درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

علیرضا علی‌پور، امیرمحمد هویدی

نشر الگو

پیشگفتار

به نام خدا

هدف‌مان از نوشـــتن این کتاب فراهم آوردن مســـیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب ریاضیات گسسته را یاد بگیرید و بر آن‌ها مســـلط شـــوید، هم مطالب کتاب آمار و احتمال را مرور کنید. این کتاب ۸ فصل دارد. هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل نهم ویژهٔ «آزمون‌های جامع» است.

هر درس از سه قسمت تشکیل شده است:

۱- درس‌نامه: در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم.

۲- دســت‌گرمی: پس از درس‌نامه چندین پرسش چهارگزینه‌ای با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید.

۳- آزمون‌ها: در نهایت سعی کرده‌ایم در آزمون‌های طبقه‌بندی شده مطالب آن درس را قرار دهیم.

در انتهای هر فصل، برگزیده‌ای از سؤالات کنکورهای سال‌های قبل را قرار داده‌ایم.

با نگاهی به کنکورهای دو سال اخیر مشخص می‌شود که برگزارکنندگان اهمیت ویژه‌ای برای درس‌های ریاضیات گسسته و آمار و احتمال در نظر گرفته‌اند. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز با تست‌های گوناگون در این دو درس آشنا شوید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی و دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل چهارم: ترکیبیات (شمارش)

فصل پنجم: آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل ششم: احتمال

فصل هفتم: آمار توصیفی

فصل هشتم: آمار استنباطی

فصل نهم: آزمون‌های جامع

فصل دهم: پاسخ تشریحی تست‌های دست‌گرمی

فصل یازدهم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

فصل دوازدهم: پاسخنامهٔ کلیدی

فصل سیزدهم: کنکورهای سراسری

درس اول / بخش سوم: مربع لاتین

تعریف مربع لاتین

به جدولی $n\times n$ که خانه‌های آن با عددهای طبیعی ۱ تا n طوری پر شــده‌اند که در هیچ ســطر و هیچ ستون آن عددی تکراری وجود نداشته باشد، یک مربع لاتین از مرتبهٔ n یا یک مربع لاتین $n\times n$ می‌گوییم. به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

تذکر با توجه به تعریف، واضح است که فقط یک مربع لاتین 1×1 وجود دارد.

تست ۱ **کدام جدول مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ است؟**

۱)

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲

۲)

۳	۱	۲	۴
۴	۲	۳	۱
۱	۳	۴	۲
۲	۴	۱	۳

۳)

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱

۴)

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۱	۳

راه‌حل در جدول گزینهٔ (۱) عدد ۴ در ســتون چهارم تکرار شــده اســت، در جدول گزینهٔ (۳) عدد ۱ در ســتون چهارم تکرار شــده است و در جدول گزینهٔ (۴) عدد ۱ در ســطر چهارم تکرار شــده است، پس هیچ‌یک از این ســه جدول مربع لاتین نیستند. اکنون به‌سادگی می‌توان دید که جدول گزینهٔ (۲) مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ است.

تست ۲ **چند مربع لاتین از مرتبهٔ ۲ وجود دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۶

راه‌حل جدولی 2×2 در نظر می‌گیریم. باید خانه‌های این جدول را با اعداد ۱ و ۲ طوری پر کنیم که در هر سطر و هر ستون هر دو عدد ۱ و ۲ ظاهر شوند. دو خانهٔ سطر اول را به یکی از دو طریق مقابل می‌توانیم پر کنیم:

۲	۱

۱	۲

در هریک از این دو حالت خانه‌های ســطر دوم به‌صورت یکتا پر می‌شــوند چون در هر ســتون باید هر دو عدد ۱ و ۲ را داشته باشیم. در نتیجه فقط دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۲ وجود دارد.

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

نکتــه **اگر A مربعی لاتین از مرتبهٔ n باشــد، هریک از عددهای طبیعی ۱ تا n در هر ســطر و هر ستون A دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. بنابراین هرکدام از این اعداد دقیقاً در n خانه از A نوشته شده است.**

تست ۳ **مجموع درایه‌های سطر چهارم یک مربع لاتین از مرتبه n کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۷۲ ۳) ۱۸۹ ۴) ۱۵۳

راه‌حل چون در هر سطر و هر ستون یک مربع لاتین از مرتبهٔ n، هریک از عددهای طبیعی ۱ تا n درست یک بار ظاهر می‌شوند، پس مجموع درایه‌های هر سطر یا هر ستون دلخواه یک مربع لاتین از مرتبهٔ n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است. در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۱۵۳ به این صورت است که به‌ازای $n=17$ به‌دست می‌آید.

تست ۴ **کدام جدول را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟**

۱)

۲			
		۳	۱
۴			

۲)

۱			
	۲	۳	
			۱

۳)

۱			
			۱
	۲		
		۳	

۴)

۱			
		۱	
	۲		
			۱

راه‌حل

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) درایهٔ a نمی‌تواند برابر هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۲			
a		۳	۱
۴			

گزینهٔ (۲) هیچ‌یک از درایه‌های a و b نمی‌توانند برابر عدد ۱ باشند. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱			
a	۲	۳	b
			۱

گزینهٔ (۳) این جدول را به‌صورت مقابل می‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱	۴	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۳	۲

گزینهٔ (۴) عدد ۱ نمی‌تواند در هیچ‌یک از خانه‌های خالی سطر سوم قرار گیرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۱			
		۱	
×	۲	×	×
			۱

تست ۵

فرض کنید A مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ باشد. برخی از درایه‌های A مشخص شده‌اند. مقدار x برابر چندتا از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد؟

A=

۴	۳		
			۲
۱		x	

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که اگر درایه‌های مربع لاتین A را به صورت روبه‌رو نام‌گذاری کنیم، چون در هیچ سطر و هیچ ستونی نباید عدد تکراری وجود داشته باشد، پس

$b\neq ۲\Rightarrow a=۲\Rightarrow b=۱,\quad d\neq ۲\Rightarrow c=۲\Rightarrow d=۳$

c			
۴	۳	a	b
d			۲
۱		x	

تا اینجای کار مربع لاتین A به‌صورت مقابل درمی‌آید:

$x\neq ۱, x\neq ۲$

۲			
۴	۳	۲	۱
۳			۲
۱		x	

اکنون نشان می‌دهیم x می‌تواند هر دو مقدار ۳ و ۴ را داشته باشد:

۲	۱	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	x=۴	۳

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	x=۳	۴

تست ۶

در یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ که به‌صورت مقابل مشخص شده است، مجموع درایه‌های خانه‌های سایه‌دار حداکثر کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۷
۳) ۳۰
۴) ۳۲

راه‌حل

واضح است که مجموع درایه‌های ستون‌های دوم و چهارم از مربع لاتین روبه‌رو برابر ۲۰=۱۰+۱۰ است. بنابراین فقط x و y باقی می‌مانند. چون می‌خواهیم مجموع درایه‌های خانه‌های سایه‌دار ماکزیمم باشد، پس قرار می‌دهیم x=۳ و y=۴ . توجه کنید که ستون‌های دوم و چهارم مربع لاتین را می‌توان طوری پر کرد که درایه‌های سطر سوم آن‌ها برابر ۱ و ۲ باشند. در نتیجه بیشترین مقدار مجموع این درایه‌ها برابر است با ۲۷=۴+۳+۲۰ .

x		y	

تست ۷

به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ را انتخاب کرد که درایه‌های آن‌ها با هم برابر باشند؟

۱) ۸۴ **۲)** ۱۰۵ **۳)** ۱۲۶ **۴)** ۱۴۷

راه‌حل در مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ هریک از اعداد ۱ تا ۷ دقیقاً در ۷ خانه ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، ابتدا یکی از اعداد ۱ تا ۷ و سپس دو خانه شامل این عدد را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، پاسخ برابر است با $۷\times\binom{۷}{۲}=۷\times۲۱=۱۴۷$.

ساخت مربع لاتین جدید با تعویض جای دو سطر یا دو ستون

۹۹

اگر در یک مربع لاتین جای دو سطر یا دو ستون را با هم عوض کنیم، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین است. چون مثلاً اگر جای دو سطر از یک مربع لاتین را عوض کنیم، ترتیب قرارگیری درایه‌های آن دو سطر تغییر نمی‌کند و فقط دو درایه در دو ستون جابه‌جا می‌شوند. پس باز هم در هیچ سطر و هیچ ستونی درایهٔ تکراری نداریم.

تست ۸

تعدادی عمل «جابه‌جایی دو سطر» و «جابه‌جایی دو ستون» روی جدول مقابل انجام داده‌ایم. جدول حاصل کدام می‌تواند باشد؟

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲

۱)

۱	۳	۴	۲
۳	۲	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴

۲)

۴	۳	۱	۲
۳	۲	۴	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۴	۲	۳

۳)

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۴
۲	۴	۱	۳

۴)

۱	۲	۴	۳
۲	۴	۳	۲
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲

راه‌حل جدول داده شده یک مربع لاتین است. اگر در یک مربع لاتین جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین خواهد بود. پس اگر تعدادی عمل از این نوع انجام دهیم، باز هم یک مربع لاتین خواهیم داشت. در بین ۴ جدول داده شده، فقط جدول گزینهٔ (۲) یک مربع لاتین است. در ستون سوم جدول گزینهٔ (۱) عدد ۴ تکرار شده است، در ستون چهارم جدول گزینهٔ (۳) عدد ۴ تکرار شده است و در سطر دوم جدول گزینهٔ (۴) عدد ۲ تکرار شده است. توجه کنید که به کمک عمل‌های زیر می‌توانیم به مربع لاتین گزینهٔ (۲) برسیم.

۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲

جابه‌جایی سطرهای دوم و سوم →

۲	۳	۱	۴
۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۳	۲

جابه‌جایی سطرهای سوم و چهارم →

۲	۳	۱	۴
۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲
۳	۴	۲	۱

جابه‌جایی ستون‌های اول و چهارم →

۴	۳	۱	۲
۳	۲	۴	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۴	۲	۳

ساخت مربع لاتین جدید با اعمال جایگشت

۱۰۰

اگر A مربعی لاتین از مرتبهٔ n و $a_۱\,a_۲\ldots a_n$ جایگشتی از اعداد طبیعی ۱ تا n باشد، با اعمال این جایگشت روی درایه‌های A، یعنی قرار دادن $a_۱$ به جای ۱، قرار دادن $a_۲$ به جای ۲، ... و قرار دادن a_n به جای n، جدول حاصل باز هم یک مربع لاتین است چون در هر سطر و هر ستون A همهٔ اعداد طبیعی ۱ تا n درست یک بار ظاهر شده‌اند. در نتیجه پس از اعمال جایگشت روی درایه‌های A در هر سطر و هر ستون جدول حاصل، همهٔ اعداد $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... و a_n که شامل اعداد طبیعی ۱ تا n هستند، درست یک بار ظاهر می‌شوند. پس جدول جدید نیز یک مربع لاتین است.

تذکر اگر مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آید، مربع لاتین A نیز از اعمال جایگشتی (عکس جایگشت قبلی) روی درایه‌های B به‌دست خواهد آمد.

تست ۹

کدام مربع لاتین با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین مقابل به‌دست نمی‌آید؟

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳

۱)

۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴

۲)

۳	۴	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲

۳)

۲	۱	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۴	۳

۴)

۳	۲	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۲	۳	۱	۴

راه‌حل با مقایسهٔ سطر اول مربع لاتین داده شده و مربع لاتین گزینهٔ (۱) جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ به‌دست می‌آید. اما با دیدن درایهٔ سطر دوم و ستون اول در این دو مربع لاتین متوجه می‌شویم عمل تبدیل ۳ به ۴ انجام نشده است، پس مربع لاتین گزینهٔ (۱) نمی‌تواند با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین داده شده به‌دست آمده باشد. توجه کنید که جایگشت‌های اعمال شده روی درایه‌های مربع لاتین داده شده برای ساخت مربع‌های لاتین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

گزینهٔ (۲) **گزینهٔ (۳)** **گزینهٔ (۴)**

تست ۱۰

مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات مقابل داده شده است. کدام جایگشت A را به B تبدیل می‌کند؟

A=

۱			
	۲		
		۳	
			۴

B=

		۴	
۱			
			۲

۱) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

راه‌حل فرض کنید جایگشتی که A را به B تبدیل می‌کند، به‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت

A=

۱			
	۲		
		۳	
			۴

B=

a			
	b		
		c	
			d

از طرف دیگر، طبق فرض

B=

		۴	
۱			
			۲

، پس $d=2$ و B به‌صورت مقابل درمی‌آید:

B=

a			
	b	۴	
۱		c	
			۲

چون abcd جایگشتی از اعداد ۱ تا ۴ است. پس هیچ دو تا از a، b، c و d برابر نیستند. اکنون از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستونی از B عدد تکراری وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم

$$a\neq 1, a\neq c=3, a\neq d=2 \Rightarrow a=4, \quad b\neq 4, b\neq c=3, b\neq d=2 \Rightarrow b=1, \quad c\neq 1, c\neq 4, c\neq d=2 \Rightarrow c=3$$

پس جایگشت مورد نظر به‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ است.

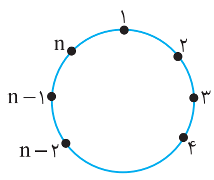
۱۰۱ مربع لاتین چرخشی

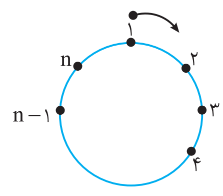
تعریف مربع لاتین چرخشی

به مربع لاتین زیر **مربع لاتین چرخشی** می‌گوییم.

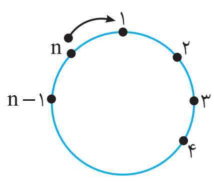
۱	۲	۳	…	…	…	n−۱	n
n	۱	۲	۳	…	…	n−۲	n−۱
n−۱	n	۱	۲	۳	…	n−۳	n−۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
۳	۴	۵	…	…	…	۱	۲
۲	۳	۴	…	…	…	n	۱

مربع لاتین چرخشی را می‌توان این‌گونه به‌دست آورد. اعداد طبیعی ۱ تا n را به‌ترتیب در جهت ساعتگرد دور یک دایره می‌نویسیم. سطر اول مربع لاتین از نوشتن این اعداد با شروع از عدد ۱ و چرخش کامل دور دایره در جهت ساعتگرد به‌دست می‌آید.





سطر دوم مربع لاتین نیز به همین صورت به‌دست می‌آید، با این تفاوت که شروع حرکت از عدد n است، یعنی در شروع هر سطر یک واحد به عقب می‌رویم.



به همین ترتیب، بقیهٔ سطرهای مربع لاتین چرخشی به‌دست می‌آیند.

نکته

در هر مربع لاتین چرخشی، درایه‌های قطر اصلی برابر ۱ هستند و هر ستون با عدد شمارهٔ آن ستون شروع می‌شود.

تست ۱۱ در مربع لاتین چرخشی A از مرتبهٔ ۴، اگر a_{ij} درایهٔ سطر i ام و ستون j ام باشد، مقدار $a_{12}+a_{21}+a_{31}+a_{44}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

راه‌حل مربع لاتین چرخشی A از مرتبهٔ ۴ به‌صورت مقابل است:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

$$a_{12}+a_{21}+a_{31}+a_{44}=2+4+3+1=10$$

۱۰۲ دو مربع لاتین متعامد

تعریف دو مربع لاتین متعامد

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر آن‌ها، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دورقمی است و رقم‌های سمت چپ مربوط به A و رقم‌های سمت راست مربوط به B (یا برعکس) هستند. اگر هیچ دو تا از این عددهای دورقمی با هم برابر نباشند، می‌گوییم دو مربع لاتین A و B متعامد هستند.

تذکر

۱- دقت کنید که وقتی دو مربع لاتین را کنار هم قرار می‌دهیم، می‌توانیم به جای عدد دورقمی از زوج مرتب استفاده کنیم.

۲- طبق تعریف، مربع‌های لاتین A و B متعامدند اگر و فقط اگر برای هر دو درایهٔ برابر در A درایه‌های نظیر آن‌ها در B متمایز باشند. این محک معمولاً زمانی به کار می‌رود که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند. در واقع برای اینکه نشان دهیم مربع‌های لاتین A و B متعامد نیستند، کافی است دو درایهٔ برابر در A پیدا کنیم که درایه‌های نظیر این دو نیز در B با هم برابرند.

A=

a			
		a	

B=

b			
		b	

علت این امر این است که در مربع حاصل از کنار هم قرار دادن A و B زوج مرتب (عدد دورقمی) تکراری خواهیم داشت.

(a,b)			
		(a,b)	

۳- اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد و از مرتبهٔ n باشند، در مربع حاصل از کنار هم قرار دادن A و B هریک از زوج‌های مرتب مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,n\}\times\{۱,۲,\dots,n\}$ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

۴- اگر $n=۱,۲,۶$، آن‌گاه هیچ دو مربع لاتین از مرتبهٔ n متعامد نیستند، یعنی مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. اما برای هر $n\neq ۱,۲,۶$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارند.

تست ۱۲

چند جفت از مربع‌های لاتین زیر متعامدند؟

A=

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

B=

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

C=

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

راه‌حل درایه‌های نظیر هر دو جفت از مربع‌های لاتین A، B و C را کنار یکدیگر قرار می‌دهیم.

A,B:

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۳	۳۴	۴۱	۱۲
۳۴	۴۱	۱۲	۲۳
۴۲	۱۳	۲۴	۳۱

A,C:

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۴	۳۳	۴۲	۱۱
۳۲	۴۴	۱۱	۲۳
۴۳	۱۱	۲۴	۳۲

B,C:

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۴۲	۱۴	۲۱	۳۳
۲۳	۳۱	۴۴	۱۲

چون در هر سه مربع بالا عدد دورقمی تکراری (مانند اعدادی که با دایره مشخص شده‌اند) وجود دارد، پس هیچ جفت از مربع‌های لاتین داده شده متعامد نیستند.

تست ۱۳

مربع لاتین A به‌صورت مقابل مفروض است:

A=

۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲

B=

		۲	
		۴	
			۴
			۳

چند مربع لاتین B وجود دارد که با A متعامد است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱۲
۴) ۲۳

راه‌حل چون B یک مربع لاتین است، پس می‌توان ستون‌های سوم و چهارم آن را به‌صورت مقابل کامل کرد:

B=

		۲	۱
		۴	۲
		۳	۴
		۱	۳

با کنار هم قرار دادن ستون‌های سوم و چهارم دو مربع لاتین A و B به‌سادگی مشاهده می‌شود که این دو مربع در هیچ شرایطی نمی‌توانند متعامد باشند. چون در مربع جدید عدد دورقمی تکراری وجود دارد. در نتیجه هیچ مربع لاتین B وجود ندارد که با A متعامد باشد.

		۱۲	۳۱
		۲۴	۴۲
		۴۳	۱۴
		۳۱	۲۳

← ۳۱ تکراری است

تست ۱۴

A یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ است. اگر مربع لاتین B با A متعامد باشد و درایه‌های قطر فرعی A با هم برابر باشند، مجموع درایه‌های قطر فرعی B کدام است؟

۱) ۴ **۲)** ۱۰ **۳)** ۸ **۴)** بستگی به درایه‌های قطر اصلی A دارد

راه‌حل چون درایه‌های قطر فرعی مربع لاتین A با هم برابرند و A با B متعامد است، پس تمام درایه‌های قطر فرعی مربع لاتین B باید متمایز باشند و مجموع آن‌ها برابر است با ۱۰=۴+۳+۲+۱.

قضیه ۱

فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و مربع لاتین B' از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست آمده باشد. در این صورت A و B' نیز متعامدند.

