جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع هندسه

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

نشرالگو

مجموعه کتاب‌های ریاضی رشتهٔ ریاضی نشر الگو:

- ریاضی ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۱ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۳ (تست و سه‌بعدی)
- آمار و احتمال (تست و سه‌بعدی)
- هندسه پایه
- ریاضیات پایه
- موج‌آزمون ریاضی
- موج‌آزمون هندسه
- جامع ریاضی + موج‌آزمون
- ریاضیات گسسته (تست و سه‌بعدی)
- موج‌آزمون ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

- درس‌نامهٔ کامل با بیان تمام نکات مهم
- ۵۲۵ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۱۰۹۱ پرسش چهارگزینه‌ای در آزمون‌ها
- ۸۲۹ پرسش چهارگزینه‌ای ایستگاه یادگیری
- ۱۰۰ آزمون مبحثی و جامع از کتاب‌های هندسه ۱، هندسه ۲ و هندسه ۳
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (در جلد دوم)

در این کتاب «پاسخ‌های تشریحی» تست‌های جلد اول آمده است. همچنین، می‌توانید فایل PDF رایگان پاسخ‌های تشریحی را از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(رشتهٔ ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشتهٔ تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

نشرالگو
www.olgoobooks.ir
9786226390392

پیشگفتار

به نام خدا

با توجه به کنکورهای برگزار شده در دو سال اخیر در داخل و خارج کشور، اهمیت درس هندسه به‌وضوح از دید طراحان سؤال مشخص است. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز و گرانقدر با تست‌های گوناگون هر سه درس هندسه ۱، ۲ و ۳ آشنا شوید.

هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب هندسه ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ را مرور کنید. این کتاب یازده فصل دارد. به‌جز فصل یازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل یازدهم ویژهٔ «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب هندسه ۳ را در سه فصل گنجانده‌ایم. هفت فصل دیگر مربوط به کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «ایستگاه یادگیری» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. همهٔ آزمون‌ها به‌جز آزمون‌های جامع کلی ده پرسش دارند. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همهٔ مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم.

پاسخ پرسش‌های ایستگاه یادگیری و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

فصل دوم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

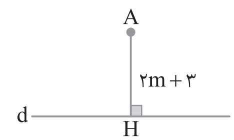
فصل اول

پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

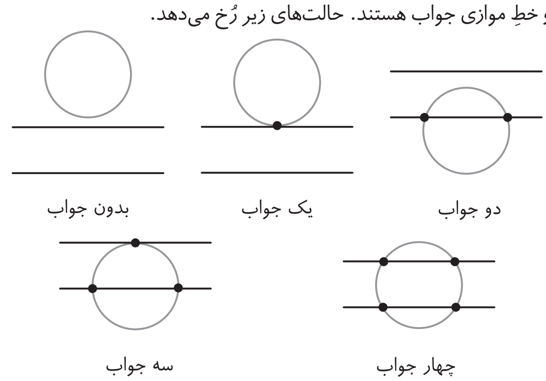
۱ (۴) فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر $۲m+۳$ است و نقاطی که از A به فاصلهٔ ۹ هستند، روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۹ قرار دارند. بنابر فرض سؤال این دایره خط d را نباید قطع کند. پس باید شعاع دایره از فاصلهٔ AH کوچک‌تر باشد. بنابراین

$$AH>۹\Rightarrow ۲m+۳>۹\Rightarrow ۲m>۶\Rightarrow m>۳$$

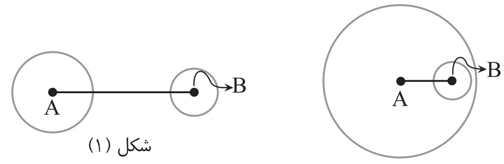
در بین گزینه‌ها فقط $۲\sqrt{۳}$ در نامساوی $m>۳$ صدق می‌کند.



۲ (۳) مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعهٔ نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی L هستند که فاصلهٔ آن‌ها از L برابر ۲ است (دقت کنید که این دو خط از یکدیگر به فاصلهٔ ۴ هستند). نقاط مشترک دایره و این دو خطِ موازی جواب هستند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.

