

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

حسابان (یازدهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انگه
انتشارات

مجموعه کتاب‌های یازدهم و جامع نشر الگو ویژه رشته ریاضی:

- شیمی ۲ (تست)
- جمع‌بندی شیمی یازدهم
- حسابان ۱ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۲ (تست و سه‌بعدی)
- آمار و احتمال (تست و سه‌بعدی)
- فیزیک ۲ ریاضی (تست و سه‌بعدی)
- هندسه پایه
- ریاضیات پایه
- جامع هندسه
- جامع ریاضی ۱ و حسابان + موج آزمون
- جامع ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

- درس‌نامه کامل با پوشش همه مطالب و نکات
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس درس‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۵۸۸ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۳۱۱ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سؤالات کنکور سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشته ریاضی)

https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

(رشته تجربی)

انتشارات
نشر الگو

www.olgoobooks.ir



به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی حسابان پایه یازدهم و با هدف آموزش عمیق تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هر جا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، سؤالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، سه آزمون جامع

از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی برای ویراستاری علمی، خانم‌ها فاطمه احدی و مریم احمدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

فهرست

◆ فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

- بخش اول: مجموع جمله‌های دنباله حسابی ۱
- بخش دوم: مجموع جمله‌های دنباله هندسی ۷
- سوالات کنکور سراسری ۱۳

درس دوم: معادلات درجه دوم

- بخش اول: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم .. ۱۴
- بخش دوم: تشکیل معادله درجه دوم ۲۲
- بخش سوم: روابط بین ضرایب و علامت جواب‌های معادله درجه دوم ۲۶
- بخش چهارم: صفرهای تابع درجه دوم ۲۸
- بخش پنجم: ماکزیمم و مینییمم تابع درجه دوم ۳۳
- بخش ششم: روش تغییر متغیر برای حل معادله ۳۷
- بخش هفتم: روش هندسی حل معادلات ۴۱
- سوالات کنکور سراسری ۴۴

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

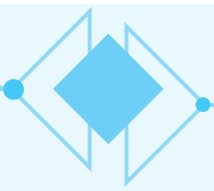
- بخش اول: معادله‌های گویا ۴۶
- بخش دوم: مدل‌سازی با معادله‌های گویا ۵۱
- بخش سوم: معادله‌های رادیکالی (گنگ) ۵۴
- سوالات کنکور سراسری ۶۱

درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن

- بخش اول: ویژگی‌های قدر مطلق ۶۲
- بخش دوم: معادلات قدر مطلق ۶۵
- بخش سوم: نامعادلات قدر مطلق ۷۱
- بخش چهارم: توابع قدر مطلق ۷۵
- بخش پنجم: رسم نمودارهای توابع $y = -f(x)$ و $y = |f(x)|$.. ۸۲
- بخش ششم: نابرابری مثلث ۸۸
- سوالات کنکور سراسری ۹۱

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

- بخش اول: یادآوری و تکمیل معادله خط ۹۲
- بخش دوم: فاصله دو نقطه ۹۸
- بخش سوم: دو خط موازی با هم و دو خط عمود بر هم .. ۱۰۰
- بخش چهارم: مختصات نقطه وسط پاره خط ۱۰۵
- بخش پنجم: فاصله نقطه از خط ۱۱۲
- سوالات کنکور سراسری ۱۱۹
- آزمون‌های فصل ۱۲۱



◆ فصل دوم: تابع

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع ۱۲۳

سؤالات کنکور سراسری ۱۲۶

درس دوم: انواع تابع

بخش اول: توابع گویا ۱۲۶

بخش دوم: توابع رادیکالی ۱۳۸

بخش سوم: معادلات و توابع ۱۴۶

بخش چهارم: جزء صحیح یک عدد حقیقی ۱۴۹

بخش پنجم: تابع جزء صحیح ۱۵۷

سؤالات کنکور سراسری ۱۶۴

درس سوم: وارون تابع

بخش اول: تابع یک‌به‌یک ۱۶۶

بخش دوم: تابع وارون ۱۷۳

سؤالات کنکور سراسری ۱۸۸

درس چهارم: اعمال روی توابع

بخش اول: اعمال جبری روی توابع ۱۸۹

بخش دوم: ترکیب توابع ۲۰۲

بخش سوم: تابع وارون و ترکیب توابع ۲۱۵

سؤالات کنکور سراسری ۲۲۱

آزمون‌های فصل ۲۲۴

◆ فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی

بخش اول: تابع نمایی ۲۲۷

بخش دوم: معادلات نمایی ۲۳۴

بخش سوم: نامعادلات نمایی ۲۴۱

سؤالات کنکور سراسری ۲۴۴

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

سؤالات کنکور سراسری ۲۵۶

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

بخش اول: ویژگی‌های لگاریتم ۲۵۷

بخش دوم: معادلات لگاریتمی ۲۶۷

بخش سوم: نامعادلات لگاریتمی ۲۷۵

بخش چهارم: کاربردهای لگاریتم ۲۷۸

سؤالات کنکور سراسری ۲۸۱

آزمون‌های فصل ۲۸۳

◆ فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان ۲۸۶

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

بخش اول: زاویه‌های هم‌انتهای ۲۹۳

بخش دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۲۹۷

سؤالات کنکور سراسری ۳۱۰

درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

- بخش اول: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ۳۸۰
- بخش دوم: رفع ابهام در توابع رادیکالی ۳۸۸
- بخش سوم: رفع ابهام در توابع مثلثاتی ۳۹۳
- سؤالات کنکور سراسری ۴۰۶

درس پنجم: پیوستگی

- بخش اول: پیوستگی ۴۰۸
- بخش دوم: پیوستگی تابع جزء صحیح ۴۱۸
- سؤالات کنکور سراسری ۴۲۳
- آزمون‌های فصل ۴۲۶

فصل ششم: پاسخ‌های تشریحی

- پاسخ‌های تشریحی ۴۲۹

فصل هفتم: پاسخنامه کلیدی

- پاسخنامه کلیدی ۶۶۸

درس سوم: توابع مثلثاتی ۳۱۱

- سؤالات کنکور سراسری ۳۱۹

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

- بخش اول: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۳۲۱
- بخش دوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α ۳۲۷
- سؤالات کنکور سراسری ۳۳۹
- آزمون‌های فصل ۳۴۱

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس‌های اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای حدی - حدهای

- یک‌طرفه** ۳۴۴
- سؤالات کنکور سراسری ۳۵۵

درس سوم: قضایای حد

- بخش اول: قضایای حد ۳۵۶
- بخش دوم: حد تابع جزء صحیح ۳۷۰
- سؤالات کنکور سراسری ۳۸۰

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع

مفاهیم اولیه تابع

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنه این تابع و B را هم‌دامنه این تابع می‌نامند. مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه تابع است. دامنه تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهیم. برای نشان دادن اینکه f تابعی با دامنه A و هم‌دامنه B است می‌نویسیم $f: A \rightarrow B$ (بخوانید f تابعی از A به B است).

ضابطه تابع

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنه تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y=f(x)$. به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا آن را به خروجی تبدیل کند، ضابطه تابع می‌گویند.

تست ۱

در تابع f با دامنه \mathbb{R} و ضابطه $f(x)=x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ کدام است؟

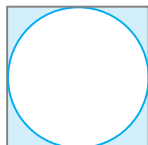
- (۱) صفر (۲) $4x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

در ضابطه تابع به جای x مقدارهای $1+x$ و $1-x$ را قرار می‌دهیم:
بنابراین $f(1+x)-f(1-x)=0$.

راه‌حل

تست ۲

در شکل روبه‌رو مساحت قسمت‌های رنگ شده تابعی از محیط مربع (P) است. ضابطه این تابع کدام است؟



(۱) $S(P)=\left(\frac{4-\pi}{64}\right)P^2$ (۲) $S(P)=\left(\frac{4-\pi}{16}\right)P^2$

(۳) $S(P)=\left(\frac{16-\pi}{64}\right)P^2$ (۴) $S(P)=\left(\frac{16-\pi}{16}\right)P^2$

اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{2}$ و محیط مربع برابر $4a$ می‌شود. بنابراین

$$P=4a \Rightarrow a=\frac{P}{4}, \quad a^2=\text{مساحت مربع}=\frac{\pi a^2}{4}, \quad \text{مساحت دایره}=\frac{\pi a^2}{4}$$

$$\text{شده} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = a^2 \left(\frac{4-\pi}{4} \right) = \frac{P^2}{16} \left(\frac{4-\pi}{4} \right) = \left(\frac{4-\pi}{64} \right) P^2$$

راه‌حل

تست ۳

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x+1)=x^3+3x^2+3x$ ، مقدار $f(\sqrt[3]{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

تساوی داده شده را به صورت $f(x+1)=(x+1)^3-1$ می‌نویسیم. اکنون اگر فرض کنیم $x+1=\sqrt[3]{2}$ ، یعنی $x=\sqrt[3]{2}-1$ ، به دست می‌آید

$$f(\sqrt[3]{2})=(\sqrt[3]{2})^3-1=1$$

راه‌حل

تست ۴

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)+xf(2)=x^3+1$ ، حاصل $f(-2)$ کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۱ (۳) ۹ (۴) ۳

در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $x=2$:

$$f(x)+3x=x^3+1 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+1 \Rightarrow f(-2)=-8+6+1=-1$$

راه‌حل

بنابراین

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر (مساوی) می‌نامیم و می‌نویسیم $f=g$ ، به شرطی که
 $D_f = D_g$ (۱) به ازای هر x از دامنه دو تابع $f(x)=g(x)$ (۲)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3}, \quad g(x) = x$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3} = \frac{x(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = x \quad (x^2 + 3 \neq 0 \text{ همواره})$$

مثال: تابع‌های مقابل برابرند:

در واقع دامنه هر دو تابع مجموعه \mathbb{R} است و چون پس ضابطه دو تابع هم یکسان است.

$$f(x) = \frac{x}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 1, \quad D_g = \mathbb{R}$$

مثال: تابع‌های مقابل برابر نیستند:

تست ۵ اگر تابع‌های $f = \{(1, 2), (2, 6), (a, 4)\}$ و $g = \{(3, 4), (1, b), (2, bc)\}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

ابتدا توجه کنید که $D_f = \{1, 2, a\}$ و $D_g = \{1, 2, 3\}$. بنابراین $D_f = D_g$. پس $a=3$. از طرف دیگر

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 = b, \quad f(2) = g(2) \Rightarrow 6 = bc \xrightarrow{b=2} 6 = 2c \Rightarrow c = 3$$

پس $a+b+c=8$.

تست

راه‌حل

تست ۶ کدام دو تابع با هم برابر نیستند؟

$$g(x) = \sqrt{3x} \text{ و } f(x) = \sqrt{2x+|x|} \quad (۲)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2} \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2} \quad (۴)$$

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2} \quad (۱)$$

$$g(x) = \sqrt{2x-|x|} \text{ و } f(x) = \sqrt{x} \quad (۳)$$

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = \sqrt{x^2} = |x^2| = x^2 = g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینه (۲) $D_f = D_g = [0, +\infty)$ و اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = \sqrt{2x+|x|} = \sqrt{2x+x} = \sqrt{3x} = g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینه (۳) $D_f = D_g = [0, +\infty)$ و اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = \sqrt{2x-|x|} = \sqrt{2x-x} = \sqrt{x} = g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینه (۴) $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [0, +\infty)$. پس دامنه تابع‌های f و g برابر نیست، یعنی این دو تابع برابر نیستند.

تست

راه‌حل

نکته

اگر دو تابع f و g برابر باشند، آن‌گاه بردهای آن‌ها نیز برابرند. ولی اگر دامنه‌های دو تابع f و g با هم و بردهای دو تابع f و g نیز با هم برابر باشند، این دو تابع لزوماً برابر نیستند.

$$f = \{(1, 2), (3, 4)\}, \quad g = \{(1, 4), (3, 2)\}$$

مثال: تابع‌های f و g را به صورت مقابل در نظر بگیرید

این دو تابع برابر نیستند، زیرا $f(1) = 2 \neq 4 = g(1)$ ، در حالی که $D_f = D_g$ و $R_f = R_g$.

آشنایی بیشتر با تابع

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح

۱۸۷۸- اگر $f(x+2) = x^2 + 4x + 2$ ، مقدار $f(\sqrt{3})$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۸۷۹- در تابع $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$ ، حاصل $f(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ کدام است؟

صفر (۴)

 $-4\sqrt{6}$ (۳) $4\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۱)

۱۸۸۰- اگر تابع‌های $f = \{(1, a), (2, 2a+b), (c, 3)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 5), (4, 3)\}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۸۸۱- اگر $f(x) = 3f(x-1)$ و $f(1) = 3$ ، مقدار $f(9)$ کدام است؟

- (۱) 3^8 (۲) 3^9 (۳) 3^{10} (۴) 3^{11}

۸۸۲- اگر $f(x) = 2f(x-1) - 6$ و $f(1) = f(2)$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۸۸۳- اگر $f(4x-1) + 2f(1) = 2x + 5$ ، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۸۸۴- اگر $xf(x+2) + f(3x+1) = 2x^2 + 3x + 4$ ، مقدار $f(3) + f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۸۸۵- اگر $f(3x+1) = 3x + 2f(-3x) - 3$ ، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{11}{3}$

۸۸۶- اگر $g(x-2) = 2-x$ و $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & x < 0 \\ g(x) & x \geq 0 \end{cases}$ ، حاصل $f(-5) + f(5)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) -۳

۸۸۷- اگر $f(x) = 3x + 4$ ، حاصل $f(2x-1)$ بر حسب $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $2f(x) + 7$ (۲) $3f(x) - 7$ (۳) $2f(x) + 7$ (۴) $2f(x) - 7$

۸۸۸- اگر $f(\frac{x-1}{2}) = x^2 - 2x + 1$ ، ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x) = 2x^2$ (۲) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ (۳) $f(x) = \frac{x^2}{2}$ (۴) $f(x) = 4x^2$

۸۸۹- اگر $f(2x-1) = 4x^2 - 8x$ ، ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (۲) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ (۳) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (۴) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

۸۹۰- اگر $f(x+2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ ، حاصل $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = x^3 - 1$ (۲) $f(x) = x^3 + 1$ (۳) $f(x) = x^3 - 2$ (۴) $f(x) = x^3 + 2$

۸۹۱- اگر $f(x^2+1) = x^4 - x^2$ ، آن گاه برای $x \geq 1$ ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x) = x^2 - 3x$ (۲) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (۳) $f(x) = x^2 - x + 2$ (۴) $f(x) = x^2 - x$

۸۹۲- کدام تابع با تابع $f(x) = x - 2 + |x - 4|$ برابر است؟

- (۱) $g(x) = \begin{cases} 2 & x < 4 \\ 2x + 6 & x \geq 4 \end{cases}$ (۲) $h(x) = \begin{cases} 2 & x < 4 \\ 6 - 2x & x \geq 4 \end{cases}$ (۳) $k(x) = \begin{cases} 2 & x < 4 \\ 2x - 6 & x \geq 4 \end{cases}$ (۴) $t(x) = \begin{cases} 4 & x < 4 \\ 2x - 6 & x \geq 4 \end{cases}$

۸۹۳- تابع $f(x) = |x|(x - |x|)$ با کدام تابع زیر برابر است؟

- (۱) $g(x) = |x|(x + |x|)$ (۲) $h(x) = x(x + |x|)$ (۳) $k(x) = |x|(x - |x|)$ (۴) $t(x) = x(|x| - x)$

۸۹۴- تابع $f(x) = 2 + |x + 3| - |x - 1|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

- (۱) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < -3 \\ x + 4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$ (۲) $h(x) = \begin{cases} -2 & x < -3 \\ 2x + 4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 6 & x > 1 \end{cases}$ (۳) $k(x) = \begin{cases} x & x < -3 \\ 2x + 4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & x > 1 \end{cases}$ (۴) $t(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 2 \\ x + 1 & x > 2 \end{cases}$

سطح

۸۹۵- درباره تابع f می‌دانیم همواره $f(xy)=f(x)+f(y)$. اگر $f(10)=1$ ، $f(5)=a$ و $f(3)=b$ ، مقدار $f(6)$ کدام است؟

- (۱) $a-b$ (۲) $a+b$ (۳) $a+b-1$ (۴) $b-a+1$

۸۹۶- اگر برای هر x تساوی $xf(x)+f(-x)=x^2-x$ برقرار باشد، ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x)=x$ (۲) $f(x)=-x$ (۳) $f(x)=x+1$ (۴) $f(x)=x-1$

۸۹۷- اگر $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ و $f(\frac{1}{3})=8$ ، مقدار $f(\frac{1}{9})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۹۸- کدام یک از تابع‌های زیر با تابع $f(x)=|x-|x-|x||$ برابر است؟

$$t(x)=\begin{cases} x & x \leq 0 \\ -3x & x > 0 \end{cases} \quad (۴) \quad k(x)=\begin{cases} -3x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۳) \quad h(x)=\begin{cases} 0 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۲) \quad g(x)=\begin{cases} 3x & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

کنکور سراسری

تجربی ۹۷

۸۹۹- اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) x^2-x+3 (۲) x^2-2x-1 (۳) x^2-2x+1 (۴) x^2-x+1

فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش اول: توابع گویا

تابع گویا

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ و دامنه

$D_f = \{x | Q(x) \neq 0\}$ تابع گویا می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر گویا هستند:

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

ب) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

پ) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

تست ۱ اگر $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ ، حاصل $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

(۴) $\frac{x^2-1}{x^2}$

(۳) $\frac{1-x^2}{x^2}$

(۲) $\frac{1}{1-x^2}$

(۱) $\frac{x^2}{1-x^2}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{1}{1-x^2}$$

می‌توان نوشت

راه‌حل

تست
 ■■■■

 اگر $D_f = \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{3}\}$ و $f(\frac{x-1}{x+1}) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل

 اگر معادله $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$ را حل کنیم، به دست می‌آید $x=3$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=3$ مقدار $f(\frac{1}{3})$ به دست می‌آید:

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{4}{1} \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = 4$$

تست
 ■■■■

 اگر $f(\frac{x-1}{2x+1}) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R} - \{2, \frac{1}{3}\}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{4x+1}{x+1}$ ۲ (۲) $\frac{2x+1}{1-x}$ ۳ (۳) $\frac{1}{2x-1}$ ۴ (۴) $\frac{4x+1}{2-x}$

راه حل

 فرض می‌کنیم $t = \frac{x-1}{2x+1}$ ، بنابراین

$$2tx + t = x - 1 \Rightarrow (2t-1)x = -t-1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{1-2t}$$

$$f(t) = \frac{2(\frac{t+1}{1-2t})-1}{\frac{t+1}{1-2t}+1} \xrightarrow[\text{رادر (1-2t) ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر}} \frac{2t+2-1+2t}{t+1+1-2t} = \frac{4t+1}{2-t} \Rightarrow f(x) = \frac{4x+1}{2-x}$$

در نتیجه

پیدا کردن دامنه تابع از روی ضابطه

وقتی می‌خواهیم یک تابع را معرفی کنیم، باید دامنه آن را نیز مشخص کنیم. مثلاً دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = x-2$ می‌تواند \mathbb{R} یا $[1, 2]$ یا $\{0, 1, 2, 3\}$ یا هر مجموعه دلخواه دیگری باشد. ولی اگر دامنه تابع f را معین نکردیم و فقط ضابطه آن را نوشتیم، قرارداد می‌کنیم که دامنه تابع f را مجموعه تمام مقادیری از x در نظر بگیریم که $f(x)$ به ازای آن‌ها بامعنی است. مثلاً اگر ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = \frac{1}{x}$ معرفی کنیم، دامنه تابع f را طبق این قرارداد مجموعه $\mathbb{R} - \{0\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ فقط به ازای $x=0$ بامعنی نیست.

