{۲}-۲|=۲-\sqrt{۲}$.

۵- گزینهٔ ۲ چون α و β جواب‌های معادلهٔ $ax^۲-۸x+۴=۰$ هستند، پس

$$\alpha+\beta=\frac{۸}{a},\quad \alpha\beta=\frac{۴}{a}$$

در نتیجه

$$\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{۴}{a}\times\frac{۸}{a}=\frac{۳۲}{a^۲}$$

$$\alpha^۲\beta\times\alpha\beta^۲=(\alpha\beta)^۳=(\frac{۴}{a})^۳=\frac{۶۴}{a^۳}$$

بنابراین $\frac{۳۲}{a^۲}=\frac{۶۴}{a^۳}$، پس $a=۲$ و

$$\log_{\sqrt{۲}} a=\log_{\sqrt{۲}}۲=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}۲=۲\log_۲ ۲=۲$$

۶- گزینهٔ ۴ برای اینکه عبارت $\sqrt{۲-x}$ بامعنی باشد، باید $x\le۲$. برای اینکه عبارت $\sqrt{x-۲}$ بامعنی باشد، باید $x\ge۲$. در نتیجه فقط به‌ازای $x=۲$ معادله بامعنی است. اکنون باید مشخص کنیم که $x=۲$ جواب معادلهٔ مورد نظر هست یا خیر. توجه کنید که اگر $x=۲$، آن‌گاه

$$\text{سمت چپ معادله}=\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{۴-۳}=۱$$

$$\text{سمت راست معادله}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}=\sqrt{۲+۰}-\sqrt{۰}=\sqrt{۲}$$

چون سمت چپ معادله با سمت راستش برابر نیست، پس $x=۲$ جواب این معادله نیست و معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}-۱)^۲,\quad x\ge۱$$

بنابراین

$$y=(\sqrt{x}-۱)^۲\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}-۱)^۲}=|\sqrt{x}-۱|$$

چون $x\ge۱$، پس $\sqrt{x}-۱\ge۰$، در نتیجه

$$\sqrt{y}=\sqrt{x}-۱\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}+۱\Rightarrow x=(\sqrt{y}+۱)^۲$$

پس $g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}+۱)^۲$

بنابراین $(gog)(۱)=g(g(۱))=g((۱+۱)^۲)=g(۴)=(\sqrt{۴}+۱)^۲=۹$

۸- گزینهٔ ۱ برای اینکه $\log_{\frac{۱}{۲}}x$ معنی داشته باشد، باید $x>۰$. در نتیجه

$$\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}x}\ge۰\xrightarrow{x>۰}\log_{\frac{۱}{۲}}x>۰\Rightarrow x\in(۰,۱)$$

بنابراین دامنهٔ تابع f بازهٔ $(۰,۱)$ است، که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول**

$$\sin\alpha=۲\cos\alpha\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=۲\Rightarrow\tan\alpha=۲$$

بنابراین

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow۱+۴=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۵$$

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

چون انتهای کمان α در ربع سوم است، پس $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\begin{cases}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\\ \sin\alpha=۲\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow(۲\cos\alpha)^۲+\cos^۲\alpha=۱$$

$۵\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ یا $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ (غ.ق.ق)

۱۰- گزینهٔ ۴ شیب خط $۲mx+(m^۲-۱)y=۳$ برابر است با $\frac{-۲m}{m^۲-۱}$ که باید برابر با $\tan۶۰^\circ$، یعنی $\sqrt{۳}$ باشد:

$$\frac{-۲m}{m^۲-۱}=\sqrt{۳}\Rightarrow-۲m=(m^۲-۱)\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۳}m^۲+۲m-\sqrt{۳}=۰$$

اگر $m_۱$ و $m_۲$ جواب‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، اختلاف آن‌ها برابر است با

$$|m_۱-m_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۲^۲-۴\times\sqrt{۳}\times(-\sqrt{۳})}}{|\sqrt{۳}|}=\frac{\sqrt{۴+۱۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

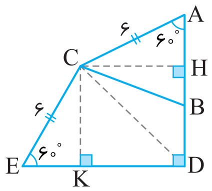
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin۶۰^\circ$$

$$۷/۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times۴/۸\times AC\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AC=۶$$

از طرف دیگر،

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times CH$$

$$۷/۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times۴/۸\times CH\Rightarrow CH=۳\sqrt{۳}$$



