خلاصه درس

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایهٔ** (عنصر) آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و... نمایش می‌دهیم.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix}\pi & -۰/۵\\ \frac{۱}{۳} & ۷\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۰\\ \sqrt{۲} & ۰/۱\end{bmatrix}$$

$$D=[۲] \qquad C=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۳\end{bmatrix}$$

مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم « A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) است.»

برای نمونه: ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، بنابراین از مرتبهٔ ۲×۳ است.

> **توجه:** فرم کلی نمایش ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$، به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} (درایهٔ عمومی ماتریس) درایهٔ روی سطر iام و ستون jام است.

برای نمونه:

$$A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix} \qquad A_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{bmatrix}$$

$$A_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۴}$، به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$، در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید. (کتاب درسی)

پاسخ با توجه به صورت مثال، می‌توان نوشت:

$$a_{ij}=\begin{cases}i+j & ; \ i>j\\ ۷ & ; \ i=j\\ i^۲ & ; \ i<j\end{cases} \ ; \quad A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴}\end{bmatrix}$$

برای درایه‌های $a_{۱۱}$ ، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ داریم $i=j$، پس $a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۷$.

هم‌چنین برای درایهٔ $a_{۱۲}$ داریم $i=۱$ و $j=۲$ $(i<j)$، پس $a_{۱۲}=۱^۲=۱$.

به همین ترتیب:

$a_{۱۴}=۱^۲=۱$ $\qquad$ $a_{۱۳}=۱^۲=۱$

$a_{۲۴}=۲^۲=۴$ $\qquad$ $a_{۲۳}=۲^۲=۴$ $\qquad$ $a_{۲۱}=۲+۱=۳$

$a_{۳۴}=۳^۲=۹$ $\qquad$ $a_{۳۲}=۳+۲=۵$ $\qquad$ $a_{۳۱}=۳+۱=۴$

در نتیجه ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۷ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴\\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹\end{bmatrix}$ است.

مثال **ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times ۲}$ به‌صورت $b_{ij}=i-۲j$ تعریف شده است. ماتریس B را با درایه‌هایش بنویسید.**

پاسخ ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲}\end{bmatrix}$ است. همچنین:

$b_{۱۲}=۱-۲(۲)=-۳$ $\qquad$ $b_{۱۱}=۱-۲(۱)=-۱$

$b_{۲۲}=۲-۲(۲)=-۲$ $\qquad$ $b_{۲۱}=۲-۲(۱)=۰$

بنابراین ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$ است.

> **توجه:** اگر ماتریس A از مرتبهٔ ۱×۱ باشد، یعنی $A=[k]_{۱\times ۱}$، در این‌صورت این ماتریس را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم. **برای نمونه:** $A=[۲]_{۱\times ۱}=۲$

■ معرفی چند ماتریس خاص

① **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد.

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}_{۱\times ۴}$

② **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix}-۱\\ \pi\\ \sqrt{۲}\end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

③ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. **برای نمونه:**

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۲} \qquad \bar{O}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

④ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

برای نمونه: ماتریس A، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و B، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ است.

$$B=\begin{bmatrix}۱۰ & ۹ & ۸\\ ۷ & ۶ & ۵\\ ۴ & ۳ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

■ **خواص مهم دترمینان:**

① دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

برای نمونه:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۲\times(-۱)\times۳ = -۶$$

② اگر ماتریس مربعی دارای یک سطر (یک ستون) صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

③ دترمینان ماتریس مربعی صفر، برابر با صفر و دترمینان ماتریس I (همانی) برابر با یک است.

④ اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند در این‌صورت $|AB|=|A||B|$.

⑤ اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و عدد k حقیقی باشد، در این‌صورت $|kA|=k^n|A|$. یعنی اگر عدد از داخل دترمینان خارج شود به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

⑥ اگر A ماتریس مربعی و n عدد طبیعی باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$. (جابه‌جایی توان و دترمینان)

⑦ اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، آن‌گاه دترمینان آن نیز وارون دترمینان A است. یعنی $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{۱}{|A|}$. (جابه‌جایی توان و دترمینان)

⑧ اگر ماتریس A دو سطر یا دو ستون یکسان داشته باشد، دترمینان آن برابر با صفر است.

⑨ اگر در ماتریس A یک سطر (ستون) مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد، دترمینان آن برابر صفر است.