دامنه توابع گویا

 برای پیدا کردن دامنه توابع گویا، همه مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، پیدا می‌کنیم و مجموعه آن‌ها را از \mathbb{R} کم می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x+2}{x^3-x}$ را پیدا کنیم. ابتدا عددی را پیدا می‌کنیم که مخرج را صفر می‌کنند. توجه کنید که

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

 بنابراین باید مجموعه $\{0, -1, 1\}$ را از \mathbb{R} کنیم تا دامنه تابع f به دست بیاید. پس $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$.

تست
 ■■■■

 مجموع اعدادی که در دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+1}$ قرار ندارند، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل

 اعدادی که جواب معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، در دامنه تابع f قرار ندارند. مجموع این اعداد برابر ۳ است.

تست
 ■■■■

 دامنه تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+kx+1}$ به ازای کدام مقدار k برابر \mathbb{R} است؟

- ۱ (۱) $k=2$ ۲ (۲) $k=5$ ۳ (۳) $k=-3$ ۴ (۴) $k=\frac{1}{2}$

راه حل

 اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، باید مخرج $f(x)$ به ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2 + kx + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = k^2 - 4 < 0 \Rightarrow k^2 < 4 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینه (۴) درست است.

تست ۶

اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ ($a^2 \geq 8b$)

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

فقط عدد -2 در دامنه تابع قرار ندارد، پس تنها ریشه مخرج $f(x)$ عدد -2 است. بنابراین عبارت مخرج مضربی از $(x+2)^2$ است. با توجه به ضرب x^2 در مخرج $f(x)$ ، این عبارت $2(x+2)^2$ است و در نتیجه

$$2(x+2)^2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow a=8, b=8 \Rightarrow a+b=16$$

راه حل

تست ۷

دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱۰ (۲)

۱۰ (۱)

$x=1$ و $x=-3$ ریشه‌های مخرج کسر ضابطه تابع هستند، یعنی

$$2(-3)^2 + a(-3) + b = 0 \Rightarrow b = 3a - 18, \quad 2(1)^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow b = -a - 2$$

$$3a - 18 = -a - 2 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow a - b = 10$$

بنابراین

راه حل

تست ۸

کدام دو تابع با هم برابرند؟

$$g(x) = x+1 \text{ و } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad (۲)$$

$$g(x) = x \text{ و } f(x) = \frac{x^2}{x} \quad (۱)$$

$$g(x) = x^2 + 2x \text{ و } f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x-2} \quad (۴)$$

$$g(x) = x \text{ و } f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad (۳)$$

تابع‌های $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ و $g(x) = x$ برابرند، زیرا $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x = g(x)$. در بقیه گزینه‌ها دامنه دو تابع داده شده، برابر نیستند.

گزینه (۲) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه (۱) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه (۴) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

راه حل

تست ۹

اگر دو تابع $f(x) = \frac{y}{x-3}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم مساوی باشند، مقدار $|ad-bc|$ کدام است؟

۶۵ (۴)

۵۱ (۳)

۶۳ (۲)

۷۵ (۱)

برای اینکه دو تابع برابر باشند باید ضابطه تابع g به صورت $g(x) = \frac{a(x-3)}{(x-3)^2}$ باشد، که دامنه دو تابع برابر $\mathbb{R} - \{3\}$ شود. بنابراین

$$x^2 + cx + d = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 + cx + d = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow c = -6, d = 9, \quad g(x) = \frac{ax+b}{(x-3)^2} = \frac{y}{x-3} \Rightarrow ax+b = y(x-3) = yx - 3y$$

$$ad - bc = 63 - 126 = -63 \Rightarrow |ad - bc| = 63$$

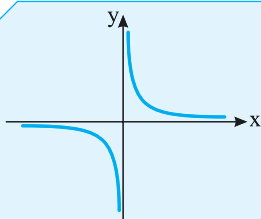
پس $b = -21, a = 7$ و در نتیجه

راه حل

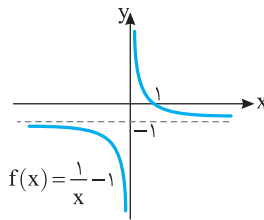
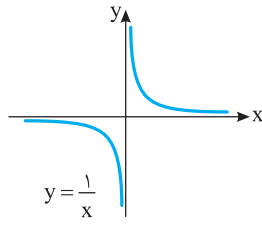
تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$

نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ که دامنه آن $\mathbb{R} - \{0\}$ است، به شکل مقابل است.

از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f مجموعه $\mathbb{R} - \{0\}$ است.



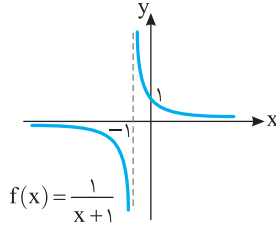
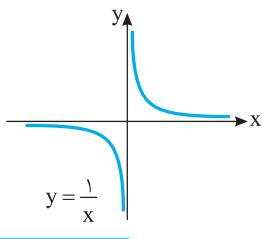
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ کافی است نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.



$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ کافی است نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.



$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$R_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = 3 - x^2$ را قطع می‌کند؟

۴ (۴)

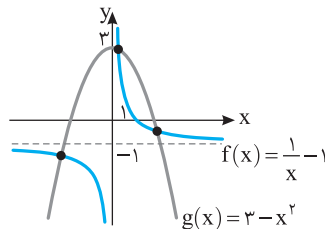
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ به دست می‌آید که مطابق شکل مقابل در سه نقطه نمودار تابع

$g(x) = 3 - x^2$ را قطع می‌کند.



تست ۱۰

راه حل

تابع هموگرافیک

به تابعی گویا که ضابطه آن به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c \neq 0$ و $ad \neq bc$) و دامنه آن برابر $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ است، تابع هموگرافیک می‌گویند.

برد تابع f برابر $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

نکته

• اگر $c = 0$ و $d \neq 0$ ، آن‌گاه تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابع خطی $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ است.

• اگر $c \neq 0$ و $ad = bc$ ، آن‌گاه تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابع ثابت $f(x) = \frac{a}{c}$ است.

اگر تابع $f(x) = \frac{2x-k^2}{kx+4}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(x)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

چون f تابعی ثابت است، پس $2 \times 4 = (-k^2) \times k$. بنابراین $k^3 = -8$ ، یعنی $k = -2$. در نتیجه $f(x) = \frac{2x-4}{-2x+4} = -1$.

تست ۱۱

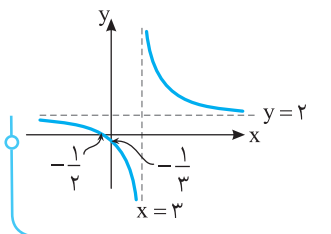
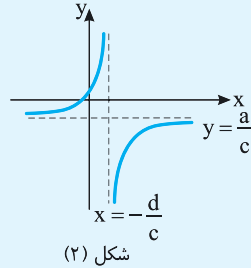
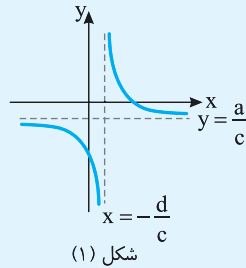
راه حل

رسم نمودار تابع هموگرافیک

برای رسم نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

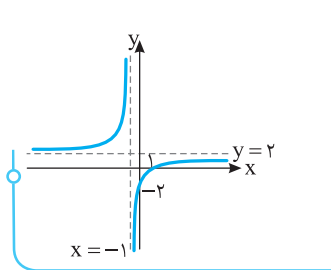
(۱) ابتدا خط‌های $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$ را به صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.

(۲) اگر $ad - bc < 0$ ، نمودار تابع f به صورت شکل (۱) و اگر $ad - bc > 0$ ، نمودار تابع f به صورت شکل (۲) است.



مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ ، ابتدا خط‌های $x=3$ و $y=2$ را به صورت خط‌چین رسم

می‌کنیم. چون $ad - bc = 2(-3) - 1 \times 1 = -7 < 0$ ، پس نمودار تابع f به صورت مقابل است:



مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$ ، ابتدا خط‌های $x=-1$ و $y=2$ را به صورت خط‌چین

رسم می‌کنیم. چون $ad - bc = 2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 > 0$ ، پس نمودار تابع f به صورت مقابل است:

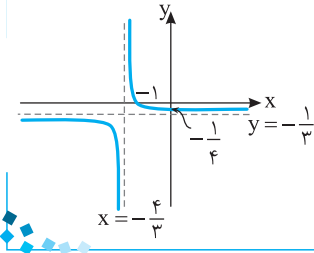
نمودار تابع $f(x) = \frac{-1-x}{3x+4}$ از کدام ناحیه صفحه مختصات عبور نمی‌کند؟

تست ۱۲

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

ابتدا توجه کنید که $ad - bc = (-1) \times 4 - (-1) \times 3 = -1 < 0$ ، پس نمودار تابع f به صورت مقابل است که از ناحیه اول نمی‌گذرد.

راه‌حل



اگر $f(x) = \frac{x+4}{2x+1}$ و $D_f = [-1, +\infty)$ ، برد تابع f شامل چند عدد صحیح نیست؟

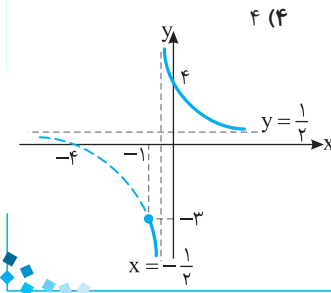
تست ۱۳

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

ابتدا توجه کنید که $ad - bc = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$ ، پس نمودار تابع f به صورت مقابل است. بنابراین

برد تابع f برابر با $(-\infty, -3] \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ است، که شامل عددهای صحیح -2 ، -1 و صفر نیست.

راه‌حل



۹۰۰- اگر $\frac{2x+f(x)}{xf(x)-3}=4$ ، ضابطه تابع f کدام است؟

(۱) $f(x) = \frac{2x}{4x+1}$ (۲) $f(x) = \frac{4x+12}{4x-1}$ (۳) $f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$ (۴) $f(x) = \frac{2x+12}{4x-1}$

۹۰۱- اگر $f(x) = \frac{3x-4}{2x+1}$ ، جواب معادله $f(2x)=2$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) -۳

۹۰۲- در تابع $f(x) = \frac{8x}{x^2+3}$ ، اگر $f(a) = -2$ ، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ± 2 (۳) ± 4 (۴) صفر

۹۰۳- اگر $f(x-2) = \frac{3x}{2x+5}$ ، جواب معادله $f(x)=3$ کدام است؟

(۱) -۷ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۵

۹۰۴- در تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، مقدار $f(a)f(-\frac{1}{a})$ به ازای $a \neq 1, -1$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $(a+1)^2$ (۴) $\frac{1}{(a-1)^2}$

۹۰۵- در تابع $f(x) = \frac{x-k}{x+1}$ حاصل عبارت $f(-x)f(\frac{k}{x})$ کدام است؟ $(x \neq \pm 1, -k)$

(۱) kx (۲) $\frac{k}{x}$ (۳) k (۴) $-k$

۹۰۶- اگر $f(\frac{x^f-1}{x^f+2}) = x^f - x^k + x^{16}$ ، مقدار $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۹۰۷- اگر $f(\frac{3x+4}{5x+2}) = \frac{x^2+6x+10}{3x+2}$ ، مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۰۸- اگر $f(\frac{1}{x}) = \frac{3x+1}{x} + f(x+2)$ و $f(1) = 2$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۹۰۹- اگر $f(\frac{x+2}{x-1}) = \frac{mx+1}{x+1}$ و $f(4) = 3$ ، مقدار $f(0)$ کدام است؟

(۱) -۷ (۲) -۲ (۳) ۷ (۴) ۲

۹۱۰- اگر $f(\frac{x^2+1}{x}) = 3x + \frac{3}{x} - 4$ ، مقدار $f(4)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۹۱۱- اگر $f(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}) = x^3 + 3x + 2$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۹۱۲- چند عدد حقیقی در دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ قرار ندارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۱۳- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x^3 - 5x^2 + 2x}$ قرار ندارند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

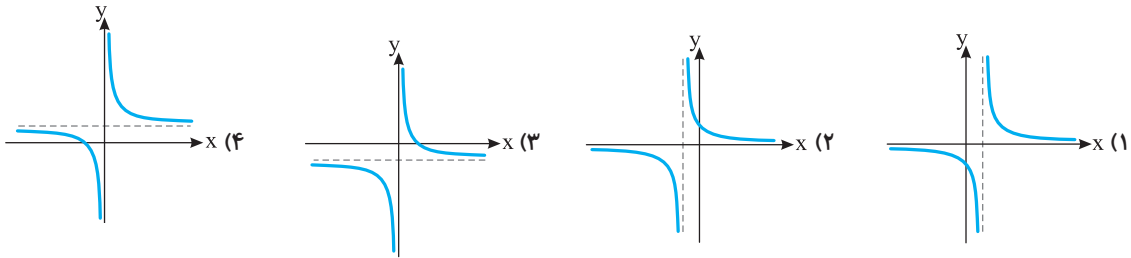
کتاب درسی

۹۱۴- در تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ و دامنهٔ $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ، مجموع اعدادی که در برد تابع قرار ندارند، کدام است؟

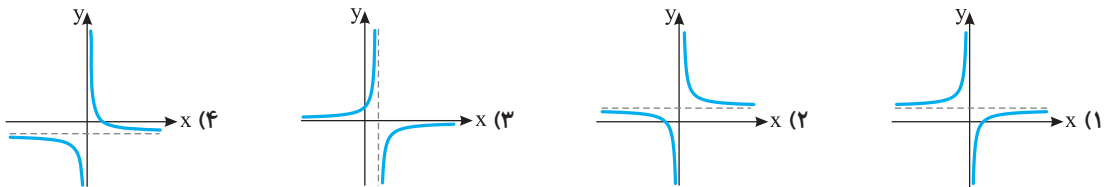
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کتاب درسی

۹۱۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ کدام است؟

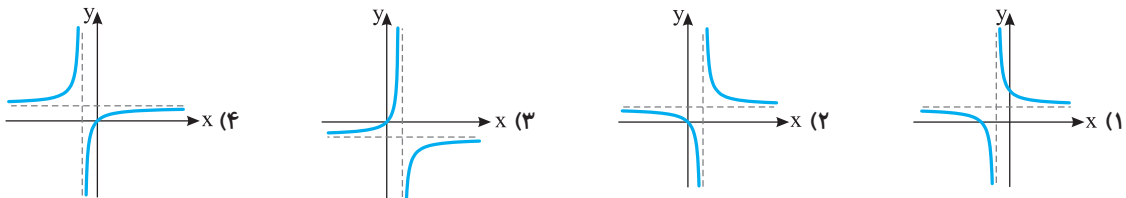


۹۱۶- نمودار تابع $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ کدام است؟

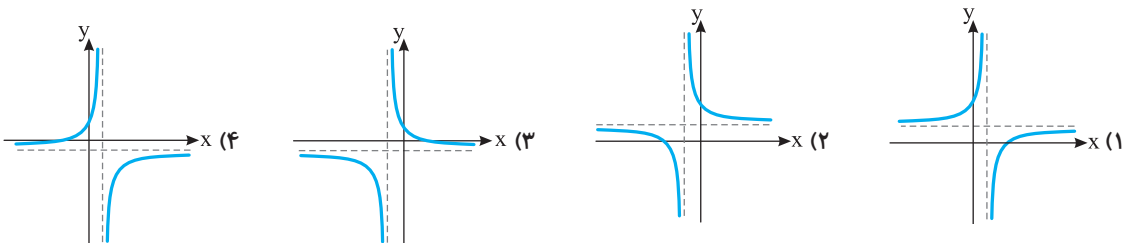


کتاب درسی

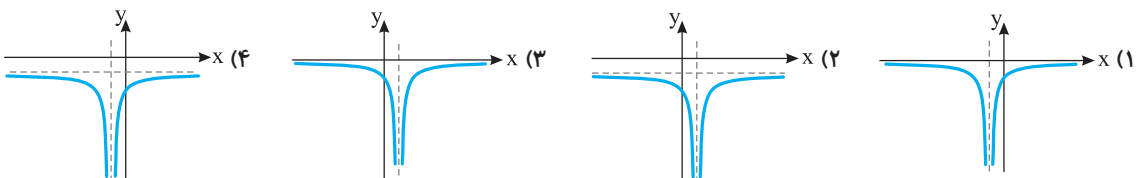
۹۱۷- نمودار تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ کدام است؟



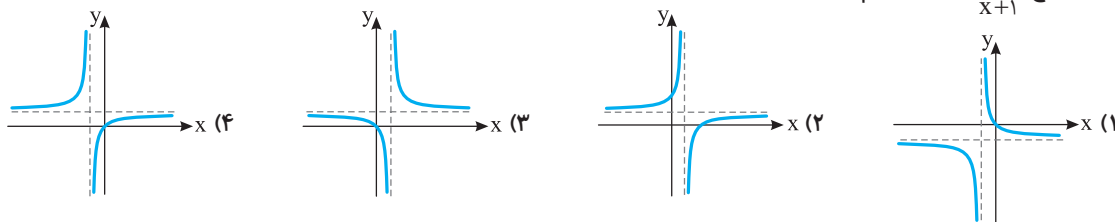
۹۱۸- نمودار تابع $y = \frac{x+2}{x+1}$ کدام است؟



۹۱۹- نمودار تابع $y = -\frac{1}{|x-1|}$ کدام است؟



۹۲۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ کدام است؟



۹۲۱- اگر $f(x) = \frac{1}{x+2}$ و $R_f = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$ حاصل ضرب اعدادی که در دامنه تابع f قرار ندارند، کدام است؟

- (۱) ۳- (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) صفر

۹۲۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+3}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = |x|$ را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = x^2$ را قطع می‌کند؟

- (۱) در یک نقطه با طول مثبت (۲) در یک نقطه با طول منفی
(۳) در یک نقطه با طول مثبت و یک نقطه با طول منفی (۴) در دو نقطه با طول‌های منفی

۹۲۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = x^2$ را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

کتاب درسی

۹۲۵- تابع $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟

- (۱) $g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ (۲) $h(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ (۳) $k(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+2}$ (۴) $t(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$



۹۲۶- اگر $\frac{f(2x+1)+x}{1-f(3x-4)} = \frac{x+4}{x-8}$ ، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲۷- اگر $f(\frac{2}{x-1}) = \frac{x+1}{x-1}$ ، ضابطه تابع f برای هر $x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = \frac{x+1}{2}$ (۲) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (۳) $f(x) = x+1$ (۴) $f(x) = \frac{2}{x+1}$

۹۲۸- اگر $f(\frac{x+1}{x-2}) = 2x-1$ ، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x \neq 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3x+3}{x-1}$ (۲) $\frac{3x-1}{x-1}$ (۳) $\frac{2x-3}{x-1}$ (۴) $\frac{5x+4}{x-1}$

۹۲۹- اگر $f(\frac{x-2}{x+3}) = \frac{2x+1}{x-2} + 2(\frac{x-2}{x+3})$ ، ضابطه تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + x$ (۲) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + 2x$ (۳) $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + x$ (۴) $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + 2x$

۹۳۰- اگر $f(\frac{1-x}{1+x}) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ، ضابطه تابع f به ازای هر $x \neq -1$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (۲) $f(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ (۳) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (۴) $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$