اکنون از نقطهٔ C عمود CK را بر پاره‌خط ED رسم می‌کنیم. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ CKE، $\sin۶۰^\circ=\frac{CK}{CE}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{CK}{۶}\Rightarrow CK=۳\sqrt{۳}$

همچنین، $KD=CH=۳\sqrt{۳}$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ CKD از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$CD^۲=CK^۲+KD^۲=(۳\sqrt{۳})^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۵۴\Rightarrow CD=۳\sqrt{۶}$$

۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

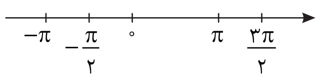
$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\Rightarrow\cos^۲x=(۱+\sin x)^۲$$

$$۱-\sin^۲x=۱+۲\sin x+\sin^۲x\Rightarrow۲\sin^۲x+۲\sin x=۰$$

$$۲\sin x(\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi, & k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین برخی از جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی روی محور اعداد به‌صورت زیر هستند، که کمترین فاصلهٔ بین آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$b=\log_{mn} m^2 n=\frac{\log_n m^2 n}{\log_n mn}=\frac{\log_n m^2+\log_n n}{\log_n m+\log_n n}$$

$$=\frac{2\log_n m+1}{\log_n m+1}=\frac{2a+1}{a+1}=\frac{a+1+a}{a+1}=1+\frac{a}{a+1}$$

از طرف دیگر، چون $a>0$، پس $0<\frac{a}{a+1}<1$، بنابراین

$$[b]=[1+\frac{a}{a+1}]=1+[\frac{a}{1+a}]=1+0=1$$

۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که میانگین داده‌ها برابر است

$$\bar{x}=\frac{n-2+n+n+2}{3}=\frac{3n}{3}=n$$

در نتیجه،
$$\sigma^2=\frac{(n-2-n)^2+(n-n)^2+(n+2-n)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

پس $\sigma=\sqrt{\frac{8}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. بنابراین
$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{n}$$

برای اینکه ضریب تغییرات کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، پس n باید بیشترین مقدار ممکن باشد. توجه کنید که چون داده‌ها دورقمی هستند، پس $n+2<100$، یعنی $n<98$، پس بیشترین مقدار ممکن n برابر ۹۶ است. در این حالت داده‌ها به صورت ۹۴، ۹۶، ۹۸ خواهند بود که رقم دهگان آن‌ها یکسان است.

در نتیجه کمترین مقدار ضریب تغییرات برابر است با

$$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{96}=\frac{\sqrt{2}}{48\sqrt{3}}=\frac{1}{24\sqrt{6}}$$

۱۵- گزینهٔ ۱ تابع f فقط در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیست، زیرا $x=1$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ است. بنابراین $x=1$ جواب معادلهٔ $5x^2-ax+b=0$ است، پس $5\times1-a\times1+b=0$، یعنی $b-a=-5$. از طرف دیگر، چون تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد دارد و حد مخرج $f(x)$ در این نقطه برابر صفر است، پس باید حد صورت $f(x)$ نیز در این نقطه برابر صفر باشد. در نتیجه

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow 1+a+b=0\Rightarrow a+b=-1$$

اکنون توجه کنید که
$$\begin{cases}b-a=-5\\ a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$$

بنابراین
$$[\frac{b-2a}{3}]=[\frac{-3-4}{3}]=[\frac{-7}{3}]=-3$$

۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=\tan\frac{(2\times1+1)\pi}{4}=\tan\frac{3\pi}{4}=-1,\quad f(5)=b(5-[-5])=10b$$

از طرف دیگر، اگر $1<x<5$، آنگاه عبارت x^2+x-2 مثبت است، پس

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{a(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+2}{-a}=\frac{1+2}{-a}=-\frac{3}{a}$$

در نتیجه باید $-\frac{3}{a}=-1$، پس $a=3$. همچنین

$$\lim_{x\to5^-}f(x)=\lim_{x\to5^-}\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)}=\frac{|25+5-2|}{a(1-5)}=\frac{28}{-4a}=-\frac{7}{a}=-\frac{7}{3}$$

در نتیجه باید $10b=-\frac{7}{3}$، پس $b=-\frac{7}{30}$. بنابراین $ab=3\times(-\frac{7}{30})=-0/7$.

