جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع هندسه

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

نشر الگو

مجموعه کتاب‌های ریاضی رشتهٔ ریاضی نشر الگو:

- ریاضی ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۱ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۳ (تست و سه‌بعدی)
- آمار و احتمال (تست و سه‌بعدی)
- هندسه پایه
- ریاضیات پایه
- موج‌آزمون ریاضی
- موج‌آزمون هندسه
- جامع ریاضی + موج‌آزمون
- ریاضیات گسسته (تست و سه‌بعدی)
- موج‌آزمون ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

- درس‌نامهٔ کامل با بیان تمام نکات مهم
- ۵۲۵ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۱۰۹۱ پرسش چهارگزینه‌ای در آزمون‌ها
- ۸۲۹ پرسش چهارگزینه‌ای ایستگاه یادگیری
- ۱۰۰ آزمون مبحثی و جامع از کتاب‌های هندسه ۱، هندسه ۲ و هندسه ۳
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (در جلد دوم)

در این کتاب «پاسخ‌های تشریحی» تست‌های جلد اول آمده است. همچنین، می‌توانید فایل PDF رایگان پاسخ‌های تشریحی را از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

9 786226 390392

نشر الگو
www.olgoobooks.ir

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(رشتهٔ ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشتهٔ تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

پیشگفتار

به نام خدا

با توجه به کنکورهای برگزار شده در دو سال اخیر در داخل و خارج کشور، اهمیت درس هندسه به‌وضوح از دید طراحان سؤال مشخص است. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز و گرانقدر با تست‌های گوناگون هر سه درس هندسه ۱، ۲ و ۳ آشنا شوید.

هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب هندسه ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ را مرور کنید. این کتاب یازده فصل دارد. به‌جز فصل یازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل یازدهم ویژهٔ «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب هندسه ۳ را در سه فصل گنجانده‌ایم. هفت فصل دیگر مربوط به کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «ایستگاه یادگیری» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. همهٔ آزمون‌ها به‌جز آزمون‌های جامع کلی ده پرسش دارند. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همهٔ مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم.

پاسخ پرسش‌های ایستگاه یادگیری و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

فصل دوم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

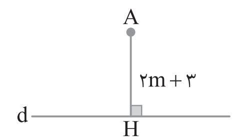
فصل اول

پاسخ تشریحی
ایستگاه‌های یادگیری

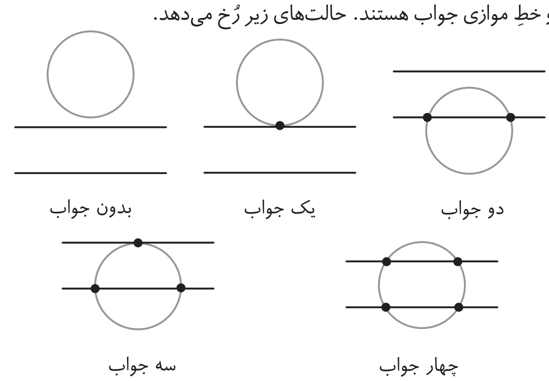
۱ (۴) فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر $۲m+۳$ است و نقاطی که از A به فاصلهٔ ۹ هستند، روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۹ قرار دارند. بنابر فرض سؤال این دایره خط d را نباید قطع کند. پس باید شعاع دایره از فاصلهٔ AH کوچک‌تر باشد. بنابراین

$$AH>۹\Rightarrow ۲m+۳>۹\Rightarrow ۲m>۶\Rightarrow m>۳$$

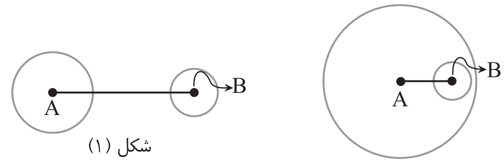
در بین گزینه‌ها فقط $۲\sqrt{۳}$ در نامساوی $m>۳$ صدق می‌کند.



۲ (۳) مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعهٔ نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی L هستند که فاصلهٔ آن‌ها از L برابر ۲ است (دقت کنید که این دو خط از یکدیگر به فاصلهٔ ۴ هستند). نقاط مشترک دایره و این دو خطِ موازی جواب هستند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.

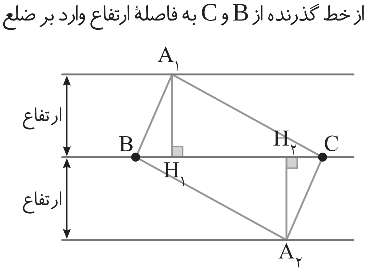


۳ (۲) نقاطی که از A به فاصلهٔ m و از B به فاصلهٔ n هستند به‌ترتیب روی دو دایره به مراکز A و B و شعاع‌های m و n قرار دارند. اگر این دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، نقطه‌ای با ویژگی مورد نظر وجود نخواهد داشت (شکل‌های زیر را ببینید). اگر $m=۱۱$ و $n=۱$، شکل (۲) ایجاد می‌شود و مسئله جواب ندارد. توجه کنید در گزینه‌های (۱) و (۴) دو دایره مماس و در گزینهٔ (۳) دو دایره متقاطع‌اند.

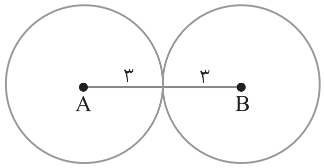


شکل (۱)
شکل (۲)

۴ (۴) چون طول ارتفاع (AH) ثابت است و رأس‌های B و C هم ثابت هستند، پس A روی دو خطِ موازیِ خط گذرنده از نقطه‌های B و C است که فاصلهٔ آن‌ها از خط گذرنده از B و C به فاصلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



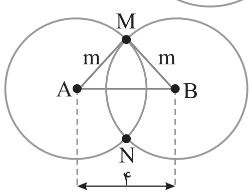
۵ (۲) مجموعهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع $r_۱=۳$. به همین صورت مجموعهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز B و شعاع $r_۲=۳$. چون $AB=r_۱+r_۲$، پس یک نقطه با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آید.



۶ (۱) باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع m یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. بنابراین با توجه به شکل باید

$$AB<AM+BM\Rightarrow ۴<m+m$$

$$۴<۲m\Rightarrow ۲<m$$



در بین گزینه‌ها فقط $m=۳$ در این نابرابری صدق می‌کند.

۷ (۱) باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر باشد:

$$۲x-۱<x+۴+۵x+۱\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x\ ,\quad x+۴<۲x-۱+۵x+۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}<x$$

$$۵x+۱<x+۴+۲x-۱\Rightarrow x<۱$$

اکنون از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم. در این صورت حدود تغییرات x به‌صورت $\frac{۲}{۳}<x<۱$ است. یعنی برای x هیچ مقدار صحیحی به‌دست نمی‌آید. توجه کنید که در محدودهٔ به‌دست آمده $۲x-۱$، $x+۴$ و $۵x+۱$ مثبت هستند.

۸ (۱) مثلث با طول اضلاع ۵، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ وجود ندارد زیرا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\not>۵$. مثلث با طول اضلاع $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۱۰}$ نیز وجود ندارد زیرا $۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}\not>۲\sqrt{۱۰}$. مثلث با طول اضلاع $۲a$، $a-۲$ و $a+۲$ نیز وجود ندارد زیرا $۲a\not<(a+۲)+(a-۲)$. ولی مثلث با طول اضلاع $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}$ و ۱ وجود دارد زیرا $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}>۱$، $\sqrt{۳}+۱>\sqrt{۲}$ و $۱+\sqrt{۲}>\sqrt{۳}$.

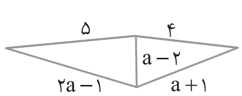
۹ (۲) شکل از دو مثلث تشکیل شده است. در هر دو مثلث نابرابری‌های مثلث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a-۲<۵+۲a-۱ \\ ۵<۲a-۱+a-۲ \\ ۲a-۱<۵+a-۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۶<a \\ \frac{۸}{۳}<a \\ a<۴ \end{cases}\Rightarrow \frac{۸}{۳}<a<۴ \quad (۱)$$

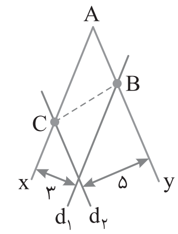
در مثلث دیگر نیز باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد:

$$\begin{cases} a-۲<۴+a+۱ \\ a+۱<۴+a-۲ \\ ۴<a-۲+a+۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۲<۵ \\ ۱<۲ \\ \frac{۵}{۲}<a \end{cases}\Rightarrow \frac{۵}{۲}<a \quad (۲)$$

حدود تغییرات a، اشتراک نابرابری‌های (۱) و (۲) است که می‌شود $\frac{۸}{۳}<a<۴$. توجه کنید که در این محدوده $a-۲$، $a+۱$ و $۲a-۱$ مثبت هستند. بنابراین تنها عدد صحیح که در این نابرابری صدق می‌کند $a=۳$ است.



۱۰ (۳) ابتـدا زاویـهٔ xAy را بـه اندازهٔ ۴۵° رسم می‌کنیم. خط $d_۱$ را موازی Ax و به فاصلهٔ ۳ از آن رسـم می‌کنیم. محل برخورد این خط با Ay رأس B اسـت (خط $d_۱$ در شکل مقابل را ببینید). اکنون خط $d_۲$ را موازی Ay و به فاصلهٔ ۵ از آن رسم کرده، محـل برخـورد آن بـا Ax را رأس C می‌نامیم (خط $d_۲$ را در شکل مقابل ببینید). مثلث ABC جواب است و این مثلث منحصربه‌فرد است.



۱۱ (۳) بنابر فرض سؤال،

$$AB<AC \Rightarrow x<۲x-۳ \Rightarrow ۳<x$$

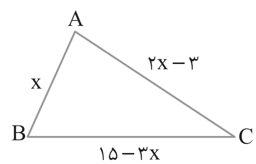
از طرف دیگر اضلاع این مثلث باید در نابرابری مثلث صدق کنند. پس

$$AB<AC+BC \Rightarrow x<۲x-۳+۱۵-۳x \Rightarrow ۲x<۱۲ \Rightarrow x<۶$$

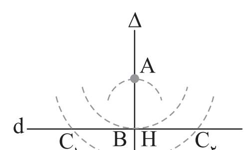
$$AC<AB+BC \Rightarrow ۲x-۳<x+۱۵-۳x \Rightarrow ۴x<۱۸ \Rightarrow x<\frac{۹}{۲}$$

$$BC<AC+AB \Rightarrow ۱۵-۳x<x+۲x-۳ \Rightarrow ۱۸<۶x \Rightarrow ۳<x$$

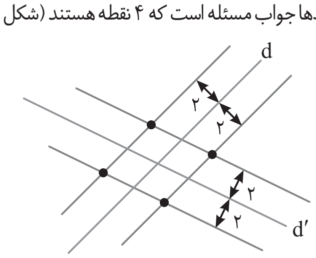
اشـتراک جواب‌هـای نامعادله‌هـای بـالا به‌صورت $۳<x<\frac{۹}{۲}$ اسـت و در بین گزینه‌ها تنها عدد $۳\sqrt{۲}$ در این فاصله قرار دارد.



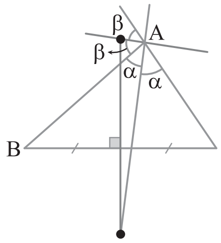
۱۲ (۲) خـط دلخواه d را رسـم می‌کنیـم و خط دلخـواه Δ را بر آن عمود می‌کنیم محل تقاطع Δ و d را H می‌نامیم. از نقطهٔ H کمانی به شعاع h_a رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با Δ را A در نظر می‌گیریم. از A کمان‌هایی به شعاع $AB=۴$ و $AC=۷$ رسم می‌کنیم. با توجه به نقاط برخورد این کمان‌ها و خـط d تعداد مثلث‌های متمایز مورد نظر معلوم می‌شـود. اگر کمان به شـعاع کوچک‌تر یعنی AB مماس بر d و کمان دیگر خط d را قطع کند، آن‌گاه تنها یک مثلث با این معلومات قابل رسم است. توجه کنید که مطابق شکل نقطهٔ H و B منطبق هسـتند و چون دو مثلث $AC_۱B$ و $AC_۲B$ همنهشت هستند آن‌ها را یک مثلث در نظر می‌گیریم. بنابراین برای رسـم چنین مثلثی اگر بخواهیم جواب منحصربه‌فرد داشته باشیم، باید ارتفاع داده شده برابر طول ضلع کوچک‌تر، از بین دو ضلع داده شده باشد. در نتیجه $h_a=c$، یعنی $h_a=۴$.



۱۳ (۳) خطوطی موازی دو خط d و d' و به فاصلهٔ ۲ از آن‌ها را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها جواب مسئله است که ۴ نقطه هستند (شکل زیر را ببینید).



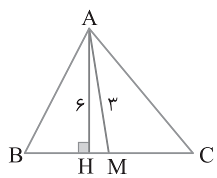
۱۴ (۳) مجموعـهٔ نقطه‌هایـی که از دو ضلع AB و AC یـا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند، نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A است. همچنین، مجموعهٔ نقطه‌هایی که از B و C به یک فاصله‌اند، عمودمنصف ضلع BC است. بنابراین نقاطی که از AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله و از دو رأس B و C نیز به یک فاصله هستند، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A و عمودمنصف ضلع BC هستند. چون مثلث متساوی‌الساقین نیست، جواب دو نقطهٔ مشخص شده در شکل زیر است.



۱۵ (۱) اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد، آن‌گاه

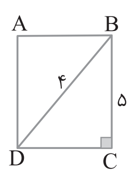
$$S=\frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۲}AH \times (۴) \Rightarrow AH=۶$$

بنابرایـن اگـر مثلـث ABC قابـل رسـم باشـد، آن‌گاه مانند شـکل فرضی زیر ارتفـاع AH از میانهٔ AM در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH بزرگ‌تر اسـت که این غیرممکن اسـت، زیرا AM وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH اسـت و باید از AH بزرگ‌تر باشد. پس چنین مثلثی وجود ندارد.



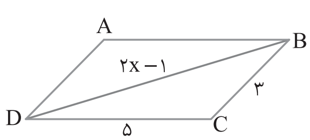
۱۶ (۱) می‌دانیم در مسـتطیل قطرها مساوی‌اند. پس مستطیلی به طول قطرهای ۶ و ۵ وجود ندارد.

۱۷ (۴) فـرض کنید در مسـتطیل $ABCD$، $BD=۴$ و $BC=۵$. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC وتر کوچک‌تر از ضلع زاویهٔ قائمهٔ است و این ممکن نیست، پس چنین مستطیلی وجود ندارد.

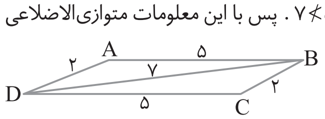


۱۸ (۲) بـا توجـه به شـکل زیـر، متوازی‌الاضـلاع $ABCD$ قابل رسـم اسـت هرگاه مثلث BCD قابل رسم باشـد. پس طول اضلاع مثلث BCD در نابرابری‌های مثلث یا نتیجهٔ آن صدق می‌کنند.

$$|۵-۳|<۲x-۱<۵+۳ \Rightarrow ۲<۲x-۱<۸ \Rightarrow ۳<۲x<۹ \Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<\frac{۹}{۲}$$

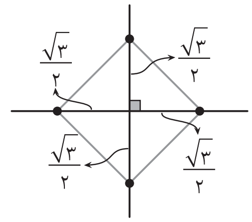


۱۹ (۱) با توجه به شـکل زیر برای رسـم این متوازی‌الاضلاع باید مثلث ABD، قابـل رسـم باشـد، ولی اضلاع ایـن مثـلث در نابرابـری مثلث صدق نمی‌کنند: $۲+۵\not>۷$. پس با این معلومات متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.

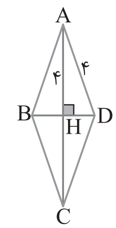


۲۰ (۴) زاویهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع می‌تواند تغییر کند. پس با تغییر این زاویه نامتناهی متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ قابل رسم است.

۲۱ (۲) دو قطر مربع مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس مطابق شکل زیر یک مربع به قطر $\sqrt{۳}$ قابل رسم است.



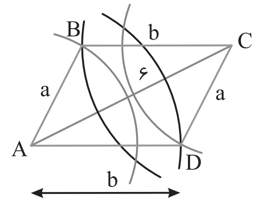
۲۲ (۱) در لوزی قطرها منصف یکدیگر و عمود بر هم هستند. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD هم وتر و هم ضلع زاویهٔ قائمه برابر ۴ هستند و این ممکن نیست. پس چنین لوزی‌ای وجود ندارد.



۲۳ (۲) در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، پس $BC=AD=b$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ABCD در صورتی ایجاد می‌شود که مثلث ABC به وجود بیاید. پس باید سه عدد a، b و ۶ در نامساوی‌های زیر صدق کنند

$$a<b+۶,\quad b<a+۶,\quad ۶<a+b$$

در بین گزینه‌ها فقط $a=۳$ و $b=۴$ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند.