۹۳۱- اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ ، ضابطه تابع f برای $|x|\geq 2$ کدام است؟

(۱) $f(x)=x^2$ (۲) $f(x)=x^2+2$ (۳) $f(x)=x^2-2$ (۴) $f(x)=x^2-x$

۹۳۲- اگر $f(x-\frac{1}{x})=x^3-\frac{1}{x^3}$ ، آن گاه $f(-x)$ کدام است؟

(۱) x^3+3x (۲) x^3-3x (۳) $-x^3+3x$ (۴) $-x^3-3x$

۹۳۳- چند عدد در دامنه تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x^2-x+2}$ قرار ندارند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۳۴- چند عدد در دامنه تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-3x^2+2}$ قرار ندارند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۴

۹۳۵- سه عدد در دامنه تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+kx^2+x}$ قرار ندارند. حدود k کدام است؟

(۱) $|k|<1$ (۲) $|k|>2$ (۳) $|k|<2$ (۴) $1<|k|<2$

۹۳۶- اگر $x=-2$ در دامنه تابع $f(x)=\frac{1}{x^3-ax^2+2ax}$ نباشد، دامنه این تابع کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}-\{-2, 0, 1\}$ (۲) $\mathbb{R}-\{-2, 0, 2\}$ (۳) $\mathbb{R}-\{-2, -1, 1\}$ (۴) $\mathbb{R}-\{-2, -1, 0\}$

۹۳۷- اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+mx+2}$ مجموعه \mathbb{R} باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ (۲) $m>2\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$ (۴) $m>\sqrt{2}$

۹۳۸- اگر m عددی صحیح و دامنه تابع $f(x)=\frac{4}{x^2+2x-m+4}$ مجموعه عددهای حقیقی باشد، بیشترین مقدار ممکن m کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۳۹- دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x^2-(a^2+1)x-b^2}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-1, 6\}$ است. مقدار a^2+b^2 کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۹۴۰- اگر دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{2x^2-ax+3b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-1\}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۳ (۴) $-\frac{4}{3}$

۹۴۱- دامنه تابع $f(x)=\frac{1}{m^2x^2+x+1}$ به صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۴۲- خط‌هایی که از نقطه $A(1, 2)$ عبور می‌کنند با محورهای مختصات در ناحیه اول مثلثی می‌سازند. ضابطه تابعی که مساحت این مثلث را برحسب

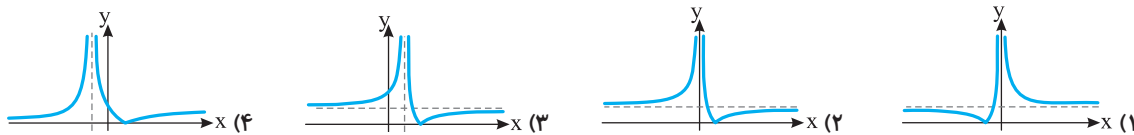
شیب خط، m ، نشان می‌دهد کدام است؟

(۱) $S(m)=-\frac{(m+2)^2}{2m}$ (۲) $S(m)=-\frac{(m+2)^2}{m}$ (۳) $S(m)=-\frac{(m-2)^2}{m}$ (۴) $S(m)=-\frac{(m-2)^2}{2m}$

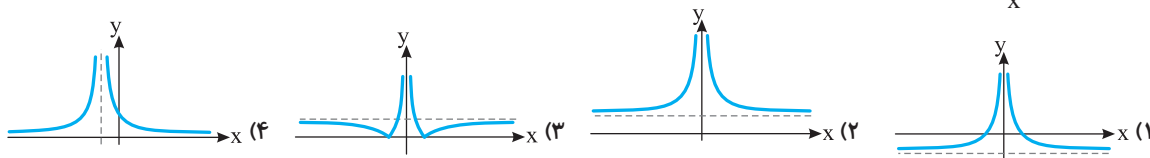
۹۴۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=1-x^2$ را قطع می‌کند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۴۴- نمودار تابع $y = |\frac{1}{x} - 1|$ کدام است؟

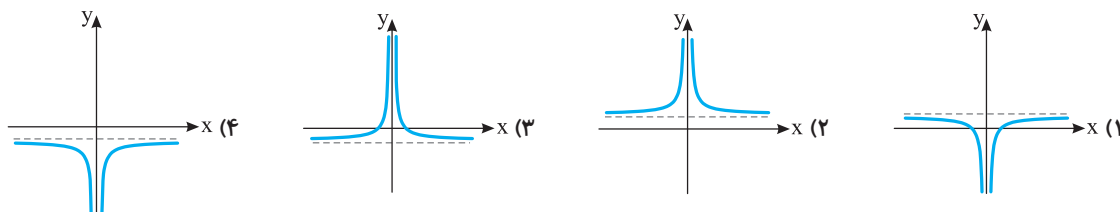


۹۴۵- نمودار تابع $y = |\frac{1}{x} + 1|$ کدام است؟



کتاب درسی

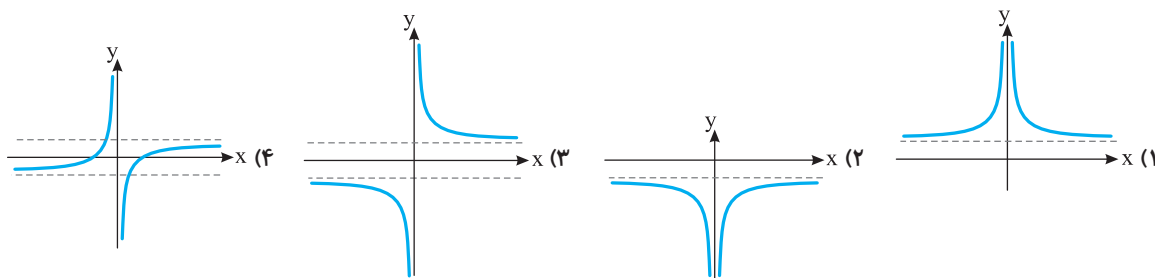
۹۴۶- نمودار تابع $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ کدام است؟



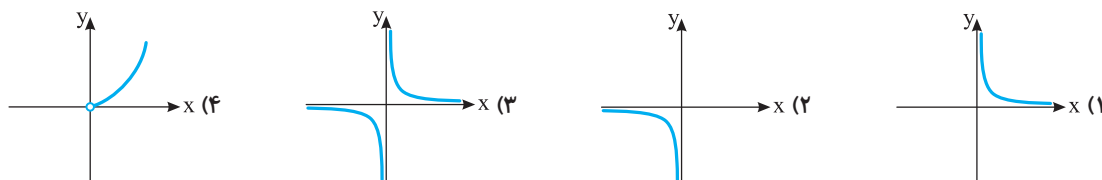
۹۴۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم، سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر آن را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

(۱) $y = \frac{x}{x-1}$ (۲) $y = \frac{x}{x+1}$ (۳) $y = \frac{-x}{x-1}$ (۴) $y = \frac{-x}{x+1}$

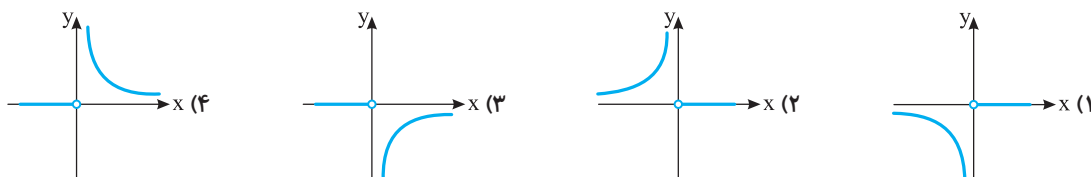
۹۴۸- نمودار تابع $y = \frac{1+|x|}{x}$ کدام است؟



۹۴۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{x+|x|}$ به کدام صورت است؟



۹۵۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|-x}{x^2}$ کدام است؟



۹۵۱- برد تابع $f(x) = \frac{4x+1}{2x-6}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{3\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{-2\}$

۹۵۲- اگر $f(x) = \frac{6x-1}{2x-4}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{2, 4\}$ ، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{23}{4}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{35}{4}$

۹۵۳- چند عدد صحیح در برد تابع $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ با دامنه $\{-2\} - [-1, -\infty)$ قرار ندارند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹۵۴- معادله $|\frac{1}{x} - 1| = k$ دو جواب مثبت دارد. حدود k کدام است؟

- (۱) $k \neq 1$ (۲) $k \neq 0$ و $k \neq 1$ (۳) $0 < k < 1$ (۴) $k > 1$

۹۵۵- تابع $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟

- (۱) $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ (۲) $h(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ (۳) $k(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2}$ (۴) $t(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1}$

۹۵۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3 & x \neq 3 \\ 3 - x & x = 3 \\ n & x = 3 \end{cases}$ با یک تابع خطی برابر باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۵۷- تابع $f(x) = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

- (۱) $g(x) = 1$ (۲) $h(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x}$ (۳) $k(x) = \frac{2(x^2-x)}{x^2-x}$ (۴) $t(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{|x-1|}{x-1}$

۹۵۸- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟

- (۱) $g(x) = (x^2 + 3) \frac{|x|}{x} + 2x$ (۲) $h(x) = x^2 \frac{|x|}{x} + 3$ (۳) $k(x) = \begin{cases} (x^2 + 3) \frac{|x|}{x} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (۴) $t(x) = \begin{cases} x^2 \frac{|x|}{x} + 3 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۹۵۹- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{5}{x-2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) -۱۰۰ (۴) -۲۰۰

۹۶۰- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-bx+c}$ با هم برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶۱- تابع $f(x) = \frac{bx+1}{ax+2b}$ با تابع $g(x) = c, x \neq a$ مساوی است. حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 4 (۴) ± 8

۹۶۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2$ را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ خط $y=k$ را قطع نمی‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$



۹۶۴- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، کدام گزینه حاصل $f(a) - f(b)$ را درست نشان می‌دهد؟

- (۱) $f(\frac{b-a}{ab})$ (۲) $f(\frac{ab}{a-b})$ (۳) $f(\frac{a-b}{ab})$ (۴) $f(\frac{ab}{b-a})$

۹۶۵- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، حاصل $f(x-1)$ بر حسب $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2+f(x)}$ (۲) $\frac{1}{2-f(x)}$ (۳) $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ (۴) $\frac{f(x)}{1+f(x)}$

۹۶۶- اگر $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ، حاصل $f(x-2)$ بر حسب $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2f(x)+1}{f(x)}$ (۲) $\frac{f(x)-2}{f(x)}$ (۳) $\frac{2f(x)-1}{f(x)}$ (۴) $\frac{f(x)+2}{f(x)}$

۹۶۷- اگر $f(\frac{x+2}{x-2}) = \frac{x-3}{x+1}$ ، آن‌گاه $f(\frac{x-2}{x+2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x+1}{x-3}$ (۲) $\frac{x+3}{x-1}$ (۳) $\frac{x-1}{x-3}$ (۴) $\frac{x-3}{x+1}$

۹۶۸- اگر برای هر x تساوی $f(x) + xf(-x) = x^2 + 2x$ برقرار باشد، ضابطه تابع f کدام است؟

- (۱) $f(x) = \frac{-x^2 - x^2 + 2}{x^2 + 1}$ (۲) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ (۳) $f(x) = \frac{x^2 + 2x^2}{x^2 + 4}$ (۴) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$

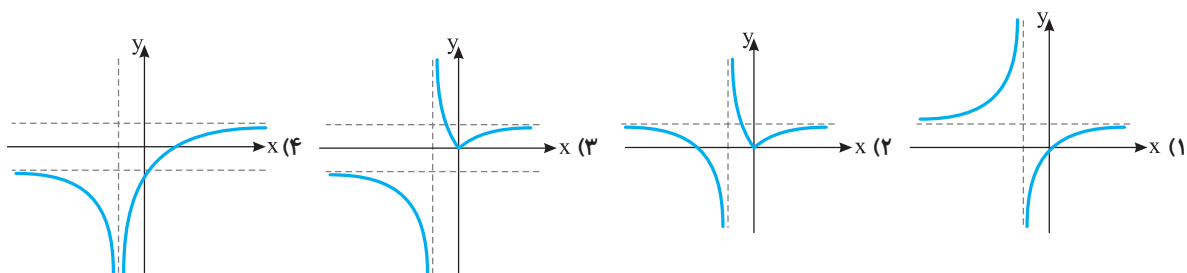
۹۶۹- اگر $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$ ، ضابطه تابع f برای $x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ (۲) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$ (۳) $f(x) = \frac{1+x^2}{3x}$ (۴) $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$

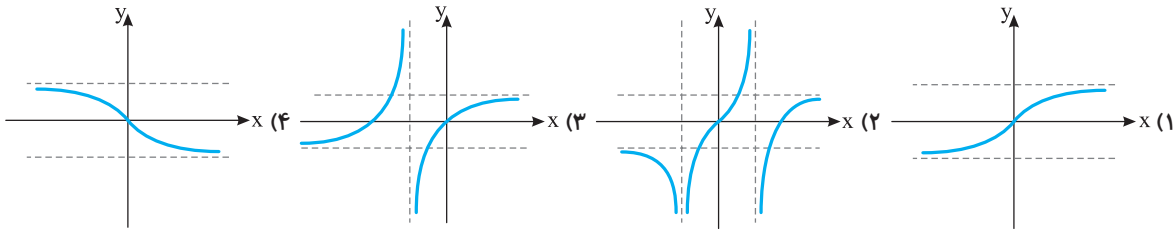
۹۷۰- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 + ax^2 + b}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است. مجموعه مقادیر ممکن a کدام است؟

- (۱) $(-2, 6)$ (۲) $(2, 6)$ (۳) $(-6, 2)$ (۴) $(-6, -2)$

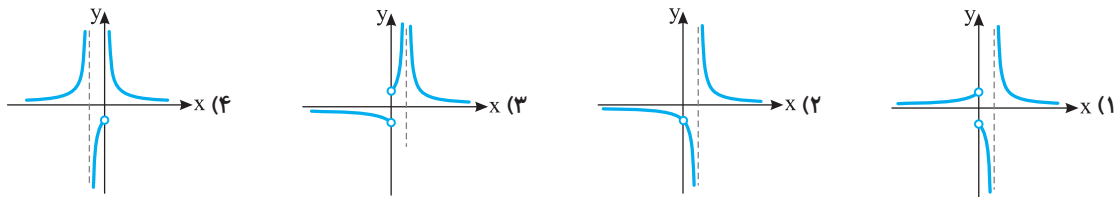
۹۷۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ به کدام صورت است؟



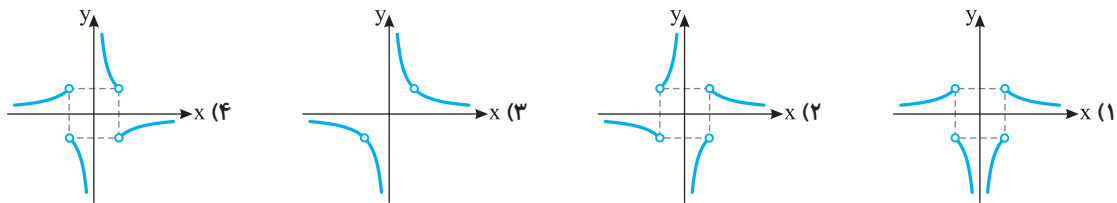
۹۷۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ به کدام صورت است؟



۹۷۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x^2-x}$ به کدام صورت است؟



۹۷۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2-x}$ به کدام صورت است؟



فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش دوم: توابع رادیکالی

تابع رادیکالی

به تابعی که به هر عدد حقیقی نامنفی، جذر آن را نسبت می‌دهد تابع رادیکالی می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر رادیکالی هستند:

الف) $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty)$

ب) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $D_f = [1, +\infty)$

تست

اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $a < 0$ ، حاصل $f(1-a^2)$ کدام است؟

(۴) $1+a$

(۳) $1-a$

(۲) a

(۱) $-a$

$$f(1-a^2) = \sqrt{1-(1-a^2)} = \sqrt{1-1+a^2} = \sqrt{a^2} = |a| = -a$$

می‌توان نوشت

را حل

دامنه توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، مجموعه همه مقادیری را پیدا می‌کنیم که عبارت زیر رادیکال به ازای آن‌ها نامنفی است.

مثال: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x+3}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_f = [-3, +\infty)$$

تست
 □□□□

 چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ وجود دارد؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه حل

 مقادیری از x را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است:

$$3x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(3 - x) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$3x - x^2$		-	+	-

بنابراین به ازای $x \in [0, 3]$ عبارت $3x - x^2$ که زیر رادیکال قرار دارد، نامنفی است. یعنی $D_f = [0, 3]$ ، در نتیجه فقط چهار عدد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ در دامنه تابع f وجود دارند.

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

 برحسب اینکه عبارت $ax^2 + bx + c$ ثابت، خطی یا درجه دوم باشد، دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ به صورت زیر است:

حالت ۱: $a = b = 0$. در این صورت $f(x) = \sqrt{c}$ و با توجه به علامت c ، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$c \geq 0$	$c < 0$
D_f	\mathbb{R}	\emptyset

حالت ۲: $a = 0$ و $b \neq 0$. در این صورت $f(x) = \sqrt{bx + c}$ و با توجه به علامت b ، تابع f مطابق جدول زیر است:

	$b > 0$	$b < 0$
D_f	$[-\frac{c}{b}, +\infty)$	$(-\infty, -\frac{c}{b}]$

 • $-\frac{c}{b}$ ریشه چندجمله‌ای $bx + c$ (عبارت زیر رادیکال) است.

حالت ۳: $a \neq 0$. در این صورت با توجه به علامت a و علامت دلتای عبارت زیر رادیکال، دامنه تابع f مطابق جدول زیر است:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
$a < 0$	$D_f = \emptyset$	$D_f = \{-\frac{b}{2a}\}$	$D_f = [x_1, x_2]$

 • x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ (عبارت زیر رادیکال) هستند و $x_1 \leq x_2$.

تست
 □□□□

 اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a^2 - 16)x + a}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل

ابتدا توجه کنید که عبارت زیر رادیکال یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر ۱ است. پس مطابق جدول‌های بالا، اگر ضریب x در عبارت زیر رادیکال برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنه تابع f بازه‌ای است که برابر با \mathbb{R} نیست. بنابراین باید $a^2 - 16 = 0$ ، یعنی $a = -4$ یا $a = 4$. در این صورت $f(x) = \sqrt{a}$ ، پس $a = -4$ قابل قبول نیست. بنابراین $a = 4$ و $f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$.