۱۷- گزینهٔ ۴ باید حد راست مخرج در $\frac{\pi}{3}$ برابر صفر باشد، در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}(a\cos x-\sin x)=a\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

از طرف دیگر، علامت مخرج در همسایگی راست $\frac{\pi}{3}$ منفی است، زیرا

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=\cos x(\sqrt{3}-\tan x)$$

و اگر $x\to(\frac{\pi}{3})^+$، آنگاه $\cos x>0$ و $\tan x\to\sqrt{3}^+$، پس $\sqrt{3}-\tan x<0$. بنابراین باید

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}(ax+b)>0\Rightarrow\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}+b>0\Rightarrow b>-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\simeq-1/8$$

پس کمترین مقدار صحیح b برابر ۱- است.

۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون $a>0$، پس دامنهٔ تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x\geq0\\ a-2x\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq0\\ x\leq\frac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$$

اکنون توجه کنید که
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}$$

در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a-2x}}\Rightarrow2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$4x=a-2x\Rightarrow x=\frac{a}{6}$$

بنابراین طول نقطه‌های بحرانی تابع f، $x=0$، $x=\frac{a}{2}$ و $x=\frac{a}{6}$ است. عرض این نقطه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$f(0)=\sqrt{a}\ ,\quad f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}$$

$$f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=(\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{2}{3}})\sqrt{a}=(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3})\sqrt{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}$$

اکنون توجه کنید که $\frac{\sqrt{2}}{2}<1<\frac{\sqrt{6}}{2}$، در نتیجه،

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}<\sqrt{a}<\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}$$

پس کمترین مقدار تابع f برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}$ و بیشترین مقدار آن برابر $\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}$ است. چون حاصل‌ضرب این مقادیر برابر $\sqrt{12}$ است، پس

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}=\sqrt{12}\Rightarrow\frac{\sqrt{12}}{4}a=\sqrt{12}\Rightarrow a=4\Rightarrow[a]=4$$

۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g'(x)=(\sqrt[3]{x})'f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)$$

بنابراین

$$g'(-1)=\frac{1}{3}f(-1)-f'(-1)$$

اکنون توجه کنید که چون خط d با شیب $-\frac{1}{2}$ در نقطهٔ $(-1,5)$ بر نمودار تابع f مماس است، پس این نقطه روی نمودار تابع f قرار دارد، یعنی $f(-1)=5$ و شیب خط d برابر با $f'(-1)$ است، یعنی $f'(-1)=-\frac{1}{2}$. بنابراین

$$g'(-1)=\frac{1}{3}\times5-(-\frac{1}{2})=\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{6}$$

۲۰- گزینهٔ ۳ تعداد راه‌های انتخاب سه عدد به‌طور متوالی و با حذف عددهای انتخاب شده از میان عددهای ۱ تا n برابر است با $n(n-1)(n-2)$، اگر عدد سوم ۱۰ باشد، عددهای اول و دوم ۱۰ نبوده‌اند. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب سه عدد از میان عددهای ۱ تا n به‌طوری که عدد سوم ۱۰ باشد، برابر است با

عدد اول مخالف ۱۰

$(n-1)(n-2)\times1$ → عدد سوم برابر ۱۰

عدد دوم مخالف عدد اول و ۱۰

در نتیجه احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر است با

$$\frac{(n-1)(n-2)\times1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{15}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{15}\Rightarrow n=15$$

تعداد مضرب‌های ۳ در میان عددهای ۱ تا ۱۵ برابر ۵ است، پس تعداد عددهایی که مضرب ۳ نیستند برابر ۱۰ است. در آزمایش دوم، تعداد کل حالت‌ها برابر است با $15\times14\times13$ و تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

عدد اول مضرب ۳ نیست

$10\times9\times5$ → عدد سوم مضرب ۳ است

عدد دوم مخالف عدد اول است و مضرب ۳ نیست

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با $\frac{10\times9\times5}{15\times14\times13}=\frac{15}{91}$.

۲۱- گزینهٔ ۳ اگر A پیشامد بردن رقیب اصلی و B پیشامد قهرمانی کشتی‌گیر باشد، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{1}{5},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(B|A)=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{5}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{6+10-3}{30}=\frac{13}{30}$$

۲۲- گزینهٔ ۱ چون احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های آن است و تعداد کل مهره‌ها برابر ۴۵=۱۶+۱۵+۱۴ است، پس می‌توانیم احتمال انتخاب ظرف‌ها را $\frac{16}{45}$، $\frac{15}{45}$ و $\frac{14}{45}$ فرض کنیم. از طرف دیگر، احتمال انتخاب مهرهٔ قرمز از ظرف‌ها به ترتیب برابر $\frac{4}{16}$، $\frac{6}{15}$ و $\frac{5}{14}$ است. در نتیجه، بنابر فرمول احتمال کل، احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{16}{45}\times\frac{4}{16}+\frac{15}{45}\times\frac{6}{15}+\frac{14}{45}\times\frac{5}{14}=\frac{4}{45}+\frac{6}{45}+\frac{5}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