تست ۱۵

تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۶

راه‌حل **راه‌حل اول** فرض کنید

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

=A مربع لاتین داده شده و

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

=B مربع لاتین حاصل از تعویض سطرهای دوم و سوم A باشد. در این صورت A و B متعامدند (بررسی کنید). برای هر !۳ جایگشت اعداد ۱، ۲ و ۳، اگر این جایگشت را روی درایه‌های B اعمال کنیم، مربع لاتین حاصل همچنان با A متعامد است (مثلاً اگر جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

را روی درایه‌های B اعمال کنیم، مربع لاتین

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

به‌دست می‌آید که با A متعامد است). در نتیجه حداقل ۶=!۳ مربع لاتین متعامد با A وجود دارد و با توجه به گزینه‌ها نتیجه می‌گیریم گزینهٔ (۴) درست است.

راه‌حل دوم چون مربع‌های لاتین A و B متعامد و درایه‌های قطر اصلی A یکسانند، پس درایه‌های قطر اصلی B متمایز خواهند بود، یعنی این درایه‌ها ۶=!۳ جایگشت دارند.

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

توجه کنید که هریک از جدول‌های بالا به‌طور یکتا به یک مربع لاتین گسترش داده می‌شود. بنابراین تعداد مربع‌های لاتین متعامد با A برابر ۶ است.

تست ۱۶

مربع‌های لاتین A و

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

=B متعامدند. به‌ازای کدام مربع لاتین C ممکن است A و C متعامد نباشند؟

۱)

۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲

۲)

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۳)

۱	۲	۴	۳
۲	۱	۳	۴
۴	۳	۱	۲
۳	۴	۲	۱

۴)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲

راه‌حل اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین C از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست آید، آن‌گاه A و C نیز متعامدند. چون درایه‌های قطر اصلی B با هم برابرند، پس درایه‌های قطر اصلی هر مربع لاتینی که از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست آید، برابرند. بنابراین مربع لاتین گزینهٔ (۴) نمی‌تواند از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست آمده باشد، یعنی این مربع لاتین ممکن است با A متعامد نباشد. توجه کنید که جایگشت‌های اعمال شده روی درایه‌های مربع لاتین B برای ساخت مربع‌های لاتین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) که تعامد آن‌ها را با A تضمین می‌کنند، به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

گزینهٔ (۱)

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$$

گزینهٔ (۲)

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

گزینهٔ (۳)

دست‌گرمی

۲۴۱- دانش‌آموزان کلاس دوازدهم یک مدرسه در چهار کلاس «الف»، «ب»، «پ» و «ت» تقسیم شده‌اند. روز شنبه این دانش‌آموزان چهار جلسه با ۴ دبیر به نام‌های A، B، C و D کلاس دارند و قرار است با هر دبیر یک جلسه کلاس داشته باشند. کدام جدول برنامه‌ریزی مناسبی برای انجام این کار است؟

C=

			x
	۲		

B=

		۱	
۳			

A=

		۲	
	۲		
۲			

۱)

۴	۳	۲	۱	جلسه / کلاس
A	C	D	B	الف
C	A	B	C	ب
B	D	A	D	پ
D	B	C	A	ت

۲)

۴	۳	۲	۱	جلسه / کلاس
B	D	C	A	الف
C	A	D	B	ب
D	B	A	C	پ
A	C	B	D	ت

۳)

۴	۳	۲	۱	جلسه / کلاس
C	A	D	B	الف
A	B	C	D	ب
C	A	D	B	پ
B	C	A	D	ت

۴)

۴	۳	۲	۱	جلسه / کلاس
D	C	A	B	الف
C	A	B	D	ب
D	B	C	A	پ
B	C	D	C	ت

۲۴۲- کدام جدول را نمی‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱)

	۲		
			۱
۳			
	۴		

۲)

			۱
			۲
		۴	۳

۳)

۳		۲	
	۴		۱

۴)

	۴		
۳		۲	
	۱		

۲۴۳- به چند طریق می‌توان جدول مقابل را با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱			
	۱		
		۳	
			۳

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۴۴- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به‌صورت مقابل مشخص شده‌اند. مقدار x کدام است؟

A =

۱		۲	
	۳		x
		۱	

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۴۵- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به‌صورت مقابل مشخـص شـده‌اند. عدد x برابر چند تا از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند باشد؟

A =

			۱	
۲		x		
	۱			
				۱

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۶- در نوشتن یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵، برای خانه‌های شامل عدد ۲ چند انتخاب وجود دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۲۴۷- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۱۶ را انتخاب کرد که درایه‌های آن‌ها با هم برابر باشند؟

۱) ۷۳۶۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۸۹۶۰ ۴) ۱۹۲۰

۲۴۸- فرض کنید A یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ باشـد. به چند طریق می‌توان دو خانه از A را انتخاب کرد که در یک سـطر یا یک سـتون قرار نداشته باشند و درایه‌های این دو خانه با هم برابر نباشند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۲۵

۲۴۹- به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون باشند و مجموع درایه‌های این سه خانه برابر ۸ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۲۵۰- مربع لاتین B از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات مقابل را داریم. مقدار x کدام است؟

A=

	۲		
	۱		
			x
۳			

B=

			۱
	۳		

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵۱- مربع لاتین B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات روبه‌رو به ما داده شده است. مقدار x کدام است؟

A=

۴			
		۴	

B=

۱			
	۲		
		۳	
		x	

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵۲- مربع‌های لاتین A و B متعامدند. تعدادی از درایه‌های A و B به صورت مقابل داده شده‌اند. مقدار x کدام است؟

A=

۱	۲	۳	
	۴		
		۴	

B=

			۳
	x		۱
		۲	

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵۳- چهار نفر در مجموع چهار پیراهن و چهار شلوار دارند. آن‌ها می‌خواهند در چهار مراسم از این لباس‌ها استفاده کنند به گونه‌ای که هر کس هریک از پیراهن‌ها و هریک از شلوارها را دقیقاً در یکی از چهار مراسم استفاده کند و هر پیراهن با هر شلوار نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار گیرد. کدام جدول به این چهار نفر کمک می‌کند که در هر مراسم کدام پیراهن و کدام شلوار را بپوشند؟

۱)

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۲۳	۱۴	۴۱	۳۲
۴۲	۳۱	۲۴	۱۳

۲)

۱۲	۲۱	۳۲	۴۳
۱۴	۲۲	۱۳	۲۴
۲۳	۱۱	۳۴	۴۱
۳۱	۴۲	۴۴	۳۳

۳)

۱۴	۳۱	۴۳	۱۲
۲۲	۳۳	۱۱	۲۴
۲۱	۳۲	۲۳	۳۴
۱۳	۴۴	۴۲	۴۱

۴)

۴۱	۱۲	۳۴	۲۱
۳۳	۴۲	۲۲	۱۱
۱۳	۲۳	۳۲	۴۳
۲۴	۳۱	۱۴	۴۴

۲۵۴- مربع‌های لاتین A و

B=

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

متعامدند. به‌ازای کدام مربع لاتین C قطعاً A و C متعامدند؟

۱)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳)

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۴)

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

آزمون ۴۶
تا ابتدای مربع لاتین چرخشی

-۷۲۳ کدام جدول مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ است؟

۱)

۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱

۲)

۱	۲	۴	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲

۳)

۲	۱	۳	۴
۳	۲	۴	۱
۲	۴	۱	۳
۱	۳	۲	۴

۴)

۲	۱	۳	۲
۴	۳	۴	۱
۱	۴	۲	۳
۳	۲	۱	۴

-۷۲۴ کدام‌یک از جدول‌های زیر را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱)

۱		۳
	۲	

۲)

۱		۳
۳		۱

۳)

	۱	
		۲
۳		

۴)

۲		
		۲
	۳	

-۷۲۵ چند مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

-۷۲۶ مجموع درایه‌های سطر سوم یک مربع لاتین از مرتبهٔ n برابر ۹۱ است. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

-۷۲۷ به چند طریق می‌توان جدول مقابل را با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱	۲	۳	
		۱	
	۳	۴	

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

-۷۲۸ اگر جدول مقابل مربعی لاتین از مرتبهٔ ۳ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱	۲	۳
۲	x	
۳		y

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

-۷۲۹ در یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴، اگر R_i مجموع درایه‌های سطر i ام و C_i مجموع درایه‌های ستون i ام باشد، ماکزیمم مقدار $R_1+C_2+C_4$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

-۷۳۰ در مربع لاتین A از مرتبهٔ ۴، اگر a_{ij} درایهٔ سطر i ام و ستون j ام باشد، کمترین مقدار $a_{12}+a_{21}+a_{34}+a_{41}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۳

-۷۳۱ حاصل‌ضرب درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ بر 2^n بخش‌پذیر است. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که به‌ازای آن این ویژگی برقرار است، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

-۷۳۲ به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ را انتخاب کرد که درایه‌های این دو خانه باهم برابر باشند؟

۱) ۱۵ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

-۷۳۳ به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ را انتخاب کرد که درایه‌های این سه خانه دوبه‌دو متمایز باشند؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۴۴۰ ۳) ۲۸۸۰ ۴) ۴۳۲۰

-۷۳۴ به چند طریق می‌توان سه خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ را انتخاب کرد که هیچ دو تا در یک سطر نباشند و مجموع درایه‌های این سه خانه برابر ۱۴ باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

-۷۳۵ به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ را انتخاب کرد که مجموع درایه‌های این دو خانه برابر ۱۰ باشد؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۴۷

سؤال	گام
۷۲۳	۹۸
۷۲۴	۹۸
۷۲۵	۹۸ ۱۰۰
۷۲۶	۹۸
۷۲۷	۹۸
۷۲۸	۹۸
۷۲۹	۹۸
۷۳۰	۹۸
۷۳۱	۹۸
۷۳۲	۹۸
۷۳۳	۹۸
۷۳۴	۹۸
۷۳۵	۹۸
۷۳۶	۱۰۰
۷۳۷	۹۸

۷۳۶- مربع لاتین B از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۱ & ۵ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات زیر داده شده است. مقدار x کدام است؟

A =

۲	۱			
				x

B =

۲				
				۴
				۳

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۵

۷۳۷- مربع لاتین B از اعمال جایگشـتی روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دسـت آمده اسـت. در مورد A و B اطلاعات زیر را داریم. مقدار x کدام است؟