تست
 □□□□

 اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax + a^2 - 3}$ بازه $(-\infty, 2]$ باشد، مقدار $f(\frac{a}{3})$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه حل

 مطابق جدول‌های بالا، باید a منفی باشد و $x = 2$ ریشه چندجمله‌ای $ax + a^2 - 3$ باشد. در نتیجه

$$a \times 2 + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = -3, a = 1$$

چون a باید عددی منفی باشد، پس $a = -3$. بنابراین $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$. در نتیجه $f(\frac{a}{3}) = f(-1) = \sqrt{-3(-1) + 6} = \sqrt{9} = 3$

تست
□□□□۵ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x^2 + mx + 8}$ برابر \mathbb{R} باشد، حداکثر مقدار ممکن m کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

راه حل

برای اینکه دامنه تابع f برابر \mathbb{R} باشد باید عبارت $2x^2 + mx + 8$ به ازای هر مقدار حقیقی x نامنفی باشد. بنابراین باید ضریب x^2 در این عبارت، مثبت و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 - 64 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 64 \Rightarrow |m| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq m \leq 8$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن m برابر ۸ است.تست
□□□□۶ اگر دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{(a-2)x^2 + bx + 6}$ بازه $(-\infty, 2]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

-۵ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

راه حل

باید جواب $(a-2)x^2 + bx + 6 \geq 0$ به صورت $x \leq 2$ باشد. با توجه به تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم، ممکن نیست جواب نامعادله درجه دوم به شکل $x \leq 2$ باشد. بنابراین باید $a-2=0$ تا نامعادله به صورت $bx + 6 \geq 0$ درآید. برای اینکه جواب نامعادله اخیر به صورت $x \leq 2$ باشد، باید ۲ ریشه عبارت $bx + 6$ باشد. یعنی

$$2b + 6 = 0 \Rightarrow b = -3$$

بنابراین $a=2$ ، $b=-3$ و $a+b=-1$.دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$

دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ برابر با مجموعه همه x هایی از دامنه تابع f است که به ازای آن‌ها $f(x) \geq 0$. برای پیدا کردن دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ ، اشتراک دامنه تابع f و مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x) \geq 0$ را پیدا می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنه تابع $g(x) = \sqrt{|x|-1}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که دامنه تابع $f(x) = |x|-1$ برابر با \mathbb{R} است. همچنین، مجموعه جواب‌های نامعادله $|x|-1 \geq 0$ به صورت زیر است:

$$|x|-1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

اشتراک این مجموعه جواب‌ها با \mathbb{R} برابر است با $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. در نتیجه $D_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

مثال: می‌خواهیم دامنه تابع $g(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که دامنه تابع $f(x) = 1-\sqrt{x}$ برابر با $[0, +\infty)$ است. از طرف دیگر،

$$1-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x \in [0, 1]$$

در نتیجه $D_g = [0, +\infty) \cap [0, 1] = [0, 1]$.تست
□□□□۷ چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$ قرار دارند؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

راه حل

عبارت‌های زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشند، پس

$$1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}, \quad 4-\sqrt{1-2x} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq \sqrt{1-2x} \Rightarrow 4^2 \geq 1-2x \Rightarrow 2x \geq -15 \Rightarrow x \geq -\frac{15}{2}$$

بنابراین $D_f = [-\frac{15}{2}, \frac{1}{2}]$. عددهای صحیح ۰، -۱، -۲، -۳، -۴، -۵، -۶ و -۷ در دامنه تابع قرار دارند.

چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{||x|-2|-1}$ قرار ندارند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

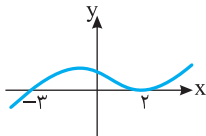
عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس

$$||x|-2|-1 \geq 0 \Rightarrow ||x|-2| \geq 1 \Rightarrow |x|-2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \text{ یا } |x|-2 \leq -1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

در نتیجه $D_f = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$. بنابراین فقط عددهای صحیح ۲ و -۲ در دامنه تابع قرار ندارند.

راه حل

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{1-x^2}}$ کدام است؟


 (۲) $(-\infty, -3] \cup (-1, 1)$

 (۱) $(-\infty, -3] \cup [-1, 1]$

 (۴) $(-\infty, -3] \cup [-1, 1]$

 (۳) $(-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup \{2\}$

توجه کنید که $D_g = \{x | \frac{f(x)}{1-x^2} \geq 0, x^2 \neq 1\}$. در جدول زیر $f(x)$ و $1-x^2$ تعیین علامت شده‌اند:

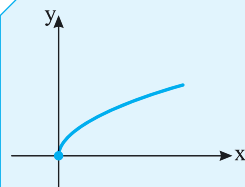
x	$-\infty$	-۳	-۱	۱	۲	$+\infty$
f(x)	-	+	+	+	+	+
$1-x^2$	-	-	+	-	-	-
$\frac{f(x)}{1-x^2}$	+	-	+	-	-	-

بنابراین $D_g = (-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup \{2\}$

راه حل

 تابع $f(x) = \sqrt{x}$

نمودار تابع ریشه دوم به صورت روبه‌رو است.

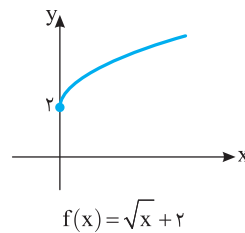
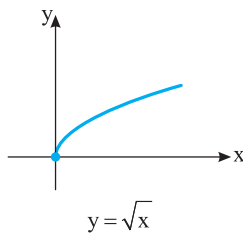


$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$R_f = [0, +\infty)$$

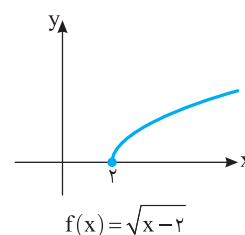
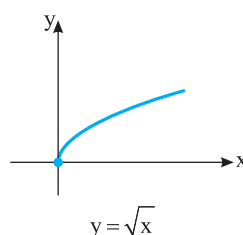
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم.



$$D_f = [0, +\infty)$$

$$R_f = [2, +\infty)$$

مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.



$$D_f = [2, +\infty)$$

$$R_f = [0, +\infty)$$

تست ۱۰

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{x+1}$ را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند. در کدام بازه قرار دارد؟

(۴) (۳, ۴)

(۳) (۲, ۳)

(۲) $(\frac{3}{2}, 2)$

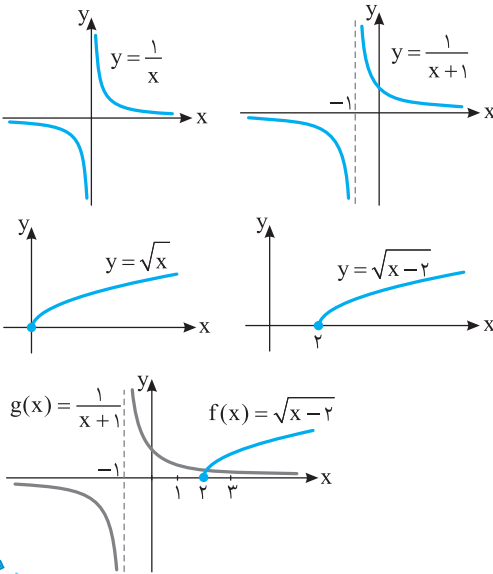
(۱) $(1, \frac{3}{2})$

راه‌حل

اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{x+1}$ به دست می‌آید.

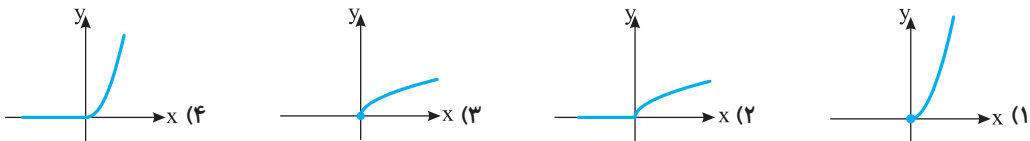
اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ به دست می‌آید.

مطابق شکل روبه‌رو نمودارهای توابع f و g در نقطه $x=a$ متقاطع‌اند و $a \in (2, 3)$.



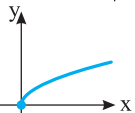
تست ۱۱

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x-|x|}$ کدام است؟



راه‌حل

ابتدا توجه کنید که اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $x < 0$ و اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $x \geq 0$ و $2x - |x| = 2x - x = x \geq 0$ و $2x - |x| = 2x - (-x) = 3x < 0$. بنابراین $D_f = [0, +\infty)$. از طرف دیگر، اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = \sqrt{2x - |x|} = \sqrt{x}$. در نتیجه نمودار تابع f به صورت مقابل است:



تست ۱۲

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - \frac{x}{|x|}}$ چند نقطه مشترک با نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ دارد؟

(۴) (۳) (۲) (۱)

راه‌حل

$$x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا توجه کنید که

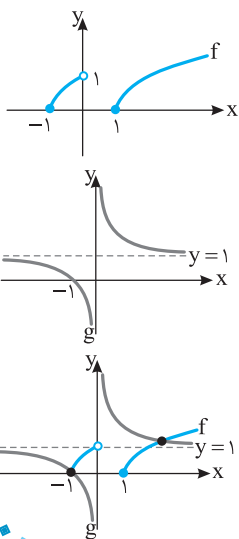
چون دامنه تابع f مجموعه مقادیری از x است که به ازای آن‌ها $x - \frac{x}{|x|} \geq 0$ پس $D_f = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ \sqrt{x+1} & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

از طرف دیگر نمودار تابع g به صورت روبه‌رو است.

اکنون توجه کنید که مطابق شکل مقابل، نمودارهای تابع‌های f و g دو نقطه مشترک دارند.



سطح ۱

۹۷۵- اگر تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}-2 & x \geq a \\ -2x+4 & x \leq a \end{cases}$ تعریف شود، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۷۶- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+2}-1$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = |x|$ را قطع می‌کند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۹۷۷- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $D_f = (0, +\infty) - \{4\}$ ، چند عدد طبیعی در برد تابع f وجود ندارند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۹۷۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}+2$ و $D_f = [0, 3]$ ، مجموع اعداد صحیحی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۹۷۹- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{5-|x-3|}$ کدام است؟

۱ (۱) $[-2, 8]$ ۲ (۲) $(-2, 8)$ ۳ (۳) $[-8, 2]$ ۴ (۴) $(-8, 2)$

۹۸۰- چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2-|x+1|}$ قرار دارند؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۹۸۱- چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{|x-1|}-3$ قرار ندارند؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

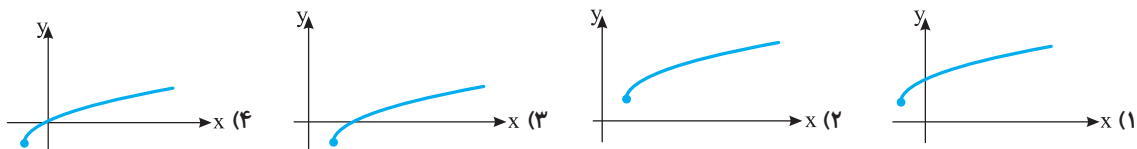
۹۸۲- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2+2x-1}$ کدام است؟

۱ (۱) $(-\infty, 1)$ ۲ (۲) $[1, +\infty)$ ۳ (۳) $\{1\}$ ۴ (۴) $[0, 1]$

۹۸۳- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4x-x^2}-3$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $2a+b$ کدام است؟

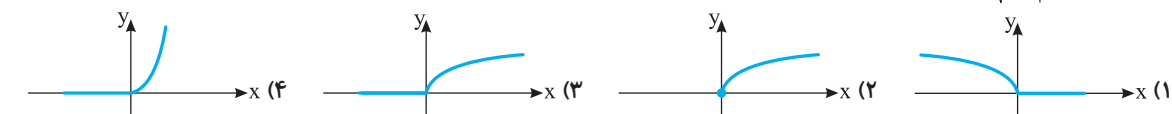
۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۹۸۴- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-1}+1$ کدام است؟

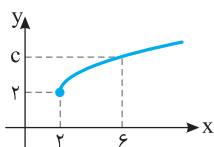


سطح ۲

۹۸۵- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+|x|}{2}}$ کدام است؟



۹۸۶- نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{x+b}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱۰ (۱) ۶ (۲)

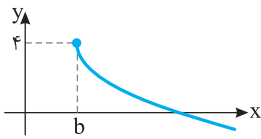
۴ (۳) ۲ (۴)

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی



۹۸۷- اگر نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{x-3}$ به صورت شکل مقابل باشد، حاصل ab کدام است؟

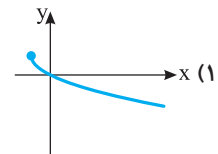
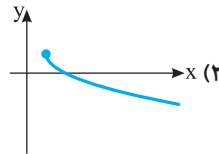
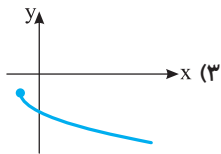
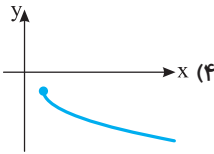
(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۸

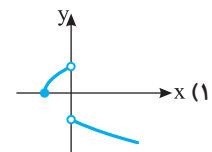
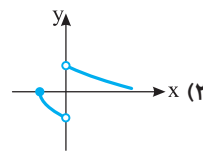
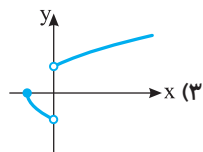
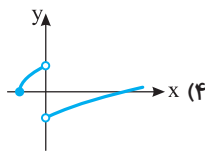
(۳) ۶

کتاب درسی

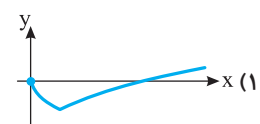
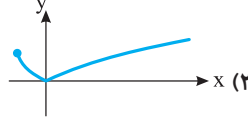
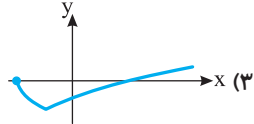
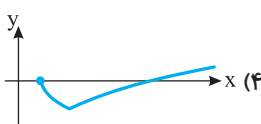


۹۸۸- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ کدام است؟

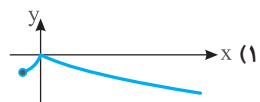
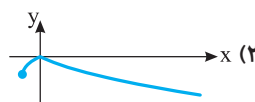
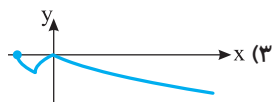
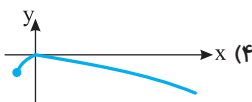
۹۸۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{x+1}$ کدام است؟



۹۹۰- نمودار تابع $y = |\sqrt{x-1}| - 1$ کدام است؟



۹۹۱- نمودار تابع $y = -|\sqrt{x+1}| - 1$ کدام است؟



۹۹۲- نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ را دو واحد در کدام جهت انتقال دهیم تا محورهای مختصات را قطع نکند؟

(۴) پایین

(۳) بالا

(۲) راست

(۱) چپ

۹۹۳- اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم، سپس نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار به دست آمده در نقطه‌ای با کدام

طول نمودار اولیه را قطع می‌کند؟

(۴) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$

۹۹۴- اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم سپس نسبت به محور طولها قرینه کنیم، نمودار به دست

آمده نمودار اولیه را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) $\frac{16}{25}$ (۳) $\frac{25}{16}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۱) $\frac{9}{16}$

۹۹۵- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به بالا و یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. نمودار

به دست آمده نمودار تابع f را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۹۹۶- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x} - 1$ را یک واحد به چپ و دو واحد به بالا می‌بریم. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور طولها قرینه می‌کنیم.

ضابطه‌ی تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

(۴) $y = -\sqrt{x-1} + 1$ (۳) $y = -\sqrt{x+1} + 1$ (۲) $y = -\sqrt{x-1} - 1$ (۱) $y = -\sqrt{x+1} - 1$

۹۹۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{9 - |x^2 - 4|}$ کدام است؟

- (۱) $[-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$ (۲) $[-3, \sqrt{13}]$ (۳) $[-1, \sqrt{13}]$ (۴) $[-4, 5]$

 ۹۹۸- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, 1)$ (۲) $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{4}, 1)$ (۳) $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, 1)$ (۴) $[\frac{1}{4}, 1)$

 ۹۹۹- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0)$ (۲) $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ (۳) $[-1, \frac{1}{4}] - \{0\}$ (۴) $[-\frac{1}{4}, 1) - \{0\}$

 ۱۰۰۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 8}{-x^2 + 2x + 8}}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\mathbb{R} - (-2, 4)$ (۳) $\mathbb{R} - [-2, 4]$ (۴) $(-2, 4)$

 ۱۰۰۱- چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^4 - 9x^2}$ قرار ندارند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

 ۱۰۰۲- چند عدد صحیح در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - |x+6|}$ قرار ندارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

 ۱۰۰۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + a + 2}$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-1, 2)$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(-2, -1)$

 ۱۰۰۴- تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 2a^2}$ در تمام نقاط بازه $[-3, 2]$ تعریف می‌شود و در تمام نقاط مجموعه $\mathbb{R} - [-3, 2]$ تعریف نمی‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

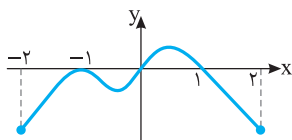
- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) صفر

 ۱۰۰۵- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + m}$ فقط می‌تواند مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد. مقدار m کدام است؟

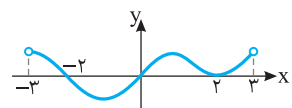
- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) -۴

 ۱۰۰۶- تابع $f(x) = \sqrt{(a+2)x^2 + ax + b}$ در بازه $(-\infty, 3]$ تعریف می‌شود و در بقیه اعداد تعریف نمی‌شود. مقدار b کدام است؟

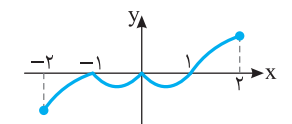
- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) ۴


 ۱۰۰۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-x^2 f(x)}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵


 ۱۰۰۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{f(x)}}$ کدام است؟

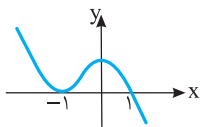
- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(-3, -2) \cup (2, 3)$


 ۱۰۰۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2 - x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 2] - \{1\}$ (۲) $(-1, 2] - \{1\}$ (۳) $(0, 2] \cup \{-1\}$ (۴) $(0, 1) \cup (1, 2] \cup \{-1\}$

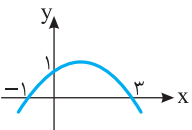
			۱۰۱۰- معادله $\sqrt{x+1}= x -1 $ چند جواب دارد؟
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۰۱۱- معادله $ x^2-x =\sqrt{x+2}$ چند جواب دارد؟
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۰۱۲- معادله $\frac{\sqrt{x-1}}{x}= x-2 $ چند جواب دارد؟
۴ (۴) صفر	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۰۱۳- معادله $\sqrt{x+1}=1+\frac{1}{x}$ چند جواب دارد؟
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۰۱۴- معادله $x\sqrt{x-1}=1$ چند جواب دارد؟
۴ (۴) صفر	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)

سطح ۳



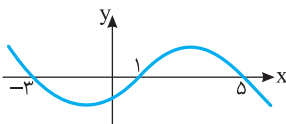
۱۰۱۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{x-f(x+1)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$
 (۲) $(-\infty, 0]$
 (۳) $[1, +\infty)$
 (۴) $[-1, +\infty)$



۱۰۱۶- نمودار تابع چندجمله‌ای درجه دوم f در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{x^2+3f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[1, +\infty)$
 (۲) $(-\infty, \frac{3}{2}]$
 (۳) $[-\frac{3}{2}, +\infty)$
 (۴) $(-\infty, -1]$



۱۰۱۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل جمع عددهای صحیحی که در دامنه تابع

$g(x)=\sqrt{f(x-2)f(x+2)}$ نیستند، کدام است؟

- (۱) ۱۱
 (۲) ۱۶
 (۳) ۹
 (۴) ۷

فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش سوم: معادلات و توابع

رابطه و تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند. به عبارت دیگر، اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در تساوی مورد نظر صدق کنند و $x_1 = x_2$ ، آن‌گاه $y_1 = y_2$.

مثال: مجموعه زوج مرتب‌هایی که در رابطه $y^2 = x$ صدق می‌کنند، تابع نیست، زیرا مثلاً زوج مرتب‌های $(1, 1)$ و $(1, -1)$ عضو این مجموعه

هستند (این دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر دارند). توجه کنید که به ازای هر مقدار مثبت x ، دو مقدار برای y

وجود دارد، زیرا $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x}$.