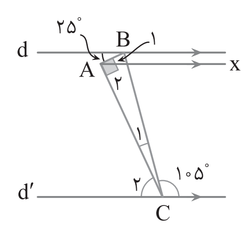
۲۴ (۲) از رأس A خط Ax را موازی با دو خط d و d' رسم می‌کنیم. در این‌صورت از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} d\parallel Ax \\ \text{مورب } AB \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱=۲۵^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} \hat{A}_۲=۶۵^\circ$$

$$\begin{cases} Ax\parallel d' \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{C}_۲=۶۵^\circ$$

از طرف دیگر

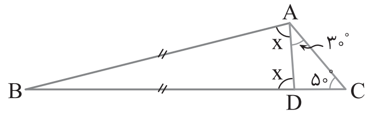
$$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+۶۵^\circ+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱=۱۰^\circ$$



۲۵ (۳) مثلث ABD متساوی‌الساقین است، اندازهٔ دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس

$$x=۳۰^\circ+۵۰^\circ=۸۰^\circ$$

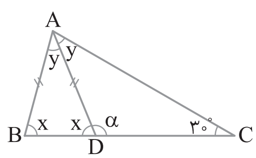
بنابراین $\triangle ABD:\hat{B}+x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۲۰^\circ$



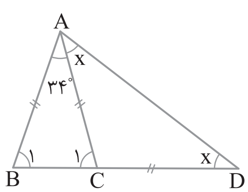
۲۶ (۲) مثلث ABD متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C$ و اندازهٔ هر کدام را y انتخاب می‌کنیم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس $x=y+۳۰^\circ$. در ضمن در مثلث ABD مجموع زاویه‌ها ۱۸۰° است، پس $۲x+y=۱۸۰^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} x=y+۳۰^\circ \\ ۲x+y=۱۸۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۳x+y=y+۲۱۰^\circ \Rightarrow x=۷۰^\circ$$

$$\alpha=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$



۲۷ (۴) با استفاده از داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. مثلث‌های ACD و ABC متساوی‌الساقین هستند. اگر اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ACD را x بنامیم، چون $C_۱$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس $\hat{C}_۱=۲x$، در نتیجه $\hat{B}_۱=۲x$. بنابراین



$$\triangle ABC:۳۴^\circ+۲x+۲x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x=۱۴۶^\circ \Rightarrow x=۳۶/۵^\circ$$

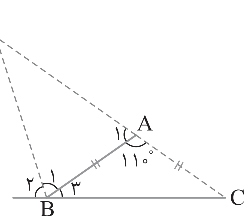
پس $A\hat{D}C=۳۶/۵^\circ$.

۲۸ (۴) زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ این مثلث نمی‌تواند ۱۱۰° باشد چون در این‌صورت مجموع زاویه‌های آن از ۱۸۰° بیشتر می‌شود. پس زاویهٔ رأس آن ۱۱۰° است. در ضمن نیمساز خارجی رأس مثلث متساوی‌الساقین با قاعده موازی است. پس نیمساز خارجی زاویه‌های مجاور به قاعده (در اینجا B یا C) را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع مقابل را در D قطع کند. پس

$$\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

$$\hat{B}_۳=\frac{۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-۳۵^\circ}{۲}=\frac{۱۴۵^\circ}{۲}=۷۲/۵^\circ$$

بنابراین $\hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱)=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۲/۵^\circ)=۳۷/۵^\circ$.



۲۹ **۴** مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AM میانهٔ وارد بر قاعدهٔ آن است، پس AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. با توجه به شکل

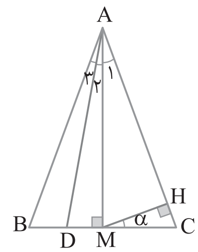
$$\triangle MHC: \hat{C}=۹۰^\circ-\alpha$$

$$\triangle AMC: \hat{A}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-(۹۰^\circ-\alpha) \Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=\alpha$$

چون AD نیمساز زاویهٔ BAM است، پس $۲\hat{A}_۲=\alpha \Rightarrow \hat{A}_۲=\frac{\alpha}{۲}$

در ضمن زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ADM است، پس

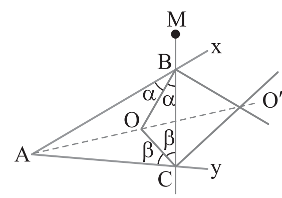
$$A\hat{D}B=\hat{A}_۲+۹۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$$



۳۰ **۱** چون ارتفاع‌های مثلث بیرون مثلث یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث نیز خارج مثلث قرار دارد.

۳۱ **۲** مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر ۱۸۰° است. چون $\hat{B}+\hat{C}=۸۰^\circ$، پس $\hat{A}=۱۰۰^\circ$. بنابراین مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است. در نتیجه نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های این مثلث بیرون مثلث قرار دارد.

۳۲ **۲** نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و C، یعنی نقطه‌های O و O' در شکل، روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارند، زیرا نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند و هر دو نیمساز خارجی با نیمساز زاویهٔ رأس سوم همرس هستند. پس جواب روی نیمساز زاویهٔ xAy است.



۳۳ **۱** **راه‌حل اول**: نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس آن به یک فاصله‌اند، پس

$$SA=SB=SC$$

پس مثلث‌های SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند. با توجه به شکل

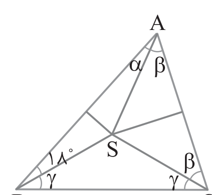
$$\alpha=S\hat{B}A=۱۸^\circ$$

$$\triangle ABC: \alpha+۲\beta+۲\gamma+۱۸^\circ=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha=۱۸^\circ} ۲\beta+۲\gamma=۱۴۴^\circ$$

$$\beta+\gamma=۷۲ \Rightarrow B\hat{C}A=۷۲^\circ$$

راه‌حل دوم طبق درسنامه چون S محل تلاقی عمودمنصف‌هاست، پس $A\hat{S}B=۲\hat{C}$.

از طرف دیگر $A\hat{S}B=۱۸۰^\circ-۱۸^\circ-۱۸^\circ=۱۴۴^\circ$. پس $B\hat{C}A=\frac{۱۴۴^\circ}{۲}=۷۲^\circ$.



۳۴ **۲** در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{C}=۲\hat{B}\end{cases} \Rightarrow \hat{B}+۲\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ$$

پس $\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$ و $\hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ$. بنابراین

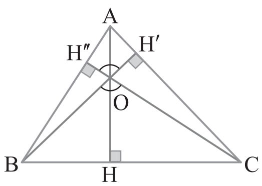
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲\hat{A}+۲\hat{C}=۲۴۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} ۳\hat{A}=۳۰۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۰۰^\circ, \quad \hat{C}=۲۰^\circ$$

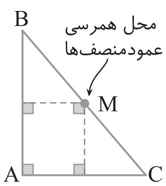
بنابراین مثلث ABC با داشتن زاویه‌ای ۱۰۰° مثلثی منفرجه‌الزاویه است. پس نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های آن خارج مثلث قرار دارد.

۳۵ **۱** در شکل زیر دو زاویهٔ BOC و $H''OH'$ مساوی‌اند. در ضمن چهارضلعی $AH'OH''$ دو زاویهٔ قائمه دارد و چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی ۳۶۰° است، پس

$$\hat{A}+H''\hat{O}H'=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۸۰^\circ} H''\hat{O}H'=۱۰۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C=۱۰۰^\circ$$



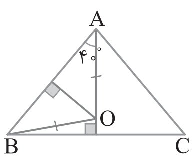
۳۶ **۳** با توجه به شکل مقابل چون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند، پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC همرس هستند (نقطهٔ M را در شکل مقابل ببینید). اکنون به‌دست می‌آید



$$MB+MC=BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$$

۳۷ **۲** در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف قاعده، نیمساز رأس است. یعنی

$$O\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{۲}=۴۰^\circ$$



از طرف دیگر، $OA=OB$، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است و $O\hat{B}A=O\hat{A}B=۴۰^\circ$. بنابراین

$$A\hat{O}B=۱۸۰^\circ-۲\times۴۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۳۸ **۳** ابتدا اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، پس

$$\begin{cases}۲\hat{A}-\hat{B}=۵۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادلهٔ اول}} \begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ \times۴ \quad \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases}$$

$$\times(-۳)\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ ۶\hat{C}+\hat{A}=۷۰۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ -۱۸\hat{C}-۳\hat{A}=-۲۱۰۰^\circ\end{cases}$$

$$-۱۷\hat{C}=-۱۸۷۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۱۰^\circ, \hat{A}=۴۰^\circ, \hat{B}=۳۰^\circ$$

پس این مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های آن بیرون مثلث است.

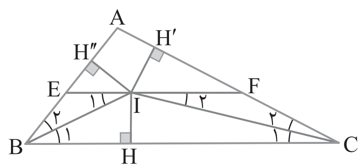
۳۹ (۲) نقطهٔ I روی EF از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است ($IH=IH'=IH''$). بنابراین I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. پس IB و IC به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های B و C هستند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} IE \parallel BC \\ IB \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_۱=\hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{I}_۱=\hat{B}_۲ \Rightarrow IE=BE \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} IF \parallel BC \\ IC \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_۲=\hat{C}_۱ \Rightarrow \hat{I}_۲=\hat{C}_۲ \Rightarrow IF=CF \qquad (۲)$$

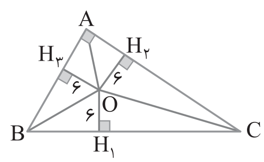
از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$IE+IF=BE+CF \Rightarrow EF=۴$$



۴۰ (۳) نقطهٔ O محل همرسی نیمسازها است، بنابراین از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $OH_۱=OH_۲=OH_۳=۶$ (شکل زیر را ببینید). می‌توان نوشت

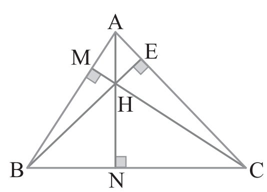
$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\times۶\times BC+\frac{۱}{۲}\times۶\times AC+\frac{۱}{۲}\times۶\times AB$$
$$=۳(BC+AC+AB)=۳\times۱۴=۴۲$$



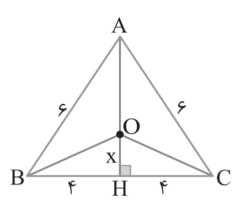
۴۱ (۲) با توجه به شکل، $A\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}N$ است و $M\hat{H}N$ مکمل زاویهٔ B است. در ضمن $B\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}E$ است و $M\hat{H}E$ مکمل زاویهٔ A است. پس

$$A\hat{H}C-B\hat{H}C=(۱۸۰^\circ-\hat{B})-(۱۸۰^\circ-\hat{A})=\hat{A}-\hat{B}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=۶۰^\circ} A\hat{H}C-B\hat{H}C=۷۰^\circ-۶۰^\circ=۱۰^\circ$$



۴۲ (۳) مثلث ABC به طول اضلاع ۶، ۶ و ۸ متساوی‌الساقین است. پس عمودمنصف قاعدهٔ BC از رأس A می‌گذرد. در ضمن $OA=OB=OC$. از طرف دیگر،



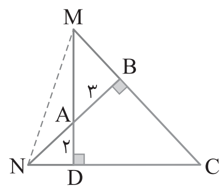
$$\triangle AHC: AH^۲=AC^۲-CH^۲=۶^۲-۴^۲=۳۶-۱۶=۲۰ \Rightarrow AH=۲\sqrt{۵}$$

با فرض $OH=x$ نتیجه می‌گیریم $OA=۲\sqrt{۵}-x$، پس $OC=۲\sqrt{۵}-x$. در نتیجه

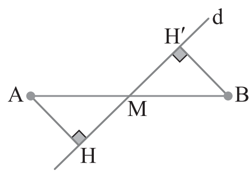
$$\triangle OHC: OC^۲=OH^۲+CH^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۵}-x)^۲=x^۲+۴^۲$$

$$۲۰+x^۲-۴\sqrt{۵}x=x^۲+۱۶ \Rightarrow ۴\sqrt{۵}x=۴ \Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

۴۳ (۲) از فرض‌های تست شکل زیر ایجاد می‌شود. اگر از M به N وصل کنیم، آن‌گاه نقطهٔ A در مثلث MNC نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها است. پس اگر از C به A وصل کنیم و امتداد دهیم، ارتفاع سوم مثلث MNC به‌دست می‌آید. بنابراین خط گذرنده از A و C بر MN عمود است.



۴۴ (۲) گزارهٔ (الف) درست است. زیرا اگر خط d از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB عبور کند، آن‌گاه طول عمودهای AH و BH' برابر است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و BMH' به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند (به شکل زیر توجه کنید).



گزارهٔ (ب) درست است، زیرا مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است پس در لوزی با مساحت ۷/۵ و طول یک قطر ۳، طول قطر دیگر آن ۵ است و با داشتن طول دو قطر ۳ و ۵ در لوزی فقط یک لوزی قابل رسم است.
گزارهٔ (پ) نادرست است. زیرا مثال نقض نادرستی یک حکم کلی را مشخص می‌کند.
گزارهٔ (ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ عدد محیط از عدد مساحت کوچک‌تر است.
بنابراین دو تا از این گزاره‌ها درست است.

۴۵ (۳) عکس قضیهٔ «اگر در یک مثلث یک زاویه قائمه باشد، آن‌گاه ضلع روبه‌روی آن بزرگ‌ترین ضلع مثلث است» به‌صورت «اگر در یک مثلث یک ضلع بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به آن قائمه است» بیان می‌شود که در حالت کلی درست نیست. زیرا زاویهٔ روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث لزومی ندارد قائمه باشد. پس قضیهٔ گزینهٔ (۳) به‌صورت دوشرطی بیان نمی‌شود.

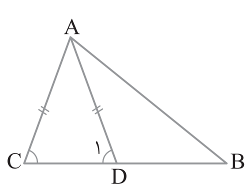
۴۶ (۳) در نقیض گزارهٔ داده شده کلمهٔ «هر» را به «وجود دارد» تغییر می‌دهیم و سپس فعل جمله را نقیض می‌کنیم. پس به گزارهٔ زیر می‌رسیم:
«مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰° نیست.»

۴۷ (۳) چهارضلعی‌ای که چهار ضلع برابر دارد لوزی است ولی لزومی ندارد مربع باشد. پس به عنوان مثال لوزی‌ای که یک زاویهٔ آن ۳۰° باشد مثال نقض برای گزارهٔ مطرح شده در گزینهٔ (۳) است. سایر گزینه‌ها یک حکم کلی همواره درست هستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود ندارد.

۴۸ (۴) در «اگر $AC>AB$، آن‌گاه $\hat{B}>\hat{C}$»، حکم $\hat{B}>\hat{C}$ است و در برهان خلف، فرض اولیه همان نقیض حکم است و نقیض $\hat{B}>\hat{C}$ عبارت $\hat{B}<\hat{C}$ یا $\hat{B}=\hat{C}$ است.

۴۹ (۲) با توجه به شکل،

$$\begin{cases} AD=AC \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{C} \\ \hat{D}_۱ \text{ زاویهٔ خارجی مثلث } ADB \Rightarrow \hat{D}_۱>\hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{C}>\hat{B}$$

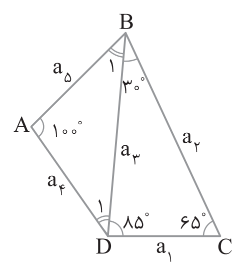


۵۰ (۳) در مثلث ADB زاویهٔ ADC زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس بزرگ‌تر از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاور است. بنابراین $A\hat{D}C>۴۰^\circ$. پس در مثلث ADC، $AC>AD$.

۵۱ (۲) چون $BC=\frac{AB+AC}{۲}$، پس طول ضلع BC میانگین حسابی طول دو ضلع AB و AC است. بنابراین اگر $AB=AC$، آن‌گاه طول ضلع BC هم با طول ضلع AB و AC برابر است، یعنی $AB=AC=BC$. پس مثلث متساوی‌الاضلاع است و $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ (درستی گزینهٔ (۱)). از طرف دیگر اگر $AB\neq AC$، طول ضلع BC بین طول این دو ضلع است، یعنی اگر $AB>AC$، آن‌گاه $AB>BC>AC$، پس $\hat{C}>\hat{A}>\hat{B}$ (درستی گزینهٔ (۴)) و اگر $AC>AB$، آن‌گاه $AC>BC>AB$، در نتیجه $\hat{B}>\hat{A}>\hat{C}$ (درستی گزینهٔ (۳)). بنابراین گزینهٔ (۲) نمی‌تواند درست باشد.

۵۲ (۳) در مثلث BCD چون $\hat{B}<\hat{C}<\hat{D}$، پس (۱) $a_۱<a_۳<a_۲$

از طرف دیگر در مثلث ABD زاویهٔ A منفرجه است، پس $\hat{A}>\hat{D}_۱$ و $\hat{A}>\hat{B}_۱$. در نتیجه $a_۳>a_۵$ و $a_۳>a_۴$. با مقایسهٔ این نابرابری‌ها و نابرابری (۱) به‌دست می‌آید $a_۲>a_۳>a_۵$ و $a_۲>a_۳>a_۴$.



۵۳ (۱) چون $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۷۰^\circ$، پس

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۷۰^\circ)=۸۰^\circ$$

در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{B}>\hat{A}\Rightarrow AC>BC\\ \hat{C}>\hat{B}\Rightarrow AB>AC\end{cases}\Rightarrow AB>AC>BC$$

یعنی $y>x>۳$.

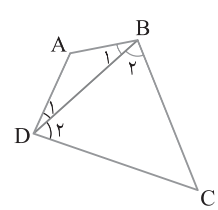
۵۴ (۳) در شکل زیر AB کوچک‌ترین و DC بزرگ‌ترین ضلع است. قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابراین در مثلث ABD،

$AB<AD\Rightarrow \hat{D}_۱<\hat{B}_۱$ (۱)

همچنین در مثلث BCD، $BC<DC\Rightarrow \hat{D}_۲<\hat{B}_۲$ (۲)

با جمع کردن نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\hat{D}_۱+\hat{D}_۲<\hat{B}_۱+\hat{B}_۲\Rightarrow \hat{D}<\hat{B}$$



۵۵ (۳) از فرض تست نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۳a}{۲a+۳b}=-۳\Rightarrow ۳a=-۶a-۹b\Rightarrow ۹a=-۹b\Rightarrow a=-b$$

در نسبت خواسته شده $a=-b$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۲a+b}{a-b}=\frac{-۲b+b}{-b-b}=\frac{-b}{-۲b}=\frac{۱}{۲}$$

۵۶ (۲) با طرفین، وسطین کردنِ تناسبِ داده شده نتیجه می‌شود

$$۳ma+۳nb=na+mb\Rightarrow (۳m-n)a=(m-۳n)b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m-۳n}{۳m-n}$$

اکنون، بنابر ویژگی‌های تناسب، می‌توان نوشت

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(m-۳n)+(۳m-n)}{(m-۳n)-(۳m-n)}=\frac{۲(m-n)}{-(m+n)}$$

پس $\frac{a+b}{a-b}=\frac{۲(n-m)}{m+n}$.