A=

	۱		
		۱	

B=

	x		۲
۴			
		۱	

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

آزمون ۴۷

آزمون جامع مربع لاتین

سؤال	گام
۷۳۸	۹۸
۷۳۹	۹۸
۷۴۰	۹۸
۷۴۱	۹۸
۷۴۲	۹۸
۷۴۳	۹۸ ۱۰۰
۷۴۴	۹۸ ۸۹
۷۴۵	۹۸
۷۴۶	۱۰۰ ۹۸
۷۴۷	۱۰۰ ۹۸
۷۴۸	۱۰۲
۷۴۹	۱۰۲ ۱۰۱
۷۵۰	۱۰۲ ۱۰۱
۷۵۱	۱۰۲
۷۵۲	۱۰۰ ۱۰۲

۷۳۸- کدام‌یک از جدول‌های زیر را می‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین تبدیل کرد؟

۱)

۱	۲	۳	
			۴

۲)

۱			
	۱		
		۱	
			۲

۳)

۱			
	۱		
		۲	۳

۴)

۱			
	۲		
		۳	
			۴

۷۳۹- کدام جدول را نمی‌توان با پر کردن خانه‌های خالی به مربعی لاتین گسترش داد؟

۱)

۱			
	۲		
		۳	
			۴

۲)

۱	۲		
		۳	۴

۳)

۱		۲	۴
	۳		

۴)

۱	۲		
۳	۴		

۷۴۰- چند مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ وجود دارد که سه سطر اول آن همانند جدول مقابل باشد؟

۱	۳	۲	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۳	۲	۴	۱	۵

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۱- بـه چند طریق می‌توان خانه‌های خالی جـدول مقابل را طوری پر کرد که جدول حاصل مربعی لاتین از مرتبهٔ ۴ باشد؟

۱	۲	۳	۴
۲			
۳			
۴			

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۲- تعدادی از درایه‌های مربع لاتین A به‌صورت مقابل داده شـده اسـت. عدد x برابر چندتا از مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد؟

A=

۱	۲		
۳	۴		
		۱	
			x

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۳- ستون اول یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ مفروض است. ستون دوم این مربع لاتین را به چند طریق می‌توان پر کرد؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۴۴- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ را انتخاب کرد که در یک سـطر یا یک سـتون قرار نداشـته باشـند و درایه‌های این دو خانه متمایز باشند؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۷۲۰

۷۴۵- به چند طریق می‌توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ را انتخاب کرد که در یک سطر یا یک ستون باشند و تفاضل درایه‌های این دو خانه برابر ۲ باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۷۴۶- مربع لاتین B از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دست آمده است. در مورد A و B اطلاعات زیر را داریم. مقدار x کدام است؟

A=

۱	۲		
۳	۴		

B=

		۱	
	x		

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۷۴۷- مربع لاتین B از اعمال جایگشـتی روی درایه‌های مربع لاتین A به‌دسـت آمده اسـت. در مورد A و B اطلاعات زیر داده شـده است. مقدار x کدام است؟

A=

			x
۳			

B=

		۲	
	۴		
۴			

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۴۸- به‌ازای کدام مربع لاتین B، مربع‌های لاتین A= و B متعامدند؟

A=

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲)

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۳)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

۴)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۷۴۹- دربارهٔ مربع‌های لاتین متعامد A و B اطلاعات زیر داده شده است. مقدار x کدام است؟

A=

	۲		
		۲	
۲			

B=

	x		
		۱	
			۳
۴			

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۷۵۰- A مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ ۵ و B یک مربع لاتین متعامد با A است. مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۷۵۱- فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ باشند. به چند طریق می‌توان یک خانه از A را انتخاب کرد که مجموع درایه‌های این خانه و خانهٔ نظیر آن در مربع لاتین B برابر ۵ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۷۵۲- مربع‌های لاتین A و B= متعامدند. به‌ازای کدام مربع لاتین C قطعاً A و C متعامدند؟

B=

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲)

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۳)

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۴)

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

فصل دهم

پاسخ تشریحی
تست‌های دست‌گرمی

۲۳۶ **۲** فرض کنید از گل نوع iام x_i شاخه انتخاب کنیم $(i=۱,۲,۳,۴,۵)$.

در این صورت $x_۱+\cdots+x_۵=۷$. بنابراین به $\binom{۷+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۱}{۴}=\frac{۱۱!}{۴!۷!}=۳۳۰$ طریق می‌توانیم هفت شاخه گل از پنج نوع گل انتخاب کنیم که در پنج حالت هر هفت شاخه از یک نوع هستند. پس پاسخ برابر $۳۳۰-۵=۳۲۵$ است.

۲۳۷ **۳** چون x_i ها اعدادی صحیح‌اند، پس شرط‌های $x_۱>۲$ و $x_۲>۳$ به‌ترتیب با شرط‌های $x_۱\geq ۳$ و $x_۲\geq ۴$ معادل هستند. اکنون پاسخ برابر است با

$$\binom{۱۲-(۳+۴)+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

۲۳۸ **۳** باید جواب‌های صحیح معادلهٔ $x+y+z=۸$ را چنان به‌دست آوریم که $x\geq -۱$، $y\geq -۱$ و $z\geq -۱$. بنابراین پاسخ برابر است با

$$\binom{۸-(-۱-۱-۱)+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۳}{۲}=۷۸$$

۲۳۹ **۳** **راه‌حل اول** چون می‌خواهیم x_i عددی فرد باشد، پس قرار می‌دهیم $x_i=۲y_i+۱$ و چون x_i صحیح و نامنفی است، پس y_i نیز صحیح و نامنفی است $(i=۱,۲,۳,۴)$. اکنون می‌توان نوشت

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۴\Rightarrow(۲y_۱+۱)+(۲y_۲+۱)+(۲y_۳+۱)+(۲y_۴+۱)=۱۴$$

$$۲y_۱+۲y_۲+۲y_۳+۲y_۴=۱۰\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴=۵$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ آخر برابر $\binom{۸}{۳}=\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}$ است، پس پاسخ برابر $\binom{۸}{۳}$ است.

راه‌حل دوم قرار می‌دهیم $x_i=۲y_i-۱$. چون x_i صحیح و نامنفی است، پس y_i صحیح و مثبت است $(i=۱,۲,۳,۴)$. اکنون می‌توان نوشت

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۴\Rightarrow(۲y_۱-۱)+(۲y_۲-۱)+(۲y_۳-۱)+(۲y_۴-۱)=۱۴$$

$$۲y_۱+۲y_۲+۲y_۳+۲y_۴=۱۸\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴=۹$$

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ آخر برابر $\binom{۸}{۳}=\binom{۹-۱}{۴-۱}$ است. پس پاسخ برابر $\binom{۸}{۳}$ است.

۲۴۰ **۲** تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=۱۰$ برابر $\binom{۹}{۲}=۳۶$ است و تعداد جواب‌های طبیعی این معادله با شرط $x\geq ۵$ برابر است با

$$\binom{۱۰-(۵+۱+۱)+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

پس بنابر اصل متمم، تعداد جواب‌های مطلوب برابر است با $۳۶-۱۰=۲۶$.

۲۴۱ **۲** در جدول گزینهٔ (۱)، کلاس «ب» با دبیر C دو جلسه کلاس دارد، در جدول گزینهٔ (۳)، دبیر B در جلسهٔ اول همزمان در دو کلاس حاضر است و در جدول گزینهٔ (۴)، کلاس «ت» با دبیر C دو جلسه کلاس دارد. پس این سه جدول برنامهٔ مناسبی برای انجام کار نیستند. در واقع جدولی مورد نظر است که مربع لاتین باشد.
توجه کنید که در این مسئله، درایه‌های جدول‌های گزینه‌ها به‌جای اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴، حروف A، B، C و D هستند. در جدول گزینهٔ (۲)، هریک از این حروف در هر سطر و هر ستون درست یک بار ظاهر شده‌اند، یعنی این جدول یک مربع لاتین است.

۲۴۲ **۴** توجه کنید که در جدول گزینهٔ (۴)، درایهٔ a برابر هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نمی‌تواند باشد. بنابراین این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

	۴		
۳	a	۲	
	۱		

در ضمن سه جدول دیگر را به‌صورت زیر می‌توان به مربعی لاتین گسترش داد:

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳

گزینهٔ (۱)

۴	۳	۲	۱
۱	۴	۳	۲
۲	۱	۴	۳
۳	۲	۱	۴

گزینهٔ (۲)

۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۱	۳	۴	۲

گزینهٔ (۳)

۲۴۳ **۴** مربع را به شکل زیر می‌توان کامل کرد:

۱	۳		
۳	۱		
		۳	۱
		۱	۳

۲ حالت

۲	۴
۴	۲

۴	۲
۲	۴

۲ حالت

۲	۴
۴	۲

۴	۲
۲	۴

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌هایی که می‌توان جدول را به مربعی لاتین گسترش داد، برابر $۲\times ۲=۴$ است.

۲۴۴ **۱** فرض کنید A به شکل زیر باشد. از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستونی از A عدد تکراری وجود ندارد و هریک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باید در هر سطر و هر ستون A ظاهر شوند، نتیجه می‌گیریم

A =

۱	a	۲	
c	۳	b	x
		۱	

$$a\neq ۱, a\neq ۲, a\neq ۳\Rightarrow a=۴$$

$$b\neq ۱, b\neq ۲, b\neq ۳\Rightarrow b=۴$$

$$c\neq ۱, c\neq ۳, c\neq b=۴\Rightarrow c=۲$$

$$x\neq ۳, x\neq c=۲, x\neq b=۴\Rightarrow x=۱$$

۲۴۵ **۱** عدد ۱ باید در سطر دوم A ظاهر شود. خانهٔ اول این سطر با عدد ۲ پر شده است. همچنین عدد ۱ در ستون‌های دوم، چهارم و پنجم A ظاهر شده است. پس در خانه‌های دوم، چهارم و پنجم از سطر دوم A نمی‌توانیم عدد ۱ را قرار دهیم چون در غیر این صورت، در ستون مربوطه عدد ۱ تکرار می‌شود. در نتیجه عدد ۱ فقط در خانهٔ سوم از سطر دوم می‌تواند قرار گیرد، پس $x=۱$. در نتیجه x فقط برابر یکی از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند باشد.