مثال: در رابطه $x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 5 = 0$ ، y تابعی از x است. توجه کنید که این رابطه را می‌توانیم به شکل مجموع دو مربع کامل بنویسیم:

$$x^2 + 4x + 4 + 4y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (2y-1)^2 = 0$$

بنابراین باید هر دو عبارت $(x+2)^2$ و $(2y-1)^2$ برابر صفر باشند که نتیجه می‌شود $x = -2$ و $y = \frac{1}{2}$. یعنی تنها زوج مرتبی که در رابطه

داده شده صدق می‌کند $(-2, \frac{1}{2})$ است. پس در این رابطه y تابعی از x است.

نکته

اگر رابطه‌ای را بتوان به صورت $y=f(x)$ نوشت، که در این جا $f(x)$ عبارتی جبری بر حسب x است، آن گاه y تابعی از x است.

مثال: در رابطه $y^3 + 3y^2 + 3y = x$ ، y تابعی از x است، زیرا رابطه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

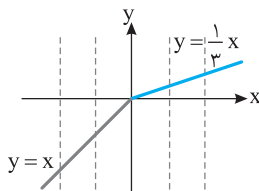
$$(y+1)^3 - 1 = x \Rightarrow (y+1)^3 = x+1 \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

واضح است که در تساوی بالا به ازای هر مقدار از x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید. پس در این رابطه y تابعی از x است.

نکته

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، این رابطه یک تابع است، اگر و فقط اگر هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: در رابطه $2y + |y| = x$ ، y تابعی از x است.



ابتدا توجه کنید که اگر $y \geq 0$ ، آن گاه رابطه به صورت مقابل است: $2y + y = x \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

و اگر $y < 0$ ، آن گاه رابطه به صورت مقابل است: $2y - y = x \Rightarrow y = x$

پس نمودار رابطه به شکل روبه‌رو است و چون هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس در این رابطه y تابعی از x است.

نکته

به کمک تعریف تابع می‌توانیم ثابت کنیم در رابطه داده شده، y تابعی از x است.

مثال: در رابطه $y^3 + y = x$ ، y تابعی از x است.

فرض کنید دوزوج مرتب (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عضو رابطه باشند. اگر $x_1 = x_2$ ، آن گاه باید نشان دهیم $y_1 = y_2$ تا در رابطه داده

شده y تابعی از x باشد. پس

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1^3 + y_1 = y_2^3 + y_2 \Rightarrow y_1^3 - y_2^3 + y_1 - y_2 = 0$$

$$(y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + (y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow (y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 1) = 0$$

اکنون توجه کنید که عبارت $y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 1$ ممکن نیست صفر شود و همواره مقداری مثبت دارد، زیرا

$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 1 = (y_1 + \frac{1}{2} y_2)^2 + \frac{3}{4} y_2^2 + 1 > 0$$

$$y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

بنابراین

کدام یک از رابطه‌های زیر y را تابعی بر حسب x تعریف نمی‌کند؟

(۴) $y = x^2 + 2x$

(۳) $x = y^2 + 2$

(۲) $x = y$

(۱) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - 4$

$x = 3 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

در مورد گزینه (۳) توجه کنید که

بنابراین y تابعی از x نیست. بقیه گزینه‌ها همگی چند جمله‌ای‌هایی بر حسب x هستند، پس تابع‌اند.

تست ۱



راه حل

تست

۲

در کدام رابطه y تابعی از x است؟

(۴) $y + \sqrt{y} = x^2 - 2$

(۳) $y - \frac{1}{y} = x^2 - 2$

(۲) $y + \frac{1}{y} = x^2 - 2$

(۱) $y - \sqrt{y} = x - 2$

راه حل

گزینه‌های (۱) تا (۳) را به کمک مثال نقض رد می‌کنیم:

گزینه (۱): $x=2 \Rightarrow y - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y=0, y=1$

گزینه (۲): $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow y=2, y=\frac{1}{2}$

گزینه (۳): $x = \sqrt{2} \Rightarrow y - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow y=1, y=-1$

توجه کنید که در هر قسمت مقدار x را طوری انتخاب می‌کنیم که معادله حاصل ساده باشد و بیش از یک جواب داشته باشد.

معادلات و توابع

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

سطح

۱۸-۱- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

(۴) $|y^3| = x + 1$

(۳) $|y| = x^2 - 1$

(۲) $y^3 = |x - 1|$

(۱) $y^2 = |x|$

۱۹-۱- در کدام یک از رابطه‌های زیر، y تابعی از x نیست؟

(۴) $y^3 - x = 1$

(۳) $|y| - x = 2$

(۲) $y - x^2 = 1$

(۱) $y - |x| = 2$

سطح

۲۰-۱- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

(۴) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$

(۳) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 2$

(۲) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$

(۱) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$

۲۱-۱- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

(۴) $y^2 + x^2 - 2x + 4y = -4$

(۳) $y^2 + x^2 + 2x - 4y = -5$

(۲) $y^2 + x^2 - 4y = -4$

(۱) $y^2 + x^2 + 2x = -1$

۲۲-۱- در کدام یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

(۴) $y^2 + xy + x^2 = 4$

(۳) $y^2 - xy + x^2 = 1$

(۲) $y^2 + 2y + x^2 = 0$

(۱) $y^2 + 3y^2 + 3y + x^2 = 0$

۲۳-۱- در کدام یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

(۴) $y = x - y^2 - 1$

(۳) $y = x - y^2$

(۲) $y = y^2 - x$

(۱) $y = y^2 - x + 1$

۲۴-۱- در کدام رابطه y تابعی از x نیست؟

(۴) $y + \sqrt{y} = \sqrt{x}$

(۳) $y - \sqrt{y} = \sqrt{x}$

(۲) $2y + |y| = x$

(۱) $2y - |y| = x$

سطح

۲۵-۱- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

(۴) $x = y + 2\sqrt{y^2 + 1}$

(۳) $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

(۲) $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

(۱) $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

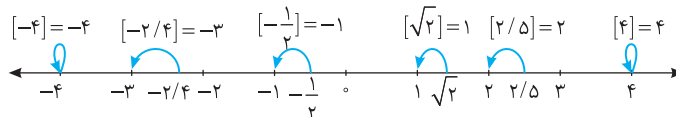
فصل دوم: تابع

درس دوم / بخش چهارم: جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال:



نکته

برای اینکه جزء صحیح عدد حقیقی x را پیدا کنیم، باید عددی صحیح مانند n پیدا کنیم که $n \leq x < n+1$. در این صورت $[x] = n$.

تست ۱

 مقدار $[10\sqrt{2}] + [10\sqrt{3}]$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2} = 1/41 \Rightarrow 10\sqrt{2} = 14/1 \Rightarrow 15 < 10\sqrt{2} < 14 \Rightarrow [10\sqrt{2}] = -15$$

$$\sqrt{3} = 1/73 \Rightarrow 10\sqrt{3} = 17/3 \Rightarrow 17 < 10\sqrt{3} < 18 \Rightarrow [10\sqrt{3}] = 17$$

 بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $-15 + 17 = 2$.

راه‌حل

تست ۲

 حاصل $[x^3] + [2x]$ به ازای $x = -\sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶ (۶) ۸ (۸) صفر

 ابتدا $x = -\sqrt{2}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{2})^3] + [2(-\sqrt{2})] = [-\sqrt{8}] + [-2\sqrt{2}] = [-2\sqrt{2}] + [-2\sqrt{2}] = 2[-2\sqrt{2}]$$

$$1 < \sqrt{2} < 1/5 \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow -3 < -2\sqrt{2} < -2 \Rightarrow [-2\sqrt{2}] = -3 \Rightarrow 2[-2\sqrt{2}] = -6$$

 با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ به دست می‌آید

راه‌حل

تست ۳

 مقدار $[4 \sin 40^\circ]$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

ابتدا توجه کنید که

$$\sin 30^\circ < \sin 40^\circ < \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 40^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 < 4 \sin 40^\circ < 2\sqrt{2} = 2/8$$

 بنابراین $[4 \sin 40^\circ] = 2$.

راه‌حل

ویژگی‌های جزء صحیح

 فرض کنید x عددی حقیقی باشد. در این صورت

 (۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x] = x$ و برعکس.

 (۲) اگر n عددی صحیح باشد و $n \leq x < n+1$ ، آن‌گاه $[x] = n$ و برعکس.

$$(۳) \quad [x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{و} \quad x - 1 < [x] \leq x$$

$$(۴) \quad 0 \leq x - [x] < 1$$

 (۵) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+n] = [x] + n$ و برعکس.

$$(۶) \quad [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{(این تساوی به صورت } [-x] + [x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ نیز بیان می‌شود).}$$

نکته

اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آن‌گاه در حالت کلی نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$(۱) [x+y] \neq [x]+[y] \quad (۲) [x-y] \neq [x]-[y] \quad (۳) [xy] \neq [x][y] \quad (۴) \left[\frac{x}{y}\right] \neq \frac{[x]}{[y]}$$

توجه کنید که برای برخی از مقادیر x و y ممکن است هر کدام از نابرابری‌های بالا به تساوی تبدیل شوند. مثلاً اگر $x=1/2$ و $y=2/3$ ، آن‌گاه

$$[x+y]=[1/2+2/3]=[3/5]=3=1+2=[1/2]+[2/3]=[x]+[y]$$

تست ۴

مقدار عبارت $A=[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\dots+[\sqrt[3]{30}]$ کدام است؟

- ۴۸ (۱) ۵۷ (۲) ۵۹ (۳) ۴۷ (۴)

می‌دانیم $\sqrt[3]{1}=1$ ، $\sqrt[3]{8}=2$ و $\sqrt[3]{27}=3$. بنابراین

$$[\sqrt[3]{1}]=[\sqrt[3]{2}]=\dots=[\sqrt[3]{7}]=1, \quad [\sqrt[3]{8}]=[\sqrt[3]{9}]=\dots=[\sqrt[3]{26}]=2, \quad [\sqrt[3]{27}]=[\sqrt[3]{28}]=[\sqrt[3]{29}]=[\sqrt[3]{30}]=3$$

پس $A=7 \times 1 + 19 \times 2 + 4 \times 3 = 57$.

راه‌حل

تست ۵

اگر $x^2+x < 0$ ، حاصل $[x]+[x^2]+\dots+[x^{10}]$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) -۱۰ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴)

$$x^2+x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

ابتدا با حل نامعادله، محدوده x را می‌یابیم:

اگر عددی بین -1 و 0 باشد، به توان هر عدد فردی برسد در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان زوج برسد عددی بین 0 و 1 می‌شود، یعنی

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^{2k} < 1 \Rightarrow [x^{2k}] = 0 \\ -1 < x^{2k+1} < 0 \Rightarrow [x^{2k+1}] = -1 \end{cases} \Rightarrow [x]+[x^2]+\dots+[x^{10}] = 5 \times 0 + 5 \times (-1) = -5$$

راه‌حل

تست ۶

اگر $[x]=3$ و $[y]=5$ ، حاصل $[x+y]$ چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

توجه کنید که $[x]=3$ نتیجه می‌دهد $3 \leq x < 4$ و $[y]=5$ نتیجه می‌دهد $5 \leq y < 6$. اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم به دست می‌آید $8 \leq x+y < 10$.

بنابراین $[x+y]$ یکی از عددهای صحیح ۸ یا ۹ است.

راه‌حل

تست ۷

اگر $\left[\frac{1-4x}{3}\right] = -2$ ، مقدار $[-x]$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

$$\left[\frac{1-4x}{3}\right] = -2 \Rightarrow \frac{1-4x}{3} \in [-2, -1) \Rightarrow -6 \leq 1-4x < -3 \Rightarrow -7 \leq -4x < -4 \Rightarrow -\frac{7}{4} \leq -x < -1 \Rightarrow [-x] = -2$$

چون $\left[\frac{1-4x}{3}\right] = -2$ پس

راه‌حل

تست ۸

اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]$ برابر کدام است؟

- n (۱) $n+1$ (۲) $n-1$ (۳) $2n-1$ (۴)

راه‌حل اول از نابرابری $(n+1)^3 > n^3+3n^2 > n^3$ ، نتیجه می‌گیریم $n < \sqrt[3]{n^3+3n^2} < n+1$ ، بنابراین $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}] = n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$ ، آن‌گاه

$$[\sqrt[3]{n^3+3n^2}] = [\sqrt[3]{2^3+3 \times 2^2}] = [\sqrt[3]{20}] = 2$$

از طرف دیگر فقط عبارت گزینه (۱) به ازای $n=2$ برابر ۲ می‌شود.

راه‌حل

تست
 □□□□

 اگر x عددی غیر صحیح باشد، حاصل $[x^2-1]+[2-x^2]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) صفر یا -۱ (۴) صفر یا ۱

راه حل

می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس
 $[x^2-1]+[2-x^2]=[x^2]-1+2+[-x^2]=[x^2]+[-x^2]+1$
 می‌دانیم $[a]+[-a]$ به ازای مقادیرهای صحیح a برابر صفر و برای مقادیرهای غیر صحیح a برابر -۱ است. اگر x عددی غیر صحیح باشد، x^2 می‌تواند صحیح باشد (مثل $x=\sqrt{2}$) یا غیر صحیح باشد (مثل $x=\frac{1}{2}$). بنابراین $[x^2]+[-x^2]+1$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

حل معادله‌های شامل جزء صحیح

- اگر k عدد صحیحی باشد، مجموعه جواب‌های معادله $[x]=k$ بازه $[k, k+1)$ است.
- اگر k عدد غیر صحیحی باشد، معادله $[x]=k$ جواب ندارد.

مثال: الف) مجموعه جواب‌های معادله $[x]=3$ بازه $[3, 4)$ است.

ب) معادله $[x]=\frac{1}{2}$ جواب ندارد، زیرا سمت چپ آن عددی صحیح و سمت راست آن عددی غیر صحیح است.

تست
 □□□□

 مجموعه جواب‌های معادله $[\frac{2x+1}{3}]=2$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

راه حل

ابتدا مجموعه جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$[\frac{2x+1}{3}]=2 \Rightarrow 2 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq 2x+1 < 9 \Rightarrow 5 \leq 2x < 8 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < 4$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر بازه $[\frac{5}{2}, 4)$ است. که تنها عدد صحیح در آن ۳ است.

تست
 □□□□

 معادله $[x-1]+2[x]=m$ جواب دارد. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل

ابتدا معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$[x]-1+2[x]=m \Rightarrow 3[x]=m+1 \Rightarrow [x]=\frac{m+1}{3}$$

اگر $\frac{m+1}{3}$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه معادله بالا جواب دارد. با توجه به گزینه‌های داده شده، به ازای $m=2$ مقدار $\frac{m+1}{3}$ صحیح است.

تست
 □□□□

 مجموعه جواب‌های معادله $[x+1]+[x-[x]]=2$ به صورت $[a, b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$[x+1]+[x-[x]]=2 \Rightarrow [x]+1+[x]-[x]=2 \Rightarrow [x]=1$$

در نتیجه $1 \leq x < 2$ ، پس $a=1$ و $b=2$. بنابراین $b-a=1$.

تست
 □□□□

 مجموعه جواب‌های معادله $[4-x]+[x-3]=0$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (۳) \mathbb{Z} (۴) $[0, +\infty)$

راه حل

می‌توان نوشت

$$[4-x]+[x-3]=0 \Rightarrow 4+[-x]+[x]-3=0 \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

تست
 □□□□

 مجموعه جواب‌های معادله $[x]^2-5[x]+6=0$ بازه $[a, b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه حل

اگر فرض کنیم $[x]=t$ ، معادله مورد نظر به صورت مقابل درمی‌آید:

$$t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0$$

$$t=2 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow x \in [2, 3), \quad t=3 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow x \in [3, 4)$$

در نتیجه

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با $[2, 3) \cup [3, 4) = [2, 4)$. پس $a=2$ و $b=4$. در نتیجه $b-a=2$.

تست ۱۵

معادله $x^2 + [2x] - x = 6$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

راه حل

ابتدا توجه کنید از معادله داده شده نتیجه می‌شود $[x^2] + [2x] = x + 6$. سمت چپ این معادله عددی صحیح است، پس سمت راستش، یعنی $x + 6$ نیز عددی صحیح است. بنابراین x هم عددی صحیح است. بنابراین x^2 و $2x$ نیز عددهایی صحیح‌اند. در نتیجه $[x^2] = x^2$ و $[2x] = 2x$ و معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 + 2x - x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$$

هر دو این عددها در معادله مورد نظر صدق می‌کنند. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

تست ۱۶

مجموعه جواب‌های معادله $4[x] = 3x$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

راه حل

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x] = k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 4k = 3x \Rightarrow x = \frac{4k}{3} = 0, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}, \pm 4, \dots$$

از طرف دیگر، $x - 1 < [x] \leq x$ ، پس

$$[x] = \frac{3x}{4} \Rightarrow x - 1 < \frac{3x}{4} \leq x \Rightarrow 0 \leq x < 4$$

تنها عددهای $x = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ در این محدوده قرار دارند. پس مجموع جواب‌ها برابر ۴ است.

حل نامعادله‌های شامل جزء صحیح

فرض کنید k عددی صحیح باشد. در این صورت

$$[x] > k \Rightarrow x \geq k + 1, \quad [x] \geq k \Rightarrow x \geq k$$

$$[x] < k \Rightarrow x < k, \quad [x] \leq k \Rightarrow x < k + 1$$

مثال: مجموعه جواب‌های نامعادله‌های $2 < [x] \leq 3$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[x] > 2 \Rightarrow x \geq 3, \quad [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های $[0, +\infty)$ و $(-\infty, 3)$ است، که برابر است با $[3, 4)$.

تست ۱۷

مجموعه جواب‌های نامعادله $2[x+1] + [x] > 3$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{3}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{3}, 1]$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

راه حل

ابتدا توجه کنید که $[x+1] = [x] + 1$. بنابراین نامعادله مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2([x] + 1) + [x] > 3 \Rightarrow 3[x] + 2 > 3 \Rightarrow [x] > \frac{1}{3}$$

چون $[x]$ عددی صحیح و بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ است، پس $[x] \geq 1$. بنابراین $x \geq 1$ ، یعنی مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر $[1, +\infty)$ است.

تست ۱۸

مجموعه جواب‌های نامعادله $3[x] - [x]^2 \geq 0$ بازه $[a, b]$ است. طول این بازه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$3[x] - [x]^2 \geq 0 \Rightarrow [x](3 - [x]) \geq 0$$

$$[x] \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty), \quad [x] \leq 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 4)$$

بنابراین $0 \leq [x] \leq 3$. اکنون می‌توان نوشت

بنابراین $[0, 4) = [0, 4) \cap (-\infty, 4) = [0, 4)$. پس مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $[0, 4)$ است که طول آن برابر است با $4 - 0 = 4$.