۵۷ (۴) **راه‌حل اول** از ویژگی‌های تناسب نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=\frac{۳x+y-۳+۲z+۱}{۲+۳+۴}=\frac{۳x+y+۲z-۲}{۹}$$

چون $۳x+y+۲z=۱۱$، $\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=۱$، پس $x=\frac{۲}{۳}$، $y=۶$ و $z=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه $xyz=\frac{۲}{۳}\times۶\times\frac{۳}{۲}=۶$.

راه‌حل دوم اگر $\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=k$، آن‌گاه $x=\frac{۲k}{۳}$، $y=۳k+۳$ و $z=\frac{۴k-۱}{۲}$. از طرف دیگر چون $۳x+y+۲z=۱۱$، در نتیجه

$$۲k+۳k+۳+۴k-۱=۱۱\Rightarrow ۹k=۹\Rightarrow k=۱$$

بنابراین $x=\frac{۲}{۳}$، $y=۶$، $z=\frac{۳}{۲}$ و $xyz=۶$.

۵۸ (۴) چون b واسطهٔ هندسی a و c است، پس $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ترکیب در صورت انجام می‌دهیم:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b+c}{c}\quad \text{(درستی گزینهٔ (۱))}$$

در تناسب $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ ترکیب در صورت انجام می‌دهیم:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{b+c}{b}\quad \text{(درستی گزینهٔ (۲))}$$

در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ طبق ویژگی‌های تناسب می‌توان نوشت

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{b-a}{c-b}\quad \text{(درستی گزینهٔ (۳))}$$

اکنون برای رد گزینهٔ (۴) می‌توان $a=۱$، $b=۲$ و $c=۴$ را در نظر گرفت:

$$\begin{cases}\frac{b}{c}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{b-c}{a-b}=\frac{۲-۴}{۱-۲}=۲\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{c}\neq\frac{b-c}{a-b}$$

۵۹ (۴) با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم:

$$\frac{x}{۵}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{k}{۷}\Rightarrow \frac{x+y+z}{۵+۳+۶}=\frac{k}{۷}\Rightarrow x+y+z=۲k$$

۶۰ گزینهٔ **۱** با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{۱+۲+۳+۴}=\frac{a_۵}{۵}\Rightarrow\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{۱۰}=\frac{a_۵}{۵}$$

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{a_۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

۶۱ گزینهٔ **۱** **راه‌حل اول** تناسب داده شده را برابر m قرار داده، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{۶}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۸}=m\Rightarrow\begin{cases}a=۶m\\b=۵m\\c=۸m\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{a+c}=\frac{۵m}{۶m+۸m}=\frac{۵}{۱۴}$$

راه‌حل دوم با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{۶}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۸}\Rightarrow\frac{a+c}{۶+۸}=\frac{b}{۵}\Rightarrow\frac{b}{a+c}=\frac{۵}{۱۴}$$

۶۲ گزینهٔ **۲** طول یکی از اضلاع مثلث واسطهٔ هندسی طول دو ضلع دیگر است، پس سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر x واسطهٔ هندسی بین ۲ و ۵ باشد، آن‌گاه

$$x^{۲}=۲\times۵=۱۰\Rightarrow x=\sqrt{۱۰}$$

با سه عدد ۲، ۵ و $\sqrt{۱۰}$ یک مثلث قابل رسم است چون این اعداد در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، یعنی $۵+۲>\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۰}+۲>۵$ و $\sqrt{۱۰}+۵>۲$.

حالت دوم اگر ۵ واسطهٔ هندسی بین ۲ و x باشد، آن‌گاه

$$۵^{۲}=۲x\Rightarrow x=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$$

با سه عدد ۲، ۵ و ۱۲/۵ مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $۱۲/۵<۵+۲$ برقرار نیست.

حالت سوم اگر ۲ واسطهٔ هندسی بین ۵ و x باشد، آن‌گاه

$$۲^{۲}=۵x\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

با سه عدد ۰/۸، ۵ و ۲ مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $۵<۲+۰/۸$ برقرار نیست. بنابراین فقط یک مثلث با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

۶۳ گزینهٔ **۲** **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم زاویه‌های چهارضلعی، $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ باشند و $\frac{\hat{A}}{۵}=\frac{\hat{B}}{۶}=\frac{\hat{C}}{۶}=\frac{\hat{D}}{۷}$. در این‌صورت بنابر ویژگی‌های تناسب

$$\frac{\hat{A}}{۵}=\frac{\hat{B}}{۶}=\frac{\hat{C}}{۶}=\frac{\hat{D}}{۷}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{۵+۶+۶+۷}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲۴}=۱۵^\circ$$

. در نتیجه

$$\hat{A}=۵\times۱۵^\circ=۷۵^\circ,\quad \hat{B}=\hat{C}=۶\times۱۵^\circ=۹۰^\circ,\quad \hat{D}=۷\times۱۵^\circ=۱۰۵^\circ$$

پس $۱۰۵^\circ-۷۵^\circ=۳۰^\circ$ = کوچک‌ترین زاویه − بزرگ‌ترین زاویه.

راه‌حل دوم چون زاویه‌های چهارضلعی متناسب با اعداد ۵، ۶، ۶ و ۷ هستند، آن‌ها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{A}=۵t,\quad \hat{B}=۶t,\quad \hat{C}=۶t,\quad \hat{D}=۷t$$

چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی ۳۶۰° است، پس

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۵t+۶t+۶t+۷t=۳۶۰^\circ$$

$$۲۴t=۳۶۰^\circ\Rightarrow t=۱۵^\circ$$

بزرگ‌ترین زاویه، $\hat{D}=۷t$ و کوچک‌ترین زاویه $\hat{A}=۵t$ است. در نتیجه

$$\hat{D}-\hat{A}=(۷-۵)t=۲t=۲\times۱۵^\circ=۳۰^\circ$$

۶۴ گزینهٔ **۳** چون $\frac{MB}{AM}=\frac{AN}{BN}=\frac{۱}{۲}$، با ترکیب در مخرج کردن این تناسب‌ها به‌دست می‌آید

$$\frac{MB}{AM+MB}=\frac{AN}{BN+AN}=\frac{۱}{۲+۱}\Rightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{AN}{AB}=\frac{۱}{۳}$$

پس $\frac{MB}{۱۲}=\frac{AN}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $MB=AN=۴$. اکنون می‌توان نوشت

$$MN=AB-(AN+MB)=۱۲-(۴+۴)=۴$$

۶۵ گزینهٔ **۴** با توجه به فرض داده شده، جای نقطه‌های M و N مانند شکل زیر است. در تناسب $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ ترکیب در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{MA}{MA+MB}=\frac{۲}{۳+۲}\Rightarrow\frac{MA}{AB}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{MA}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

بنابراین $MA=۶$. اکنون در تناسب $\frac{NA}{NB}=\frac{۲}{۳}$ تفضیل در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{NA}{NB-NA}=\frac{۲}{۳-۲}\Rightarrow\frac{NA}{AB}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow\frac{NA}{۱۵}=\frac{۲}{۱}$$

بنابراین $NA=۳۰$. اکنون می‌توان طول MN را به‌دست آورد:

$$MN=MA+AN=۶+۳۰=۳۶$$

۶۶ گزینهٔ **۳** بنابر فرض تست $AC^{۲}=AB\times BC$، پس $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$.

چون $AB=AC+BC$ (شکل را ببینید)، در نتیجه $\frac{AC+BC}{AC}=\frac{AC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{AC}+۱$. اکنون فرض می‌کنیم نسبت $\frac{AC}{BC}$ برابر x باشد. در این‌صورت تساوی $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{AC}+۱$ به $x=\frac{۱}{x}+۱$ تبدیل می‌شود و در نهایت به معادلهٔ $x^{۲}-x-۱=۰$ می‌رسیم. بنابراین

$$x^{۲}-x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴}}{۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

چون $x>۰$، پس $x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول است.

۶۷ گزینهٔ **۴** در مثلث بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود. پس در اینجا اگر $a=۴\sqrt{۲}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث باشد، آن‌گاه $h_a=۵$. پس

$$S=\frac{۱}{۲}a\times h_a=\frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲})(۵)=۱۰\sqrt{۲}$$

اکنون اگر $h_b=۴$ و $h_c=۳$، آن‌گاه

$$S=\frac{۱}{۲}b\times h_b\Rightarrow b=\frac{۲S}{h_b}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۴}=۵\sqrt{۲}$$

چون $h_c=۳$ کوچک‌ترین ارتفاع است، پس c بزرگ‌ترین ضلع است. در نتیجه ضلع متوسط $b=۵\sqrt{۲}$ است.

۶۸ **۴** تمام مثلث‌ها در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که ارتفاع رأس A بر آن‌ها وارد می‌شود، یعنی

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}+\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}-\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{BC}{CD}+\frac{CD}{EF}-\frac{CE}{BF}\qquad (۱)$$

از طرف دیگر از تناسب‌های $\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}=\frac{BC+CD+DE+EF}{۱+۲+۳+۳}$$

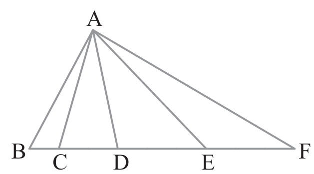
$$\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{CD+DE}{۲+۳}$$

بنابراین $\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}=\frac{BF}{۹}=\frac{CE}{۵}$. در نتیجه

$$\frac{BC}{CD}=\frac{۱}{۲},\quad \frac{CD}{EF}=\frac{۲}{۳},\quad \frac{CE}{BF}=\frac{۵}{۹}\qquad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}+\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}-\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۹}=\frac{۹+۱۲-۱۰}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$$



۶۹ **۲** دو مثلث OBP و ABO در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. پس $\frac{S_{ABO}}{S_{OBP}}=\frac{AO}{OP}$، یعنی $\frac{AO}{OP}=\frac{۶}{۲}=\frac{۳}{۱}$. در ضمن دو مثلث OMP و AMO در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{AMO}}{S_{OMP}}=\frac{AO}{OP}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{S_{AMO}}{۱}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow S_{AMO}=۳\qquad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث MPC و MBP در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{MBP}}{S_{MPC}}=\frac{BP}{PC}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{BP}{PC}$$

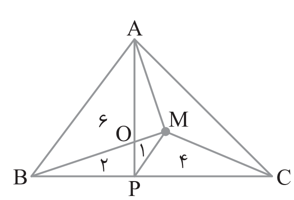
دو مثلث ABP و APC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. در نتیجه

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{S_{ABP}=۸}\frac{۸}{S_{APC}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{APC}=\frac{۳۲}{۳}$$

بنابراین

$$S_{APC}=\frac{۳۲}{۳}\Rightarrow ۳+۱+۴+S_{AMC}=\frac{۳۲}{۳}\Rightarrow S_{AMC}=\frac{۸}{۳}\qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $۳S_{AMC}-S_{AMO}=۸-۳=۵$.



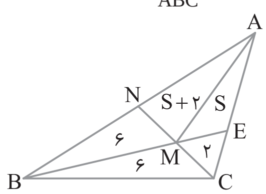
۷۰ **۴** می‌دانیم میانه، هر مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند و برعکس. چون دو مثلث BMN و BMC هم‌مساحت‌اند، پس M وسط ضلع NC است. در نتیجه در مثلث ANC پاره‌خط AM میانه است. بنابراین دو مثلث AMC و AMN هم‌مساحت‌اند. با فرض اینکه مساحت مثلث AME برابر S باشد، نتیجه می‌گیریم $S_{AMN}=S_{AMC}=S+۲$. در ضمن دو مثلث MEC و BMC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{MEC}}{S_{BMC}}=\frac{ME}{BM}\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{ME}{BM}\qquad (۱)$$

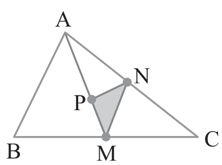
از طرف دیگر چون دو مثلث AME و ABM در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود $\frac{S_{AME}}{S_{ABM}}=\frac{ME}{BM}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$، بنابراین

$$\frac{۱}{۳}=\frac{S}{S+۲+۶}\Rightarrow ۳S=S+۸\Rightarrow S=۴$$

پس $S_{ABC}=۶+۶+۲+۴+۶=۲۴$.



۷۱ **۲** چون در دو مثلث ABM و ACM، قاعده‌های BM و CM با هم برابرند و ارتفاع نظیر رأس A در این دو مثلث مشترک است، پس



$$S_{ACM}=S_{ABM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

در نتیجه $S_{ACM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=۱۲$. با استدلالی مشابه می‌نویسیم:

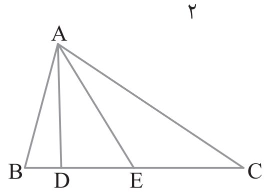
$$S_{MAN}=\frac{۱}{۲}S_{MAC}=\frac{۱}{۲}\times۱۲=۶$$

توجه کنید که چون $AP=۲PM$، پس $PM=\frac{۱}{۳}AM$ و در نتیجه چون مثلث‌های NMP و NAM در ارتفاع نظیر رأس N مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{NMP}}{S_{NAM}}=\frac{PM}{AM}\Rightarrow S_{NMP}=\frac{۱}{۳}S_{NAM}=\frac{۱}{۳}\times۶=۲$$

۷۲ **۲** مثلث‌های ADE، ACE و ABD در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع برابر هستند، یعنی $CE=۲DE=۳BD$. توجه کنید که از این برابری نتیجه می‌گیریم عددی مانند k وجود دارد که به ازای آن $CE=k$، $DE=\frac{k}{۲}$ و $BD=\frac{k}{۳}$. می‌نویسیم $BC=BD+DE+EC=\frac{k}{۳}+\frac{k}{۲}+k=\frac{۱۱k}{۶}$.

اکنون به‌دست می‌آید $\frac{BC}{DE}=\frac{\frac{۱۱k}{۶}}{\frac{k}{۲}}=\frac{۱۱}{۳}$.



۷۳ (۲) مثلث‌های BDE و BAE در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی $\frac{S_{BAE}}{S_{BDE}}=\frac{AE}{ED}=۳$. اکنون با ترکیب در صورت کردن این تناسب، نتیجه می‌شود

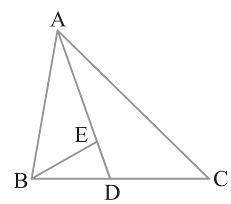
$$\frac{S_{BAE}+S_{BDE}}{S_{BDE}}=\frac{۳+۱}{۱}\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{۳}=۴$$

پس $S_{ABD}=۱۲$. در نتیجه، چون $S_{ABC}=۲۷$، پس

$$S_{ADC}=۲۷-۱۲=۱۵$$

از طرف دیگر مثلث‌های ABD و ADC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}$$

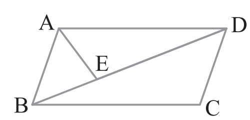


۷۴ (۲) فرض می‌کنیم $BE=x$، پس $ED=۲x$. دو مثلث AED و ABD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، بنابراین

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABD}}=\frac{DE}{BD}=\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است، بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$S_{AED}=\frac{۲}{۳}S_{ABD}=\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۲}S_{ABCD})=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$



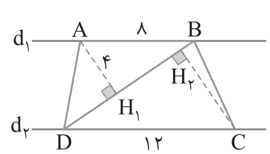
۷۵ (۱) طول ارتفاع نظیر رأس D در مثلث DAB با طول ارتفاع نظیر رأس B در مثلث BCD برابر است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت طول قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}}=\frac{AB}{DC}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، در این دو مثلث قاعدهٔ BD مشترک است (شکل زیر را ببینید). پس

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}}=\frac{AH_۱}{CH_۲}=\frac{۴}{CH_۲}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{۴}{CH_۲}=\frac{۲}{۳}$، پس $CH_۲=۶$.



۷۶ (۴) چون M وسط BC است، پس

$$S_{ABC}=۲S_{AMC}\qquad(۱)$$

D وسط AE است، پس $AE=۲DE$. چون بنابر فرض مسئله، $CE=۲DE$، پس $AE=CE$، یعنی E وسط AC است. در نتیجه

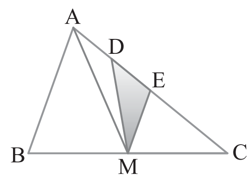
$$S_{AMC}=۲S_{AME}\qquad(۲)$$

چون D وسط AE است، پس

$$S_{AME}=۲S_{MDE}\qquad(۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S_{ABC}=۲S_{AMC}=۲(۲S_{AME})=۴(۲S_{MDE})=۸S_{MDE}=۸\times۳=۲۴$$

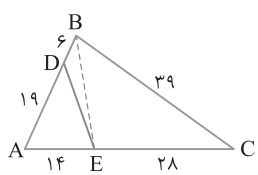


۷۷ (۲) توجه کنید که مطابق شکل زیر دو مثلث ADE و ABE در ارتفاع نظیر رأس E مشترک هستند. همچنین دو مثلث ABE و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}}=\frac{AD}{AB}=\frac{۱۹}{۲۵},\qquad\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱۴}{۴۲}=\frac{۱}{۳}$$

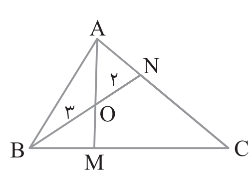
بنابراین، اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۱۹}{۷۵}$. اکنون اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}-S_{ADE}}=\frac{۱۹}{۷۵-۱۹}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}}=\frac{۱۹}{۵۶}$$



۷۸ (۴) مثلث‌های ABN و AOB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی $\frac{S_{ABN}}{S_{AOB}}=\frac{BN}{OB}=\frac{BO+ON}{OB}=\frac{۵}{۳}$. چون $S_{AOB}=۶$، پس $S_{ABN}=\frac{۵}{۳}S_{AOB}=\frac{۵}{۳}\times۶=۱۰$. از طرف دیگر دو مثلث BAN و BNC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، در نتیجه $\frac{S_{BNC}}{S_{BAN}}=\frac{NC}{AN}=۲$. پس $\frac{S_{BNC}}{۱۰}=۲$، یعنی $S_{BNC}=۲۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{ABC}=S_{ABN}+S_{BNC}=۱۰+۲۰=۳۰$$



۷۹ ۱ از M بـه رأس‌هـای B و D وصل می‌کنیم. فـرض می‌کنیم قطر BD قطـر AC را در O قطـع می‌کنـد. می‌دانیـم در متوازی‌الاضـلاع دو قطر منصـف یکدیگرنـد، پـس $OB=OD$. از طـرف دیگـر دو مثلث OMB و OMD در ارتفاع نظیر رأس M مشترک‌اند. بنابراین

$$\frac{S_{OMB}}{S_{OMD}}=\frac{OB}{OD}=۱\Rightarrow S_{OMB}=S_{OMD} \qquad (۱)$$

در ضمن، دو مثلث AOD و AOB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، بنابراین

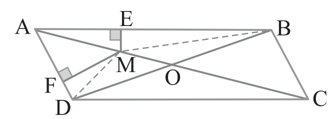
$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}}=\frac{OD}{OB}=۱\Rightarrow S_{AOB}=S_{AOD} \qquad (۲)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

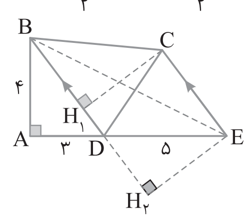
$$S_{AMB}=S_{AMD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}ME\times AB=\frac{۱}{۲}MF\times AD$$

بنابراین $\frac{ME}{MF}=\frac{AD}{AB}$ و چون $AB=۳BC$ و $BC=AD$، پس $\frac{AD}{AB}=\frac{۱}{۳}$.