۲۴۶ **۳** هر مربع لاتین از مرتبهٔ ۵، پنج خانه شامل عدد ۲ دارد که هیچ دو تا در یک سطر یا یک ستون نیستند. بنابراین برای انتخاب خانه‌های شامل عدد ۲، یکی از پنج خانهٔ سطر اول، یکی از چهار خانهٔ سطر دوم که در ستون خانهٔ اول قرار ندارند، یکی از سه خانهٔ سطر سوم که با هیچ‌یک از دو خانهٔ قبلی در یک ستون نیستند، یکی از دو خانهٔ سطر چهارم که با هیچ‌یک از سه خانهٔ قبلی در یک ستون نیستند و در نهایت تنها خانهٔ سطر پنجم را که با هیچ‌یک از چهار خانهٔ قبلی در یک ستون نیست، انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، خانه‌های شامل عدد ۲ را به $۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۱۲۰$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم.

	x			
		x		
				x
x				
			x	

۲۴۷ **۳** در مربع لاتین از مرتبهٔ ۱۶ هریک از اعداد ۱ تا ۱۶ دقیقاً در شانزده خانه ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب سه خانه با درایه‌های برابر، ابتدا یکی از شانزده عدد (مثلاً x) را انتخاب می‌کنیم. سپس سه تا از شانزده خانهٔ شامل عدد x را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب سه خانه با درایه‌های برابر، برابر است با

$$\underset{\text{انتخاب x}}{۱۶}\times\overset{\text{انتخاب سه خانهٔ شامل x}}{\binom{۱۶}{۳}}=۸۹۶۰$$

۲۴۸ **۱** چون A یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ است، پس هریک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در هر سطر و هر ستون A دقیقاً یک بار ظاهر می‌شوند. بنابراین برای انتخاب دو خانه از A که در یک سطر یا یک ستون نباشند و درایه‌های مختلفی داشته باشند، ابتدا دو تا از ۵ عدد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{۵}{۲}=۱۰$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. اگر این دو عدد برابر i و j باشند، ابتدا یکی از ۵ خانهٔ شامل عدد i را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید در سطر شامل این خانه و نیز در ستون شامل این خانه دقیقاً یک خانه شامل عدد j وجود دارد، پس دوتا از ۵ خانهٔ شامل عدد j با خانهٔ انتخاب شده در یک سطر یا یک ستون قرار دارند. بنابراین به ۳ طریق می‌توانیم خانهٔ مطلوب شامل عدد j را انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$\underbrace{۱۰}_{\text{انتخاب دو عدد i و j}} \times \underbrace{۵}_{\text{انتخاب یک خانهٔ شامل عدد i}} \times \underbrace{۳}_{\text{انتخاب یک خانهٔ شامل عدد j}} = ۱۵۰$$

۲۴۹ **۲** چون خانه‌ها از یک سطر یا یک ستون مربع لاتین انتخاب می‌شوند، پس درایه‌های آن‌ها دوبه‌دو متمایزند. در دو حالت مجموع سه درایهٔ متمایز برابر ۸ است:

$$\{۱,۲,۵\} \quad \{۱,۳,۴\}$$

ابتدا به ۱۲ طریق یکی از سطرها یا یکی از ستون‌ها را انتخاب می‌کنیم. پس از انتخاب یک سطر یا یک ستون، به یک طریق سه عدد $\{۱,۲,۵\}$ و به یک طریق نیز سه عدد $\{۱,۳,۴\}$ را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$۱۲\times۲=۲۴$$

۲۵۰ **۴** مربع لاتین A از اعمال عکس جایگشت داده شده، یعنی جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ روی درایه‌های مربع لاتین B به‌دست می‌آید. این جایگشت را روی دو درایهٔ داده شده از B اعمال می‌کنیم. در نتیجه A به‌صورت زیر است. اکنون می‌توان نوشت

A=

	۲		۱
	۱		
	a		x
۳	۴		b

$$a\neq۱, a\neq۲, a\neq۴ \Rightarrow a=۳$$

$$b\neq۱, b\neq۳, b\neq۴ \Rightarrow b=۲$$

$$x\neq۱, x\neq b=۲, x\neq a=۳ \Rightarrow x=۴$$

۲۵۱ **۴** به جای عدد ۴ واقع در سطر چهارم و ستون سوم A، در مربع لاتین B عدد x قرار داده شده است، پس برای به‌دست آوردن B به جای هر عدد ۴ از A باید x قرار دهیم. در نتیجه درایهٔ سطر دوم و ستون اول B نیز برابر x است. چون در هیچ سطر و هیچ ستونی از B عدد تکراری وجود ندارد. نتیجه می‌گیریم $x\neq۱$، $x\neq۲$ و $x\neq۳$. بنابراین x باید برابر ۴ باشد.

B=

۱			
x	۲		
		۳	
		x	

۲۵۲ **۴** ابتدا توجه کنید که a برابر هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ نیست، پس $a=۴$. از طرف دیگر، چون A و B متعامدند، پس اگر دو درایهٔ A برابر باشند، درایه‌های نظیر آن‌ها در B متمایزند. با توجه به سه درایهٔ A که برابر ۴ هستند، نتیجه می‌گیریم درایه‌های نظیر این سه در B متمایزند، بنابراین $x\neq۲$ و $x\neq۳$. همچنین معلوم است که $x\neq۱$، پس $x=۴$.

B=

			۳
	x		۱
		۲	

A=

۱	۲	۳	a
	۴		
		۴	

۲۵۳ **۱** با توجه به شرایط گفته شده در صورت سؤال باید به دنبال یک جفت مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۴ باشیم. در واقع یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ برای اینکه نشان دهد هر کس در هر مراسم چه پیراهنی بپوشد و یک مربع لاتین دیگر از مرتبهٔ ۴ نیز متعامد با آن برای اینکه نشان دهد هر کس در هر مراسم کدام شلوار را بپوشد، لازم است.

B=

مراسم / افراد	x	y	z	t
a				
b				
c				
d				

A=

مراسم / افراد	x	y	z	t
a				
b				
c				
d				

چهار مراسم را با x، y، z و t، افراد را با a، b، c و d، پیراهن‌ها را با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ و شلوارها را نیز با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان می‌دهیم. هریک از جدول‌های A و B را با اعداد ۱ تا ۴ به‌گونه‌ای پر می‌کنیم که جدول A نشان دهد هر کس در هر مراسم چه پیراهنی بپوشد و جدول B نشان دهد هر کس در هر مراسم کدام شلوار را بپوشد. هیچ سطر از A نباید عدد تکراری داشته باشد، زیرا هر کس در چهار مراسم باید چهار پیراهن مختلف بر تن کند. هیچ ستون از A نیز نباید عدد تکراری داشته باشد، زیرا در هر مراسم، افراد چهار پیراهن مختلف بر تن دارند، پس A باید یک مربع لاتین باشد. به‌طور مشابه B نیز باید یک مربع لاتین باشد. در ضمن A و B باید متعامد باشند، زیرا هر پیراهن با هر شلوار دقیقاً یک بار باید مورد استفاده قرار گیرد، یعنی از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر A و B باید تمام ۱۶ زوج مرتب مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}\times\{۱,۲,۳,۴\}$ ایجاد شوند. در بین چهار جدول داده شده، فقط جدول گزینهٔ (۱) از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر دو مربع لاتین متعامد به‌دست آمده است. توجه کنید که در جدول‌های گزینه‌های (۲) و (۳)، A نمی‌تواند مربع لاتین باشد چون اعداد دورقمی ستون اول رقم‌های دهگان متمایز ندارند. همچنین در جدول گزینهٔ (۴)، B نمی‌تواند مربع لاتین باشد چون اعداد دورقمی سطر چهارم رقم‌های یکان متمایز ندارند.

B=

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳

A=

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

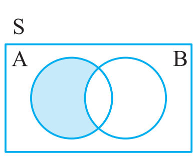
بنابراین به کمک این جدول، چهار نفر می‌توانند مشخص کنند که در هر مراسم کدام پیراهن و کدام شلوار را بپوشند.

۲۵۴ **۱** اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند و مربع لاتین C از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست آید، A و C نیز متعامدند. مربع لاتین گزینهٔ (۱) از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ روی درایه‌های B به‌دست آمده است. پس A و این مربع لاتین متعامدند.

۲۵۵ **۱** فرض کنید $S=\{۱,۲,\dots,۱۸۴\}$ و A و B به‌ترتیب مجموعهٔ اعدادی از S باشند که بر ۴ و ۳ بخش‌پذیرند. باید تعداد اعضای $A-B$ را حساب کنیم. می‌توان نوشت $|A-B|=|A|-|A\cap B|$. توجه کنید که $A\cap B$ مجموعهٔ اعدادی از S است که بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

$$|A|=\left[\frac{۱۸۴}{۴}\right]=۴۶ , \quad |A\cap B|=\left[\frac{۱۸۴}{۱۲}\right]=۱۵$$

در نتیجه پاسخ برابر است با $|A-B|=۴۶-۱۵=۳۱$.



فصل یازدهم

پاسخ تشریحی آزمون‌ها

۷۱۳ (۳) **راه‌حل اول** در نصف جایگشت‌های حروف arrangee حرف n بعد از حرف g و در نصف دیگر حرف g بعد از حرف n قرار دارد. بنابراین تعداد جایگشت‌های حروف این کلمه را به‌دست می‌آوریم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم. طبق قضیهٔ جایگشت باتکرار می‌توان نوشت $\frac{۱}{۲}\times\frac{۸!}{۲!۲!۲!}=۲۵۲۰$

راه‌حل دوم هشت جایگاه در یک ردیف در نظر می‌گیریم. ابتدا دو تا از هشت جایگاه را به $\binom{۸}{۲}=۲۸$ طریق انتخاب و حروف n و g را به یک طریق (n بعد از g) در آن‌ها قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از قضیهٔ جایگشت باتکرار، حروف a، a، r، r، e و e را به $\frac{۶!}{۲!۲!۲!}=۹۰$ طریق در شش جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با $۲۸\times۱\times۹۰=۲۵۲۰$.