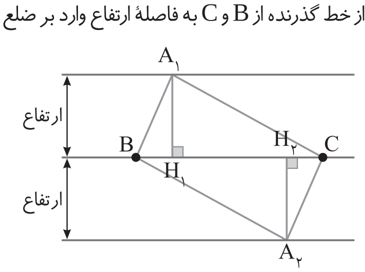


۳ (۲) نقاطی که از A به فاصلهٔ m و از B به فاصلهٔ n هستند به‌ترتیب روی دو دایره به مراکز A و B و شعاع‌های m و n قرار دارند. اگر این دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، نقطه‌ای بـا ویژگی مورد نظر وجود نخواهد داشـت (شـکل‌های زیر را ببینید). اگر $m=۱۱$ و $n=۱$، شکل (۲) ایجاد می‌شود و مسئله جواب ندارد. توجه کنید در گزینه‌های (۱) و (۴) دو دایره مماس و در گزینهٔ (۳) دو دایره متقاطع‌اند.

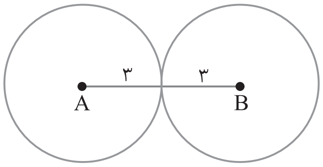


شکل (۱)
شکل (۲)

۴ (۴) چـون طـول ارتفاع (AH) ثابت اسـت و رأس‌هـای B و C هم ثابت هستند، پس A روی دو خطِ موازیِ خط گذرنده از نقطه‌های B و C است که فاصلهٔ آن‌ها از خط گذرنده از B و C به فاصلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



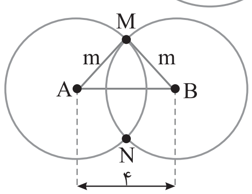
۵ (۲) مجموعـهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ هسـتند، دایره‌ای اسـت به مرکز A و شـعاع $r_۱=۳$. به همین صورت مجموعـهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ هسـتند، دایره‌ای اسـت به مرکز B و شعاع $r_۲=۳$. چون $AB=r_۱+r_۲$، پس یک نقطه با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آید.



۶ (۱) باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع m یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. بنابراین با توجه به شکل باید

$$AB<AM+BM\Rightarrow ۴<m+m$$

$$۴<۲m\Rightarrow ۲<m$$



در بین گزینه‌ها فقط $m=۳$ در این نابرابری صدق می‌کند.

۷ (۱) باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر باشد:

$$x+۴<۲x-۱+۵x+۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}<x,\quad ۲x-۱<x+۴+۵x+۱\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x$$

$$۵x+۱<x+۴+۲x-۱\Rightarrow x<۱$$

اکنون از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم. در این صورت حدود تغییرات x به‌صورت $\frac{۲}{۳}<x<۱$ است. یعنی برای x هیچ مقدار صحیحی به‌دست نمی‌آید. توجه کنید که در محدودهٔ به‌دست آمده $۲x-۱$، $x+۴$ و $۵x+۱$ مثبت هستند.

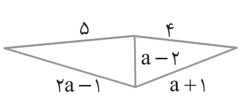
۸ (۱) مثلث بـا طـول اضـلاع ۵، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ وجـود نـدارد زیـرا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\not>۵$. مثلث بـا طـول اضـلاع $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۱۰}$ نیز وجود ندارد زیرا $۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}\not>۲\sqrt{۱۰}$. مثلث با طول اضلاع $۲a$، $a-۲$ و $a+۲$ نیـز وجود ندارد زیرا $(a-۲)+(a+۲)\not>۲a$. ولی مثلث با طول اضلاع $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}$ و ۱ وجود دارد زیرا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}>۱$، $۱+\sqrt{۳}>\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}<\sqrt{۲}+۱$.