مثال **اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۴$، در این‌صورت حاصل $||A|A|$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$||A|A| = |۴A| \xrightarrow{A\ \text{ماتریس}\ ۳\times۳} ۴^۳|A| = ۴^۳\times۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

مثال **اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|A|=۳$ باشد، حاصل $|۶A^{-1}|$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$|۶A^{-1}| = ۶^۳\times|A^{-1}| = ۶^۳\times\frac{۱}{|A|} = ۶^۳\times\frac{۱}{۳} = ۷۲$$

مثال **اگر $\sqrt{۵}A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $|A|^۳-۲$ را بیابید.**

پاسخ

$$|\sqrt{۵}A| = \begin{vmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{vmatrix} \Rightarrow ۵|A| = |A|^۲+۴$$

$$\Rightarrow |A|^۲-۵|A|+۴=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases}|A|=۱\\ |A|=۴\end{cases}$$

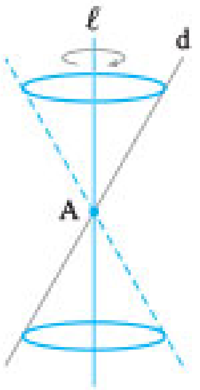
$$|A|=۱ \Rightarrow |A|^۳-۲ = ۱-۲ = -۱$$

$$|A|=۴ \Rightarrow |A|^۳-۲ = ۴^۳-۲ = ۶۴-۲ = ۶۲$$

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

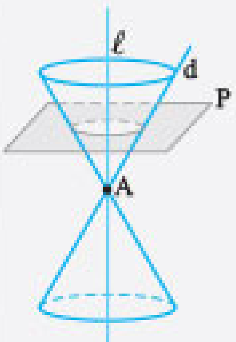
درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

تعریف: فرض کنید دو خط d و ℓ در نقطهٔ A متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط ℓ را یک **رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی)** می‌نامیم. در این حالت خط ℓ را **محور**، نقطهٔ A را **رأس** و خط d را **مولد** این سطح مخروطی می‌گوییم.

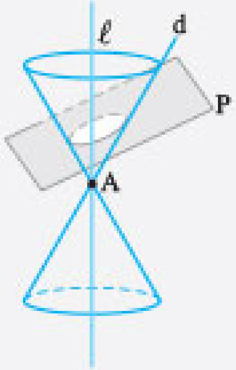


توجه: به فصل مشترک صفحهٔ دلخواه P و یک سطح مخروطی، یک **مقطع مخروطی** گفته می‌شود که با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، شکل آن به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:

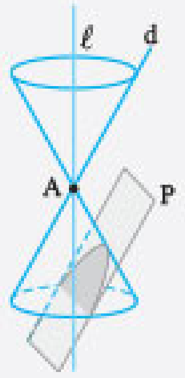
① اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، **دایره** است.
توجه شود که در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس عبور کند، آن‌گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی **یک نقطه** است.



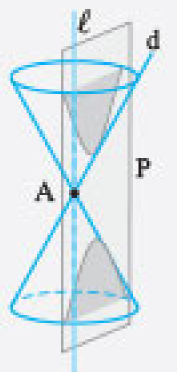
② اگر صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، یک **بیضی** است.



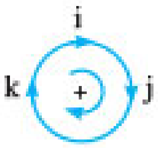
③ اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس A عبور نکند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، یک **سهمی** است.
توجه شود در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس A بگذرد، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، **یک خط** است.



④ اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور ℓ نباشد، در این‌صورت مقطع مخروطی حاصل، یک **هذلولی** است.
توجه شود اگر صفحهٔ P شامل محور ℓ باشد، مقطع مخروطی حاصل، **دو خط متقاطع** است.