۷۱۴ (۳) اگر حرکت به سمت راست را با R و حرکت به سمت بالا را با U نشان دهیم، هر مسیر از A به B یک جایگشت از پنج حرف R و چهار حرف U است. بنابراین طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار، پاسخ برابر است با $\frac{۹!}{۵!۴!}=\binom{۹}{۴}$

۷۱۵ (۱) پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $۳x_۱+۳x_۲+۳x_۳+۳x_۴=۳۰$ یا هم‌ارز آن $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$، یعنی برابر $\binom{۱۳}{۳}$ است.

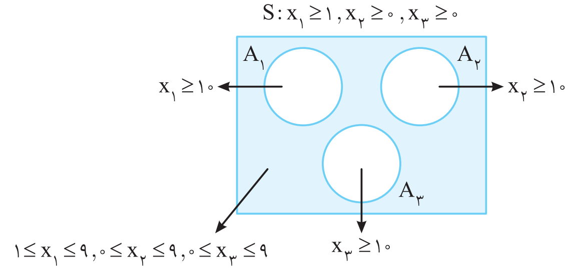
۷۱۶ (۴) پاسخ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$، یعنی $\binom{۷+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$

۷۱۷ (۳) هر جمله از بسط داده شده به صورت $x^{m_۱}y^{m_۲}z^{m_۳}$ است که در آن $m_۱$، $m_۲$ و $m_۳$ اعدادی صحیح و نامنفی هستند و $m_۱+m_۲+m_۳=۵$. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر $\binom{۷}{۲}=۲۱$ است. در نتیجه بسط داده شده ۲۱ جمله دارد.

۷۱۸ (۲) اگر نمایش یک عدد سه رقمی را به‌صورت $\overline{x_۱x_۲x_۳}$ فرض کنیم، باید تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ را تعیین کنیم به‌طوری که $۱\le x_۱\le ۹$، $۰\le x_۲\le ۹$ و $۰\le x_۳\le ۹$. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ باشد به‌طوری که $x_۱\ge۱$، $x_۲\ge۰$، $x_۳\ge۰$ و A_i مجموعهٔ جواب‌هایی در S باشد که $x_i\ge۱۰$ $(i=۱,۲,۳)$. در این صورت مطلوب همهٔ جواب‌هایی در S است که در هیچ‌یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند. توجه کنید که هیچ دو تا از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ عضو مشترکی ندارند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱|-|A_۲|-|A_۳|=\binom{۱۲-(۱+۰+۰)+۳-۱}{۳-۱}-\binom{۱۲-(۱۰+۰+۰)+۳-۱}{۳-۱}$$
$$-\binom{۱۲-(۱+۱۰+۰)+۳-۱}{۳-۱}-\binom{۱۲-(۱+۰+۱۰)+۳-۱}{۳-۱}$$
$$=\binom{۱۳}{۲}-\binom{۴}{۲}-\binom{۳}{۲}-\binom{۳}{۲}=۷۸-۶-۳-۳=۶۶$$

$S: x_۱\ge۱, x_۲\ge۰, x_۳\ge۰$



۷۱۹ (۲) فرض کنید عدد مورد نظر به‌ترتیب $x_۱$ رقم ۱، $x_۲$ رقم ۲، $x_۳$ رقم ۳ و $x_۴$ رقم ۴ داشته باشد، در این صورت $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۶$ و توجه کنید که پس از انتخاب ارقام، عدد به‌صورت یکتا ساخته می‌شود (زیرا ارقام عدد را باید از چپ به راست به‌صورت صعودی بنویسیم). در نتیجه پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۶$، یعنی برابر $\binom{۹}{۳}=۸۴$ است.

۷۲۰ (۲) فرض کنید به سه دانش‌آموز به‌ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ خودکار و $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ مداد برسد. در این صورت $\begin{cases}x_۱+x_۲+x_۳=۷\\ y_۱+y_۲+y_۳=۶\end{cases}$ و پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این دستگاه معادلات، یعنی برابر با $\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۲}=۱۵\times۱۰=۱۵۰$ است.

۷۲۱ (۳) اگر $۸\le x_۱+x_۲+x_۳\le۱۰$، آن‌گاه $x_۱+x_۲+x_۳$ برابر ۸، ۹ یا ۱۰ است. پس برای محاسبهٔ تعداد جواب‌های نامعادله، سه حالت در نظر می‌گیریم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل جمع، پاسخ برابر است با

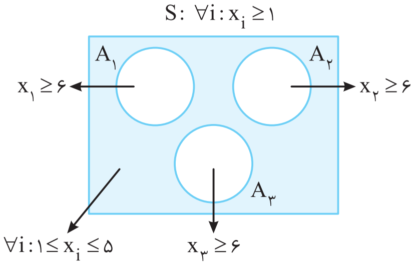
$x_۱+x_۲+x_۳=$ ۸ یا ۹ یا ۱۰

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۱۲}{۲}=۴۵+۵۵+۶۶=۱۶۶$$

۷۲۲ (۲) فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$ با شرط $x_i\ge۱$، $i=۱,۲,۳$ و A_i مجموعهٔ جواب‌هایی در S باشد که $x_i\ge۶$. در این صورت مطلوب جواب‌هایی از S است که در هیچ‌یک از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قرار ندارند. توجه کنید که هیچ دو تا از $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ عضو مشترکی ندارند. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$|S|-|A_۱|-|A_۲|-|A_۳|=|S|-۳|A_۱|=\binom{۹}{۲}-۳\binom{۱۰-(۶+۱+۱)+۳-۱}{۳-۱}$$
$$=\binom{۹}{۲}-۳\binom{۴}{۲}=۳۶-۱۸=۱۸$$

$S: \forall i: x_i\ge۱$



۷۲۳ (۲) گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) در ستون دوم عدد ۲ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

گزینهٔ (۲) در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد، پس این جدول یک مربع لاتین است.

گزینهٔ (۳) در ستون اول عدد ۲ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

گزینهٔ (۴) در سطر دوم عدد ۴ تکرار شده است، پس این جدول مربع لاتین نیست.

۷۲۴ (۳) گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) خانهٔ خالی سطر دوم را با هیچ عددی نمی‌توان پر کرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

گزینهٔ (۲) اگر این جدول یک مربع لاتین باشد، آن گاه درایهٔ سطر اول و ستون دوم باید برابر ۲ باشد. اما در این حالت خانهٔ خالی سطر سوم را با هیچ عددی نمی‌توان پر کرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

گزینهٔ (۳) این جدول به‌صورت زیر قابل گسترش به مربعی لاتین است:

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

گزینهٔ (۴) هیچ‌یک از خانه‌های سطر سوم را نمی‌توان با عدد ۲ پر کرد. پس این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد.

۷۲۵ (۲) فرض کنید سطر اول مربع لاتین به‌صورت

a	b	c

باشد (abc جایگشتی از اعداد ۱، ۲ و ۳ است). با توجه به جدول زیر x برابر b یا c است:

a	b	c
x		

در هریک از دو حالت بقیهٔ خانه‌ها به‌طور یکتا پر می‌شوند چون هریک از a، b و c در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک بار ظاهر می‌شوند.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

پس دو نوع مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد. اکنون در هریک از این دو نوع مربع باید اعداد ۱، ۲ و ۳ را به‌جای a، b و c قرار دهیم. این کار را به $!۳$ طریق می‌توانیم انجام دهیم. پس بنابر اصل ضرب، تعداد مربع‌های لاتین ۳×۳ برابر $۱۲=!۳\times۲$ است.

۷۲۶ (۴) مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون دلخواه مربع لاتین از مرتبهٔ n برابر $\frac{n(n+1)}{۲}$ است. چون $\frac{n(n+1)}{۲}=۹۱$، پس $n+1=۱۴$، یعنی $n=۱۳$.

۷۲۷ (۲) با توجه به جدول زیر می‌توان نوشت

۱	۲	۳	a
b	c	۱	d
e	f	g	h
i	۳	۴	j

$$a\neq ۱, a\neq ۲, a\neq ۳ \Rightarrow a=۴$$
$$g\neq ۱, g\neq ۳, g\neq ۴ \Rightarrow g=۲$$
$$c\neq ۱, c\neq ۲, c\neq ۳ \Rightarrow c=۴$$
$$f\neq ۲, f\neq ۳, f\neq c=۴ \Rightarrow f=۱$$
$$h\neq a=۴, h\neq f=۱, h\neq g=۲ \Rightarrow h=۳$$
$$d\neq h=۳, d\neq ۱, d\neq a=۴ \Rightarrow d=۲$$

به همین صورت نتیجه می‌گیریم $j=۱$، $i=۲$، $e=۴$ و $b=۳$. پس مربع داده شده به‌طور یکتا به مربعی لاتین گسترش داده می‌شود. این مربع لاتین به‌صورت مقابل است:

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۷۲۸ (۴) از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستون عدد تکراری نداریم و در هر سطر و هر ستون همهٔ اعداد ۱، ۲ و ۳ ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم

۱	۲	۳
۲	x	a
۳		y

$$a\neq ۲, a\neq ۳ \Rightarrow a=۱$$
$$\left.\begin{array}{l} x\neq ۲, x\neq a=۱ \Rightarrow x=۳ \\ y\neq ۳, y\neq a=۱ \Rightarrow y=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow x+y=۵$$

۷۲۹ (۲) مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون دلخواه یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ برابر $\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$ است. بنابراین $R_1=C_2=C_4=۱۰$، یعنی

$$R_1+C_2+C_4=۱۰+۱۰+۱۰=۳۰$$

۷۳۰ (۲) چون کمترین مقدار مجموع چهار درایهٔ مشخص شده را می‌خواهیم، پس

	a_{12}		
a_{21}			
			a_{34}
a_{41}			

$$a_{12}=a_{21}=a_{34}=۱,\quad a_{41}=۲$$

دقت کنید که چون a_{21} و a_{41} در یک ستون قرار دارند، پس هر دو با هم نمی‌توانند برابر ۱ باشند. در نتیجه

$$\min(a_{12}+a_{21}+a_{34}+a_{41})=۱+۱+۱+۲=۵$$

۷۳۱ (۳) در هر مربع لاتین از مرتبهٔ ۴، هریک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ چهار بار ظاهر می‌شوند، پس حاصل‌ضرب درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ برابر با $۱^۴\times۲^۴\times۳^۴\times۴^۴=۲^۴\times۳^۴\times۲^۸=۲^{۱۲}\times۳^۴$ است. در نتیجه بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که ۲^n یک شمارندهٔ این حاصل‌ضرب باشد، برابر ۱۲ است.