۹ (۲) شکل از دو مثلث تشکیل شده است. در هر دو مثلث نابرابری‌های مثلث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a-۲<۵+۲a-۱ \\ ۵<۲a-۱+a-۲ \\ ۲a-۱<۵+a-۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۶<a \\ \frac{۸}{۳}<a \\ a<۴ \end{cases}\Rightarrow \frac{۸}{۳}<a<۴ \quad (۱)$$

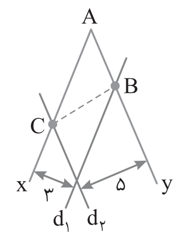
در مثلث دیگر نیز باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد:

$$\begin{cases} a-۲<۴+a+۱ \\ a+۱<۴+a-۲ \\ ۴<a-۲+a+۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۲<۵ \\ ۱<۲ \\ \frac{۵}{۲}<a \end{cases}\Rightarrow \frac{۵}{۲}<a \quad (۲)$$



حـدود تغییرات a، اشـتراک نابرابری‌های (۱) و (۲) اسـت که می‌شود $\frac{۸}{۳}<a<۴$. توجـه کنید کـه در این محـدوده $a-۲$، $a+۱$ و $۲a-۱$ مثبت هسـتند. بنابراین تنها عدد صحیح که در این نابرابری صدق می‌کند $a=۳$ است.

۱۰ (۳) ابتدا زاویهٔ xAy را به اندازهٔ ۴۵° رسم می‌کنیم. خط $d_۱$ را موازی Ax و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط با Ay رأس B است (خط $d_۱$ در شکل مقابل را ببینید). اکنون خط $d_۲$ را موازی Ay و به فاصلهٔ ۵ از آن رسم کرده، محل برخورد آن با Ax را رأس C می‌نامیم (خط $d_۲$ را در شکل مقابل ببینید). مثلث ABC جواب است و این مثلث منحصربه‌فرد است.



۱۱ (۳) بنابر فرض سؤال،

$$AB<AC \Rightarrow x<۲x-۳ \Rightarrow ۳<x$$

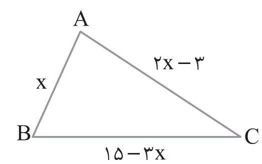
از طرف دیگر اضلاع این مثلث باید در نابرابری مثلث صدق کنند. پس

$$AB<AC+BC \Rightarrow x<۲x-۳+۱۵-۳x \Rightarrow ۲x<۱۲ \Rightarrow x<۶$$

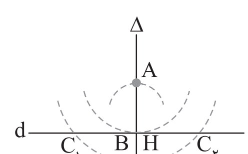
$$AC<AB+BC \Rightarrow ۲x-۳<x+۱۵-۳x \Rightarrow ۴x<۱۸ \Rightarrow x<\frac{۹}{۲}$$

$$BC<AC+AB \Rightarrow ۱۵-۳x<x+۲x-۳ \Rightarrow ۱۸<۶x \Rightarrow ۳<x$$

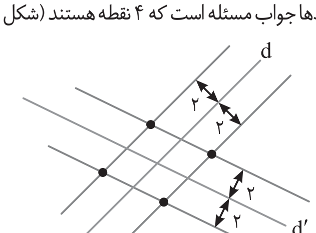
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های بالا به‌صورت $۳<x<\frac{۹}{۲}$ است و در بین گزینه‌ها تنها عدد $۳\sqrt{۲}$ در این فاصله قرار دارد.



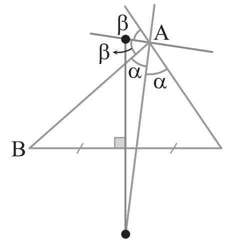
۱۲ (۲) خط دلخواه d را رسم می‌کنیم و خط دلخواه Δ را بر آن عمود می‌کنیم محل تقاطع Δ و d را H می‌نامیم. از نقطهٔ H کمانی به شعاع h_a رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با Δ را A در نظر می‌گیریم. از A کمان‌هایی به شعاع $AB=۴$ و $AC=۷$ رسم می‌کنیم. با توجه به نقاط برخورد این کمان‌ها و خط d تعداد مثلث‌های متمایز مورد نظر معلوم می‌شود. اگر کمان به شعاع کوچک‌تر یعنی AB مماس بر d و کمان دیگر خط d را قطع کند، آن‌گاه تنها یک مثلث با این معلومات قابل رسم است. توجه کنید که مطابق شکل نقطهٔ H و B منطبق هستند و چون دو مثلث $AC_۱B$ و $AC_۲B$ همنهشت هستند آن‌ها را یک مثلث در نظر می‌گیریم. بنابراین برای رسم چنین مثلثی اگر بخواهیم جواب منحصربه‌فرد داشته باشیم، باید ارتفاع داده شده برابر طول ضلع کوچک‌تر، از بین دو ضلع داده شده باشد. در نتیجه $h_a=c$، یعنی $h_a=۴$.