در نتیجه $\frac{ME}{MF}=\frac{۱}{۳}$.



۸۰ ۳ نقطه‌هـای B و E را به هم وصل می‌کنیم (شـکل زیر را ببینید). چون $EC||BD$، پس ارتفاع‌های نظیر رأس‌های C و E در مثلث‌های CBD و EBD برابرنـد، یعنـی $CH_۱=EH_۲$. از طـرف دیگر BD قاعدهٔ مشـترک نظیـر ایـن دو ارتفـاع اسـت، پـس $S_{CBD}=S_{EBD}$. در نتیجـه $S_{ABD}+S_{CBD}=S_{ABD}+S_{EBD}$، یعنی $S_{ABCD}=S_{ABE}$. اکنـون می‌توان نوشت $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AB\times AE=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۸=۱۶$.



۸۱ ۱ با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

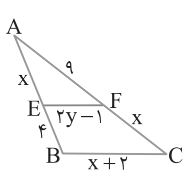
$$EF||BC\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}$$

بنابراین
$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{۹+x}\Rightarrow ۹x+x^{۲}=۹x+۳۶\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

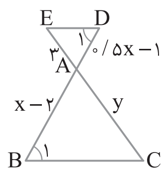
پس
$$\frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\Rightarrow \frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}$$

در نتیجه

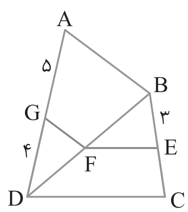
$$\frac{\text{محیط } AEF}{\text{محیط ذوزنقه}}=\frac{x+۹+۲y-۱}{۴+۲y-۱+x+x+۲}=\frac{x+۲y+۸}{۲x+۲y+۵}=\frac{۶+\frac{۵۸}{۱۰}+۸}{۱۲+\frac{۵۸}{۱۰}+۵}=\frac{۳۳}{۳۸}$$



۸۲ ۱ چون $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$، بنابر عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب، DE بـا BC مـوازی اسـت. اکنـون بنابـر قضیـهٔ تالـس، $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$، یعنـی $\frac{۳}{y}=\frac{۰/۵x-۱}{x-۲}$، پس $\frac{۳}{y}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $y=۶$.



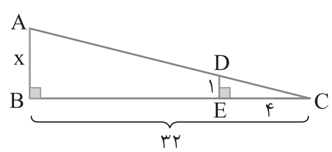
۸۳ ۲ در مثلـث DAB، چـون FG با BA موازی اسـت، بنابر قضیهٔ تالـس، $\frac{DG}{GA}=\frac{DF}{FB}$. از طـرف دیگـر در مثلـث BCD، EF بـا CD موازی اسـت، پس $\frac{DF}{FB}=\frac{CE}{EB}$. با مقایسهٔ دو تناسب به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $\frac{DG}{GA}=\frac{CE}{EB}$، یعنی $\frac{۴}{۵}=\frac{CE}{۳}$، بنابراین $CE=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$.



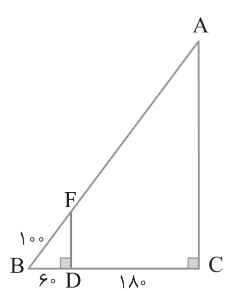
۸۴ ۲ اگر درخت را با یک پاره‌خط نشـان دهیم، شکل مسئله به‌صورت زیر است. چون $AB||DE$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{CE}{CB}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow \frac{۴}{۳۲}=\frac{۱}{x}$$

پس x که همان طول درخت است برابر ۸ متر است.



۸۵ ۳ شکل زیر را در نظر می‌گیریم. چون FD و AC بر BC عمودند، پـس بـا هـم موازی‌انـد. در نتیجـه بنابـر قضیـهٔ تالـس، $\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{BA}$، یعنی $\frac{۶۰}{۲۴۰}=\frac{۱۰۰}{AB}$، پس $AB=۴۰۰$.



۸۶ (۱) در مثلث ABC، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶$$

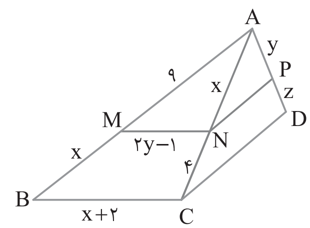
پس $x=۶$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$$

پس $y=\frac{۲۹}{۱۰}$. در مثلث ACD، بنابر قضیهٔ تالس،

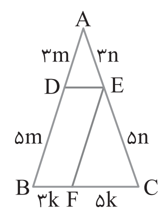
$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PD}\Rightarrow\frac{۶}{۴}=\frac{\frac{۲۹}{۱۰}}{z}$$

در نتیجه $z=\frac{۲۹}{۱۵}$. در نهایت $\frac{x+۱۰y}{۱۵z}=\frac{۶+۲۹}{۲۹}=\frac{۳۵}{۲۹}$.



۸۷ (۱) چون $DE||BC$، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۵}$. بنابراین عددهایی حقیقی مانند m و n وجود دارند به طوری که

$$AD=۳m\,,\quad DB=۵m$$
$$AE=۳n\,,\quad EC=۵n$$



از طرف دیگر چون $EF||AB$، بنابر قضیهٔ تالس $\frac{CF}{FB}=\frac{CE}{EA}=\frac{۵}{۳}$. پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد به طوری که $CF=۵k$ و $FB=۳k$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{AC}{CE}+\frac{BF}{FC}=\frac{۸n}{۵n}+\frac{۳k}{۵k}=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲$$

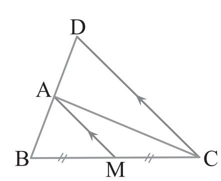
۸۸ (۲) شکل سؤال را به صورت زیر رسم می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$AM||DC\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{BA}{BD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BA}{BD}\qquad(۱)$$

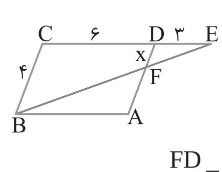
از طرف دیگر در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است، پس مساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC است. در ضمن دو مثلث ABC و BDC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}}=\frac{AB}{BD}\xrightarrow{\text{از (۱)}}\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{۲S_{ABM}=S_{ABC}}\frac{۲S_{ABM}}{S_{BDC}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\frac{S_{BDC}}{S_{ABM}}=۴$.

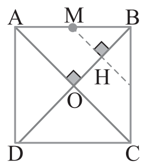


۸۹ (۳) چون ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس ضلع‌های مقابل در آن موازی و برابرند. در نتیجه بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث EBC،



$$\frac{FD}{BC}=\frac{DE}{CE}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۳}{۹}\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

۹۰ (۲) در مربع ABCD نقطهٔ M وسط ضلع AB است. طول عمود MH مورد نظر این سؤال است. قطر AC را رسم می‌کنیم. در مربع قطرها بر هم عمودند. پس $MH||AO$. بنابراین چون M وسط AB است، MH میان‌خط مثلث BAO است. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط،



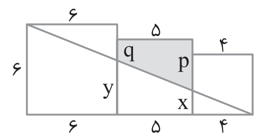
$$MH=\frac{OA}{۲}\xrightarrow{OA=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۸\sqrt{۲}=۸}MH=\frac{۸}{۲}=۴$$

۹۱ (۲) قسمت رنگی یک ذوزنقه به ارتفاع ۵ است. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{x}{۶}=\frac{۴}{۱۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}\Rightarrow p=۵-\frac{۸}{۵}=\frac{۱۷}{۵}$$

$$\frac{y}{۶}=\frac{۹}{۱۵}\Rightarrow y=\frac{۱۸}{۵}\Rightarrow q=۵-\frac{۱۸}{۵}=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی $=\frac{۱}{۲}\times۵(\frac{۱۷}{۵}+\frac{۷}{۵})=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$.



۹۲ (۳) بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

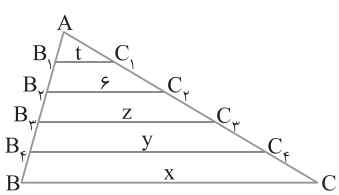
$$\frac{B_۲C_۲}{BC}=\frac{AB_۲}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=۱۵$$

به همین صورت به‌دست می‌آید

$$\frac{t}{x}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{x=۱۵}t=۳$$

$$\frac{z}{۱۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow z=۹,\qquad\frac{y}{۱۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow y=۱۲$$

اکنون به‌دست می‌آید $x-y+z-t=۱۵-۱۲+۹-۳=۹$.



۹۳ (۲) **راه‌حل اول** با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle BEF:AD||EF\Rightarrow\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BF}\qquad(۱)$$

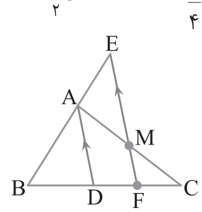
اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle ADC:MF||AD\Rightarrow\frac{AC}{AM}=\frac{CD}{DF}\xrightarrow{AC=۲AM}۲=\frac{CD}{DF}$$

$$DF=\frac{CD}{۲}\qquad(۲)$$

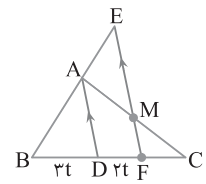
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BD+DF}\xrightarrow[DF=\frac{۱}{۲}CD]{BD=\frac{۳}{۴}CD}\frac{AD}{EF}=\frac{\frac{۳}{۴}CD}{\frac{۳}{۴}CD+\frac{۱}{۲}CD}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$



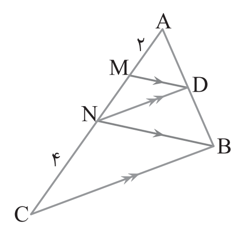
راه‌حل دوم چون $MF||AD$ و M وسط AC است، پس پاره‌خط MF میان‌خط مثلث CAD و در نتیجه F وسط DC است، یعنی $DF=\frac{DC}{2}$. از طرف دیگر بنابر فرض $\frac{BD}{CD}=\frac{3}{4}$. بنابراین عددی مانند t وجود دارد به‌طوری که $BD=3t$ و $CD=4t$. بنابراین $DF=\frac{DC}{2}=2t$. اکنون توجه کنید که چون $AD||EF$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BEF،

$$\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BF}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}$$



۹۴ (۱) دو بار از قضیهٔ تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

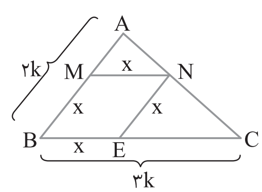
$$\triangle ANB: DM||BN \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{AD}{DB}$$
$$\triangle ABC: DN||BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DB}$$
$$\frac{AM}{MN}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow \frac{2}{MN}=\frac{2+MN}{4}\Rightarrow MN^2+2MN-8=0$$
$$(MN+4)(MN-2)=0\Rightarrow MN=2$$



۹۵ (۲) در شکل روبه‌رو در مثلث ABC، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{2k-x}{2k}=\frac{x}{3k}$$

با ساده کردن تناسب بالا به‌دست می‌آید $\frac{x}{k}=\frac{6}{5}$. اکنون می‌نویسیم

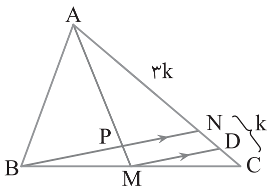


$$\frac{\text{ضلع لوزی}}{BC}=\frac{x}{3k}=\frac{1}{3}\times\frac{x}{k}=\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$$

۹۶ (۴) از نقطهٔ M خطی موازی BN رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند (شکل را ببینید). چون $\frac{AN}{NC}=3$ ، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $NC=k$ و $AN=3k$. از طرف دیگر در مثلث CBN، چون MD با BN موازی است، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{CD}{DN}=\frac{CM}{MB}=1\Rightarrow CD=DN$$

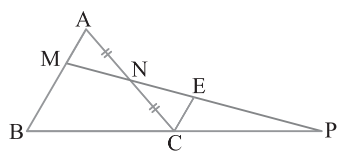
پس D وسط CN است و $ND=\frac{1}{2}NC=\frac{k}{2}$. در مثلث AMD، چون PN با MD موازی است، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AP}{PM}=\frac{AN}{ND}=\frac{3k}{\frac{k}{2}}=6$.



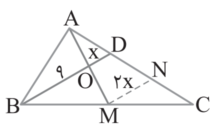
۹۷ (۲) از رأس C خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا پاره‌خط MP را در E قطع کند. در این صورت دو مثلث AMN و CEN به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند، پس $CE=AM$. در نتیجه $CE=\frac{1}{3}AB$ ، یعنی $\frac{CE}{AB}=\frac{1}{3}$. با تفضیل در مخرج کردن این تناسب به تساوی $\frac{CE}{BM}=\frac{1}{2}$ می‌رسیم. اکنون از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم

$$\triangle BMP: CE||MB\Rightarrow\frac{CP}{BP}=\frac{CE}{BM}=\frac{1}{2}\Rightarrow CP=\frac{1}{2}BP\Rightarrow CP=BC$$

پس نسبت خواسته شده برابر با یک است.



۹۸ (۲) با توجه به فرض‌های مسئله، شکل مقابل رسم شده است که در آن از نقطهٔ M خطی موازی BD رسم کرده‌ایم و محل برخورد آن با AC را N نامیده‌ایم. در مثلث AMN، $OD||MN$ و O وسط AM است، پس OD در این مثلث میان‌خط است، در نتیجه



$$OD=\frac{MN}{2}\xrightarrow{OD=x}MN=2x \qquad (1)$$

از طرف دیگر در مثلث CDB، $MN||BD$ و M وسط BC است، پس در این مثلث MN میان‌خط است. در نتیجه

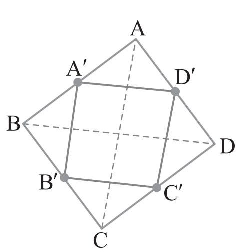
$$MN=\frac{BD}{2}\xrightarrow{(1)}BD=2MN=2(2x)=4x\Rightarrow 9+x=4x$$
$$9=3x\Rightarrow x=3$$

۹۹ (۱) از قضیهٔ میان‌خط به ترتیب در مثلث‌های CBD، ABD، ABC و ADC نتیجه می‌گیریم

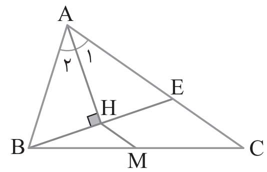
$$A'D'=\frac{BD}{2}\ ,\quad B'C'=\frac{BD}{2}\ ,\quad A'B'=\frac{AC}{2}\ ,\quad D'C'=\frac{AC}{2}$$

بنابراین

$$\text{محیط } A'B'C'D'=A'D'+B'C'+A'B'+D'C'$$
$$=\frac{BD}{2}+\frac{BD}{2}+\frac{AC}{2}+\frac{AC}{2}=BD+AC=a+a=2a$$



۱۰۰ **۲** عمود BH را امتداد می‌دهیم تا AC را در E قطع کند. در این صورت مثلث ABE متساوی‌الساقین است زیرا ارتفاع AH در این مثلث نیمساز نیز هست، پس $AB=AE$. از طرف دیگر AH میانه نیز هست، پس H وسط BE قرار دارد. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط، MH مساوی نصف EC است: $MH=\frac{EC}{۲}=\frac{AC-AE}{۲}=\frac{AC-AB}{۲}$. در ضمن $MH=\frac{۱}{۳}AB$. بنابراین



$$\frac{۱}{۳}AB=\frac{AC-AB}{۲}\Rightarrow ۲AB=۳AC-۳AB\Rightarrow ۵AB=۳AC$$

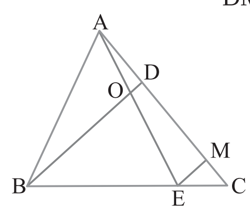
پس نسبت $\frac{AC}{AB}$ برابر $\frac{۵}{۳}$ است.

۱۰۱ **۱** از E خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا AC را در M قطع کند. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle BDC: ME||BD\Rightarrow\frac{CE}{BE}=\frac{CM}{DM}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{CM}{DM}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{DC}{DM}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۳}{۴}\qquad(۱)$$

$$\triangle AME: OD||ME\Rightarrow\frac{AD}{DM}=\frac{AO}{OE}\qquad(۲)$$



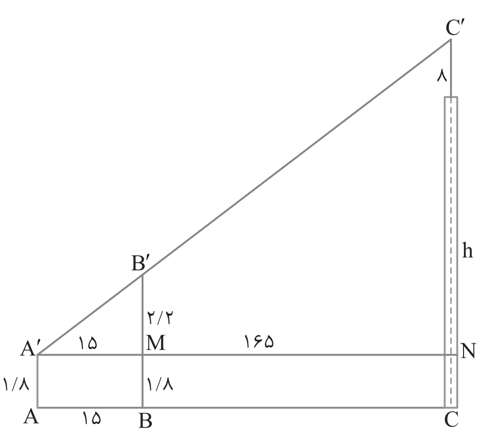
از طرف دیگر بنابر فرض،

$$\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AD}{DC}=\frac{۱}{۲}\qquad(۳)$$

از تقسیم تساوی (۳) بر (۱) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\frac{AD}{DC}}{\frac{DM}{DC}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow\frac{AD}{DM}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{از (۲)}}\frac{AO}{OE}=\frac{AD}{DM}=\frac{۲}{۳}$$

۱۰۲ **۲** در شکل از A' خطی موازی AC (سطح زمین) رسم کرده‌ایم و محل‌های برخورد آن با BB' و CC' را به ترتیب M و N نامیده‌ایم. توجه کنید که $C'N=۸+h-۱/۸=۶/۲+h$. اکنون در مثلث $A'C'N$، چون $B'M$ با $C'N$ موازی است، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{B'M}{C'N}=\frac{A'M}{A'N}$، یعنی $\frac{۲/۲}{۶/۲+h}=\frac{۱۵}{۱۸۰}=\frac{۱}{۱۲}$، پس $۶/۲+h=۲۶/۴$، در نتیجه $h=۲۰/۲$.