۷۳۲ (۳) در مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ هریک از اعداد ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه ظاهر می‌شوند، بنابراین برای انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، ابتدا یکی از شش عدد (مثلاً x) و سپس دو تا از شش خانهٔ شامل عدد x را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه با درایه‌های برابر، برابر است با

$$\overset{\text{x انتخاب}}{۶}\times\overset{\text{انتخاب دو خانه شامل x}}{\binom{۶}{۲}}=۶\times۱۵=۹۰$$

۷۳۳ (۴) در مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ هریک از عددهای ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه ظاهر می‌شوند. برای انتخاب سه خانه با درایه‌های دوبه‌دو متمایز، ابتدا سه تا از عددهای ۱ تا ۶ (مثلاً x، y و z) و سپس یکی از شش خانهٔ شامل x، یکی از شش خانهٔ شامل y و یکی از شش خانهٔ شامل z را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

$$\overset{\text{انتخاب x، y و z}}{\binom{۶}{۳}}\times\overset{\text{انتخاب یک خانه شامل x}}{\binom{۶}{۱}}\times\overset{\text{انتخاب یک خانه شامل y}}{\binom{۶}{۱}}\times\overset{\text{انتخاب یک خانه شامل z}}{\binom{۶}{۱}}$$
$$=۲۰\times۶\times۶\times۶=۴۳۲۰$$

۷۳۴ (۱) چون در مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ فقط اعداد ۱ تا ۵ ظاهر می‌شوند، پس به شرطی مجموع سه تا از این اعداد برابر ۱۴ است که دو تا برابر ۵ باشند و یکی برابر ۴ باشد. بنابراین برای انتخاب سه خانه با مجموع ۱۴ که هیچ دو تا در یک سطر نیستند، ابتدا از دو سطر دو خانه شامل درایهٔ ۵ و سپس از یک سطر دیگر خانه‌ای شامل درایهٔ ۴ انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، پاسخ برابر است با $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۱۰\times۳=۳۰$

۷۳۵ (۳) در مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ هریک از اعداد ۱ تا ۷ دقیقاً در هفت خانه ظاهر می‌شوند. برای انتخاب دو خانه که مجموع درایه‌های آن‌ها برابر ۱۰ باشد، از اصل ضرب و سپس از تعمیم اصل جمع استفاده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۱}}_{\text{انتخاب یک خانه با عدد ۷ و یک خانه با عدد ۳}}+\underbrace{\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۱}}_{\text{انتخاب یک خانه با عدد ۶ و یک خانه با عدد ۴}}+\underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{انتخاب دو خانه با عدد ۵}}=۴۹+۴۹+۲۱=۱۱۹$$

۷۳۶ (۱) **راه‌حل اول** چون B از اعمال جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۱ & ۵ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

روی درایه‌های A به‌دست آمده است، پس A نیز از اعمال جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۵ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$$

روی درایه‌های B به‌دست می‌آید. این جایگشت را روی سه درایهٔ داده شده از B اعمال می‌کنیم و حاصل را در خانه‌های نظیر این سه درایه در A قرار می‌دهیم. بنابراین A به‌صورت زیر می‌شود:

A =

۲	۱			
۱				
				x
				۵
				۴

اکنون از اینکه در هیچ سطر و هیچ ستون A عدد تکراری وجود ندارد و همهٔ اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر و هر ستون A ظاهر می‌شوند، نتیجه می‌گیریم

A =

۲	۱			a
۱				b
				x
				۵
				۴

$$a\neq ۱, a\neq ۲, a\neq ۴, a\neq ۵ \Rightarrow a=۳$$
$$b\neq ۱, b\neq ۴, b\neq ۵, b\neq a=۳ \Rightarrow b=۲$$
$$x\neq ۴, x\neq ۵, x\neq a=۳, x\neq b=۲ \Rightarrow x=۱$$

راه‌حل دوم در ستون پنجم مربع لاتین A باید عدد ۱ ظاهر شود. با توجه به درایه‌های مشخص شده در A و B و نیز جایگشت داده شده، فقط درایهٔ سطر سوم این ستون می‌تواند برابر ۱ باشد. بنابراین $x=۱$.

۷۳۷ **۳** به‌جای عدد ۱ واقع در سطر اول A، در مربع لاتین B عدد x قرار داده شده است، پس برای به‌دست آوردن B، درایهٔ متناظر به هر درایهٔ ۱ از A برابر x است. در نتیجه درایهٔ سطر سوم و ستون سوم B نیز برابر x است. چون در هیچ سطر و هیچ ستون B عدد تکراری وجود ندارد. در نتیجه $x\neq ۱$ ، $x\neq ۲$ و $x\neq ۴$. بنابراین x باید برابر ۳ باشد.

B=

	x		۲
۴		x	
		۱	

۷۳۸ **۴** گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) چون در هیچ سطر و هیچ ستون مربع لاتین عدد تکراری وجود ندارد، پس با توجه به جدول مقابل، x نمی‌تواند برابر هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. بنابراین این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱	۲	۳	x
			۴

گزینهٔ (۲) در جدول مقابل عدد ۱ را در هیچ‌یک از خانه‌های سطر چهارم نمی‌توانیم قرار دهیم، زیرا خانهٔ چهارم این سطر با عدد ۲ پر شده است و در هریک از ستون‌های اول، دوم و سوم عدد ۱ ظاهر شده است. پس این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱			
	۱		
		۱	
×	×	×	۲

گزینهٔ (۳) در جدول مقابل عدد ۱ را در هیچ‌یک از خانه‌های سطر چهارم نمی‌توانیم قرار دهیم، زیرا خانه‌های سوم و چهارم این سطر پر شده‌اند و وجود عدد ۱ در خانهٔ اول یا دوم این سطر باعث ایجاد عدد تکراری در یک ستون می‌شود. پس این جدول را نمی‌توانیم به مربعی لاتین گسترش دهیم.

۱			
	۱		
×	×	۲	۳

گزینهٔ (۴) این جدول به‌صورت مقابل قابل گسترش به مربعی لاتین است.

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

۷۳۹ **۳** در جدول گزینهٔ (۳)، در جای خالی سطر اول باید عدد ۳ قرار دهیم. چون درایهٔ سطر چهارم و ستون دوم برابر ۳ است، پس نمی‌توان جای خالی سطر اول را پر کرد. بنابراین این جدول را نمی‌توان به مربعی لاتین گسترش داد. سه جدول دیگر را به‌صورت زیر می‌توان به مربعی لاتین گسترش داد:

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

گزینهٔ (۱)

۱	۲	۴	۳
۲	۱	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

گزینهٔ (۲)

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۱	۲

گزینهٔ (۴)

۷۴۰ **۴** جدول مقابل را در نظر بگیرید:

۱	۳	۲	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۳	۲	۴	۱	۵
a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

در هیچ سطر و هیچ ستونی از مربع لاتین عدد تکراری وجود ندارد. در نتیجه a برابر ۴ یا ۵ است. اگر $a=۴$ ، آن‌گاه $b=f=۵$ و $g=۴$ و اگر $a=۵$ ، آن‌گاه $b=f=۴$ و $g=۵$. پس چهار خانهٔ

a	b
f	g

را به دو طریق می‌توانیم پر کنیم. همچنین c برابر ۱ یا ۳ است. اگر $c=۱$ ، آن‌گاه $h=۳$ ، $e=۲$ ، $d=۳$ ، $i=۲$ و $j=۱$ و اگر $c=۳$ ، آن‌گاه $h=۱$ ، $d=۲$ ، $e=۱$ ، $i=۳$ و $j=۲$. پس شش خانهٔ

c	d	e
h	i	j

را نیز به دو طریق می‌توانیم پر کنیم. بنابراین طبق اصل ضرب، دو سطر آخر مربع لاتین را به $۲\times۲=۴$ طریق می‌توانیم پر کنیم. این ۴ طریق به‌صورت زیر هستند:

۴	۵	۳	۲	۱
۵	۴	۱	۳	۲

۴	۵	۱	۳	۲
۵	۴	۳	۲	۱

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۵	۱	۳	۲

۵	۴	۱	۳	۲
۴	۵	۳	۲	۱

۷۴۱ **۴** به چهار طریق می‌توان این مربع را به یک مربع لاتین گسترش داد.

۱	۲	۳	۴
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

۷۴۲ **۳** می‌توان نوشت

۱	۲		
۳	۴	a	b
		۱	
			x

$$a\neq ۱ , a\neq ۳ , a\neq ۴ \Rightarrow a=۲$$

$$b\neq ۳ , b\neq ۴ , b\neq a=۲ \Rightarrow b=۱$$

$$x\neq b=۱$$

جدول‌های زیر نشان می‌دهند که x برابر هریک از مقادیر ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد.

۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴

$x=۴$

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳

$x=۳$

۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۳	۲

$x=۲$

۷۴۳ **۴** فرض کنید عددهای قرار گرفته در ستون اول این مربع لاتین از بالا به پایین به‌صورت ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. ستون دوم را به‌صورت‌های زیر می‌توان کامل کرد:

۱	۲		
۲	۴		
۳	۱		
۴	۳		

۱	۲		
۲	۳		
۳	۴		
۴	۱		

۱	۲		
۲	۱		
۳	۴		
۴	۳		

۱	۳		
۲	۴		
۳	۲		
۴	۱		

۱	۳		
۲	۴		
۳	۱		
۴	۲		

۱	۳		
۲	۱		
۳	۴		
۴	۲		

۱	۴		
۲	۳		
۳	۲		
۴	۱		

۱	۴		
۲	۳		
۳	۱		
۴	۲		

۱	۴		
۲	۱		
۳	۲		
۴	۳		

در واقع تعداد راه‌های پر کردن ستون دوم این مربع لاتین برابر تعداد جایگشت‌هایی از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است که هیچ‌یک از آن‌ها سر جای خود قرار ندارند. با توجه به جدول‌های بالا، تعداد این جایگشت‌ها برابر ۹ است.