سطح ۱

کتاب درسی

 ۱۰۲۶- مقدار $[-20/9]$ کدام است؟

(۱) ۱۹- (۲) ۲۰- (۳) ۲۱- (۴) ۲۲-

 ۱۰۲۷- اگر $x^3=20$ ، مقدار $[-x]$ کدام است؟

(۱) ۳- (۲) ۲- (۳) ۱- (۴) ۴-

 ۱۰۲۸- حاصل $[\frac{1}{2}] + [\frac{1}{3}] + \dots + [\frac{1}{20}]$ چقدر است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۲۰

 ۱۰۲۹- مقدار عبارت $A = [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{20}]$ کدام است؟

(۱) ۵۲ (۲) ۵۳ (۳) ۵۴ (۴) ۵۵

 ۱۰۳۰- مقدار عبارت $A = [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{63}]$ کدام است؟

(۱) ۱۵۵ (۲) ۱۵۶ (۳) ۱۵۷ (۴) ۱۵۸

 ۱۰۳۱- اگر $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ ، مقدار عبارت $[3x] - [\frac{2}{3x}]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱- (۴) صفر

 ۱۰۳۲- اگر $[x]=2$ ، مجموعه مقادیرهای $[3x-5]$ کدام است؟

 (۱) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۳) $\{2, 3, 4\}$ (۴) $\{2, 3\}$

 ۱۰۳۳- اگر $[\frac{5-x}{2}] = -3$ ، حدود x کدام است؟

 (۱) $(9, 11]$ (۲) $(-11, 11)$ (۳) $[-11, -9]$ (۴) $[9, 11)$

کتاب درسی

 ۱۰۳۴- اگر $[3x-2]=1$ ، مقدار $[2x-3]$ کدام است؟

(۱) فقط ۱- (۲) ۲- (۳) ۱- یا صفر (۴) فقط صفر

کتاب درسی

 ۱۰۳۵- مجموعه جواب‌های معادله $[2x - \frac{1}{2}] = 3$ بازه $[a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

 ۱۰۳۶- اگر $7 = [x-1] - [x+2]$ ، حدود x کدام است؟

 (۱) $1 \leq x < 2$ (۲) $2 \leq x < 3$ (۳) $3 \leq x < 4$ (۴) $4 \leq x < 5$

سطح ۲

 ۱۰۳۷- مقدار $[\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

 ۱۰۳۸- مقدار $[\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2}}}]$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

 ۱۰۳۹- مقدار عبارت $A = [-\sqrt{10}] + [-\sqrt{9}] + [-\sqrt{8}] + \dots + [\sqrt{0}]$ کدام است؟

(۱) ۵- (۲) ۶- (۳) ۷- (۴) ۸-

- ۱۰۴۰- مقدار $[\frac{3}{25} + [\frac{3}{25} + \frac{1}{8}] + [\frac{3}{25} + \frac{1}{8}] + \dots + [\frac{3}{25} + \frac{1}{8}]]$ کدام است؟
- ۲۷ (۴) ۲۶ (۳) ۲۵ (۲) ۲۴ (۱)
- ۱۰۴۱- اگر $[\sqrt{x}] = 9$ و $[\sqrt{y}] = 12$ ، بیشترین مقدار $[x+y]$ کدام است؟
- ۲۶۸ (۴) ۲۵۶ (۳) ۲۴۲ (۲) ۲۲۵ (۱)
- ۱۰۴۲- اگر $[x] = [y] = 2$ ، حاصل $[\frac{2x+3y}{5}]$ کدام است؟
- ۳ یا ۲ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۴۳- اگر $[x] = 2$ ، عبارت $[x^2 - 4x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۴۴- اگر $[x^2 + x] = -1$ ، مقدار $[x^{10}]$ کدام است؟
- صفر (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۴۵- اگر $[x^2 - 2x] = -1$ ، مقدار $[\frac{x^5}{32}]$ کدام است؟
- صفر (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۴۶- اگر $[x^2 - 7x] = [x^2 - 5x] = -1$ ، مقدار $[x^2 - 6x + 1]$ کدام است؟
- ۲ (۴) صفر (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۴۷- اگر $[3x] = -2$ ، مقدار عبارت $[x^{10}] + [x^9] + [x^8] + \dots + [x^1]$ کدام است؟
- ۳ (۴) -۵ (۳) ۵ (۲) صفر (۱)
- ۱۰۴۸- اگر $[x^2] = 0$ و $x \neq 0$ ، مقدار عبارت $A = [-x^4] + [-x^6] + \dots + [-x^{20}]$ کدام است؟
- ۱۲ (۴) -۱۰ (۳) -۹ (۲) -۸ (۱)
- ۱۰۴۹- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2 + 2n}]$ کدام است؟
- $n+2$ (۴) $n+1$ (۳) n (۲) $n-1$ (۱)
- ۱۰۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2 + 4n + 1}]$ کدام است؟
- $n+3$ (۴) $n+2$ (۳) $n+1$ (۲) n (۱)
- ۱۰۵۱- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}]$ کدام است؟
- $n+2$ (۴) $n+1$ (۳) n (۲) $n-1$ (۱)
- ۱۰۵۲- اگر $[x + [x - 3]] = 1$ ، حدود x کدام است؟
- $[2, 4]$ (۴) $(1, 3)$ (۳) $[2, 3)$ (۲) $(1, 2)$ (۱)
- ۱۰۵۳- اگر $[x + [x]] = 3[x] + 1$ ، مقدار $[x^2]$ کدام است؟
- صفر (۴) -۲ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۵۴- مجموع جواب‌های صحیح معادله $[\frac{x}{3} + [\frac{x}{3} + [\frac{x}{3}]]] = 12$ چقدر است؟
- ۲۵ (۴) ۳۶ (۳) ۳۹ (۲) ۵۴ (۱)
- ۱۰۵۵- معادله $2[x] = x + 1$ چند جواب دارد؟
- صفر (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۵۶- اگر $[x + 2] + [3 - x] = x$ ، چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟
- صفر (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۱۰۵۷- مجموعه جواب‌های معادله $[-2x] + [1 - 2x] + [3 - 2x] = 1$ کدام است؟
- $(0, \frac{1}{4}]$ (۴) $(0, 1)$ (۳) $(0, \frac{1}{3})$ (۲) $(0, \frac{1}{3}]$ (۱)

۱۰۵۸- مجموع جواب‌های معادله $3|x|+2[x]=1$ که در بازه $(-2, 1)$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{5}{3}$ (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) صفر

۱۰۵۹- مجموعه جواب‌های معادله $4 = [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ بازه $[a, b)$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۱۰۶۰- اگر معادله $[x+2[x]]+[x-2]=k$ جواب داشته باشد، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۶۱- مجموعه جواب‌های معادله $0 = [x]^2 - 3[x] + 2$ بازه $[a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۶۲- مجموعه جواب‌های معادله $0 = 2[x]^2 + [x-1]$ کدام است؟

- (۱) $[-1, -\frac{1}{2}]$ (۲) $[-1, 0)$ (۳) $[-2, 0)$ (۴) $[-2, -1]$

۱۰۶۳- مجموعه جواب‌های معادله $[x]^2 = [x+2]$ به صورت $[a, 0) \cup [b, c)$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۶۴- مجموعه جواب‌های معادله $8 = [x+1]^2 - 2[x+1]$ کدام است؟

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $[-3, 3]$ (۳) $[-3, -2) \cup [3, 4)$ (۴) $[-3, 4)$

۱۰۶۵- مجموعه جواب‌های معادله $3 = \frac{2[x]+1}{3}$ کدام است؟

- (۱) $[5, 6)$ (۲) $[4, 5)$ (۳) $[4, 6)$ (۴) $[4, 7)$

۱۰۶۶- معادله $2x = \frac{x}{2}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۶۷- معادله $x^2 + 1 = [x]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

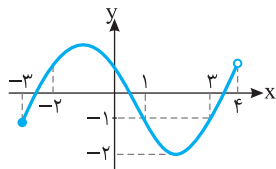
۱۰۶۸- معادله $x[x] = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۶۹- معادله $0 = |x^2 - 1| + [x]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۷۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموعه جواب‌های معادله $[f(x)] = -2$ کدام است؟



- (۱) $[1, 3]$ (۲) $\{-3, 1, 3\}$

- (۳) $(1, 3)$ (۴) $[-3, -2)$

۱۰۷۱- معادله $1 = [x] + \sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۷۲- معادله $1 = |x^2 - 1|$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۷۳- معادله $1 = x[x] - x^2$ چند جواب مثبت و چند جواب منفی دارد؟

- (۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. (۲) چهار جواب مثبت دارد و جواب منفی ندارد.

(۳) مجموعه جواب‌های مثبت معادله نامتناهی است ولی جواب منفی ندارد. (۴) مجموعه جواب‌های منفی معادله نامتناهی است ولی جواب مثبت ندارد.

۱۰۷۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $3 \leq [x] \leq 4$ به صورت $[a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۰۷۵- مجموعه جواب‌های نامعادله $|2x+3| < 1$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $[-\frac{3}{2}, -1)$ (۴) $(-2, -\frac{3}{2}]$

۱۰۷۶- مجموعه جواب‌های نامعادله $2x-1 \leq [2x]$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $(0, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) \emptyset



۱۰۷۷- اگر a عدد طبیعی باشد و $[\sqrt{100+a}] = [\sqrt{101}] = \dots = [\sqrt{100+a}]$ ، بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۲۲

۱۰۷۸- مجموعه جواب‌های معادله $[\frac{x-2}{x-1}] - [\frac{1}{1-x}] = [\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 0]$ (۳) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, 2)$

۱۰۷۹- مجموعه جواب‌های معادله $[x+2]^2 - [x-2]^2 = -24$ کدام است؟

- (۱) $[-4, -3)$ (۲) $[-3, -1)$ (۳) $[-3, -2)$ (۴) $[-2, -1)$

۱۰۸۰- معادله $[2x^2] - [4x] = x-2$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۸۱- مجموع جواب‌های معادله $[\frac{x}{2} - \frac{1}{3}] = x+1$ چقدر است؟

- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) -۴

۱۰۸۲- معادله $x^2 + [x] = 3 - [-x]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۰۸۳- اگر مجموعه جواب‌های معادله $[x-3] - [-x] = -2$ بازه (a, b) باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۸۴- معادله $3[x] = 2x$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۸۵- چند عدد صحیح در معادله $[\frac{x}{3} - 4] = \frac{x}{2} + 8$ صدق می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۸۶- مجموعه جواب‌های نامعادله $[x - \frac{1}{2}][x + \frac{1}{2}] = 2$ به صورت $[m, k) \cup [-m, n)$ است. مقدار $m+n+k$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{11}{2}$

۱۰۸۷- به ازای کدام مقدار از k معادله $[x - \frac{1}{2}][x + \frac{1}{2}] = k$ جواب ندارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) صفر

۱۰۸۸- حاصل ضرب جواب‌های معادله $\sqrt{1 - |x - \frac{1}{2}|} = [x]^2 - \frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{5}{8}$ (۳) $-\frac{5}{16}$ (۴) $-\frac{5}{24}$

۱۰۸۹- مجموعه جواب‌های نامعادله $[x]^2 - 2[x] \leq 3$ بازه $[a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۲

۸۹۵ اگر در تساوی $f(xy) = f(x) + f(y)$ (۱)

قرار دهیم $x=2$ و $y=5$ به دست می‌آید

$$f(10) = f(2) + f(5) \Rightarrow 1 = f(2) + a \Rightarrow f(2) = 1 - a$$

اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=2$ و $y=3$ ، به دست می‌آید

$$f(6) = f(2) + f(3) = 1 - a + b$$

۸۹۶ اگر در تساوی داده شده $-x$ را به جای x قرار دهیم، تساوی زیر

$$-xf(-x) + f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(-x) = \frac{x^2 + x - f(x)}{-x}$$
 به دست می‌آید

در تساوی داده شده به جای $f(-x)$ قرار می‌دهیم $\frac{x^2 + x - f(x)}{-x}$ و در نتیجه

$$xf(x) + \frac{x^2 + x - f(x)}{-x} = x^2 - x \Rightarrow -x^2 f(x) + x^2 + x - f(x) = -x^3 + x^2$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = x$$

۸۹۷ توجه کنید که (۱) $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(y)f(x-y) = f(x)$ توجه کنید که

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=1$ و $y=\frac{1}{3}$ ، به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{3}\right) f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad (2)$$

و اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=\frac{2}{3}$ و $y=\frac{1}{3}$ ، به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{3}\right) f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 \quad (3)$$

بنابراین از تساوی‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}$ و $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{3}$

۸۹۸ توجه کنید که $|x-x| = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$

بنابراین اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = |x - (-2x)| = |3x| = -3x$ و اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = |x - 0| = |x| = x$$

بنابراین تابع f با تابع k برابر است.

۸۹۹ راه‌حل اول با تغییر متغیر $t = 2x - 3$ می‌توان نوشت

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

$$f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 \Rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

راه‌حل دوم عبارت $4x^2 - 14x + 13$ را برحسب $2x - 3$ می‌نویسیم

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 = (4x^2 - 12x + 9) + (-2x + 4)$$

$$f(2x-3) = (2x-3)^2 - (2x-3) + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

راه‌حل سوم اگر در عبارت $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه

می‌شود $f(-1) = 3$. فقط در گزینه (۴) این شرط برقرار است.

۹۰۰ تساوی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$2x + f(x) = 4x \times f(x) - 12$$

در نتیجه $f(x) = \frac{2x+12}{4x-1}$ ، بنابراین $(4x-1) \times f(x) = 2x+12$

۸۸۶ توجه کنید که $f(-5) = \frac{-5+2}{3} = \frac{-3}{3} = -1$ ، $f(0) = g(0)$

اکنون با توجه به تساوی $g(x-2) = 2-x$ می‌توان نوشت:

$$g(x-2) = -(x-2) \Rightarrow g(x) = -x \xrightarrow{x=0} g(0) = 0$$

بنابراین $f(-5) + f(0) = -1 + 0 = -1$

۸۸۷ اگر در تساوی $f(x) = 3x + 4$ به جای x قرار دهیم $2x-1$ به دست می‌آید

$$f(2x-1) = 3(2x-1) + 4 = 6x + 1 = 2(3x+4) - 7 = 2f(x) - 7$$

۸۸۸ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = (x-1)^2 \xrightarrow{\frac{x-1}{2} = t} f(t) = (2t)^2 \Rightarrow f(t) = 4t^2$$

بنابراین $f(x) = 4x^2$

راه‌حل دوم به جای x ، $2x+1$ قرار می‌دهیم. بنابراین

$$f(x) = (2x+1-1)^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

۸۸۹ اگر فرض کنیم $t = 2x - 1$ ، آن‌گاه $x = \frac{t+1}{2}$. در تساوی داده شده به جای

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{t+1}{2}\right) = t^2 + 2t + 1 - 4t - 4 = t^2 - 2t - 3$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 2x - 3$

۸۹۰ توجه کنید که $f(x+2) = x^2 + 6x^2 + 12x + 9 = (x+2)^2 + 1$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-2$ ، به دست می‌آید

۸۹۱ اگر فرض کنیم $t = x^2 + 1$ ، آن‌گاه $t-1 = x^2$ و $t \geq 1$ بنابراین

$$f(x^2+1) = (x^2)^2 - x^2 \Rightarrow f(t) = (t-1)^2 - (t-1) = t^2 - 3t + 2$$

بنابراین اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه $f(x) = x^2 - 3x + 2$

۸۹۲ اگر $x \geq 4$ ، آن‌گاه $f(x) = x - 2 + x - 4 = 2x - 6$. اگر $x < 4$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6 & x \geq 4 \\ 2 & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = k(x)$$

۸۹۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که دامنه همه توابع برابر \mathbb{R} است و

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x(x-x) = 0, \quad x < 0 \Rightarrow f(x) = -x(x+x) = -2x^2$$

$$x \geq 0 \Rightarrow t(x) = x(x-x) = 0, \quad x < 0 \Rightarrow t(x) = x(-x-x) = -2x^2$$

از طرف دیگر $t(x) = x(x-x) = 0$ ، $x < 0 \Rightarrow t(x) = x(-x-x) = -2x^2$ بنابراین توابع t و f برابرند. دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) $x \geq 0 \Rightarrow g(x) = x(x+x) = 2x^2 \Rightarrow g(x) \neq f(x)$

$x < 0 \Rightarrow g(x) = -x(x-x) = 0$

گزینه (۲) $x \geq 0 \Rightarrow h(x) = x(x+x) = 2x^2 \Rightarrow h(x) \neq f(x)$

$x < 0 \Rightarrow h(x) = x(x-x) = 0$

گزینه (۳) $x \geq 0 \Rightarrow k(x) = |x(x-x)| = 0 \Rightarrow k(x) \neq f(x)$

$x < 0 \Rightarrow k(x) = |x(x+x)| = 2x^2$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(-1) = -2$ ، $g(-1) = 0$ ، $h(-1) = 0$ ، $k(-1) = 2$ و

$t(-1) = -2$. بنابراین تابع f نمی‌تواند با توابع g ، h ، k برابر باشد. پس باید با تابع t برابر باشد.

۸۹۴ دامنه تابع را به سه قطعه $x < -3$ ، $-3 \leq x \leq 1$ و $x > 1$ تقسیم می‌کنیم:

$$x < -3 \Rightarrow f(x) = 2 + (-x-3) - (1-x) = -2$$

$$-3 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = 2 + x + 3 - (1-x) = 2x + 4$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = 2 + x + 3 - (x-1) = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -3 \\ 2x+4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 6 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع f با تابع h برابر است.

چون $f(f) = 3$ پس $3 = \frac{2m+1}{3}$ یعنی $m = 4$. به این ترتیب $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{4x+1}{x+1}$

اکنون x ای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+2}{x-1} = 0$. به این ترتیب $x = -2$. در نتیجه

$$f(0) = 7 \text{ یعنی } f\left(\frac{-2+2}{-2-1}\right) = \frac{4 \times (-2) + 1}{-2+1}$$

توجه کنید که $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4$ ، $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 3x + \frac{3}{x} - 4$ **۹۱۰**

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x + \frac{1}{x} = 4$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادله

$x + \frac{1}{x} = 4$ معادل است با $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، که دلنای آن مثبت است، پس جواب

$$f(f) = 3 \times 4 - 4 = 8 \text{ حقیقی دارد. آن گاه } f(4) = 3 \times 4 - 4 = 8$$

ابتدا معادله $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 3$ را حل می‌کنیم که به صورت

$2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2 = 0$ درمی‌آید و تنها جواب آن $x = 1$ است. حال اگر در تساوی فرض مسئله به جای x قرار دهیم 1 ، آن گاه $f(3) = 1 + 3 + 2 = 6$

توجه کنید که $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$ **۹۱۲**

بنابراین دو عدد 1 و 2 در دامنه تابع قرار ندارند.

ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم **۹۱۳**

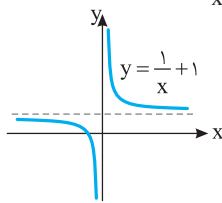
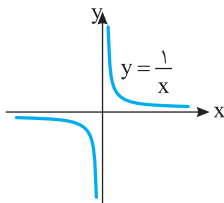
$$2x^3 - 5x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 5x + 2) = 0$$

$$x(2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2$$

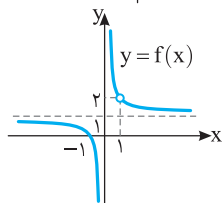
پس دو عدد صحیح $x = 2$ و $x = 0$ در دامنه تابع قرار ندارند.

اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع **۹۱۴**

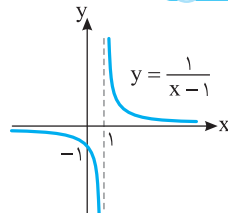
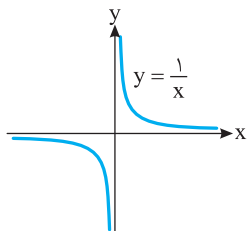
$y = \frac{1}{x} + 1$ به دست می‌آید.



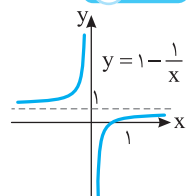
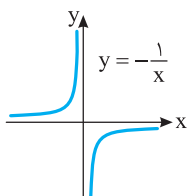
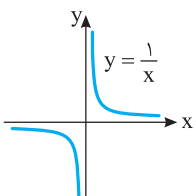
بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل است و برد این تابع $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ است و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، برابر 3 است.