۱۳ (۳) خطوطی موازی دو خط d و d' و به فاصلهٔ ۲ از آن‌ها را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها جواب مسئله است که ۴ نقطه هستند (شکل زیر را ببینید).



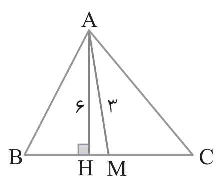
۱۴ (۳) مجموعهٔ نقطه‌هایی که از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند، نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A است. همچنین، مجموعهٔ نقطه‌هایی که از B و C به یک فاصله‌اند، عمودمنصف ضلع BC است. بنابراین نقاطی که از AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله و از دو رأس B و C نیز به یک فاصله هستند، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A و عمودمنصف ضلع BC هستند. چون مثلث متساوی‌الساقین نیست، جواب دو نقطهٔ مشخص شده در شکل زیر است.



۱۵ (۱) اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد، آن‌گاه

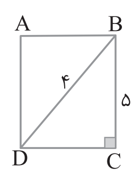
$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۲}AH\times(۴) \Rightarrow AH=۶$$

بنابراین اگر مثلث ABC قابل رسم باشد، آن‌گاه مانند شکل فرضی زیر ارتفاع AH از میانهٔ AM در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH بزرگ‌تر است که این غیرممکن است، زیرا AM وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH است و باید از AH بزرگ‌تر باشد. پس چنین مثلثی وجود ندارد.



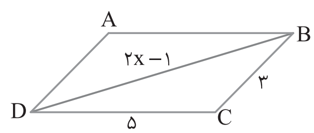
۱۶ (۱) می‌دانیم در مستطیل قطرها مساوی‌اند. پس مستطیلی به طول قطرهای ۶ و ۵ وجود ندارد.

۱۷ (۴) فرض کنید در مستطیل ABCD، $BD=۴$ و $BC=۵$. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC وتر کوچک‌تر از ضلع زاویهٔ قائمهٔ است و این ممکن نیست، پس چنین مستطیلی وجود ندارد.

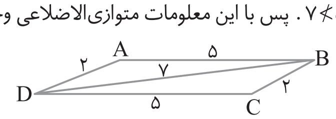


۱۸ (۲) با توجه به شکل زیر، متوازی‌الاضلاع ABCD قابل رسم است هرگاه مثلث BCD قابل رسم باشد. پس طول اضلاع مثلث BCD در نابرابری‌های مثلث یا نتیجهٔ آن صدق می‌کنند.

$$|۵-۳|<۲x-۱<۵+۳ \Rightarrow ۲<۲x-۱<۸ \Rightarrow ۳<۲x<۹ \Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<\frac{۹}{۲}$$

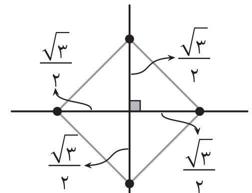


۱۹ (۱) با توجه به شکل زیر برای رسم این متوازی‌الاضلاع باید مثلث ABD، قابل رسم باشد، ولی اضلاع این مثلث در نابرابری مثلث صدق نمی‌کنند: $۲+۵\not>۷$. پس با این معلومات متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.

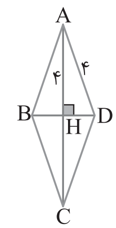


۲۰ **۴** زاویهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع می‌تواند تغییر کند. پس با تغییر این زاویه نامتناهی متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ قابل رسم است.

۲۱ **۲** دو قطر مربع مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس مطابق شکل زیر یک مربع به قطر $\sqrt{۳}$ قابل رسم است.