مثال **اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه باشند، حاصل $(2\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k}))\vec{i}+\vec{j}\times(\vec{k}+\vec{i})+(\vec{i}\times(2\vec{j}\times\vec{i}))\times\vec{k}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ با استفاده از نمودار چرخشی 

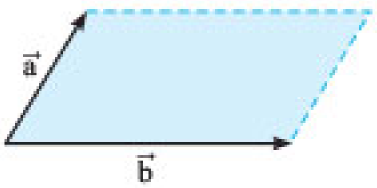
داریم:

$$(2\vec{i}\cdot(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}))\vec{i}+\vec{j}\times(\vec{k}+\vec{i})+(\vec{i}\times(2\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}))\times\vec{k}$$

$$=(2|\vec{i}|^2)\vec{i}+\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}+\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}-2(\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}})\times\vec{k}$$

$$=2\vec{i}+\vec{i}-\vec{k}+2\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}=5\vec{i}-\vec{k}$$

▪ تعبیر هندسی اندازهٔ ضرب خارجی



اندازهٔ ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط این دو بردار، یعنی:

$$S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

بنابراین مساحت مثلث ساخته‌شده توسط این دو بردار برابر است با:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

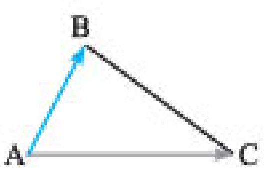
مثال **مساحت متوازی‌الاضلاعی را تعیین کنید که بر روی دو بردار $\vec{a}=(6,2,-5)$ و $\vec{b}=(4,-1,-1)$ ساخته شده است.**

پاسخ می‌دانیم مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با $|\vec{a}\times\vec{b}|$، پس:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & & \\ 6 & 2 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right.=(-7,-14,-14)$$

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{7^2+(-14)^2+(-14)^2}=21$$

مثال **مساحت مثلثی را تعیین کنید که سه رأس آن عبارت‌اند از $A(1,2,3)$، $B(3,7,-1)$ و $C(2,1,0)$.**



پاسخ مطابق شکل کافی است دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل دهیم و خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(2,5,-4)$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}=(1,-1,-3)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & & \\ 2 & 5 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right.=(-19,2,-7)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\sqrt{(-19)^2+2^2+(-7)^2}=\frac{\sqrt{414}}{2}$$

مثال **اگر $|\vec{a}|=5$، $|\vec{b}|=8$ و مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار ۱۰ واحد مربع باشد، زاویهٔ بین دو بردار را به‌دست آورید.**

پاسخ می‌دانیم مساحت مثلث تولیدشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$، پس:

$$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=10\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=20$$

$$\Rightarrow 8\times5\times\sin\theta=20\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ \text{ یا } 150^\circ$$

مثال **اگر $|\vec{a}|=1$، $|\vec{b}|=2$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.**

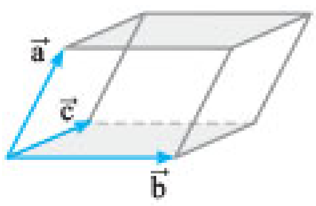
پاسخ می‌دانیم $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$، بنابراین:

$$\frac{2}{3}=1\times2\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{3}$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1\times2\times(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3})=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

▪ حجم متوازی‌السطوح



اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرواقع در یک صفحه باشند، حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط این سه بردار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{V}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

مثال **حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}=(1,2,3)$، $\vec{b}=(2,1,4)$ و $\vec{c}=(1,-1,5)$ تولید شده است را به‌دست آورید.**

پاسخ می‌دانیم حجم این متوازی السطوح برابر است با $\vec{V}=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$. بنابراین ابتدا $\vec{b}\times\vec{c}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & & \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right.=(9,-6,-3)$$

$$\Rightarrow\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(1,2,3)\cdot(9,-6,-3)=9-12-9=-12$$

$$\Rightarrow V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=12$$

> **نکته:** اگر سه بردار در یک صفحه واقع باشند، متوازی‌السطوحی توسط این بردارها ساخته نمی‌شود و لذا حجم متوازی‌السطوح صفر است. بنابراین شرط لازم و کافی برای این‌که سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقع باشند این است که $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

مثال **مقدار m را چنان بیابید که بردارهای $(1,1,0)$، $(2,1,-1)$ و $(m,2m-5,-1)$ در یک صفحه واقع باشند.**