۱۰۳ **۳** با استفاده از قضیهٔ میان‌خط در مثلث،

$$\triangle ABC:\left.\begin{array}{l}M\ \text{وسط}\ AB\\ N\ \text{وسط}\ BC\end{array}\right\}\Rightarrow MN=\frac{AC}{۲}\qquad(۱)$$

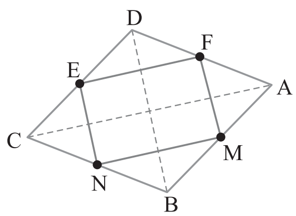
$$\triangle ADC:\left.\begin{array}{l}F\ \text{وسط}\ AD\\ E\ \text{وسط}\ DC\end{array}\right\}\Rightarrow EF=\frac{AC}{۲}\qquad(۲)$$

$$\triangle ABD:\left.\begin{array}{l}M\ \text{وسط}\ AB\\ F\ \text{وسط}\ AD\end{array}\right\}\Rightarrow MF=\frac{DB}{۲}\qquad(۳)$$

$$\triangle BDC:\left.\begin{array}{l}N\ \text{وسط}\ BC\\ E\ \text{وسط}\ DC\end{array}\right\}\Rightarrow NE=\frac{BD}{۲}\qquad(۴)$$

از طرف دیگر بنابر فرض، $۲AC=۳BD=۲۴$. پس $AC=۱۲$ و $BD=۸$. اکنون از جمع تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$\text{محیط}(MNEF)=MN+EF+MF+NE=AC+BD=۱۲+۸=۲۰$$

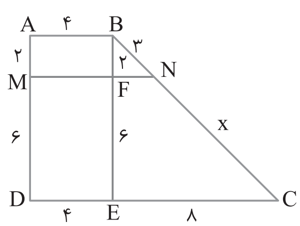


۱۰۴ **۴** از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در F و E قطع کند. چهارضلعی‌های $ABFM$ و $MFED$ متوازی‌الاضلاع هستند. پس $BF=AM=۲$، $FE=MD=۶$، $AB=MF=DE=۴$ و چون $DC=۱۲$، پس $EC=۸$. اکنون بنابر قضیهٔ تالس و تعمیم آن،

$$\triangle BEC: NF||EC\Rightarrow\frac{BF}{FE}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{x}\Rightarrow x=۹$$

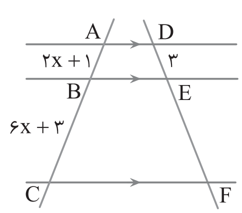
$$\triangle BEC: NF||EC\Rightarrow\frac{FN}{EC}=\frac{BF}{BE}\Rightarrow\frac{FN}{۸}=\frac{۲}{۸}\Rightarrow FN=۲$$

بنابراین $x+y=NC+MF+FN=۹+۴+۲=۱۵$.

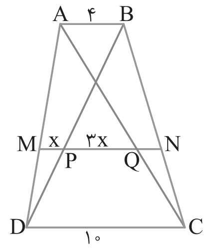


۱۰۵ **۳** طبق قضیهٔ تالس برای خطوط موازی، $\frac{۳}{EF}=\frac{۲x+۱}{۶x+۳}$. پس $\frac{۳}{EF}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $EF=۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$DF=DE+EF=۳+۹=۱۲$$



۱۰۶ (۲) در شکل روبه‌رو بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،



$$\triangle DAB: MP||AB \Rightarrow \frac{DM}{AD}=\frac{x}{۴} \quad (۱)$$

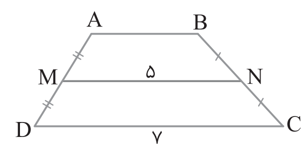
$$\triangle ADC: MQ||DC \Rightarrow \frac{AM}{AD}=\frac{۴x}{۱۰} \quad (۲)$$

از تقسیم تناسب‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{DM}{AD}}{\frac{AM}{AD}}=\frac{\frac{x}{۴}}{\frac{۴x}{۱۰}} \Rightarrow \frac{DM}{AM}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{AM}{DM}=\frac{۸}{۵}$$

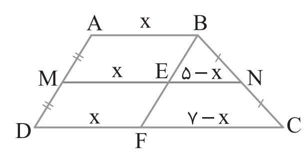
۱۰۷ (۲) **راه‌حل اول** بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، اگر M و N وسط‌های دو ساق ذوزنقه باشند، آن‌گاه $MN=\frac{AB+DC}{۲}$. پس

$$۵=\frac{AB+۷}{۲}\Rightarrow AB=۳$$



راه‌حل دوم از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کند. چهارضلعی‌های ABEM و MEFD متوازی‌الاضلاع هستند، در نتیجه اندازهٔ اضلاع مانند شکل زیر است. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث BFC،

$$۵-x=\frac{۷-x}{۲}\Rightarrow ۱۰-۲x=۷-x\Rightarrow x=۳$$



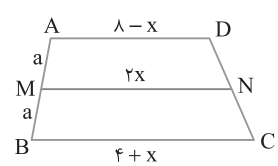
۱۰۸ (۲) از قضیهٔ تالس در ذوزنقه استفاده می‌کنیم

$$\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}\Rightarrow\frac{a}{a}=\frac{DN}{NC}$$

پس N وسط DC قرار دارد. بنابراین طبق قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، طول پاره‌خط MN مساوی نصف مجموع دو قاعده است

$$MN=\frac{AD+BC}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{۸-x+۴+x}{۲}\Rightarrow ۴x=۱۲\Rightarrow x=۳$$

پس حاصل ضرب اندازهٔ دو قاعده برابر است با $(۸-x)(۴+x)=(۵)(۷)=۳۵$.



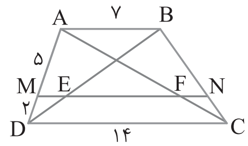
۱۰۹ (۳) از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم

$$\triangle ADC: MF||DC \Rightarrow \frac{MF}{DC}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow\frac{MF}{۱۴}=\frac{۵}{۷}\Rightarrow MF=۱۰ \quad (۱)$$

$$\triangle ABD: ME||AB \Rightarrow \frac{ME}{AB}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow\frac{ME}{۷}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow ME=۲ \quad (۲)$$

از تفریق تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$MF-ME=۱۰-۲\Rightarrow EF=۸$$



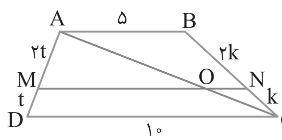
۱۱۰ (۳) بنابر عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه، از تناسب $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۲$ نتیجه می‌گیریم MN موازی با قاعده‌های ذوزنقه است. از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در O قطع کند. از فرض $\frac{AM}{MD}=\frac{۲}{۱}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{AM}{AD}=\frac{۲}{۳}$ و از تناسب $\frac{BN}{NC}=\frac{۲}{۱}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{BC}{NC}=\frac{۳}{۱}$. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle ADC: OM||DC\Rightarrow\frac{OM}{DC}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow\frac{OM}{۱۰}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow OM=\frac{۲۰}{۳} \quad (۱)$$

$$\triangle ABC: ON||AB\Rightarrow\frac{CN}{BC}=\frac{ON}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{ON}{۵}\Rightarrow ON=\frac{۵}{۳} \quad (۲)$$

با جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$OM+ON=\frac{۲۵}{۳}\Rightarrow MN=\frac{۲۵}{۳}$$



۱۱۱ (۳) فرض می‌کنیم زاویه‌های داخلی مثلثی که با اعداد ۱، ۱ و ۲ متناسب‌اند، به صورت x، x و ۲x باشند. پس

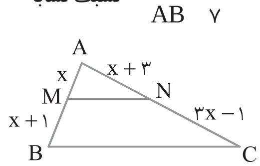
$$x+x+۲x=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۴x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۴۵^\circ$$

بنابراین زاویه‌های این مثلث ۴۵°، ۴۵° و ۹۰° هستند، یعنی این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در بین گزینه‌ها فقط مثلث با اضلاع ۱، ۱ و $\sqrt{۲}$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس این مثلث با مثلث به اضلاع داده شده در گزینهٔ (۳) متشابه است.

۱۱۲ (۲) چون MN با BC موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر نسبت اندازه‌های ضلع‌های نظیر است. ابتدا باید مقدار x را به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، یعنی $\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۳}{۳x-۱}$. بنابراین $x(۳x-۱)=(x+۱)(x+۳)$، پس $۲x^۲-۵x-۳=۰$. دو مقدار برای x به‌دست می‌آید: $x=\frac{-۱}{۲}$ و $x=۳$.

چون طول پاره‌خط NC برابر $۳x-۱$ است و باید مثبت باشد، پس $x>\frac{۱}{۳}$. در نتیجه $x=۳$. اکنون می‌توان نوشت

$$\text{نسبت تشابه}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۷}$$



۱۱۳ (۳) چون AB با DE موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث ABC و EDC متشابه‌اند. بنابراین $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}$، یعنی $\frac{y}{۱۶}=\frac{۴}{x}=\frac{۶}{۱۵}$. پس $x=۱۰$ و $y=۶/۴$. اکنون می‌توان نوشت $x-y=۱۰-۶/۴=۳/۶$.

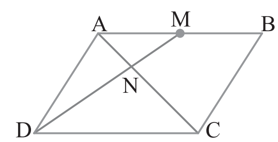
۱۱۴ ۳ چون AB با CD موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه هستند. بنابراین $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{DC}$، یعنی $\frac{OA}{OC}=\frac{۱}{۳}$. از طرف دیگر، دو مثلث BAO و BOC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، یعنی $\frac{S_{BAO}}{S_{BOC}}=\frac{AO}{OC}$. بنابراین $\frac{S_{BAO}}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$. پس $S_{BAO}=۴$.

۱۱۵ ۱ چون $DC||AM$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث DNC و MNA متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{DC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AC}{NC}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{NC}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

از طرف دیگر دو مثلث DNC و ADC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{DNC}}{S_{ADC}}=\frac{NC}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{DNC}=\frac{۲}{۳}S_{ADC}=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\right)=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

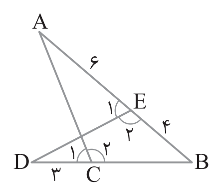


۱۱۶ ۳ دو مثلث ABC و DBE متشابه‌اند، زیرا با توجه به شکل زیر

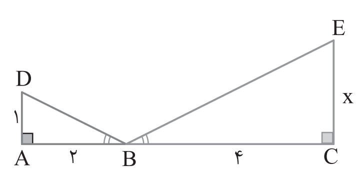
$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_۱=\hat{C}_۱\Rightarrow\hat{E}_۲=\hat{C}_۲\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{(ز ز)}\triangle ABC\sim\triangle DBE$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow\frac{BC}{۴}=\frac{۱۰}{BC+۳}\Rightarrow BC^۲+۳BC-۴۰=۰$$

$$(BC+۸)(BC-۵)=۰\Rightarrow BC=۵$$

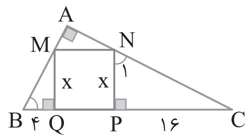


۱۱۷ ۱ می‌دانیم در آینه زاویهٔ بازتاب با زاویهٔ تابش برابر است، پس $D\hat{B}A=E\hat{B}C$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD و BCE متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{CE}{AD}=\frac{CB}{AB}$، یعنی $\frac{x}{۱}=\frac{۴}{۲}$. پس $x=۲$.



۱۱۸ ۴ مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. از طرف دیگر در مثلث CPN، $\hat{N}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{N}_۱=\hat{B}$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ NPC و BQM متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{BQ}{NP}=\frac{QM}{PC}\Rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x}{۱۶}\Rightarrow x=۸$$



۱۱۹ ۱ مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BAH متشابه‌اند (ز ز). پس

$$\frac{CH}{AH}=\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{AB}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

در نتیجه

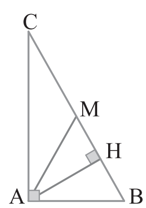
$$\left.\begin{array}{l}\frac{CH}{AH}=\sqrt{۳}\\ \frac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم}}\frac{CH}{BH}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{CH}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow CH=\frac{۳}{۴}BC$$

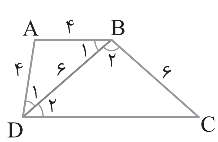
$$\xrightarrow{CM=\frac{BC}{۲}}MH=\frac{۳}{۴}BC-\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۴}BC$$

بنابراین

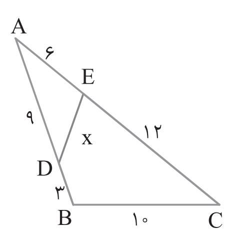
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BC}{\frac{۱}{۲}AH\times MH}=\frac{BC}{MH}=\frac{BC}{\frac{۱}{۴}BC}=۴$$



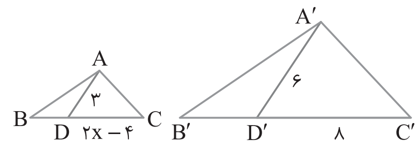
۱۲۰ ۴ مثلث‌های ADB و BDC متساوی‌الساقین هستند، پس $\hat{D}_۲=\hat{C}$ و $\hat{D}_۱=\hat{B}_۱$. از طرف دیگر $AB||DC$ و BD مورب است، در نتیجه $\hat{B}_۱=\hat{D}_۲$. از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود $\hat{B}_۱=\hat{C}=\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$. پس دو مثلث ABD و BCD متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{DC}{BD}=\frac{BD}{AD}$، یعنی $\frac{DC}{۶}=\frac{۶}{۴}$. پس $DC=۹$. اکنون می‌توان نوشت $\frac{DC}{AB}=\frac{۹}{۴}$.



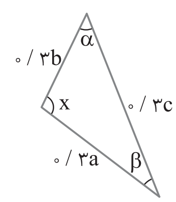
۱۲۱ ۴ با توجه به اندازه‌های مشخص شده روی شکل، $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض ز ض)، متشابه‌اند. بنابراین $\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}$. یعنی $\frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$، پس $x=۵$.



۱۲۲ **۴** با ترکیب در صورت تناسب $\frac{BD}{DC}=\frac{B'D'}{D'C'}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $\frac{BC}{DC}=\frac{B'C'}{D'C'}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $BC=\frac{۳}{۲}DC$ و $B'C'=\frac{۳}{۲}D'C'$. از طرف دیگر چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، پس $\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{\frac{۳}{۲}DC}{\frac{۳}{۲}D'C'}=\frac{DC}{D'C'}$ و چون $\hat{C}=\hat{C}'$، پس دو مثلث CAD و $C'A'D'$ هم متشابه‌اند (ض ز ض). در نتیجه $\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'}$، یعنی $\frac{۳}{۶}=\frac{۲x-۴}{۸}$، پس $۲x-۴=۴$ و در نتیجه $x=۴$.

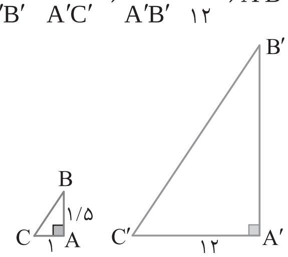


۱۲۳ **۳** اضلاع دو مثلث متناسب‌اند، زیرا $\frac{۰/۳b}{b}=\frac{۰/۳a}{a}=\frac{۰/۳c}{c}$، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض ض ض). در نتیجه زاویه‌های نظیر این دو مثلث مساوی‌اند. پس $\alpha=۴۷^\circ,\ \beta=۳۱^\circ\Rightarrow x=۱۸۰^\circ-(۴۷^\circ+۳۱^\circ)=۱۰۲^\circ$



۱۲۴ **۳** چون ضلع‌های دو مثلث موازی هستند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین مطابق شکل‌های زیر،

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow\frac{۱/۵}{A'B'}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow A'B'=۱۸$$



۱۲۵ **۲** دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند، زیرا

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}_۱=\hat{A}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle ABC\sim\triangle BDC\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}$$

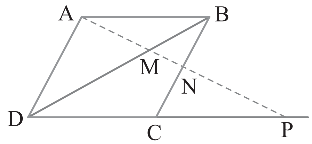
$$BC^۲=AC\times CD$$

پس BC واسطهٔ هندسی بین AC و CD است.

۱۲۶ **۴** چون BN و AD موازی‌اند، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث MBN و MDA متشابه‌اند. بنابراین $\frac{MB}{MD}=\frac{MN}{MA}$ (۱)

از موازی بودن AB و DP هم نتیجه می‌شود دو مثلث MAB و MPD متشابه‌اند و $\frac{MB}{MD}=\frac{MA}{MP}$ (۲)

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{MA}{MP}=\frac{MN}{MA}$، پس $MN\times MP=MA^۲$.



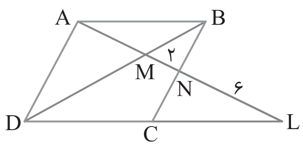
۱۲۷ **۱** از قضیهٔ اساسی تشابه نتیجه می‌شود که

$$AB||DL\Rightarrow\triangle MBA\sim\triangle MDL\Rightarrow\frac{AM}{ML}=\frac{MB}{MD}\quad(۱)$$

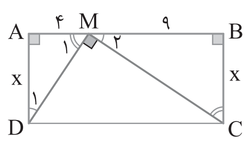
$$AD||BN\Rightarrow\triangle MAD\sim\triangle MNB\Rightarrow\frac{MB}{MD}=\frac{MN}{AM}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AM}{ML}=\frac{MN}{AM}\Rightarrow\frac{AM}{۸}=\frac{۲}{AM}\Rightarrow AM^۲=۱۶\Rightarrow AM=۴$$



۱۲۸ **۲** در مثلث AMD، $\hat{M}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ$. از طرف دیگر، $\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ$. پس $\hat{M}_۲=\hat{D}_۱$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD و BCM متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AD}{BM}=\frac{AM}{BC}$، یعنی $\frac{x}{۹}=\frac{۴}{x}$، پس $x=۶$.