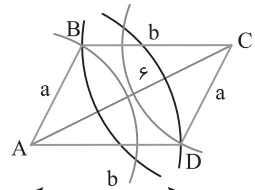
۲۲ **۱** در لوزی قطرها منصف یکدیگر و عمود بر هم هستند. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD هم وتر و هم ضلع زاویهٔ قائمه برابر ۴ هستند و این ممکن نیست. پس چنین لوزی‌ای وجود ندارد.



۲۳ **۲** در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، پس $BC=AD=b$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ABCD در صورتی ایجاد می‌شود که مثلث ABC به وجود بیاید. پس باید سه عدد a ، b و ۶ در نامساوی‌های زیر صدق کنند

$$a<b+۶,\quad b<a+۶,\quad ۶<a+b$$

در بین گزینه‌ها فقط $a=۳$ و $b=۴$ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند.



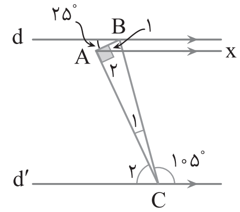
۲۴ **۲** از رأس A خط Ax را موازی با دو خط d و d′ رسم می‌کنیم. در این‌صورت از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} d \parallel Ax \\ \text{مورب } AB \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱=۲۵^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} \hat{A}_۲=۶۵^\circ$$

$$\begin{cases} Ax \parallel d' \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{C}_۲=۶۵^\circ$$

از طرف دیگر

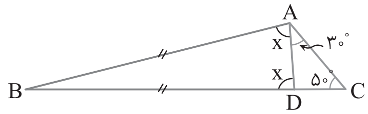
$$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+۶۵^\circ+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱=۱۰^\circ$$



۲۵ **۳** مثلث ABD متساوی‌الساقین است، اندازهٔ دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس

$$x=۳۰^\circ+۵۰^\circ=۸۰^\circ$$

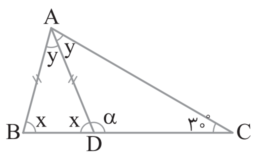
بنابراین $\triangle ABD: \hat{B}+x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۲۰^\circ$



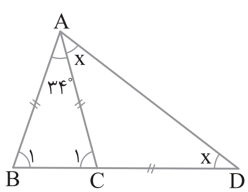
۲۶ **۲** مثلث ABD متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C$ و اندازهٔ هر کدام را y انتخاب می‌کنیم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس $x=y+۳۰^\circ$. در ضمن در مثلث ABD مجموع زاویه‌ها ۱۸۰° است، پس $۲x+y=۱۸۰^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} x=y+۳۰^\circ \\ ۲x+y=۱۸۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۳x+y=y+۲۱۰^\circ \Rightarrow x=۷۰^\circ$$

$$\alpha=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$



۲۷ **۴** با استفاده از داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. مثلث‌های ACD و ABC متساوی‌الساقین هستند. اگر اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ACD را x بنامیم، چون $C_۱$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس $\hat{C}_۱=۲x$، در نتیجه $\hat{B}_۱=۲x$. بنابراین



$$\triangle ABC: ۳۴^\circ+۲x+۲x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x=۱۴۶^\circ \Rightarrow x=۳۶/۵^\circ$$

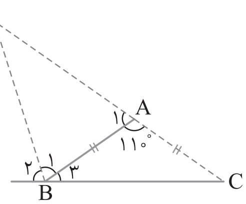
پس $A\hat{D}C=۳۶/۵^\circ$.

۲۸ **۴** زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ این مثلث نمی‌تواند ۱۱۰° باشد چون در این‌صورت مجموع زاویه‌های آن از ۱۸۰° بیشتر می‌شود. پس زاویهٔ رأس آن ۱۱۰° است. در ضمن نیمساز خارجی رأس مثلث متساوی‌الساقین با قاعده موازی است. پس نیمساز خارجی زاویه‌های مجاور به قاعده (در اینجا B یا C) را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع مقابل را در D قطع کند. پس

$$\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

$$\hat{B}_۳=\frac{۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-۳۵^\circ}{۲}=\frac{۱۴۵^\circ}{۲}=۷۲/۵^\circ$$

بنابراین $\hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱)=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۲/۵^\circ)=۳۷/۵^\circ$.