پاسخ فرض می‌کنیم $\vec{a}=(m,2m-5,-1)$، $\vec{b}=(1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-1)$. چون سه بردار در یک صفحه واقع‌اند، داریم $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$، پس:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right.=(-1,1,-1)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0\Rightarrow(m,2m-5,-1)\cdot(-1,1,-1)=0$$

$$\Rightarrow -m+2m-5+1=0\Rightarrow m=4$$

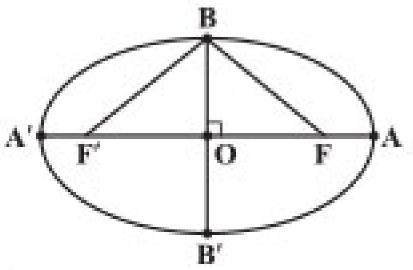
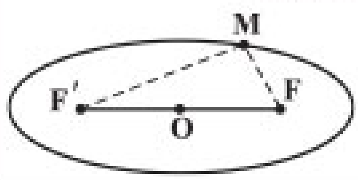
سؤالات شبیه‌ساز امتحانی نوبت اول

درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ:

ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، AB را به‌دست آورید. $a_{ij}=\begin{cases} i^2-j & ; \quad i=j \\ 2i+j & ; \quad i>j \\ j-i & ; \quad i<j \end{cases}$ $\qquad b_{ij}=\begin{cases} i^2+j & ; \quad i=j \\ i+j & ; \quad i>j \\ i-j+2 & ; \quad i<j \end{cases}$	۱/۵
۲	اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند $(AB=BA)$، ثابت کنید: الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$	۱/۵
۳	اگر $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=A$ باشد، در این‌صورت ماتریس A^7-A^3 را بیابید.	۱
۴	با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. به‌عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.	۱
۵	اگر $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=A$ و I ماتریس واحد باشد و داشته باشیم $A=aA^{-1}+bI$، مقادیر a و b را تعیین کنید.	۱/۲۵
۶	اگر $\begin{bmatrix}\|A\|&2\\-2&\|A\|\end{bmatrix}=\sqrt{5}A$ باشد، در این‌صورت $\|A\|$ را بیابید.	۱
۷	دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&1&1\\4&5&2\end{bmatrix}=A$ را یک‌بار به روش ساروس و باردیگر برحسب ستون اول محاسبه کنید.	۱/۵
۸	مقدار m را چنان بیابید تا دستگاه $\begin{cases}mx+3y=-4\\2x+(m-1)y=4\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد.	۱/۲۵
	فصل دوم	
۹	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی آن را قطع کند و از رأس عبور نکند، سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب را رسم کنید.	۰/۷۵
۱۰	به دو سؤال زیر پاسخ دهید: الف) مکان هندسی را تعریف کنید. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ℓ به فاصلهٔ ثابت ۲ واحد باشند را مشخص کنید. (رسم شکل)	 ۰/۵ ۰/۲۵
۱۱	نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).	۱/۵
۱۲	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,-2)$ مرکز آن بود و بر خط با معادلهٔ $2x+y=1$ مماس باشد.	۱/۵
۱۳	دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+8x-12y+3=0$ را ابتدا به کمک روش مربع کامل به فرم استاندارد نوشته، سپس مختصات مرکز و طول شعاع آن‌را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۴	وضعیت خط $3x+4y=0$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ مشخص کنید.	۲
۱۵	وضعیت دو دایرهٔ مقابل را نسبت به یکدیگر تعیین کنید. $\begin{cases}x^2+y^2-4x+4y=1\\x^2+y^2-4x+8y+19=0\end{cases}$	۲
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم

درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** **الف)** اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ...... است. **ب)** اگر صفحهٔ P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این‌صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی، یک ...... است. **پ)** در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ باشد، بیضی به ...... تبدیل می‌شود. **ت)** در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ $(-۳,۲,-۵)$ در ناحیهٔ (کنج) ...... دستگاه مختصات قرار دارد.	۱
۲	**درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA=rB$، آن‌گاه داریم: $A=B$. ☐ درست ☐ نادرست **ب)** مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. ☐ درست ☐ نادرست **پ)** در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. ☐ درست ☐ نادرست **ت)** اگر زاویهٔ بین دو بردارِ مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است. ☐ درست ☐ نادرست	۱
۳	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. پرتکرار	۱
۴	اگر $\begin{bmatrix} \|A\| & -۴ \\ ۱ & \|A\| \end{bmatrix}=۲A$ باشد، در این‌صورت حاصل $\|A^{-۱}\|$ را بیابید.	۱/۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید. پرتکرار $\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$	۱
۶	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.	۱
۷	وضعیت دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. پرتکرار	۱/۵
۸	در شکل مقابل اگر $OA=a$ و $OB=b$ و $OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲=b^۲+c^۲$. 	۱
۹	نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. **الف)** نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. **ب)** طول MF را به‌دست آورید. (F,F' کانون‌های بیضی هستند و $MF<MF'$). 	۱/۵