۹۱۵



۹۱۶



توجه کنید که **۹۰۱** $f(2x) = \frac{3(2x) - 4}{2(2x) + 1} = \frac{6x - 4}{4x + 1}$

بنابراین باید معادله $\frac{6x - 4}{4x + 1} = 2$ را حل کنیم:

$$\frac{6x - 4}{4x + 1} = 2 \Rightarrow 6x - 4 = 2(4x + 1) \Rightarrow 6x - 4 = 8x + 2 \Rightarrow -6 = 2x \Rightarrow x = -3$$

از تساوی داده شده به دست می‌آید **۹۰۲** $f(a) = \frac{3a}{a^2 + 3} = -2$

بنابراین $3a = -2(a^2 + 3) \Rightarrow 2a^2 + 3a + 6 = 0$

$$2a^2 + 3a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 + 1.5a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = -3$$

بنابراین $f(a+2)$ یکی از دو عدد مقابل است: $f(a+2) = \frac{3(a+2)}{1^2 + 3} = 2$

$$a = -3 \Rightarrow f(a+2) = f(-1) = \frac{3 \times (-1)}{(-1)^2 + 3} = -2$$

اگر در تساوی $f(x-2) = \frac{3x}{2x+5}$ به جای x قرار دهیم $x+2$ ،

$$f(x+2-2) = \frac{3(x+2)}{2(x+2)+5} = \frac{3x+6}{2x+9}$$

اکنون اگر معادله $\frac{3x+6}{2x+9} = 3$ را حل کنیم، به دست می‌آید $x = -7$.

با جای‌گذاری عدد $-\frac{1}{a}$ به جای x در ضابطه تابع به دست می‌آید **۹۰۴**

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{-\frac{1}{a} + 1}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{1-a}{1-a} = \frac{a-1}{-a+1} = \frac{1-a}{a+1}$$

$$f(a) \times f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{a+1}{a-1} \times \frac{1-a}{a+1} = -1$$

بنابراین

ابتدا توجه کنید که **۹۰۵**

$$f(-x) = \frac{-x-k}{-x+1} = \frac{x+k}{x-1}, \quad f\left(\frac{k}{x}\right) = \frac{k-kx}{\frac{k}{x}+1} = \frac{k-kx}{\frac{k+x}{x}} = \frac{-k(x-1)}{x+k}$$

$$f(-x)f\left(\frac{k}{x}\right) = \frac{x+k}{x-1} \times \frac{-k(x-1)}{x+k} = -k$$

مقدار x^f را طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{x^f - 1}{x^f + 2} = \frac{1}{4}$ ، یعنی **۹۰۶**

$$4x^f - 4 = x^f + 2 \Rightarrow 3x^f = 6 \Rightarrow x^f = 2$$

بنابراین $x^4 = 16$ و $x^6 = 16$. با جای‌گذاری این مقادیر در تساوی داده شده، مشخص

$$\text{می‌شود که } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 4 + 16 = 14$$

ابتدا معادله $\frac{3x+4}{5x+2} = 2$ را حل می‌کنیم: **۹۰۷**

$$3x + 4 = 2(5x + 2) \Rightarrow 3x + 4 = 10x + 4 \Rightarrow 3x = 10x$$

پس $x = 0$. اکنون اگر در تساوی $f\left(\frac{3x+4}{5x+2}\right) = \frac{x^2+6x+10}{3x+2}$ به جای x قرار دهیم

$$f\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{f}{2}\right) = 5$$

صفر، به دست می‌آید

اگر در تساوی $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x+1}{x} + f(x+2)$ قرار دهیم $x = 1$ به دست

$$\text{می‌آید } f(3) = 2 - 4 = -2 \text{، پس } f(1) = 2 \text{، چون } f(1) = \frac{3 \times 1 + 1}{1} + f(3)$$

ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+2}{x-1} = 4$. به این ترتیب **۹۰۹**

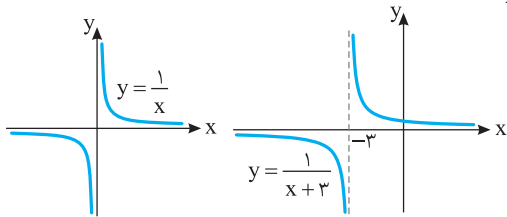
$$\frac{x+2}{x-1} = 4 \Rightarrow x+2 = 4(x-1) \Rightarrow x = 2$$

اکنون اگر در تساوی $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{mx+1}{x+1}$ قرار دهیم $x = 2$ ، به دست می‌آید

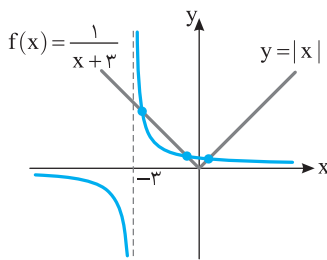
$$f\left(\frac{2+2}{2-1}\right) = \frac{m \times 2 + 1}{2+1} \Rightarrow f(4) = \frac{2m+1}{3}$$

۹۲۲ ۳ اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را سه واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع

$y = \frac{1}{x+3}$ به دست می‌آید.

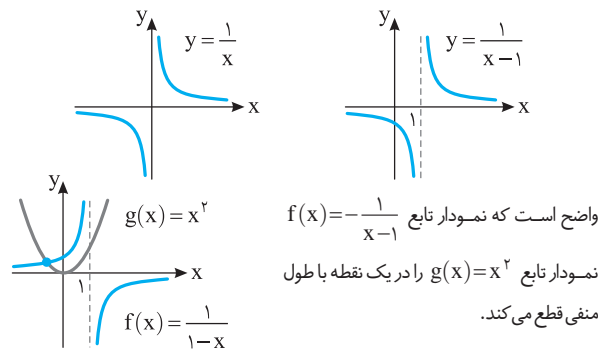


مطابق شکل زیر، نمودارهای توابع $y = \frac{1}{x+3}$ و $g(x) = |x|$ در سه نقطه متقاطع‌اند.



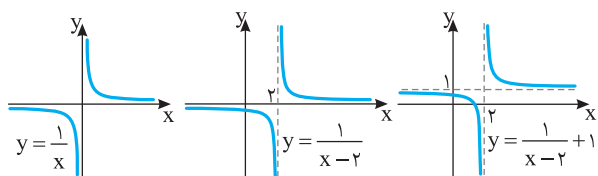
۹۲۳ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x) = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$. بنابراین ابتدا نمودار تابع

$y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \frac{1}{x-1}$ به دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{x-1}$ به دست آید.

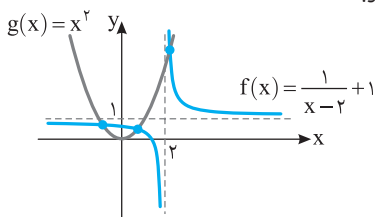


۹۲۴ ۳ اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار

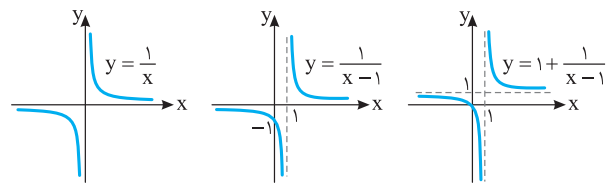
تابع $y = \frac{1}{x-2}$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ به دست می‌آید.



با توجه به شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ ، نمودار تابع $g(x) = x^2$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

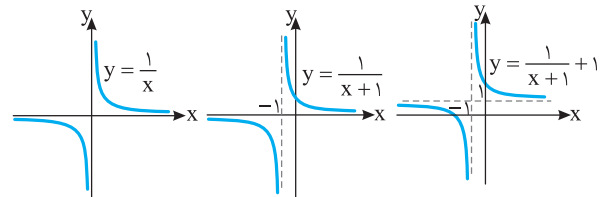


۹۱۷ ۲



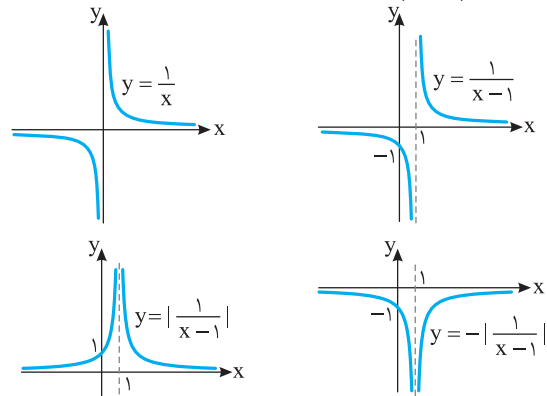
۹۱۸ ۲ ابتدا ضابطه تابع را به صورت $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ می‌نویسیم، سپس

نمودار را به ترتیب زیر رسم می‌کنیم.



۹۱۹ ۳ ضابطه تابع را به صورت $y = -|\frac{1}{x-1}|$ می‌نویسیم و به ترتیب زیر

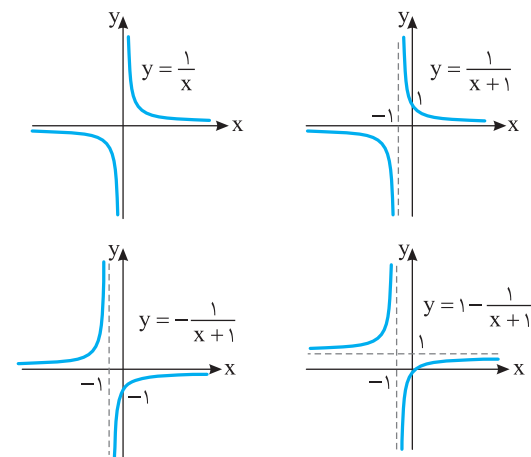
نمودار آن را رسم می‌کنیم:



۹۲۰ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

به ترتیب زیر نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۹۲۱ ۱

معلوم است که $x = -2$ در دامنه تابع قرار ندارد، اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{x+2} = 0 \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad \frac{1}{x+2} = 1 \Rightarrow x = -1, \quad \frac{1}{x+2} = 2 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{-2, -1, \frac{-3}{2}\}$ و حاصل ضرب اعدادی که در دامنه تابع f قرار

ندارند، برابر -3 است.

راه حل دوم فرض می‌کنیم $\frac{1-x}{1+x} = t$ ، در نتیجه $x = \frac{-t+1}{t+1}$ ، پس

$$f(t) = \frac{1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{(1+t)^2 - (1-t)^2}{(1+t)^2 + (1-t)^2} = \frac{4t}{2(1+t^2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

و در نتیجه $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

ابتدا توجه کنید که **۹۳۱ ۳**

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

بنابراین $f(x + \frac{1}{x}) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. اگر فرض کنیم $t = x + \frac{1}{x}$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{و} \quad f(t) = t^2 - 2 \quad \text{بنابراین اگر } |x| \geq 2 \text{ یا } |t| \geq 2$$

ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر، **۹۳۲ ۴**

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1\right) \\ = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3\right)$$

از طرف دیگر، هر عدد حقیقی را می‌توان به شکل $x - \frac{1}{x} = t$ نوشت، زیرا معادله $x - \frac{1}{x} = t$

معادل است با $x^2 - tx - 1 = 0$ که Δ آن مثبت است. بنابراین همواره

$$f(t) = t(t^2 + 3) = t^3 + 3t$$

در نتیجه $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x$

مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم: **۹۳۳ ۳**

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x - 2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, -1, 2$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 2\}$. پس سه عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم: **۹۳۴ ۳**

$$x^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$ و چهار عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

ابتدا توجه کنید که **۹۳۵ ۲**

$$x^3 + kx^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + kx + 1) = 0$$

اگر سه عدد در دامنه تابع f قرار نداشته باشند، باید معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ دو جواب داشته باشد که به همراه $x = 0$ سه عددی باشند که در دامنه f قرار ندارند. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow k^2 - 4 > 0 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow |k| > 2$$

عددهایی که مخرج ضابطه تابع را صفر می‌کنند، در دامنه تابع قرار **۹۳۶ ۱**

ندارند. پس $x = -2$ جواب معادله $x^3 - ax^2 + 2ax = 0$ است.

$$-8 - 4a - 4a = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{1}{x^2 + x^2 - 2x}$ است. دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0$$

$$x = 0, x = 1, x = -2$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$

برای اینکه دامنه تابع برابر \mathbb{R} باشد، باید مخرج کسر **۹۳۷ ۱**

$$\Delta = m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

ابتدا توجه کنید که $x^2 + 1 \neq 0$ و در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$. از طرف دیگر، **۹۲۵ ۳**

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$$

همچنین $x^2 + 2 \neq 0$ و در نتیجه $D_k = \mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$k(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = x$$

بنابراین توابع f و k برابرند. دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) $D_g = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه (۲) $D_h = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow D_f \neq D_h$

گزینه (۴) $D_t = \mathbb{R} - \{1, -1\} \Rightarrow D_f \neq D_t$

توجه کنید که اگر $2x + 1 = 11$ ، آن‌گاه $x = 5$. از طرف دیگر اگر **۹۲۶ ۴**

$x = 5$ ، آنگاه $3x - 4 = 3 \times 5 - 4 = 11$. بنابراین، اگر در تساوی داده شده قرار دهیم

$$x = 5, \text{ به دست می‌آید } \frac{f(11) + 5}{1 - f(11)} = \frac{9}{-3} = -3 \text{ در نتیجه}$$

$$f(11) + 5 = -3 + 3f(11) \Rightarrow 2f(11) = 8 \Rightarrow f(11) = 4$$

اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1} = t$ ، آن‌گاه $t \neq 0$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{1}{t}$. پس **۹۲۷ ۳**

$$x = \frac{2}{t} + 1 = \frac{2+t}{t}$$

$$f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(t) = \frac{\frac{2+t}{t} + 1}{\frac{2+t}{t} - 1} = \frac{2+2t}{2-t} = t+1 \Rightarrow f(x) = x+1, x \neq 0$$

راه حل اول فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{x-2} = t$ و در نتیجه **۹۲۸ ۱**

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow tx - x = 2t + 1 \Rightarrow (t-1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1}$$

در رابطه داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2t+1}{t-1}$:

$$f(t) = 2\left(\frac{2t+1}{t-1}\right) - 1 = \frac{4t+2-t+1}{t-1} = \frac{3t+3}{t-1}$$

و در نتیجه $f(x) = \frac{3x+3}{x-1}$

راه حل دوم اگر در رابطه داده شده قرار دهیم $x = -1$ ، به دست می‌آید $f(0) = -3$. اکنون

در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تابعی که در آن $f(0) = -3$ ، فقط تابع گزینه (۱) است.

ابتدا توجه کنید که **۹۲۹ ۲**

$$f\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = 1 + \frac{x+3}{x-2} + 2\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$$

در نتیجه اگر $\frac{x-2}{x+3} = t$ ، آن‌گاه $f(t) = 1 + \frac{1}{t} + 2t$ پس $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + 2x$

راه حل اول ابتدا کسر $\frac{1-x}{1+x^2}$ را به شکل $\frac{1+x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$ می‌نویسیم. اکنون **۹۳۰ ۳**

توجه کنید که $1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}$. بنابراین $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)$

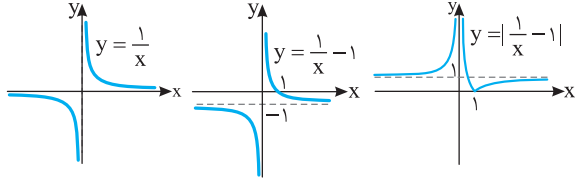
فرض می‌کنیم $\frac{1-x}{1+x} = t$ ، در این صورت $f(t) = \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و در نتیجه

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

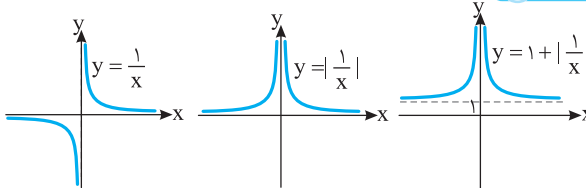
راه‌حل دوم تعداد نقاط تقاطع نمودارهای توابع f و g برابر با تعداد جواب‌های معادله $f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} = 1-x^2 \Rightarrow 2x-1 = x-x^2-1+x^2$ است. $x^2-x^2+x = 0 \Rightarrow x(x^2-x+1) = 0$

چون معادله $x^2-x+1=0$ جواب ندارد ($\Delta < 0$)، پس تنها جواب معادله $x=0$ است و در نتیجه تعداد نقاط تلاقی نمودارها یکی است.

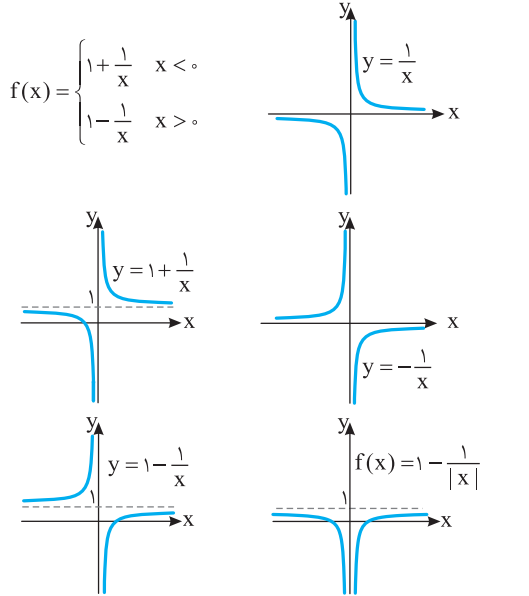
۲ ۹۴۴



۲ ۹۴۵



۱ ۹۴۶ ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:



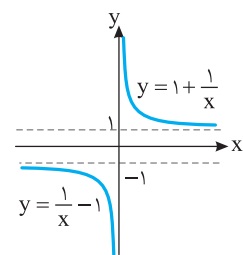
۲ ۹۴۷ اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x+2}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع

$y = \frac{1}{x+2} - 1$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم،

نمودار تابع $y = -(\frac{1}{x+2} - 1)$ به دست می‌آید و اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -(\frac{1}{x+2} - 1)$ به دست می‌آید. پس ضابطه تابعی که

نمودار آن رسم شده، به صورت مقابل است. $y = -(\frac{1}{x+1} - 1) = -(\frac{1-x-1}{x+1}) = \frac{x}{x+1}$



۳ ۹۴۸ ابتدا توجه کنید که دامنه تابع

مجموعه $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اکنون ضابطه تابع را

به صورت زیر می‌نویسیم

$$x > 0 \Rightarrow y = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.

۳ ۹۳۸ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 + 2x - m + 4 \neq 0\}$. برای اینکه معادله $x^2 + 2x - m + 4 = 0$ جواب نداشته باشد، باید $\Delta < 0$:

$$\Delta = 2^2 - 4(-m+4) = 4 + 4m - 16 < 0 \Rightarrow m < 3$$

چون m عددی صحیح است، پس بیشترین مقدار آن ۲ است.