۲۹ ۴ مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AM میانهٔ وارد بر قاعدهٔ آن است، پس AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. با توجه به شکل

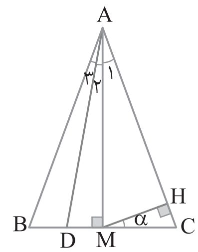
$$\triangle MHC:\hat{C}=۹۰^\circ-\alpha$$

$$\triangle AMC:\hat{A}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-(۹۰^\circ-\alpha)\Rightarrow\hat{A}_۲+\hat{A}_۳=\alpha$$

چون AD نیمساز زاویهٔ BAM است، پس $۲\hat{A}_۲=\alpha\Rightarrow\hat{A}_۲=\frac{\alpha}{۲}$

در ضمن زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ADM است، پس

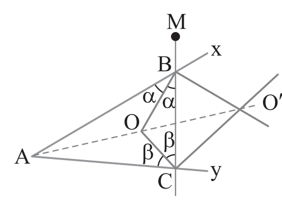
$$A\hat{D}B=\hat{A}_۲+۹۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$$



۳۰ ۱ چون ارتفاع‌های مثلث بیرون مثلث یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث نیز خارج مثلث قرار دارد.

۳۱ ۲ مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر ۱۸۰° است. چون $\hat{B}+\hat{C}=۸۰^\circ$، پس $\hat{A}=۱۰۰^\circ$. بنابراین مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است. در نتیجه نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های این مثلث بیرون مثلث قرار دارد.

۳۲ ۲ نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و C، یعنی نقطه‌های O و O' در شکل، روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارند، زیرا نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند و هر دو نیمساز خارجی با نیمساز زاویهٔ رأس سوم همرس هستند. پس جواب روی نیمساز زاویهٔ xAy است.



۳۳ ۱ راه‌حل اول: نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس آن به یک فاصله‌اند، پس

$$SA=SB=SC$$

پس مثلث‌های SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند. با توجه به شکل

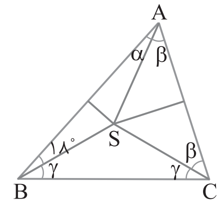
$$\alpha=S\hat{B}A=۱۸^\circ$$

$$\triangle ABC:\alpha+۲\beta+۲\gamma+۱۸^\circ=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\alpha=۱۸^\circ}۲\beta+۲\gamma=۱۴۴^\circ$$

$$\beta+\gamma=۷۲\Rightarrow B\hat{C}A=۷۲^\circ$$

راه‌حل دوم طبق درسنامه چون S محل تلاقی عمودمنصف‌هاست، پس $A\hat{S}B=۲\hat{C}$.

از طرف دیگر $A\hat{S}B=۱۸۰^\circ-۱۸^\circ-۱۸^\circ=۱۴۴^\circ$. پس $B\hat{C}A=\frac{۱۴۴^\circ}{۲}=۷۲^\circ$.



۳۴ ۲ در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{C}=۲\hat{B}\end{cases}\Rightarrow\hat{B}+۲\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow۳\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۶۰^\circ$$

پس $\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$ و $\hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ$. بنابراین

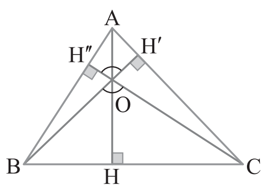
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲\hat{A}+۲\hat{C}=۲۴۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}}۳\hat{A}=۳۰۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۰۰^\circ,\quad\hat{C}=۲۰^\circ$$

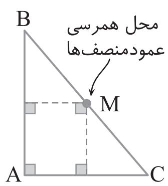
بنابراین مثلث ABC با داشتن زاویه‌ای ۱۰۰° مثلثی منفرجه‌الزاویه است. پس نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های آن خارج مثلث قرار دارد.