پاسخنامهٔ تشریحی

امتحان ۱ (نوبت اول)

۱ الف) ندارد (فصل ۱/ خواص ضرب ماتریس‌ها) (۰/۲۵) / ب) حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی (فصل ۱/ دترمینان) (۰/۲۵) پ) غیرصفر (فصل ۱/ ماتریس وارون) (۰/۲۵)

۲ الف) درست (فصل ۱/ تساوی دو ماتریس) (۰/۲۵)

ب) نادرست (فصل ۱/ خواص ضرب ماتریس‌ها) (۰/۲۵)

پ) درست (فصل ۱/ دستگاه دو معادله دو مجهول) (۰/۲۵) / ت) نادرست (فصل ۱/ دترمینان ۲×۲) (۰/۲۵)

۳ ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایشان مشخص می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵) \quad , B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۵ \\ -۲ & -۳ & -۸ \\ -۵ & -۴ & -۱۳ \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

$$AB+I=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۵ \\ -۲ & -۳ & -۸ \\ -۵ & -۴ & -۱۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۵ \\ -۲ & -۲ & -۸ \\ -۵ & -۴ & -۱۲ \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

(فصل ۱/ ضرب و جمع ماتریس‌ها)

۴ ماتریس I با هر ماتریسی خاصیت جابه‌جایی دارد، بنابراین می‌توان از اتحاد کمک گرفت.

$$(A^۲+I)^۲=(A^۲)^۲+۲A^۲I+I^۲=A^۴+۲A^۲+I \ (۰/۲۵)$$

$$(A^۲+I)^۲=\underbrace{A^۳A+۲A^۲+I}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(I-۲A)A+۲A^۲+I}_{(۰/۲۵)}$$

$$=A-۲A^۲+۲A^۲+I=A+I \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱/ توان ماتریس)

۵ ابتدا $A^۲$ و $A^۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

در نتیجه $A^{۱۴۰۰}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۴۰۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ (۰/۲۵)، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱۴۰۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=۱, b=۱۴۰۰, c=۰, d=۱ \ (۰/۲۵)$$

$$۲a+b-c+۳d=۲+۱۴۰۰-۰+۳=۱۴۰۵ \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱/ توان ماتریس)

۶ داریم $|A|=-\frac{۲}{۳}$، بنابراین:

$$|-۴A^{-۱}|=\underbrace{(-۴)^۳|A^{-۱}|}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(-۴)^۳\frac{۱}{|A|}}_{(۰/۲۵)}=(-۴)^۳\times(-\frac{۳}{۲})=۹۶$$

(فصل ۱/ دترمینان ـ دترمینان وارون)

۷ فرض می‌کنیم $A^{-۱}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$AA^{-۱}=I\Rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

$$\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ax+bz=۱ \\ ay+bt=۰ \\ cx+dz=۰ \\ cy+dt=۱ \end{cases} \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{ad-bc}, y=\frac{-b}{ad-bc}, z=\frac{-c}{ad-bc}$$

$$t=\frac{a}{ad-bc} \ (۰/۲۵)$$

می‌دانیم $|A|=ad-bc$ است، در نتیجه:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱/ ماتریس وارون)

۸

$$\begin{bmatrix} ۲ & x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ x & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=۱۴$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} ۳+x^۲ & ۴+x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=۱۴ \ (۰/۵)$$

$$\underbrace{[۳+x^۲+۸+۲x]=۱۴}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰\Rightarrow x=۱,-۳ \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱/ خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها)

۹ ابتدا $|A|$ و $|B|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=۰+۱\times(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}+۰=۲ \ (۰/۲۵)$$

$$|B|=۳(-۱)(۱)=-۳ \ (۰/۲۵)$$

$$|A|+|B|=۲-۳=-۱ \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱/ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳)

۱۰

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۶+۱۲=۱۸ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۸}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵) \ , \ \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۸}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۴ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x=۲, y=۱$$

(فصل ۱/ حل دستگاه به روش ماتریس وارون)

امتحان ۴ (نوبت اول)