۳ ۹۳۹ **راه‌حل اول** دو عدد ۶ و -۱ در دامنه تابع قرار ندارند، پس $x=6$ و $x=-1$ ریشه‌های مخرج ضابطه تابع هستند

$$x=6 \Rightarrow 36 - 6(a^2+1) - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 30 - 6a^2$$

$$x=-1 \Rightarrow 1 + (a^2+1) - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + 2$$

$$30 - 6a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 6$$

بنابراین

$$\text{در نتیجه } a^2 + b^2 = 10$$

راه‌حل دوم معادله درجه دومی که ۱- و ۶ جواب‌های آن باشد را می‌نویسیم و برابر

عبارت مخرج قرار می‌دهیم $x^2 - 5x - 6 = x^2 - (a^2+1)x - b^2$ ، پس

$$b^2 = 6, \quad a^2 + 1 = 5 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\text{در نتیجه } a^2 + b^2 = 10$$

۴ ۹۴۰ شرط محاسبه دامنه به صورت $2x^2 - ax + 3b \neq 0$ است. چون فقط

$x=-1$ در دامنه تابع قرار ندارد، پس باید معادله $2x^2 - ax + 3b = 0$ ریشه مضاعف

برابر -۱ داشته باشد. یعنی باید مخرج کسر به صورت $2(x+1)^2$ باشد. بنابراین

$$2x^2 - ax + 3b = 2(x+1)^2 \Rightarrow 2x^2 - ax + 3b = 2x^2 + 4x + 2$$

$$\text{پس } a = -4 \text{ و } b = \frac{2}{3} \text{ و در نتیجه } ab = -\frac{8}{3}$$

۲ ۹۴۱ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس معادله

$m^2x^2 + x + 1 = 0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشه مضاعف داشته باشد: $\Delta = 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

در این حالت $x = -2$ ریشه مخرج است. در نتیجه $n = -2$.

حالت دوم مخرج عبارت درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد: $m = 0$.

در این حالت $x = -1$ ریشه مخرج است. در نتیجه $n = -1$.

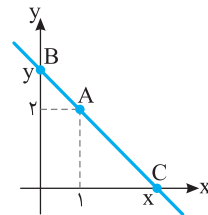
پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n برابر ۲ است.

۴ ۹۴۲ با توجه به شکل زیر شیب خط را یک بار با استفاده از نقطه‌های A و B و یک بار

هم با استفاده از نقطه‌های A و C به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y-2}{0-1} \Rightarrow y = 2 - m$$

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0-2}{x-1} \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{m}$$



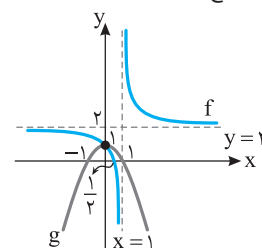
بنابراین مساحت مثلث به صورت زیر به دست می‌آید

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{(m-2)(2-m)}{2m}$$

$$\text{در نتیجه } S(m) = -\frac{(m-2)^2}{2m}$$

۱ ۹۴۳ **راه‌حل اول** نمودارهای تابع‌های f و g در شکل زیر رسم شده‌اند. این

نمودارها فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.



۹۵۵ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2 + x + 1 \neq 0$ و در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$. از طرف دیگر

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$t(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^3 + x) - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x - 1$$

همچنین $x^2 + 1 \neq 0$ و در نتیجه $D_t = \mathbb{R}$. بنابراین توابع f و t برابرند. در سه تابع دیگر دامنه \mathbb{R} نیست. بنابراین تابع $y = f(x)$ نمی‌تواند با هیچ‌از آن‌ها برابر باشد.

۹۵۶ ۲ راه‌حل اول فرض کنید $g(x) = ax + b$ و $f = g$. در این صورت به

ازای هر $x \neq 3$ تساوی $\frac{x^2 - mx + 3}{3 - x} = ax + b$ برقرار است. پس

$$x^2 - mx + 3 = 3ax + 3b - ax^2 - bx$$

$$(a+1)x^2 + (b-3a-m)x + 3-3b = 0$$

پس تساوی بالا به ازای هر $x \neq 3$ برقرار است. بنابراین

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1, \quad 3-3b=0 \Rightarrow b=1$$

$$b-3a-m=0 \Rightarrow m=-3a+b \Rightarrow m=4$$

همچنین باید تساوی $f(3) = g(3)$ درست باشد. پس

$$f(3) = n, \quad g(3) = 3a + b = -3 + 1 = -2 \Rightarrow n = -2$$

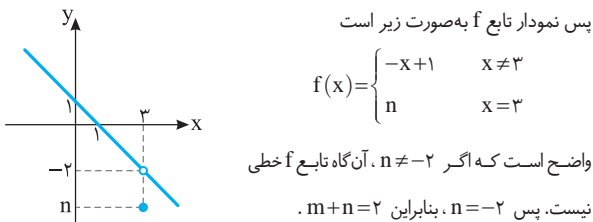
در نتیجه $m + n = 2$.

راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^2 - mx + 3}{3 - x}$ ساده شود، یعنی باید

صورت کسر عامل $x - 3$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x = 3$ صفر می‌شود:

$$9 - 3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$\frac{x^2 - mx + 3}{3 - x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - x} = \frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)} = -x + 1$$



۹۵۷ ۲ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ و

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \left| \frac{x}{x} - \frac{x-1}{x-1} \right| = |1 - 1| = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \left| \frac{x}{x} - \frac{-(x-1)}{x-1} \right| = |1 + 1| = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \left| \frac{x}{-x} - \frac{-(x-1)}{x-1} \right| = |-1 + 1| = 0$$

بنابراین برای هر x از دامنه تابع f ، $f(x) = 1$. از طرف دیگر $D_h = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ و

$h(x) = 1$. پس توابع f و h برابرند. اما در گزینه‌های دیگر داریم

گزینه (۱) $D_g = \mathbb{R}$, $g(x) = 1$

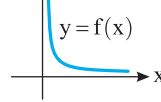
گزینه (۳) $D_k = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $k(x) = 2$

گزینه (۴) $D_t = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $x > 1 \Rightarrow t(x) = 1 + 1 = 2$

$$0 < x < 1 \Rightarrow t(x) = 1 - 1 = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow t(x) = -1 - 1 = -2$$

۹۴۹ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$.



$$f(x) = \frac{2}{x+x} = \frac{1}{x}$$

بنابراین نمودار این تابع به صورت مقابل خواهد بود.

۹۵۰ ۲ ابتدا توجه کنید که $x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{x-x}{x^2} = 0$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{-x-x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

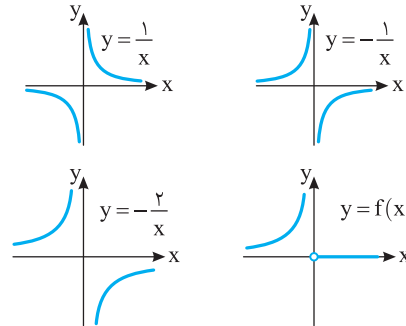
باید روی بازه $(0, +\infty)$ نمودار تابع $y = 0$ را رسم کنیم و روی بازه $(-\infty, 0)$ نمودار

تابع $y = -\frac{2}{x}$ را رسم کنیم. از طرف دیگر برای رسم نمودار تابع $y = -\frac{2}{x}$ باید ابتدا

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، تا نمودار تابع $y = -\frac{1}{x}$

به دست آید، سپس عرض نقاط نمودار به دست آمده را دو برابر کنیم تا نمودار تابع

$y = -\frac{2}{x}$ به دست آید. پس نمودار تابع f به صورت زیر است.



۹۵۱ ۱ می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

پس برد تابع $f(x) = \frac{4x+1}{2x-6}$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ یعنی $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ است.

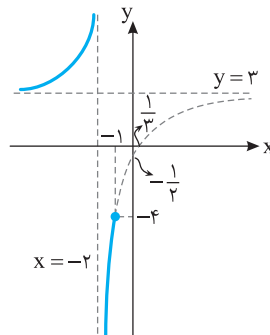
۹۵۲ ۴ اگر $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ ، آن‌گاه برد تابع $f(x) = \frac{6x-1}{2x-4}$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ است.

یعنی $\mathbb{R} - \{3\}$ است. اکنون باید ببینیم $x = 4$ که در دامنه تابع f قرار ندارد، باعث حذف

چه مقداری از برد تابع f می‌شود. توجه کنید که $x = 4 \Rightarrow y = \frac{6x-1}{2x-4} = \frac{6 \times 4 - 1}{2 \times 4 - 4} = \frac{23}{4}$

بنابراین $\frac{23}{4}$ هم در برد تابع f قرار ندارد. پس $R_f = \mathbb{R} - \{3, \frac{23}{4}\}$ و در نتیجه مجموع

$$\text{اعدادی که در برد تابع } f \text{ قرار ندارند برابر است با } 3 + \frac{23}{4} = \frac{35}{4}$$



۹۵۳ ۳ نمودار تابع f به صورت

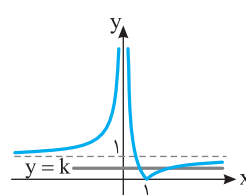
مقابل است. از روی شکل معلوم است که

برد تابع f برابر است با

$$(-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$$

بنابراین هفت عدد صحیح $\pm 2, \pm 3$,

± 1 و صفر در برد تابع f قرار ندارند.



۹۵۴ ۳ نمودارهای توابع $y = |\frac{1}{x} - 1|$

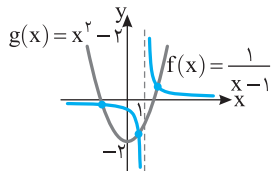
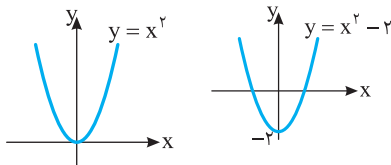
و $y = k$ را رسم می‌کنیم. اگر $0 < k < 1$,

آن‌گاه خط $y = k$ در دو نقطه با طول مثبت

نمودار تابع $y = |\frac{1}{x} - 1|$ را قطع می‌کند و

معادله دو جواب مثبت دارد.

همچنین اگر نمودار تابع $y = x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع g به دست می‌آید.



مطابق شکل مقابل نمودار تابع

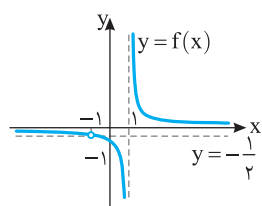
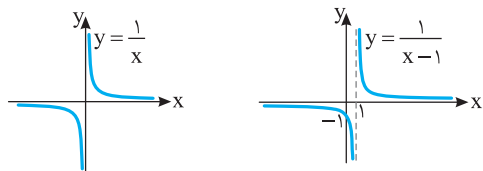
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2}$$

در سه نقطه نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2$ را قطع می‌کند.

۹۶۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$, $x \neq -1$

پس تابع f با تابع $y = \frac{1}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ برابر است. اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$

را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y = \frac{1}{x-1}$ به دست می‌آید.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است که

خطوط $y = 0$ و $y = -\frac{1}{4}$ را قطع نمی‌کند.

پس k فقط می‌تواند مقادیر صفر و $-\frac{1}{4}$ را

داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۹۶۴ می‌توان نوشت $f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{\frac{ab}{b-a}} = f\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

۹۶۵ اگر در تساوی $f(x) = \frac{x+1}{x}$ به جای x قرار دهیم $x-1$ به دست می‌آید

$$f(x-1) = \frac{x}{x-1} \quad (1)$$

از طرف دیگر، $f(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow xf(x) = x+1 \Rightarrow x(f(x)-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{f(x)-1}$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f(x-1) = \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{1}{f(x)-1}}{\frac{1}{f(x)-1} - 1} = \frac{1}{2-f(x)}$

۹۶۶ اگر در تساوی $f(x) = \frac{x}{x+2}$ به جای x قرار دهیم $x-2$ ، به دست می‌آید

$$f(x-2) = \frac{x-2}{x} \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \Rightarrow xf(x) + 2f(x) = x \Rightarrow x(1-f(x)) = 2f(x) \Rightarrow x = \frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f(x-2) = \frac{x-2}{x} = \frac{\frac{2f(x)}{1-f(x)} - 2}{\frac{2f(x)}{1-f(x)}} = \frac{2f(x) - 2(1-f(x))}{2f(x)} = \frac{2f(x) - 2 + 2f(x)}{2f(x)} = \frac{4f(x) - 2}{2f(x)} = \frac{2f(x) - 1}{f(x)}$$

۹۵۸ توجه کنید $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. در نتیجه گزینه‌ها به شکل زیر می‌شوند:

گزینه (۱) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$

گزینه (۲) $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x < 0 \\ x^2 + 3 & x > 0 \end{cases}$

گزینه (۳) $k(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$

گزینه (۴) $t(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 3 & x > 0 \end{cases}$

بنابراین تابع f با تابع k برابر است.

۹۵۹ دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ است. پس باید دامنه g هم به

همین صورت باشد، یعنی $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2 + cx + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + cx + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow c = -4$$

از طرف دیگر ضابطه f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل $x-2$ داشته باشد:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+b}{(x-2)^2} = \frac{\Delta}{x-2} \Rightarrow ax+b = \Delta(x-2) \Rightarrow a = \Delta, b = -1 \cdot \Delta$$

$$\text{بنابراین } abc = \Delta(-1 \cdot \Delta) = 2 \cdot 0 = 0$$

۹۶۰ دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ است، پس دامنه تابع g هم باید

به همین صورت باشد، پس باید $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج $g(x)$ باشد.

$$x^2 - bx + c = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - bx + c = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow b = 2, c = 1$$

بنابراین ضابطه تابع g به شکل مقابل است $g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$

از طرف دیگر باید $f(x) = g(x)$ ، پس $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-a}{x-1} \Rightarrow a = -1$ ، بنابراین

$$a + b + c = -1 + 2 + 1 = 2$$

۹۶۱ ضابطه دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+1}{\lambda x + 2b} = c \Rightarrow \lambda cx + 2bc = bx + 1$$

$$\begin{cases} \lambda c = b \\ 2bc = 1 \end{cases} \Rightarrow 2c \times \lambda c = 1 \Rightarrow 16c^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{4}, b = 2 \\ c = -\frac{1}{4}, b = -2 \end{cases}$$

اگر $b = 2$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{2x+1}{\lambda x+4}$ ، بنابراین $x = -\frac{1}{4}$ در دامنه f قرار ندارد و در دامنه g

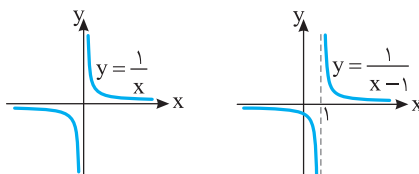
نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a = -\frac{1}{4}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c} = -4$. در حالت $b = -2$ نیز

$$\frac{ab}{c} = 4 \text{ و } a = \frac{1}{4} \text{ که نتیجه می‌شود}$$

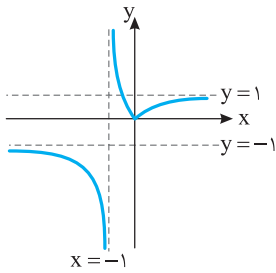
۹۶۲ ابتدا توجه کنید که $\frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1}$

پس تابع f با تابع $y = \frac{1}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ برابر است. بنابراین اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$

را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع f به دست می‌آید.



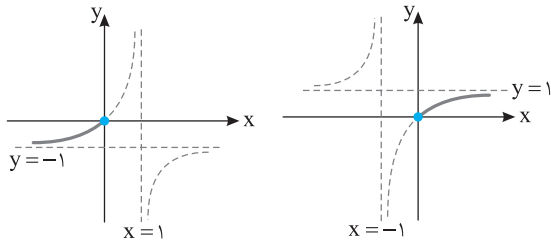
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1} & x < 0 \end{cases}$$

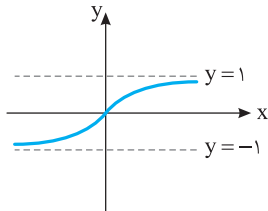
نمودارهای تابع‌های $y = \frac{x}{x+1}$ و $y = \frac{x}{-x+1}$ در دامنه‌های مربوطه به صورت زیر هستند:



$$y = \frac{x}{-x+1}, \quad x \leq 0$$

$$y = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



۱ ۹۷۳ ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$x > 0, x \neq 1 \Rightarrow y = \frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

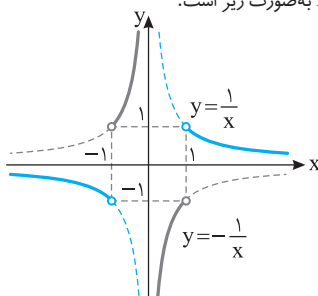
$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x^2-x} = \frac{-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.

۲ ۹۷۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x(x^2-1)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x^2-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -\frac{1}{x} & x^2-1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



۲ ۹۶۷ در تساوی داده شده به جای x قرار می‌دهیم $-x$: $f\left(\frac{-x+2}{-x-2}\right) = \frac{-x-3}{-x+1}$

بنابراین $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{x+3}{x-1}$

۲ ۹۶۸ در تساوی داده شده $-x$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$$f(-x) - xf(x) = x^2 - 2x + xf(x) \Rightarrow f(-x) = x^2 - 2x + xf(x)$$

بنابراین اگر در تساوی داده شده به جای $f(-x)$ قرار دهیم $x^2 - 2x + xf(x)$ می‌توانیم $f(x)$ را به دست آوریم:

$$f(x) + x(x^2 - 2x + xf(x)) = x^2 + 2x \Rightarrow f(x) + x^3 - 2x^2 + x^2 f(x) = x^2 + 2x$$

$$(x^2+1)f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2+1}$$

۱ ۹۶۹ بنابر فرض (۱) $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$ به دست می‌آید (۲) $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - x \right) = \frac{2-x^2}{3x}$

۱ ۹۷۰ چون عدد ۲ در دامنه تابع f قرار ندارد، پس جواب معادله

$$8 + 4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a - 8$$

از طرف دیگر چون تمام اعداد حقیقی به جز ۲ در دامنه تابع f قرار دارند، پس معادله $x^2 + ax^2 + b = 0$ جواب دیگری ندارد. اکنون توجه کنید که

$$x^3 + ax^2 + b = 0 \Rightarrow x^3 + ax^2 - 4a - 8 = 0$$

$$(x^3 - 8) + (ax^2 - 4a) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + a(x-2)(x+2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4 + ax + 2a) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + (a+2)x + 2a+4) = 0$$

پس معادله $x^2 + (a+2)x + 2a+4 = 0$ جواب ندارد یا ریشه مضاعف $x=2$ دارد. اگر این معادله جواب نداشته باشد، آن‌گاه

$$\Delta < 0 \Rightarrow (a+2)^2 - 4(2a+4) < 0 \Rightarrow (a+2)^2 - 8(a+2) < 0$$

$$(a+2)(a+2-8) < 0 \Rightarrow (a+2)(a-6) < 0 \Rightarrow -2 < a < 6$$

اگر این معادله ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد، آن‌گاه

$$x^2 + (a+2)x + 2a+4 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

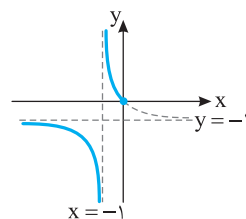
$$\begin{cases} a+2 = -4 \Rightarrow a = -6 \\ 2a+4 = 4 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

چون دو مقدار مختلف برای a به دست آمد، پس حالت داشتن ریشه مضاعف $x=2$ اتفاق نمی‌افتد. در نتیجه مجموعه مقادیر ممکن a بازه $(-2, 6)$ است.

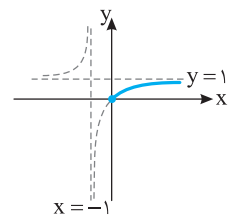
۳ ۹۷۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ و

$$f(x) = \frac{|x|}{x+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{-x}{x+1} & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$$

نمودارهای تابع‌های $y = \frac{x}{x+1}$ و $y = \frac{-x}{x+1}$ در دامنه‌های مربوطه به صورت زیر هستند:



$$y = \frac{-x}{x+1}, \quad x < 0, x \neq -1$$



$$y = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0$$