۳۵ ۱ در شکل زیر دو زاویهٔ BOC و $H''OH'$ مساوی‌اند. در ضمن چهارضلعی $AH'OH''$ دو زاویهٔ قائمه دارد و چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی ۳۶۰° است، پس

$$\hat{A}+H''\hat{O}H'=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{A}=۸۰^\circ}H''\hat{O}H'=۱۰۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}C=۱۰۰^\circ$$



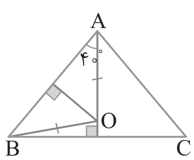
۳۶ ۳ با توجه به شکل مقابل چون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند، پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC همرس هستند (نقطهٔ M را در شکل مقابل ببینید). اکنون به‌دست می‌آید



$$MB+MC=BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$$

۳۷ ۲ در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف قاعده، نیمساز رأس است. یعنی

$$O\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{۲}=۴۰^\circ$$



از طرف دیگر، $OA=OB$، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است و $O\hat{B}A=O\hat{A}B=۴۰^\circ$. بنابراین

$$A\hat{O}B=۱۸۰^\circ-۲\times۴۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۳۸ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، پس

$$\begin{cases}۲\hat{A}-\hat{B}=۵۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو معادلهٔ اول}}\times۴\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases}$$

$$\times(-۳)\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ ۶\hat{C}+\hat{A}=۷۰۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ -۱۸\hat{C}-۳\hat{A}=-۲۱۰۰^\circ\end{cases}$$

$$-۱۷\hat{C}=-۱۸۷۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۱۰^\circ,\hat{A}=۴۰^\circ,\hat{B}=۳۰^\circ$$

پس این مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های آن بیرون مثلث است.

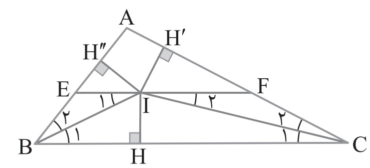
۳۹ (۲) نقطهٔ I روی EF از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است ($IH=IH'=IH''$). بنابراین I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. پس IB و IC به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های B و C هستند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} IE \parallel BC \\ \text{مورب } IB \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_۱=\hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{I}_۱=\hat{B}_۲ \Rightarrow IE=BE \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} IF \parallel BC \\ \text{مورب } IC \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_۲=\hat{C}_۱ \Rightarrow \hat{I}_۲=\hat{C}_۲ \Rightarrow IF=CF \qquad (۲)$$

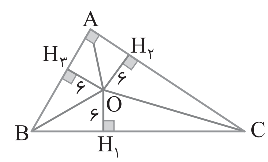
از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$IE+IF=BE+CF \Rightarrow EF=۴$$



۴۰ (۳) نقطهٔ O محل همرسی نیمسازها است، بنابراین از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $OH_۱=OH_۲=OH_۳=۶$ (شکل زیر را ببینید). می‌توان نوشت

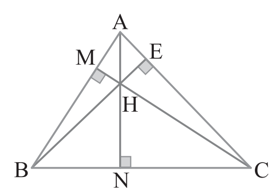
$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\times۶\times BC+\frac{۱}{۲}\times۶\times AC+\frac{۱}{۲}\times۶\times AB$$
$$=۳(BC+AC+AB)=۳\times۱۴=۴۲$$



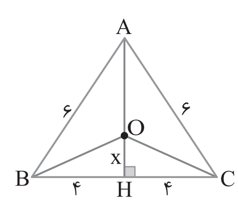
۴۱ (۲) با توجه به شکل، $A\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}N$ است و $M\hat{H}N$ مکمل زاویهٔ B است. در ضمن $B\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}E$ است و $M\hat{H}E$ مکمل زاویهٔ A است. پس

$$A\hat{H}C-B\hat{H}C=(۱۸۰^\circ-\hat{B})-(۱۸۰^\circ-\hat{A})=\hat{A}-\hat{B}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=۶۰^\circ} A\hat{H}C-B\hat{H}C=۷۰^\circ-۶۰^\circ=۱۰^\circ$$



۴۲ (۳) مثلث ABC به طول اضلاع ۶، ۶ و ۸ متساوی‌الساقین است. پس عمودمنصف قاعدهٔ BC از رأس A می‌گذرد. در ضمن $OA=OB=OC$. از طرف دیگر،