۱ با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:

$$\underbrace{A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y & 3\\ x-y & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & z-1\\ -3 & 0\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{cases}x+y=5\\ x-y=-3\\ z-1=3\end{cases}}_{(0/25)}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\\ z=4\end{cases}\ (0/25)$$

بنابراین: $2x-y+z=2(1)-4+4=2$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / تساوی دو ماتریس)

۲ ابتدا از رابطهٔ داده‌شده، ماتریس X را به‌دست می‌آوریم:

$$2A+B-3X=\bar{O}\Rightarrow\underbrace{3X=2A+B}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow X=\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B\ (0/25)=\underbrace{\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\2&\frac{8}{3}\\\frac{10}{3}&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{-5}{3}\\\frac{4}{3}&1\end{bmatrix}}_{(0/25)}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{7}{3}&1\\\frac{14}{3}&5\end{bmatrix}\ (0/25)$$

(فصل ۱ / اعمال روی ماتریس‌ها)

۳ الف) -3 (فصل۱/دترمینان ماتریس‌های 2×2) (۰/۲۵) ب) $2\times(-1)\times7=-14$ (فصل ۱ / دترمینان ماتریس قطری) (۰/۲۵) پ) $4\times5-3$ (فصل ۱ / شرط ضرب دو ماتریس) (۰/۵)

ت) صفر (فصل ۱ / دترمینان) (۰/۲۵)

۴ ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\ (0/25)$$

$$A^{1397}-A^{1390}=\underbrace{(A^2)^{698}\times A-(A^2)^{695}}_{(0/25)}=\underbrace{I^{698}\times A-I^{695}}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{=A-I}_{(0/25)}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\1&0\end{bmatrix}\ (0/25)$$

(فصل ۱ / توان ماتریس)

۵ می‌دانیم $|A^n|=|A|^n$، بنابراین $\underbrace{|A^4|=25\Rightarrow|A|^4=25\Rightarrow|A|=\sqrt{5}}_{(0/25)}$.

حال دترمینان A را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&-a&-2\\1&a&1\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{|A|=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}-a&-2\\a&1\end{vmatrix}+0+0}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow|A|=-a+2a=a\ (0/25)$$

بنابراین $a=\sqrt{5}$ (۰/۲۵) (فصل ۱ / جابه‌جایی توان و دترمینان)

۶ فرض می‌کنیم ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد و دارای دو وارون B و C باشد، نشان می‌دهیم $B=C$ (۰/۲۵). از آن‌جا که B و C هر دو وارون‌های A هستند، داریم:

$$\underbrace{AB=BA=I}_{(0/25)}\ ,\ \underbrace{AC=CA=I}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{B=BI=B(AC)}_{(0/25)}=\underbrace{(BA)C=IC=C}_{(0/25)}$$

(فصل ۱ / قضیهٔ یکتایی وارون)

۷ شرط این‌که ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، این است که $|A|=0$، پس:

$$A=\begin{bmatrix}m+1&m-2\\m-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{|A|=2(m+1)-(m-1)(m-2)=0}_{(0/5)}$$

$$\Rightarrow 2m+2-m^2+3m-2=0\ (0/25)$$

$$\Rightarrow m^2-5m=0\Rightarrow m(m-5)=0\Rightarrow m=0 \text{ یا } m=5\ (0/25)$$

(فصل ۱ / شرط وارون‌پذیری)

۸ شرط اینکه دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد، این است که دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر باشد (۰/۲۵). ابتدا معادلات را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x=3x-3y-3\\2y=3x+3y+3\end{cases}\Rightarrow\underbrace{\begin{cases}x-3y=3\\3x+y=-3\end{cases}}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-3\\3&1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=1+9=10\ (0/25)$$

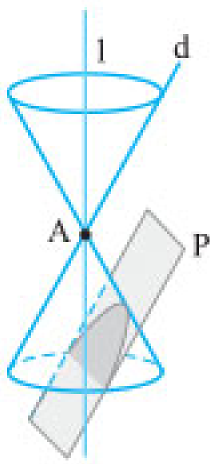
$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&-3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}}_{(0/25)}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&3\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-6\\-12\end{bmatrix}}_{(0/25)}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{6}{10}\\-\frac{12}{10}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-3}{5}\\y=\frac{-6}{5}\end{cases}}_{(0/25)}$$