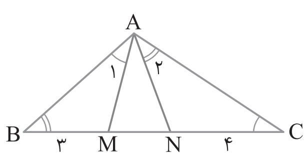


۱۲۹ **۳** دو مثلث BMA و ANC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AM}{NC}=\frac{BM}{AN}\quad(۱)$$

از طرف دیگر $A\hat{M}N=\hat{A}_۱+\hat{B}=\hat{C}+\hat{A}_۲=A\hat{N}M$. پس مثلث AMN متساوی‌الساقین است و $AM=AN$. اکنون با توجه به تساوی (۱)،

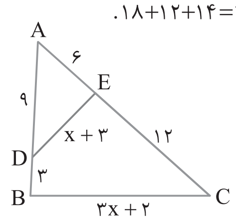
$$AM^۲=BM\times NC=۳\times۴\Rightarrow AM=۲\sqrt{۳}$$



۱۳۰ **۳** با توجه به اندازه‌های روی شکل $\frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$. از طرف دیگر زاویهٔ بین این ضلع‌های متناسب زاویهٔ A است. پس دو مثلث AED و ABC متشابه‌اند (ض ز ض)، در نتیجه ضلع‌های نظیرشان متناسب‌اند:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x+۳}{۳x+۲}\Rightarrow x=۴$$

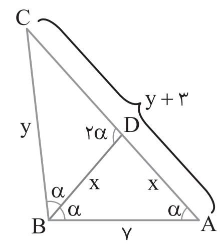
بنابراین ضلع‌های مثلث ABC برابر ۱۸، ۱۲ و ۱۴ هستند، پس محیط این مثلث برابر است با $۱۸+۱۲+۱۴=۴۴$.



۱۳۱ (۴) با توجه به فرض مسئله مثلث ABC را رسم می‌کنیم و محل برخورد نیمساز زاویهٔ B با ضلع AC را D می‌نامیم. در این صورت $C\hat{B}D=\hat{A}$ و $\hat{C}=\hat{C}$. در نتیجه دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}$، یعنی $\frac{x}{۷}=\frac{y+۳-x}{y}=\frac{y}{y+۳}$. اکنون با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

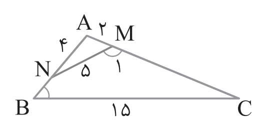
$$\frac{x+y+۳-x}{۷+y}=\frac{y}{y+۳}\Rightarrow\frac{y+۳}{۷+y}=\frac{y}{y+۳}$$

$$y^۲+۶y+۹=۷y+y^۲\Rightarrow y=۹\Rightarrow BC=۹$$



۱۳۲ (۴) با توجه به شکل $A\hat{M}N+\hat{M}_۱=۱۸۰^\circ$. همچنین بنابر فرض مسئله، $\hat{B}+\hat{M}_۱=۱۸۰^\circ$. پس $A\hat{M}N=\hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$، یعنی $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۴}{CM+۲}=\frac{۲}{۴+NB}$، پس $NB=۲$ و $CM=۱۰$. اکنون می‌توان نوشت

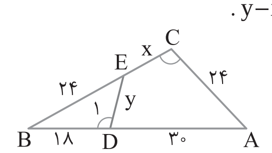
$$(BCMN)\text{محیط}=BC+CM+MN+NB=۱۵+۱۰+۵+۲=۳۲$$



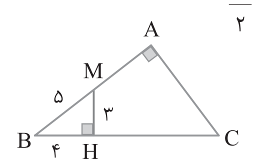
۱۳۳ (۲) چون $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{D}_۱=\hat{C}$، پس دو مثلث BDE و BCA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{ED}{CA}=\frac{BE}{BA}=\frac{BD}{BC}$. پس $\frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}=\frac{۱۸}{۲۴+x}$. در نتیجه

$$\frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲,\qquad \frac{۱}{۲}=\frac{۱۸}{۲۴+x}\Rightarrow x=۱۲$$

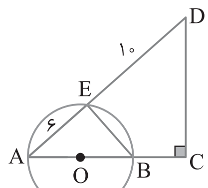
پس $y-x=۱۲-۱۲=۰$.



۱۳۴ (۱) چون $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}$، پس دو مثلث BHM و BAC متشابه هستند (ز ز). بنابراین $\frac{BC}{BM}=\frac{AB}{BH}$، یعنی $\frac{BC}{۵}=\frac{۱۰}{۴}$، پس $BC=\frac{۲۵}{۲}$. با توجه به شکل، $CH=BC-BH=\frac{۲۵}{۲}-۴=\frac{۱۷}{۲}$. اکنون می‌توان نوشت $\frac{MH}{CH}=\frac{۳}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{۶}{۱۷}$.

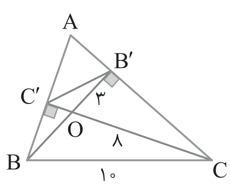


۱۳۵ (۲) زاویهٔ AEB روبه‌رو به قطر AB است، پس $A\hat{E}B=۹۰^\circ$. از طرف دیگر $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB و ACD متشابه‌اند (ز ز) و در نتیجه $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$. اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، $AC=AB+BC=۲R+R=۳R$. پس $\frac{۲R}{AD}=\frac{AE}{۳R}$. در نتیجه $AE\times AD=۶R^۲$، یعنی $۶R^۲=۶\times۱۶$، پس $R=۴$.



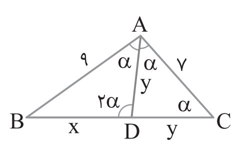
۱۳۶ (۲) با توجه به درسنامه، دو مثلث $AH_۱H_۲$ و ABC با یکدیگر متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AH_۱}{AB}=\frac{H_۱H_۲}{BC}$. پس $\frac{H_۱H_۲}{۸}=\frac{۹}{۱۲}$ و در نتیجه $H_۱H_۲=۶$.

۱۳۷ (۴) چون $B\hat{O}C'=C\hat{O}B'$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OC'B$ و $OB'C$ متشابه‌اند (ز ز)، یعنی $\frac{OC'}{OB'}=\frac{OB}{OC}$، یعنی $\frac{OC'}{OB}=\frac{OB'}{OC}$. همچنین $B'\hat{O}C'=B\hat{O}C$، پس دو مثلث $OB'C'$ و OCB متشابه‌اند (ض ز ض). بنابراین $\frac{OB'}{OC}=\frac{B'C'}{BC}$، یعنی $\frac{۳}{۸}=\frac{B'C'}{۱۰}$ و در نتیجه $B'C'=\frac{۳۰}{۸}=۳/۷۵$.



۱۳۸ (۱) در شکل AD نیمساز زاویهٔ A است. چون $B\hat{A}D=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{B}$، پس دو مثلث BAD و BCA متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}$، یعنی $\frac{۹}{x+y}=\frac{x}{۹}=\frac{y}{۷}$. حال با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{۹}{x+y}=\frac{x+y}{۹+۷}\Rightarrow(x+y)^۲=۹\times۱۶\Rightarrow x+y=۳\times۴\Rightarrow BC=۱۲$$

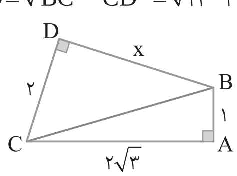


۱۳۹ (۲) با توجه به فرض‌های مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۱+۱۲}=\sqrt{۱۳}$$

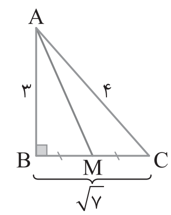
اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغوس در مثلث BCD،

$$BD=\sqrt{BC^۲-CD^۲}=\sqrt{۱۳-۴}=۳$$



۱۴۰ (۲) بنـا بر عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلث ABC قائم‌الزاویه اسـت، زیـرا $۳^۲+(\sqrt{۷})^۲=۴^۲$، یعنی $AC^۲=AB^۲+BC^۲$. در هـر مثلث میانهٔ وارد بر کوچک‌ترین ضلع بزرگ‌ترین میانه است. در اینجا باید طول میانهٔ AM را به‌دست آوریم. در مثلث ABM، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AM^۲=AB^۲+BM^۲=۳^۲+\left(\frac{\sqrt{۷}}{۲}\right)^۲=۹+\frac{۷}{۴}=\frac{۴۳}{۴}\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{۴۳}}{۲}$$



۱۴۱ (۴) از E خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در F قطع کند. چون $AE=۲AC$، پس C وسـط AE اسـت. بنابراین در مثلث AFE، پاره‌خط DC میان‌خط است. در نتیجه

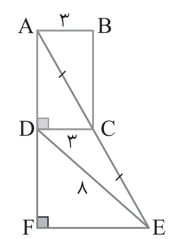
$$DC=\frac{۱}{۲}FE\Rightarrow FE=۲DC=۲\times۳=۶$$

در مثلث DEF، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$DF=\sqrt{DE^۲-EF^۲}=\sqrt{۶۴-۳۶}=۲\sqrt{۷}$$

از طرف دیگر $AD=DF$، پس

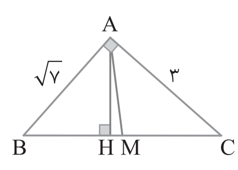
$$AD=۲\sqrt{۷},\quad S_{ABCD}=AD\times AB=۲\sqrt{۷}\times۳=۶\sqrt{۷}$$



۱۴۲ (۱) در شـکل، AH و AM بـه ترتیـب ارتفـاع و میانـهٔ وارد بر وتر هستند. باید طول MH را پیدا کنیم. در مثلث ABC، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۷+۹}=۴$$

و بنابـر رابطه‌هـای طولـی، $AB^۲=BH\times BC$، یعنـی $۷=BH\times۴$، پـس $BH=\frac{۷}{۴}$. به این ترتیب $MH=BM-BH=۲-\frac{۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$.



۱۴۳ (۲) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow AC^۲=۴\times۱۳\Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳}$$

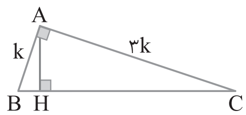
$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۹\times۴\Rightarrow AH=۶$$

پس $\frac{AC}{AH}=\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۶}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$.

۱۴۴ (۳) چون $\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۳}$، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $AB=k$ و $AC=۳k$. توجه کنید که $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times k\times۳k=\frac{۳}{۲}k^۲=۶۰$. در نتیجـه $k=۲\sqrt{۱۰}$، بنابرایـن $AC=۶\sqrt{۱۰}$ و $AB=۲\sqrt{۱۰}$. بنابـر قضیـهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۴۰+۳۶۰}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

از طـرف دیگـر طبـق رابطه‌هـای طولـی در مثلـث قائم‌الزاویـهٔ ABC، $BC\times AH=AB\times AC$، یعنی $۲۰AH=۱۲۰$. پس $AH=۶$.



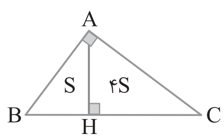
۱۴۵ (۳) در مثلـث قائم‌الزاویـهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفـاع AH را رسـم کرده‌ایـم. فرض کنید $S_{AHC}=۴S_{ABH}$. دو مثلث AHC و ABH در ارتفاع AH مشترک هستند. پس $\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{BH}{CH}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{BH}{CH}\Rightarrow CH=۴BH$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

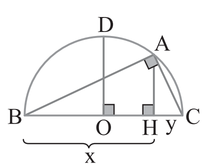
$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۸^۲=BH(۴BH)\Rightarrow BH^۲=۱۶\Rightarrow BH=۴$$

$$CH=۱۶$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}(۸)(۲۰)=۸۰$.



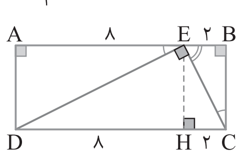
۱۴۶ (۱) زاویـهٔ BAC زاویه‌ای محاطی مقابل به کمان ۱۸۰° اسـت، پس $B\hat{A}C=۹۰^\circ$. اکنـون، بنابـر رابطه‌های طولـی در مثلـث قائم‌الزاویهٔ ABC، می‌تـوان نوشـت $AH^۲=BH\times CH$، یعنی $AH=\sqrt{xy}$. از طـرف دیگر OD برابر شعاع دایره است و $OD=OC=\frac{x+y}{۲}$. مطابق شکل واضح است که $AH\le OD$، پس $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{۲}$، یعنی $۲\sqrt{xy}\le x+y$.



۱۴۷ (۴) چـون $A\hat{E}D=E\hat{C}B$ و $E\hat{C}B+C\hat{E}B=۹۰^\circ$، پـس $A\hat{E}D+C\hat{E}B=۹۰^\circ$. در نتیجه $C\hat{E}D=۹۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC اگر از نقطهٔ E عمود EH را بر ضلع DC رسم کنیم، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$EH^۲=DH\times CH\Rightarrow EH^۲=۸\times۲=۱۶$$

پس $EH=۴$. اکنون می‌توان نوشت $S_{CDE}=\frac{۱}{۲}DC\times EH=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۴=۲۰$.



۱۴۸ **۲** راه‌حل اول با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABC: AB^۲=BH\times BC \xrightarrow{BH=x} ۴^۲=x(x+۶)$$

$$x^۲+۶x-۱۶=۰\Rightarrow(x+۸)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow BH=۲$$

$$\triangle ABC: AH^۲=BH\times CH=۲\times۶=۱۲\Rightarrow AH=۲\sqrt{۳}$$

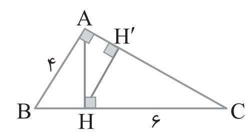
$$\triangle ABC: AC^۲=BC^۲-AB^۲\Rightarrow AC^۲=۸^۲-۴^۲=۶۴-۱۶=۴۸$$

$$AC=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: HH'\times AC=AH\times CH\Rightarrow HH'\times۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}\times۶$$

$$HH'=۳$$

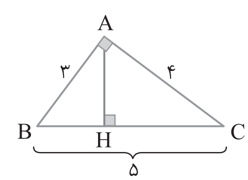


راه‌حل دوم پس از اینکه $BH=۲$ به‌دست آمد، توجه کنید که HH' و AB بر AC عمود هستند، بنابراین با هم موازی‌اند. پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$HH'\|AB\Rightarrow\frac{CH}{CB}=\frac{HH'}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{HH'}{۴}\Rightarrow HH'=۳$$

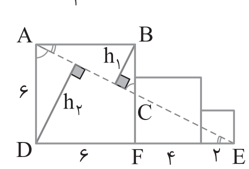
۱۴۹ **۲** مثلث داده شده را مانند شکل زیر رسم می‌کنیم. بین طول ضلع‌های مثلث داده شده رابطهٔ فیثاغورس برقرار است $(۳^۲+۴^۲=۵^۲)$، پس مثلث قائم‌الزاویه است و بنابر رابطه‌های طولی، $AB\times AC=BC\times AH$. پس $۵\times AH=۳\times۴$، در نتیجه $AH=\frac{۱۲}{۵}$. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است، بنابراین

نسبت تشابه = نسبت ارتفاع‌ها $=\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۱۲}=\frac{۱}{۵}$



۱۵۰ **۱** توجه کنید که $B\hat{A}C+E\hat{A}D=۹۰^\circ$ و $A\hat{E}D+E\hat{A}D=۹۰^\circ$. پس $B\hat{A}C=A\hat{E}D$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و EDA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین نسبت ارتفاع‌های وارد بر وتر برابر است با نسبت تشابه آن‌ها:

$$\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{DE}{AB}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$



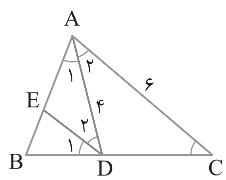
۱۵۱ **۳** نیمساز زاویهٔ ADB را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با ضلع AB را E می‌نامیم. اکنون دو مثلث DBA و ABC را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{cases}\xrightarrow{(ز\ ز)}\triangle DBA\sim\triangle ABC$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازهای نظیر برابر نسبت ضلع‌های نظیر است. AD نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC و DE نیمساز زاویهٔ D مثلث DBA است. بنابراین

نسبت نیمسازها $=\frac{DE}{AD}$ ، نسبت ضلع‌های نظیر $=\frac{AD}{AC}$ $\Rightarrow\frac{DE}{AD}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{DE}{۴}=\frac{۴}{۶}$

$$DE=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

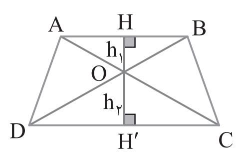


۱۵۲ **۴** دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، بنابراین $\frac{۲}{۳}=\frac{AB}{DC}=\frac{OH}{OH'}$. بنابر ویژگی‌های تناسب، $\frac{OH}{OH+OH'}=\frac{۲}{۳+۲}=\frac{۲}{۵}$، در نتیجه $\frac{OH}{HH'}=\frac{۲}{۵}$. می‌توان نوشت

$$\frac{S_{OAB}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times OH\times AB}{\frac{۱}{۲}\times HH'\times(AB+DC)}=\frac{\frac{۲}{۵}HH'\times AB}{HH'\times(AB+\frac{۳}{۲}AB)}$$

$$=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$$

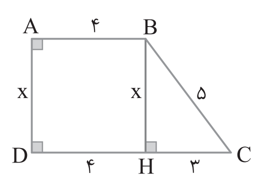
پس مساحت مثلث OAB، ۱۶ درصد مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ است.