۲۳- گزینهٔ ۳ در دو مثلث ABC و ADE،

$$\hat{A}=\hat{A},\ \hat{C}=\hat{E}$$

پس این دو مثلث متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{2+13}{x}$$

$$x(x+1)=2\times15=30\Rightarrow x^2+x-30=0\Rightarrow(x+6)(x-5)=0$$

$$x=-6\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=5$$

۲۴- گزینهٔ ۲ معادلهٔ خط‌ها را به‌صورت $y=ax+1$ و $y=\frac{1}{a}x+\frac{a-1}{a}$ می‌نویسیم. چون این خط‌ها موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر هستند. در نتیجه

$$a=\frac{1}{a}\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

در نتیجه معادلات خط‌ها به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$a=1:\begin{cases}y-ax=1\\ay-x=a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+1=0\\x-y=0\end{cases}$$

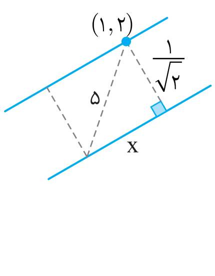
$$a=-1:\begin{cases}y-ax=1\\ay-x=a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-1=0\\x+y-2=0\end{cases}$$

چون نقطهٔ $(1,2)$ روی خط $x-y+1=0$ قرار دارد ولی روی هیچ‌کدام از خط‌های دستهٔ دوم قرار ندارد، پس فقط حالت $a=1$ قابل قبول است. از طرف دیگر، فاصلهٔ دو خط دستهٔ اول برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2}}$، که طول یکی از ضلع‌های مستطیل است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$5^2=x^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Rightarrow x^2=25-\frac{1}{2}=\frac{49}{2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7}{2}=3/5$$



۲۵- گزینهٔ ۱ چون DE||BC، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۱/۲y}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۱/۲(\frac{۵}{۳}x)}=\frac{DE}{۳+FC}$$

$$\frac{x}{x+۲x}=\frac{DE}{۳+FC}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{DE}{۳+FC}\Rightarrow ۳+FC=۳DE$$

از طرف دیگر، چون DE||FC، پس

$$\frac{DE}{FC}=\frac{EH}{HF}\Rightarrow\frac{DE}{FC}=\frac{x}{y}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۵DE=۳FC$$

در نتیجه

$$\begin{cases}۳+FC=۳DE\\ ۵DE=۳FC\end{cases}\Rightarrow ۳+FC=۳(\frac{۳}{۵})FC\Rightarrow ۳+FC=\frac{۹}{۵}FC$$

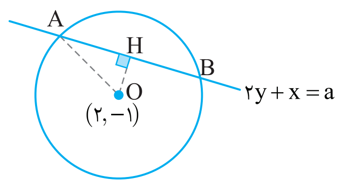
$$(\frac{۹}{۵}-۱)FC=۳\Rightarrow\frac{۴}{۵}FC=۳\Rightarrow FC=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

بنابراین $BC=BF+FC=۳+۳/۷۵=۶/۷۵$.

۲۶- گزینهٔ ۴ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۱=۰$ نقطهٔ $(\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})$، یعنی $(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۴}=\sqrt{۶}$.

از نقطهٔ O، مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB رسم می‌کنیم. در این صورت طول OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۲y+x-a=۰$ است. بنابراین

$$OH=\frac{|۲\times(-۱)+۲-a|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|-a|}{\sqrt{۵}}=\frac{|a|}{\sqrt{۵}}$$



اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHA،

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow\sqrt{۶}^۲=OH^۲+(\frac{۳}{۲})^۲\Rightarrow ۶=OH^۲+\frac{۹}{۴}$$

$$OH^۲=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$$

بنابراین $\frac{|a|}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}\Rightarrow|a|=\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}\Rightarrow a=\pm\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}$

بنابراین اختلاف مقادیر a برابر است با

$$\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}-(-\frac{۵}{۲}\sqrt{۳})=۵\sqrt{۳}$$