(فصل ۱ / دستگاه دو معادله دو مجهول)

۹ سطح مقطع حاصل یک سهمی است. (۰/۵)



(۰/۲۵)

(فصل ۲ / مقاطع مخروطی)

امتحان ۱۰ - خرداد ماه ۱۴۰۰ (نوبت دوم)

۱ الف) ۸ (فصل ۱ / ماتریس اسکالر) (۰/۲۵) / ب) خط (فصل ۲ / مقاطع مخروطی) (۰/۲۵) / پ) دایره (فصل ۲ / خروج از مرکز بیضی) (۰/۲۵) / ت) ۶ (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$) (۰/۲۵)

۲ الف) درست (فصل ۲ / ضرب عدد حقیقی در ماتریس) (۰/۲۵) / ب) نادرست (فصل ۲ / مکان هندسی) (۰/۲۵) / پ) درست (فصل ۲ / ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها) (۰/۲۵) / ت) نادرست (فصل ۳ / ضرب داخلی) (۰/۲۵)

۳

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ & (۰/۲۵) \\ n=-۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} (۰/۵)$$

(فصل ۱ / ضرب دو ماتریس)

۴

$$\underbrace{|۲A|=(|A|^۲+۴)}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{(|A|-۲)^۲=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow |A|=۲ \ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲} (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / خواص دترمینان)

۵

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{\underbrace{\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / حل دستگاه با استفاده از ماتریس وارون)

۶ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r=\frac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \ (۰/۵)$$

معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹ \ (۰/۵)$

(فصل ۲ / معادلهٔ دایرهٔ مماس بر خط)

۷

مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱$ برابر است با: $O'=(۳,۱)\,,\,r'=۱$ (۰/۵)

فاصلهٔ دو مرکز برابر (۰/۵) $d=OO'=\sqrt{(۳)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$ است و (۰/۲۵) $d>r+r'=۲$. بنابراین دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج‌اند) (۰/۲۵)

(فصل ۲ / وضعیت نسبی دو دایره)

۸ نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد، در نتیجه:

$BF=BF' \ (۱)$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

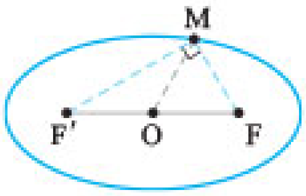
$$BF+BF'=۲a \xrightarrow{(۱)} BF=BF'=a \ (۰/۲۵)$$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF، داریم:

$$OF^۲+OB^۲=BF^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^۲+b^۲=a^۲ \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۹ الف)



$$\begin{cases} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow c=۴ (۰/۲۵)$$

در مثلث MFF'، میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف ضلع روبه‌رو است $MO=\frac{۱}{۲}FF'=۴$. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۲۵)

ب) $MF+MF'=۲a=۱۰ \Rightarrow MF'=۱۰-MF$ (۰/۲۵)

$$MF^۲+MF'^۲=FF'^۲ \Rightarrow \underbrace{MF^۲+(۱۰-MF)^۲=۸^۲}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow MF=۵-\sqrt{۷} (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۱۰ الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات، خواهیم داشت: $a=-۴$ (۰/۲۵)

دهانهٔ سهمی رو به پایین است و معادلهٔ آن برابر است با:

$(x-۲)^۲=۴(-۴)(y-۳)$ (۰/۵) (فصل ۲ / معادلهٔ سهمی)

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F=(۲,-۱)$ (۰/۵)

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۱ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر (۰/۲۵) $a=\frac{۴b^۲}{۱۶h}$ است.

$h=۹$ و $۲b=۶۰$. با جای‌گذاری در رابطهٔ فوق، داریم:

$$a=\frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h}=\frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)}=۲۵ \ (۰/۵)$$

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۲ الف) $b=-۳$ (۰/۵) ب) محور z ها (۰/۵)

پ) نقطهٔ $A=(۰,۲,۳)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲,۴,۰)$. (۰/۲۵) (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$)

۱۳

$$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶) \ (۰/۵) \ ,\ \underbrace{\vec{a'}=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}(\vec{b}+\vec{c})}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶) \ (۰/۷۵)$$

(فصل ۳ / تصویر قائم بردار)

۱۴

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{O}|^۲ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷ \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۳ / ضرب داخلی)