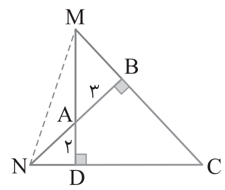
$$\triangle AHC: AH^۲=AC^۲-CH^۲=۶^۲-۴^۲=۳۶-۱۶=۲۰\Rightarrow AH=۲\sqrt{۵}$$

با فرض $OH=x$ نتیجه می‌گیریم $OA=۲\sqrt{۵}-x$، پس $OC=۲\sqrt{۵}-x$. در نتیجه

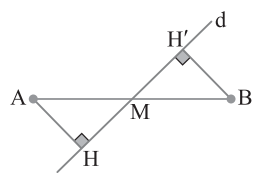
$$\triangle OHC: OC^۲=OH^۲+CH^۲\Rightarrow(۲\sqrt{۵}-x)^۲=x^۲+۴^۲$$

$$۲۰+x^۲-۴\sqrt{۵}x=x^۲+۱۶\Rightarrow ۴\sqrt{۵}x=۴\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

۴۳ (۲) از فرض‌های تست شکل زیر ایجاد می‌شود. اگر از M به N وصل کنیم، آن‌گاه نقطهٔ A در مثلث MNC نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها است. پس اگر از C به A وصل کنیم و امتداد دهیم، ارتفاع سوم مثلث MNC به‌دست می‌آید. بنابراین خط گذرنده از A و C بر MN عمود است.



۴۴ (۲) گزارهٔ (الف) درست است. زیرا اگر خط d از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB عبور کند، آن‌گاه طول عمودهای AH و BH' برابر است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و BMH' به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند (به شکل زیر توجه کنید).



گزارهٔ (ب) درست است، زیرا مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است پس در لوزی با مساحت ۷/۵ و طول یک قطر ۳، طول قطر دیگر آن ۵ است و با داشتن طول دو قطر ۳ و ۵ در لوزی فقط یک لوزی قابل رسم است.

گزارهٔ (پ) نادرست است. زیرا مثال نقض نادرستی یک حکم کلی را مشخص می‌کند.

گزارهٔ (ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ عدد محیط از عدد مساحت کوچک‌تر است.

بنابراین دو تا از این گزاره‌ها درست است.

۴۵ (۳) عکس قضیهٔ «اگر در یک مثلث یک زاویه قائمه باشد، آن‌گاه ضلع روبه‌روی آن بزرگ‌ترین ضلع مثلث است» به‌صورت «اگر در یک مثلث یک ضلع بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به آن قائمه است» بیان می‌شود که در حالت کلی درست نیست. زیرا زاویهٔ روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث لزومی ندارد قائمه باشد. پس قضیهٔ گزینهٔ (۳) به‌صورت دوشرطی بیان نمی‌شود.

۴۶ (۳) در نقیض گزارهٔ داده شده کلمهٔ «هر» را به «وجود دارد» تغییر می‌دهیم و سپس فعل جمله را نقیض می‌کنیم. پس به گزارهٔ زیر می‌رسیم:
«مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰° نیست.»

۴۷ (۳) چهارضلعی‌ای که چهار ضلع برابر دارد لوزی است ولی لزومی ندارد مربع باشد. پس به عنوان مثال لوزی‌ای که یک زاویهٔ آن ۳۰° باشد مثال نقض برای گزارهٔ مطرح شده در گزینهٔ (۳) است. سایر گزینه‌ها یک حکم کلی همواره درست هستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود ندارد.

۴۸ (۴) در «اگر $AC>AB$، آن‌گاه $\hat{B}>\hat{C}$»، حکم $\hat{B}>\hat{C}$ است و در برهان خلف، فرض اولیه همان نقیض حکم است و نقیض $\hat{B}>\hat{C}$ عبارت $\hat{B}<\hat{C}$ یا $\hat{B}=\hat{C}$ است.

۴۹ (۲) با توجه به شکل،

$$\begin{cases} AD=AC\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{C} \\ \text{زاویهٔ خارجی مثلث } ADB\ \ \hat{D}_۱\Rightarrow\hat{D}_۱>\hat{B}\end{cases}\Rightarrow\hat{C}>\hat{B}$$