۷۴۴ **۲** در مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ هریک از اعداد ۱ تا ۶ دقیقاً در شش خانه (یکی از خانه‌های هر سطر و یکی از خانه‌های هر ستون) ظاهر می‌شوند. بنابراین برای حل مسئله، ابتدا دو تا از اعداد ۱ تا ۶ (مثلاً x و y) و سپس یکی از شش خانهٔ شامل x و یکی از چهار خانهٔ شامل y را که با خانهٔ انتخاب شده در یک سطر یا یک ستون قرار ندارند، انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که از شش خانهٔ شامل y یکی در سطر خانهٔ شامل x و یکی در ستون خانهٔ شامل x قرار دارد. پس به چهار طریق می‌توانیم خانهٔ شامل y را انتخاب کنیم که با خانهٔ شامل x در یک سطر یا یک ستون نباشد. در نتیجه بنابر تعمیم اصل ضرب، پاسخ برابر است با

		y			
	y				
y	x				
					y
				y	
			y		

$$\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب x و y}}\times\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{انتخاب یک خانه شامل x}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک خانه شامل y}}=۱۵\times۶\times۴=۳۶۰$$

۷۴۵ **۴** در هر سطر و هر ستون یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۶ هریک از عددهای ۱ تا ۶ دقیقاً یک‌بار می‌آیند. بنابراین برای انتخاب دو خانه از این مربع لاتین که در یک سطر یا یک ستون باشند و تفاضل درایه‌های آن‌ها برابر ۲ باشد، ابتدا یک سطر یا یک ستون را انتخاب می‌کنیم که به ۱۲ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، سپس از سطر یا ستون انتخاب شده یکی از جفت‌های $\{۱,۳\}$ ، $\{۲,۴\}$ ، $\{۳,۵\}$ و $\{۴,۶\}$ را برمی‌داریم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب دو خانهٔ مطلوب برابر $۱۲\times۴=۴۸$ است.

۷۴۶ **۱** جایگشت داده شده را روی درایه‌های معلوم A اعمال می‌کنیم. در نتیجه B به‌صورت زیر درمی‌آید. اکنون از این جدول معلوم است که a برابر ۱، ۳ و ۴ نیست، پس $a=۲$ و پس از آن به‌وضوح معلوم است که x باید برابر ۱ باشد.

$B=$

۲	۳		
۱	۴		
	a	۱	
	x		

۷۴۷ **۳** چون B از اعمال جایگشتی روی درایه‌های A به‌دست آمده است، پس A نیز از اعمال جایگشتی روی درایه‌های B به‌دست می‌آید. فرض کنید این جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت

$A=$

		b	
	d		
d			

از طرف دیگر، طبق فرض

$A=$

			x
۳			

. در نتیجه $d=۳$ و A به‌صورت

		b	x
	۳		
۳			

درمی‌آید. عدد ۳ باید در یکی از خانه‌های سطر دوم A بیاید. این عدد در خانهٔ اول یا دوم این سطر نمی‌تواند بیاید، زیرا اگر بیاید، در ستون اول یا دوم عدد تکراری ایجاد می‌شود. در ضمن عدد ۳ در خانهٔ سوم سطر دوم قرار ندارد، زیرا $b\neq d=۳$. پس عدد ۳ باید در خانهٔ چهارم سطر دوم قرار گیرد. در نتیجه $x=۳$.

۷۴۸ **۲** مربع‌های حاصل از کنار هم قرار دادن مربع لاتین A و هریک از گزینه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

گزینهٔ (۱)

۲۱	۳۲	۱۳
۳۲	۱۳	۲۱
۱۳	۲۱	۳۲

گزینهٔ (۲)

۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳
۱۳	۲۲	۳۱

گزینهٔ (۳)

۲۳	۳۱	۱۲
۳۱	۱۲	۲۳
۱۲	۲۳	۳۱

گزینهٔ (۴)

۲۲	۳۱	۱۳
۳۱	۱۳	۲۲
۱۳	۲۲	۳۱

مربع لاتین گزینهٔ (۲) و A متعامدند، زیرا از کنار هم قرار دادن آن‌ها مربعی به‌دست می‌آید که عدد دورقمی تکراری ندارد.

۷۴۹ **۲** ابتدا توجه کنید که در جدول مقابل درایهٔ y برابر ۲ است، زیرا عدد ۲ باید در سطر سوم A ظاهر شود. اگر این عدد در یکی از خانه‌های اول، دوم و سوم این سطر ظاهر شود، در ستون مربوطه عدد ۲ تکرار می‌شود که چنین چیزی ممکن نیست. اکنون اگر A و B را کنار یکدیگر قرار دهیم، مربع مقابل حاصل می‌شود. چون A و B متعامدند، در این مربع هیچ عدد دورقمی‌ای نباید تکرار شود. در نتیجه x باید برابر ۲ باشد.

$A=$

	۲		
		۲	
			y
۲			

	۲x		
		۲۱	
			۲۳
۲۴			

۷۵۰ **۲** چون A مربع لاتین چرخشی است، پس همهٔ درایه‌های قطر اصلی آن برابر ۱ هستند. در نتیجه درایه‌های قطر اصلی مربع لاتین B همگی باید متمایز باشند، یعنی همهٔ عددهای ۱ تا ۵ را دربردارند. بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی B برابر $\frac{۵\times۶}{۲}=۱۵$ است.

۷۵۱ **۲** چون A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ هستند، پس با قرار دادن A و B کنار یکدیگر، هریک از ۲۵ زوج مرتب متشکل از اعداد ۱ تا ۵ دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. بنابراین هریک از زوج‌های مرتب $(۱,۴)$، $(۴,۱)$، $(۲,۳)$، $(۳,۲)$ و $(۴,۱)$ را فقط یک بار خواهیم داشت. پس به چهار طریق می‌توانیم یک خانه از A را انتخاب کنیم که مجموع درایه‌های این خانه و خانهٔ نظیر آن در مربع لاتین B برابر ۵ باشد.

۷۵۲ **۴** مربع لاتین

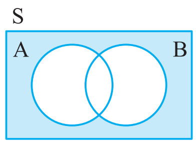
$C=$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

از اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ روی درایه‌های B به‌دست می‌آید. چون A و B متعامدند، پس A و C نیز متعامد خواهند بود.

۷۵۳ **۴** فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان، A مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس ادبیات و B مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس عربی باشد. در این صورت بنابر اصل شمول و عدم شمول، تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند، برابر است با

$$|A'\cap B'|=|S|-|A\cup B|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$
$$=۵۱-(۳۵+۳۱-۲۳)=۸$$

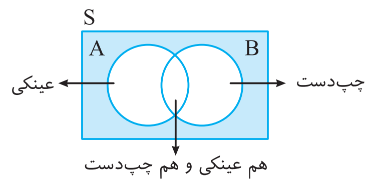


۷۵۴ **۲** فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ افراد این مدرسه، A مجموعهٔ افراد عینکی و B مجموعهٔ افراد چپ‌دست باشد. طبق فرض

$$|S|=۲۰۰,\quad |A|=۸۰,\quad |B|=۴۰,\quad |A'\cap B'|=۱۰۰$$

در نتیجه بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$|S|-|A\cup B|=۱۰۰\Rightarrow|S|-|A|-|B|+|A\cap B|=۱۰۰$$
$$۲۰۰-۸۰-۴۰+|A\cap B|=۱۰۰\Rightarrow|A\cap B|=۲۰$$



۷۵۵ **۴** معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+۳۰y=۳۵$ در صورتی جواب دارد که $(a,۳۰)|۳۵$ ، همچنین می‌دانیم $۳۵=۵\times۷$ و $۳۰=۲\times۳\times۵$. بنابراین معادله در صورتی جواب دارد که $(a,۳۰)$ برابر ۱ یا ۵ باشد، یعنی a نباید بر هیچ‌یک از اعداد ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد. فرض کنید $S=\{۱,۲,\ldots,۱۰۰\}$ ، A مجموعهٔ اعدادی از S باشد که بر ۲ بخش‌پذیرند و B مجموعهٔ اعدادی از S باشد که بر ۳ بخش‌پذیرند. در این صورت $A\cap B$ مجموعهٔ اعدادی از S است که هم بر ۲ و هم بر ۳، یعنی بر ۶ بخش‌پذیرند. اکنون می‌توان نوشت

$$|S|=۱۰۰,\quad |A|=[\frac{۱۰۰}{۲}]=۵۰,\quad |B|=[\frac{۱۰۰}{۳}]=۳۳,\quad |A\cap B|=[\frac{۱۰۰}{۶}]=۱۶$$

مجموعهٔ اعدادی از S که بر هیچ‌یک از عددهای ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند، برابر $A'\cap B'$ است. در نتیجه بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$|A'\cap B'|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|=۱۰۰-۵۰-۳۳+۱۶=۳۳$$

۷۵۶ **۴** فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ خودکارهای آرمان باشد، A مجموعهٔ خودکارهایی از S باشد که نوک آبی دارند و B مجموعهٔ خودکارهایی از S باشد که بدنهٔ فلزی دارند. در این صورت طبق فرض $|S|=۴۴$، $|A|=۱۷$، $|B|=۱۴$ و $|A'\cap B'|=۱۹$. با استفاده از اصل شمول و عدم شمول می‌توان نوشت

$$|A'\cap B'|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$
$$۱۹=۴۴-۱۷-۱۴+|A\cap B|\Rightarrow|A\cap B|=۶$$

مجموعهٔ خودکارهایی که نوک آبی دارند ولی بدنهٔ فلزی ندارند، برابر $A-B$ است. بنابراین پاسخ برابر است با $|A-B|=|A|-|A\cap B|=۱۷-۶=۱۱$