۲۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[۷]{a}=۲۷a^{\frac{۱۵}{۷}}\xrightarrow{\text{توان هفتم}}a=۲۷^۷a^{۱۵}$$

$$\frac{a^{۱۵}}{a}=(۳^۳)^{-۷}\Rightarrow a^{۱۴}=۳^{-۲۱}\Rightarrow(a^{۱۴})^{\frac{۱}{۱۴}}=(۳^{-۲۱})^{\frac{۱}{۱۴}}$$

$$a=۳^{-\frac{۲۱}{۱۴}}=۳^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

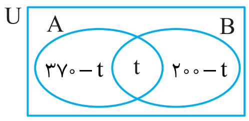
در نتیجه $\frac{۱}{a}-۳=۳\sqrt{۳}-۳=۳(\sqrt{۳}-۱)$

بنابراین

$$\frac{\frac{۱}{a}-۳}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}-۱)}{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)}=\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)^۲}{۳-۱}$$

$$=\frac{۳}{۲}(۳+۱-۲\sqrt{۳})=۳(۲-\sqrt{۳})=۶-۳\sqrt{۳}$$

۲۸- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ کشاورزانی را که مزرعهٔ چای دارند، A و مجموعهٔ کشاورزانی را که شالیزار دارند، B می‌نامیم. فرض می‌کنیم تعداد کشاورزانی که هم مزرعهٔ چای و هم شالیزار دارند، برابر t باشد. در این صورت از روی نمودار ون زیر معلوم می‌شود که تعداد آن‌هایی که نه مزرعهٔ چای دارند و نه شالیزار برابر است با $۵۰۰-(۳۷۰-t+t+۲۰۰-t)=t-۷۰$



تعداد کسانی که فقط شالیزار دارند، برابر است با $۲۰۰-t$. در نتیجه بنابر فرض مسئله،

$$t-۷۰=۲۰۰-t\Rightarrow ۲t=۲۰۰+۷۰=۲۷۰\Rightarrow t=۱۳۵$$

بنابراین تعداد کشاورزانی که فقط مزرعهٔ چای دارند برابر است با

$$۳۷۰-t=۳۷۰-۱۳۵=۲۳۵$$

۲۹- گزینهٔ ۴ جملهٔ اول و قدرنسبت دنبالهٔ اول را به‌ترتیب a و d و جملهٔ اول و قدرنسبت دنبالهٔ دوم را به‌ترتیب a' و d' می‌نامیم. در این صورت

$$a_۴=a'_۴\Rightarrow a+۳d=a'+d' \quad (۱)$$

$$a_۸=a'_۷\Rightarrow a+۷d=a'+۶d' \quad (۲)$$

$$a'_{۱۰}=۰\Rightarrow a+۹d'=۰\Rightarrow a'=-۹d'$$

اگر در تساوی‌های (۱) و (۲) به جای a' قرار دهیم $-۹d'$، به‌دست می‌آید

$$a+۳d=-۹d'+d'=-۸d', \quad a+۷d=-۹d'+۶d'=-۳d'$$

اگر این دو تساوی را از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$(a+۷d)-(a+۳d)=-۳d'-(-۸d')\Rightarrow ۴d=۵d'\Rightarrow d'=\frac{۴}{۵}d$$

در نتیجه $a'_{۱۵}=a'+۱۴d'=-۹d'+۱۴d'=۵d'=۵(\frac{۴}{۵}d)=۴d$

پس جملهٔ پانزدهم الگوی خطی چهار برابر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است.

۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$۸^{-\frac{۲}{۳}m}\times۴^{-n}+۴^{-m}\times۸^{-\frac{۲}{۳}n}>\frac{۱}{۱۲۸}$$

$$(۲^۳)^{-\frac{۲}{۳}m}\times(۲^۲)^{-n}+(۲^۲)^{-m}\times(۲^۳)^{-\frac{۲}{۳}n}>\frac{۱}{۲^۷}$$

$$۲^{-۲m}\times۲^{-۲n}+۲^{-۲m}\times۲^{-۲n}>(\frac{۱}{۲})^۷$$

$$۲^{-۲m-۲n}+۲^{-۲m-۲n}>(۲^{-۱})^۷$$

$$۲\times۲^{-۲m-۲n}>۲^{-۷}\Rightarrow۲^{-۲m-۲n+۱}>۲^{-۷}$$

بنابراین

$$-۲m-۲n+۱>-۷\Rightarrow۷+۱>۲m+۲n\Rightarrow m+n<۴$$

چون m و n عددهایی طبیعی‌اند، پس هر دو برابر ۱ یا یکی از آن‌ها برابر ۱ و دیگری برابر ۲ است. بنابراین بیشترین مقدار $m^۳+n^۲$ برابر است با $۸+۱=۹$.