۱۵۳ **۲** در شکل BH ارتفاع وارد بر DC است. پس $ABHD$ مستطیل است. اگر $AD=x$، آن‌گاه $BH=x$ و $DH=۴$، پس $CH=۳$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BCH،

$$BH=\sqrt{BC^۲-CH^۲}=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴$$

در نتیجه محیط ذوزنقه $=AB+BC+CD+DA=۴+۵+۷+۴=۲۰$



۱۵۴ **۱** دو مثلث ABH و CAH با داشتن دو زاویهٔ مساوی متشابه‌اند. پس نسبت BM به AN، میانه‌های نظیر این دو مثلث با نسبت تشابه آن‌ها برابر است:

$$\triangle ABH\sim CAH\Rightarrow\frac{BM}{AN}=\frac{AH}{HC}=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۵۵ **۲** محیط مثلث اول برابر $(۷a-۲)+(۲a+۱)+(۴a)=۱۳a-۱$ و محیط مثلث دوم برابر ۲۴ است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها مساوی توان دوم نسبت محیط‌ها است. فرض می‌کنیم S و P به ترتیب مساحت و محیط مثلث اول و S' و P' به ترتیب مساحت و محیط مثلث دوم باشند. بنابراین

$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{P}{P'}\right)^۲\Rightarrow\frac{۶}{۲۴}=\left(\frac{۱۳a-۱}{۲۴}\right)^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱۳a-۱}{۲۴}\Rightarrow a=۱$$

۱۵۶ (۲) نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ است (توجه کنید که چون دو مثلث غیرهمنهشت هستند، نسبت تشابه را ۱ نگرفتیم). چون محیط مثلث دوم برابر $۱۲=۵+۴+۳$ است، پس محیط مثلث اول یکی از دو عدد $۹=\frac{۳}{۴}\times ۱۲$ یا $۷/۲=\frac{۳}{۵}\times ۱۲$ است. بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۱۵۷ (۱) چون دو مثلث متساوی‌الاضلاع زاویه‌های برابر دارند، پس همواره متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است: $\frac{S_۱}{S_۲}=k^۲=۹$، در نتیجه $k=۳$. نسبت محیط‌های این دو مثلث برابر نسبت تشابه آن‌ها است، پس محیط مثلث بزرگ‌تر ۳ برابر محیط مثلث کوچک‌تر است.

۱۵۸ (۱) زاویه‌های مثلث ABC برابر $\hat{A}=۷۰^\circ$، $\hat{B}=۵۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ و زاویه‌های مثلث MPN برابر $\hat{N}=۶۰^\circ$، $\hat{M}=۷۰^\circ$ و $\hat{P}=۵۰^\circ$ هستند. پس دو مثلث ABC و MPN متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه ضلع $AB=۱۸$ در مثلث ABC که روبه‌روی زاویهٔ $\hat{C}=۶۰^\circ$ است، با ضلع MP در مثلث MPN که روبه‌روی زاویهٔ $\hat{N}=۶۰^\circ$ است، متناظر است. بنابراین

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MPN}}=\left(\frac{AB}{MP}\right)^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{MP}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{AB=۱۸}\frac{۱۸}{MP}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow MP=۱۲$$

۱۵۹ (۲) در شکل زیر با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه می‌نویسیم

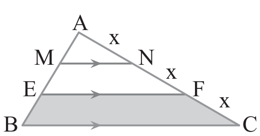
$$MN\|BC\Rightarrow\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{x}{۳x}\right)^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$EF\|BC\Rightarrow\triangle AEF\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۲x}{۳x}\right)^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}=\frac{۵}{۹}$$

از تقسیم دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{S_{AMN}=۵}\frac{۵}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow S_{BEFC}=۲۵$$



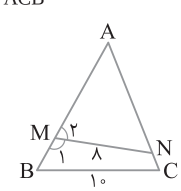
۱۶۰ (۲) در چهارضلعی BMNC زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند، پس

$$\hat{M}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{M}_۲=\hat{C}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\hat{M}_۲=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle AMN\sim\triangle ACB\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ACB}}=\left(\frac{۸}{۱۰}\right)^۲=\frac{۶۴}{۱۰۰}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{ACB}-S_{AMN}}{S_{ACB}}=\frac{۱۰۰-۶۴}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{S_{BMNC}}{S_{ACB}}=\frac{۳۶}{۱۰۰}$$



۱۶۱ (۲) ابتدا به کمک قضیهٔ تالس مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

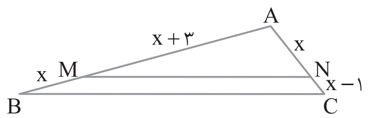
$$MN\|BC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{x+۳}{x}=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۲x-۳=x^۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

از طرف دیگر،

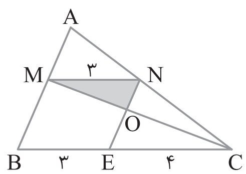
$$MN\|BC\xrightarrow[\text{اساسی تشابه}]{\text{قضیهٔ}}\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲$$

$$=\left(\frac{x+۳}{۲x+۳}\right)^۲=\left(\frac{\frac{۳}{۲}+۳}{۳+۳}\right)^۲=\left(\frac{\frac{۹}{۲}}{۶}\right)^۲=\left(\frac{۹}{۱۲}\right)^۲=\frac{۹}{۱۶}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}$$

$$\frac{S_{ABC}-S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶-۹}{۱۶}\Rightarrow\frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}}=\frac{۷}{۱۶}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱۶}{۷}S_{MNCB}$$



۱۶۲ (۳) چون $MN\|EC$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه دو مثلث OMN و OCE متشابه‌اند، بنابراین $\frac{S_{OMN}}{S_{OCE}}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲=\frac{۹}{۱۶}$. از طرف دیگر



$$OE\|BM\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle OEC\sim\triangle MBC$$

$$\frac{S_{OEC}}{S_{MBC}}=\left(\frac{۴}{۷}\right)^۲=\frac{۱۶}{۴۹}$$

در ضمن

$$MN\|BC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{۳}{۷}$$

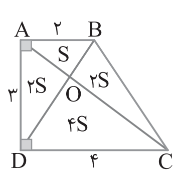
$$\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}}\frac{MB}{AB}=\frac{۴}{۷}$$

توجه کنید که دو مثلث BMC و ABC در ارتفاع نظیر از رأس C مشترک هستند. پس $\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{AB}=\frac{۴}{۷}$، بنابراین

$$S_{OMN}=\frac{۹}{۱۶}S_{OEC}=\frac{۹}{۱۶}\left(\frac{۱۶}{۴۹}S_{BMC}\right)=\frac{۹\times۱۶}{۱۶\times۴۹}\times\frac{۴}{۷}S_{ABC}$$

$$S_{OMN}=\frac{۳۶}{۳۴۳}S_{ABC}$$

۱۶۳ (۱) چون CD و AB بر AD عمودند، پس موازی‌اند. در نتیجه، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AOB و COD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{DC}{AB}=\frac{۴}{۲}=۲$. بنابراین اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث ODC برابر ۴S است. از طرف دیگر از تشابه دو مثلث AOB و COD نتیجه می‌گیریم $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین نسبت مساحت‌های دو مثلث OAB و OBC که در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی $\frac{OA}{OC}=\frac{۱}{۲}$ است. پس $S_{OBC}=۲S_{AOB}=۲S$. به همین ترتیب $S_{OAD}=۲S_{OAB}=۲S$، بنابراین



$$S_{ABCD}=۲S+S+۲S+۴S\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۳)(۲+۴)=۹S\Rightarrow S=۱$$

پس مساحت مثلث OBC مساوی $۲S=۲$ است.

۱۶۴ (۲) هر دو هشت‌ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S}{S'}=(\frac{a}{a'})^۲\Rightarrow\frac{۹}{۱۶}=(\frac{a}{a'})^۲\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{۳}{۴}$$

اکنون اگر ضلع کوچک‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{۱۲}{a'}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a'=\frac{۴\times۱۲}{۳}=۱۶$$

و در صورتی که ضلع بزرگ‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱۲\times۳}{۴}=۹$$

۱۶۵ (۲) هر دو ده‌ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم نسبت تشابه آن‌ها و درنتیجه برابر توان دوم نسبت محیط‌های آن‌ها است. پس

$$\frac{\text{مساحت ده‌ضلعی کوچک}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=(\frac{۸}{۱۲})^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}$$

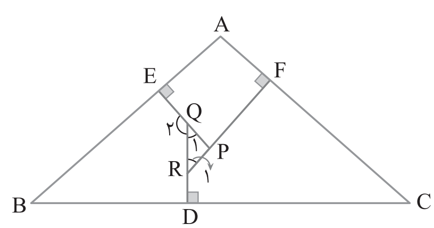
$$\frac{\text{مجموع مساحت‌ها}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=\frac{۴+۹}{۹}\Rightarrow\frac{۷۸}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=\frac{۱۳}{۹}$$

مساحت ده‌ضلعی بزرگ=۵۴

۱۶۶ (۲) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه برابر است. پس اگر k نسبت تشابه باشد، $k=\sqrt{\frac{۴\sqrt{۵}}{۱۶\sqrt{۵}}}=\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، نسبت محیط دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است. پس با فرض اینکه P محیط مثلث مورد نظر باشد، می‌توان نوشت $\frac{P}{۳۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P=۱۶$

پس $m+m+۳+۲m+۱=۱۶$. در نتیجه $m=۳$.

۱۶۷ (۱) دو مثلث PQR و ABC متشابه‌اند، زیرا در چهارضلعی BDQE دو زاویهٔ قائمه وجود دارد، پس $\hat{B}+\hat{Q}_۲=۱۸۰^\circ$. از طرف دیگر $\hat{Q}_۱+\hat{Q}_۲=۱۸۰^\circ$، پس $\hat{B}=\hat{Q}_۱$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{R}_۱=\hat{C}$. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است: $\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}}=(\frac{AC}{PR})^۲=(\frac{۸PR}{PR})^۲=۶۴$.



۱۶۸ (۱) مساحت مثلث OME را برابر S در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). چون OM موازی BF است، پس دو مثلث OME و FBE بنابر قضیهٔ اساسی تشابه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{ME}{BE}=\frac{۲k}{۴k}=\frac{۱}{۲}$ است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه، یعنی $\frac{۱}{۴}$ است:

$$\frac{S_{OME}}{S_{FBE}}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{OME}}{S_{BMOF}}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی BMOF برابر ۳S است. از طرف دیگر چون OE موازی AN است، پس دو مثلث OME و NMA با نسبت $\frac{ME}{MA}=\frac{۲k}{۳k}=\frac{۲}{۳}$ متشابه‌اند و در نتیجه

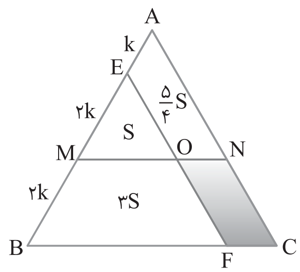
$$\frac{S_{OME}}{S_{NMA}}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{OME}}{S_{ANOE}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی ANOE برابر $\frac{۵}{۴}S$ است. در ضمن EF موازی AC است، پس دو مثلث EBF و ABC با نسبت $\frac{BE}{AB}=\frac{۴}{۵}$ متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\frac{۴S}{۴S+\frac{۵}{۴}S+S_{ONCF}}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

بنابراین $S_{ONCF}=S$، در نهایت $\frac{S_{ONCF}}{S_{ABC}}=\frac{S}{۴S+\frac{۵}{۴}S+S}=\frac{S}{\frac{۲۵}{۴}S}=\frac{۴}{۲۵}$،

یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع رنگی ۱۶٪ $=\frac{۴}{۲۵}$ مساحت مثلث ABC است.

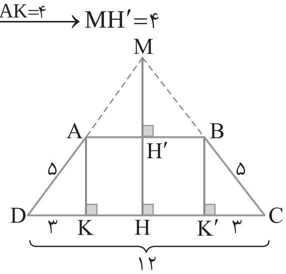


۱۶۹ (۲) با رسم ارتفاع‌های AK و BK′ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK و BCK′ همنهشت می‌شوند. پس $DK=\frac{۱۲-۶}{۲}=۳$. در نتیجه با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK طول ارتفاع AK برابر ۴ است. پس

$$AB||DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle ABM\sim\triangle DCM$$

$$\frac{MH'}{MH}=\frac{AB}{DC}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{MH'}{HH'}=\frac{۱}{۱}$$

$$\xrightarrow{HH'=AK=۴}MH'=۴$$



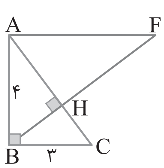
۱۷۰ (۱) در مثلث ABC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC=\sqrt{AB^۲+BC^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BH=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{۴\times۳}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$AB^۲=AH\times AC\Rightarrow AH=\frac{AB^۲}{AC}=\frac{۱۶}{۵}$$



اگر بخواهیم دو مثلث ABH و AFH متشابه باشند، دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: BH را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا F به‌دست آید (در این حالت دو مثلث همنهشت هستند، یعنی نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱ است)، پس $HF=BH=\frac{۱۲}{۵}$. اما این جواب در گزینه‌ها نیست.

حالت دوم: در این حالت نسبت تشابه به صورت $\frac{AH}{BH}=\frac{HF}{AH}$ است. یعنی $\frac{HF}{\frac{۱۶}{۵}}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{\frac{۱۲}{۵}}$، در نتیجه $HF=\frac{۶۴}{۱۵}$.

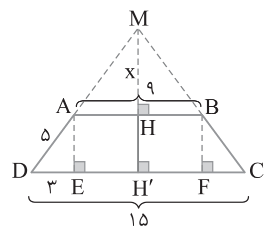
۱۷۱ **۲** مطابق شکل از M نقطهٔ تلاقی امتداد دو ساق ذوزنقه، خطی عمود بر قاعده‌های AB و DC رسم می‌کنیم تا قاعده‌های AB و DC را به‌ترتیب در H و H' قطع کند. سپس با رسم عمودهای AE و BF بر DC نتیجه می‌گیریم

$$EF=AB=۹\ ,\quad DE=CF=\frac{DC-AB}{۲}=\frac{۱۵-۹}{۲}=۳$$

در مثلث ADE، بنابر رابطهٔ فیثاغورس،

$$AE=\sqrt{AD^۲-DE^۲}=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴$$

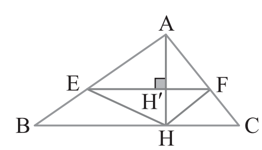
پس $HH'=۴$. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث MAB و MDC متشابه‌اند، بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر نسبت تشابه است. پس $\frac{MH}{MH'}=\frac{AB}{DC}$، یعنی $\frac{MH}{MH+۴}=\frac{۹}{۱۵}$. در نتیجه $MH=۶$.



۱۷۲ **۱** نقطهٔ برخورد EF و AH را H' می‌نامیم. چون BC موازی EF است، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند. بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت ضلع‌های نظیر برابر است: $\frac{AH'}{AH}=\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}$. از طرف دیگر $\frac{AE}{EB}=\frac{۳}{۲}$. با ترکیب در مخرج کردن به تناسب $\frac{AE}{AB}=\frac{۳}{۵}$ می‌رسیم. بنابراین $\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۵}$ و $\frac{AH'}{AH}=\frac{۳}{۵}$. با تفضیل در صورت کردن تناسب $\frac{AH'}{AH}=\frac{۳}{۵}$ به تناسب $\frac{HH'}{AH}=\frac{۲}{۵}$ می‌رسیم. اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به‌دست آوریم:

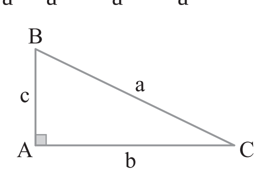
$$\frac{S_{EFH}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}HH'\times EF}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{HH'}{AH}\times\frac{EF}{BC}=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۲۵}$$

بنابراین مساحت مثلث EFH، $۲۴\%=۱۰۰\times\frac{۶}{۲۵}$ مساحت مثلث ABC است.



۱۷۳ **۴** چون هر دو شش‌ضلعی منتظم متشابه هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است. اکنون اگر $S_۲$ مساحت شش‌ضلعی ایجاد شده، روی ضلع به طول b و $S_۳$ مساحت شش‌ضلعی ایجاد شده روی ضلع به طول c باشد، آن‌گاه به‌دست می‌آید: $\frac{S_۲}{S_۱}=(\frac{b}{a})^۲$ و $\frac{S_۳}{S_۱}=(\frac{c}{a})^۲$. در نتیجه

$$\frac{S_۲}{S_۱}+\frac{S_۳}{S_۱}=\frac{b^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}=\frac{a^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow S_۲+S_۳=S_۱$$

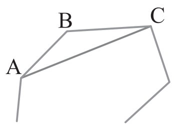


۱۷۴ **۴** از هر رأس n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می‌گذرد و تعداد کل قطرها برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است. بنابر فرض سؤال

$$n-۳=\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۲}n(n-۳))\Rightarrow n=۱۶$$

پس تعداد قطرها $=\frac{۱}{۲}n(n-۳)=\frac{۱}{۲}(۱۶)(۱۶-۳)=۸\times۱۳=۱۰۴$

۱۷۵ **۳** از هر رأس n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می‌گذرد. ظاهراً از سه رأس متوالی آن $۳(n-۳)$ قطر می‌گذرد. اما در این محاسبه ۱ قطر دوبار حساب شده است (شکل را ببینید). اگر A، B و C سه رأس متوالی مورد نظر باشند، قطر AC دو بار حساب شده است: یک بار در محاسبهٔ قطرهای نظیر رأس A و یک بار در محاسبهٔ قطرهای نظیر رأس C). پس تعداد قطرهای رسم شده از سه رأس متوالی n ضلعی محدب برابر $۳(n-۳)-۱$ است. اکنون، می‌توان نوشت $۳(n-۳)-۱=۱۷$، یعنی $n=۹$.



۱۷۶ **۴** در صورتی که به تعداد اضلاع n ضلعی محدب یکی اضافه کنیم یعنی آن را به $(n+۱)$ ضلعی محدب تبدیل کنیم، به تعداد قطرهای آن $n-۱$ قطر اضافه می‌شود. پس ۹۹ ضلعی محدب نسبت به ۹۸ ضلعی محدب تعداد ۹۷ قطر بیشتر دارد. بنابراین

تعداد قطرهای ۹۹ ضلعی = تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی $+۹۷$

$۲k+۳=$ تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی $+۹۷$

تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی $=۲k+۳-۹۷=۲k-۹۴$

۱۷۷ **۳** چون مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی محدب ۳۶۰° است، پس n ضلعی محدب بیش از ۳ زاویهٔ غیرمنفرجهٔ داخلی نمی‌تواند داشته باشد. از طرف دیگر چون در اینجا n ضلعی دقیقاً ۳ زاویهٔ منفرجه دارد و حداکثر هم ۳ زاویهٔ غیرمنفرجه داخلی می‌تواند داشته باشد، پس حداکثر شش‌ضلعی است. در نتیجه حداکثر تعداد قطرهای n ضلعی‌های با این ویژگی برابر است با $\frac{۶\times(۶-۳)}{۲}=۹$.

۱۷۸ **۳** اگر هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم k° باشد، که در این جا k عددی طبیعی است، آن‌گاه هر زاویهٔ خارجی آن نیز برحسب درجه عددی طبیعی است، زیرا اندازهٔ این زاویه برابر است با $۱۸۰^\circ-k^\circ$. چون n ضلعی منتظم است هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است و در نتیجه

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow \text{حداکثر } n=۳۶۰$$

۱۷۹ **۳** می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب مضربی از ۱۸۰° است. بنابراین اگر x زاویهٔ کنار گذاشته شده باشد، آن‌گاه

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی}=۲۲۲۰^\circ+x=\underbrace{۱۲\times۱۸۰^\circ+۶۰^\circ}_{۲۲۲۰^\circ}+x$$

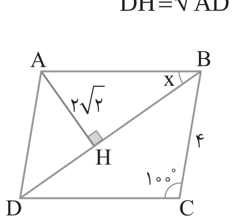
چون $۰^\circ<x<۱۸۰^\circ$، مقدار بالا زمانی مضرب ۱۸۰° است که $x=۱۲۰^\circ$.

۱۸۰ **۳** در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$DH=\sqrt{AD^۲-AH^۲}=\sqrt{۱۶-۸}=۲\sqrt{۲}$$

یعنی مثلث ADH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{D}H=۴۵^\circ$. در ضمن در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل مساوی‌اند، پس $\hat{A}=\hat{C}=۱۰۰^\circ$ و چون مجموع زاویه‌های مثلث ADB برابر ۱۸۰° است، پس

$$x=A\hat{B}D=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ-۴۵^\circ=۳۵^\circ$$



۱۸۱ (۲) می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین در شکل زیر، $OA=OC=\frac{AC}{۲}$ ، $OB=OD=\frac{BD}{۲}$

بنابر فرض مسئله $AC+BD=۲۰$ ، پس

$$\frac{AC+BD}{۲}=۱۰\Rightarrow\begin{cases}OA+OB=۱۰ & (۱)\\ OA+OD=۱۰ & (۲)\end{cases}$$

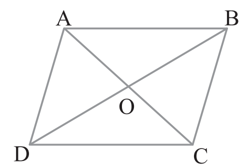
می‌دانیم

محیط مثلث $AOB=۱۸$ ، محیط مثلث $AOD=۱۶$

$$\begin{cases}OA+OB+AB=۱۸\xrightarrow{(۱)}AB=۸\\ OA+OD+AD=۱۶\xrightarrow{(۲)}AD=۶\end{cases}$$

در نهایت به‌دست می‌آید

محیط متوازی‌الاضلاع $=۲(AB+AD)=۲(۸+۶)=۲۸$

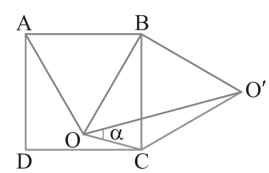


۱۸۲ (۲) چون ABCD مربع است و مثلث‌های OAB و BCO' متساوی‌الاضلاع هستند، پس $A\hat{B}O=C\hat{B}O'=۶۰^\circ$ و $O\hat{B}C=۳۰^\circ$ و طول ضلع‌های این مثلث‌ها برابر طول ضلع مربع هستند: $OB=O'B$ از طرف دیگر

$$O\hat{B}O'=O\hat{B}C+C\hat{B}O'=۳۰^\circ+۶۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}O'=۴۵^\circ$$

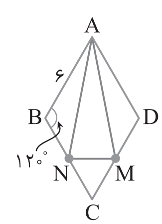
مثلث BOC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۳۰° است، پس

$$B\hat{O}C=۷۵^\circ\Rightarrow\alpha+۴۵^\circ=۷۵^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$



۱۸۳ (۲) در لوزی دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند، پس $\hat{C}=۶۰^\circ$. در ضمن M و N وسط‌های دو ضلع لوزی هستند، پس $MC=NC=۳$. بنابراین مثلث MNC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰° است. پس دو زاویهٔ دیگر آن هم ۶۰° هستند. در نتیجه مثلث MNC متساوی‌الاضلاع است، پس

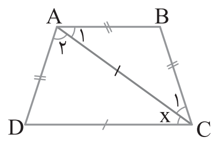
$$MN=NC=MC=۳$$



۱۸۴ (۳) اندازهٔ زاویهٔ DCA را برابر x در نظر می‌گیریم. در این صورت از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{A}_۱=x$. در ضمن مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C}_۱=\hat{A}_۱=x$. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور به قاعده مساوی‌اند، پس $\hat{D}=B\hat{C}D=۲x$. چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_۲=\hat{D}=۲x$ ، در مثلث ADC مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است، پس

$$\hat{A}_۲+\hat{D}+D\hat{C}A=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲x+۲x+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۳۶^\circ$$

بنابراین $D\hat{A}C+D\hat{C}A=۲x+x=۳x=۳\times۳۶^\circ=۱۰۸^\circ$.

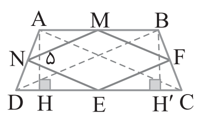


۱۸۵ (۳) در شکل زیر M، N، E و F وسط ضلع‌های ذوزنقهٔ ABCD هستند. دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. چون $HH'=AB=۱۰$ ، پس $DH+CH'=۱۴-۱۰=۴$. بنابراین $DH=CH'=\frac{۴}{۲}=۲$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH،

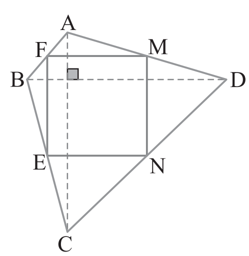
$$AC=\sqrt{AH^۲+CH^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=۱۳$$

محیط چهارضلعی MNEF مساوی مجموع طول دو قطر ذوزنقهٔ ABCD است. در نتیجه

$$\text{محیط}\ (MNEF)=AC+BD=۱۳+۱۳=۲۶$$

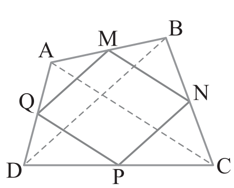


۱۸۶ (۴) می‌دانیم اگر وسط‌های ضلع‌های مجاور هر چهارضلعی محدب را به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود که ضلع‌های این متوازی‌الاضلاع موازی و مساوی نصف قطرهای چهارضلعی اولیه است. از آن‌جا که قطرهای چهارضلعی اولیه مساوی و بر هم عمودند، پس ضلع‌های متوازی‌الاضلاع ایجاد شده مساوی و بر هم عمودند. پس چهارضلعی حاصل مربع است. در شکل زیر قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمودند و با هم مساوی‌اند و نقطه‌های M، N، E و F وسط‌های ضلع‌های ABCD هستند و چهارضلعی MNEF مربع است.



۱۸۷ (۳) در شکل نقاط M، N، P و Q وسط ضلع‌های ABCD هستند.
می‌دانیم محیط MNPQ برابر مجموع طول دو قطر ABCD است، پس

$$AC+BD=\text{محیط}(MNPQ)\Rightarrow AC+BD=۱۰$$



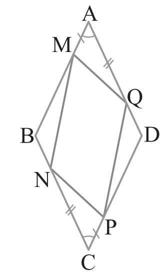
۱۸۸ (۴) در لوزی ضلع‌ها با هم مساوی‌اند و زاویه‌های مقابل برابرند. بنابراین

$$\begin{cases}AM=CP\\ \hat{A}=\hat{C}\\ AQ=CN\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\triangle AMQ\cong\triangle CPN\Rightarrow MQ=NP\ (۱)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت

$$\triangle QPD\cong\triangle NMB\Rightarrow QP=MN\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم ضلع‌های مقابل چهارضلعی MQPN مساوی‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در حالت‌های خاص اگر M، N، P و Q وسط ضلع‌های لوزی باشند، آن‌گاه MNPQ مستطیل می‌شود و دو قطر آن مساوی می‌شوند و اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد، آن‌گاه قطرهای MNPQ بر هم عمود می‌شوند. پس متوازی‌الاضلاع بودن MQPN همواره برقرار است.



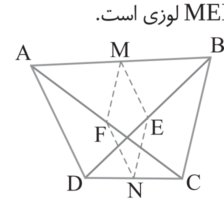
۱۸۹ (۱) با توجه به شکل زیر، در چهارضلعی ABCD فرض می‌کنیم $AD=BC$ و نقطه‌های M و N به ترتیب وسط‌های AB و CD و نقطه‌های E و F وسط‌های دو قطر آن باشند. بنابر قضیهٔ میان‌خط،

$$\triangle ABC: MF\|BC,\quad MF=\frac{BC}{۲}$$

$$\triangle BDC: EN\|BC,\quad EN=\frac{BC}{۲}$$

بنابراین $MF\|EN$ و $MF=EN=\frac{BC}{۲}$، پس چهارضلعی MENF متوازی‌الاضلاع است. به همین ترتیب از قضیهٔ میان‌خط نتیجه می‌شود $ME=FN=\frac{AD}{۲}$ و چون $BC=AD$، پس $MF=EN=ME=FN$.

پس متوازی‌الاضلاع MENF لوزی است.

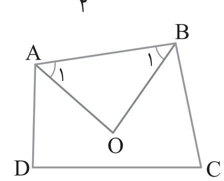


۱۹۰ (۴) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° و مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. بنابراین

$$A\hat{O}B=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱)\quad (۱)$$

$$۲\hat{A}_۱+۲\hat{B}_۱+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ-\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲}\quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{O}B=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲}$.



۱۹۱ (۴) از برخورد نیمسازهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که یک زاویهٔ آن ۶۰° است چهارضلعی MNEF به وجود می‌آید به طوری که $\hat{N}=\hat{F}=۹۰^\circ$، $MN=MF$ و $NE=EF$. به عبارتی چهارضلعی MNEF یک کایت است، پس ME نیمساز است. چون مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است، پس $A\hat{E}B=۶۰^\circ$. در نتیجه $\hat{E}_۱=۳۰^\circ$ و $\hat{M}_۱=۶۰^\circ$. از طرف دیگر اگر ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH و BCH' همنهشت خواهند شد. پس $۲x+۶=۱۰\Rightarrow x=۲$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $BH'C$ چون CH' روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، اندازهٔ آن نصف طول وتر BC است:

$$\triangle BH'C: \hat{B}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow x=\frac{BC}{۲}\Rightarrow BC=۴$$

چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $AB=AE=BE=۶$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BNC، $B\hat{C}N=۳۰^\circ\Rightarrow BN=\frac{BC}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$

پس $NE=BE-BN=۶-۲=۴$. بنابراین

$$\triangle MNE: \hat{M}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow NE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME\Rightarrow ۴=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME$$

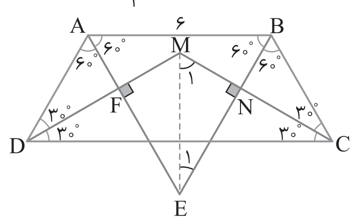
یعنی $ME=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNE،

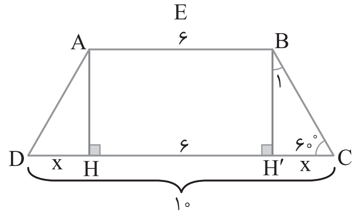
$$MN=\sqrt{ME^۲-NE^۲}=\sqrt{\frac{۶۴}{۳}-۱۶}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

اکنون می‌توان مساحت چهارضلعی MNEF را به‌دست آورد

$$S_{MNEF}=MN\times NE=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\times ۴=\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین مساحت این چهارضلعی ۱۶ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.

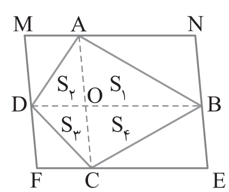




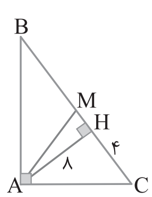
۱۹۲ (۱) اگر از رأس‌های چهارضلعی ABCD خط‌هایی موازی قطرهای آن رسم کنیم، چهارضلعی MNEF ایجاد می‌شود. چهارضلعی‌های AOBN و AODM و DOCF و BOCE متوازی‌الاضلاع هستند. پس

$$S_{AOBN}=۲S_۱,\ S_{AODM}=۲S_۲,\ S_{DOCF}=۲S_۳,\ S_{BOCE}=۲S_۴$$

در نتیجه $S_{MNEF}=۲S_{ABCD}$، پس $S_{MNEF}=۲\times ۱۲=۲۴$.



۱۹۳ (۳) فرض می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر و AM میانهٔ وارد بر وتر باشد. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۸^۲=۴BH$$

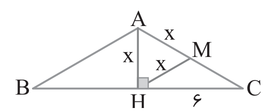
$$BH=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

پس $BC=۱۶+۴=۲۰$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است. بنابراین $AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$

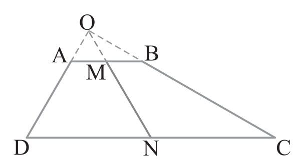
۱۹۴ **۴** در شکل زیر M وسط AC است. فرض می‌کنیم $AH=x$. بنابراین، با توجه به فرض مسئله، $MH=x$. چون مثلث AHC قائم‌الزاویه و MH میانهٔ وارد بر وتر است، پس طول آن نصف طول وتر است. در نتیجه $AM=MC=MH=x$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^{۲}=AH^{۲}+HC^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۳۶$$

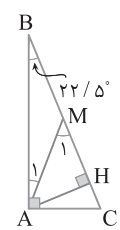
یعنی $x=۲\sqrt{۳}$، در نتیجه $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\times ۱۲=۱۲\sqrt{۳}$



۱۹۵ **۲** ساق‌های ذوزنقهٔ $ABCD$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل زیر را ببینید). چون $\hat{D}+\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $\hat{O}=۹۰^\circ$. بنابراین دو مثلث OAB و OCD قائم‌الزاویه هستند. اگر M و N به ترتیب وسط قاعده‌های AB و CD باشند، آن‌گاه OM و ON میانه‌های وارد بر وتر دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB و OCD هستند، پس اندازهٔ هر کدام از آن‌ها نصف طول وتر نظیر آن‌ها است. بنابراین $OM=\frac{AB}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$ و $ON=\frac{DC}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$. در نتیجه $MN=ON-OM=۶-۲=۴$



۱۹۶ **۲** میانهٔ AM و ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. چون میانهٔ AM نصف وتر است، پس $AM=BM$. بنابراین $\hat{A}_{۱}=۲۲/۵^\circ$. در نتیجه زاویهٔ خارجی $M_{۱}$ در مثلث ABM برابر ۴۵° است. بنابراین



$$\triangle AHM: \hat{M}_{۱}=۴۵^\circ \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AM$$

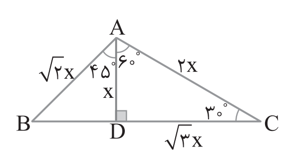
$$\xrightarrow{AM=\frac{۱}{۲}BC} AH=\frac{\sqrt{۲}}{۴}BC$$

۱۹۷ **۴** فرض می‌کنیم $AD=x$، در نتیجه $AB=\sqrt{۲}x$، $AC=۲x$ و $CD=\sqrt{۳}x$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، چون $AD=\frac{۱}{۲}AC$ و $CD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC$، پس

$$A\hat{C}D=۳۰^\circ,\quad C\hat{A}D=۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، چون $AD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$، پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و $B\hat{A}D=۴۵^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{B\hat{A}C}{A\hat{C}D}=\frac{B\hat{A}D+C\hat{A}D}{A\hat{C}D}=\frac{۴۵^\circ+۶۰^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۷}{۲}$$



۱۹۸ **۱** مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۶۰^\circ)=۹۰^\circ$$

در نتیجه

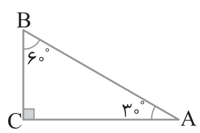
$$\hat{A}=۳۰^\circ\Rightarrow BC=\frac{AB}{۲}\quad (۱),\qquad \hat{B}=۶۰^\circ\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB\quad (۲)$$

از طرف دیگر، $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AC\quad (۳)$

مساحت مثلث ABC برابر $۲\sqrt{۳}$ است. بنابراین با جای‌گذاری BC و AC از تساوی‌های (۱) و (۲) در تساوی (۳) نتیجه می‌گیریم

$$۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{AB}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB\right)\Rightarrow AB=۴$$

در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه برابر نسبت طول ضلع‌های نظیرشان است. در اینجا AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC و ۸ طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ است. بنابراین $\text{نسبت تشابه}=\frac{۸}{۴}=۲$



۱۹۹ **۳** BH ارتفاع وارد بر ضلع AC است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ضلع BH روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، بنابراین

$$BH=\frac{AB}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{AB}{۲}\Rightarrow AB=۸$$

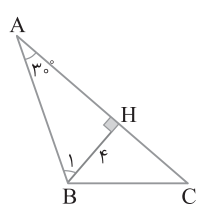
در ضمن در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH زاویهٔ $B_{۱}$ برابر ۶۰° است، پس طول ضلع AH، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول وتر AB است: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۸)=۴\sqrt{۳}$.

از طرف دیگر مساحت مثلث ABC برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است، بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH\times AC\Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times AC\Rightarrow AC=۶\sqrt{۳}$$

پس $CH=AC-AH=۶\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHC به‌دست می‌آید

$$BC^{۲}=BH^{۲}+CH^{۲}=۴^{۲}+(۲\sqrt{۳})^{۲}=۱۶+۱۲=۲۸\Rightarrow BC=۲\sqrt{۷}$$



۲۰۰ **۱** در شکل زیر $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۷۵^\circ$.

چون $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۷۵^\circ+۹۰^\circ)=۱۵^\circ$، پس در این مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، یعنی $AH=\frac{۱}{۴}BC=\frac{۱}{۴}\times ۱۲=۳$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۳=۱۸$$