به نام خداوند مهربان

فاز‌های دوازدهم

ریاضی ۳

دکتر محمود داورزنی ■ آناهیتا کمیجانی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فهرست

مقدمه

لازمهٔ درک هر مبحث ریاضی، داشتن پیش‌نیازهای مناسب و دقت کافی در حین تدریس آن مبحث است بعد از آن، حل تمرین‌های مناسب باعث می‌شود تا آن درس به طور کامل فرا گرفته شود. یک کتاب معمولا شامل مبحث‌های مختلف در فصل‌های گوناگون است و زمانی که به پایان سال نزدیک می‌شوید باید بتوانید هر آن‌چه را که قبلا آموخته‌اید، مرور کرده و برای امتحان آماده شوید. کتاب حاضر سعی کرده است این کار را به‌طور کامل انجام دهد.

کتاب پیش روی شما شامل ۴ بخش می‌باشد:

درسنامه

هر مبحث را برای شما خلاصه‌نویسی و جمع‌بندی کرده‌ایم. با ذکر مثال‌های مختلف، تلاش‌شده است که مفهوم آن درس به طور کامل انتقال یابد. در این قسمت از ذکر مثال‌های فرا درسی اجتناب‌شده و تمرکز کامل بر روی کتاب درسی است تا دانش‌آموز با مطالعهٔ آن بتواند از پس حل مسئله‌های آن مبحث برآید.

پرسش

بعد از اتمام هر درس، پرسش‌های آن درس آمده است به‌طوری که تمام تمرین‌های کتاب درسی را پوشش می‌دهد و شما را از مطالعهٔ تمرین‌های دیگر بی‌نیاز می‌کند.

پاسخ‌نامه

در پایان هر فصل پاسخنامهٔ کاملاً تشریحی آمده است که پاسخ تمام پرسش‌ها را به‌صورت مو به مو آورده‌ایم.

نمونه سؤال امتحانی

۳ دوره سؤالات امتحان نهایی به همراه پاسخ تشریحی که ریزبارم هر پاسخ در آن مشخص شده است که می‌تواند شما را با نحوهٔ پاسخ‌گویی در این نوع امتحانات آشنا کند.

در پایان ذکر این مطلب می‌تواند مفید باشد که استفاده از این کتاب منحصر به قبل از امتحان پایان ترم نیست و می‌توانید در طول سال تحصیلی از درس‌نامه‌ها و مسائل آن به طور مستقل استفاده کنید. بدون شک، این کتاب خالی از اشکال نیست و از همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز خواهش می‌کنیم که ذکر این مطالب را به ما گوشزد کنند تا در چاپ‌های بعدی مرتفع شود.

تشکر و قدردانی

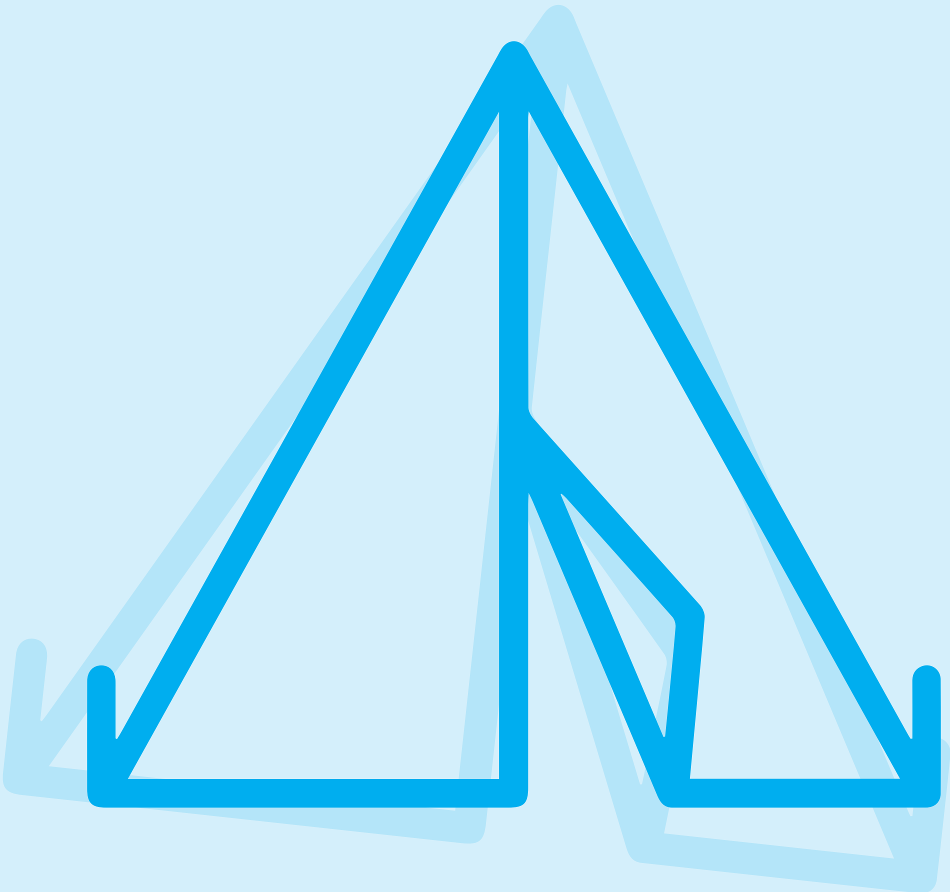
در این جا لازم است از تمامی عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند قدردانی کنیم:

- مدیریت محترم انتشارات، جناب آقای احمد اختیاری
- مدیر شورای تألیف، جناب آقای محمدحسین انوشه
- مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی، جناب آقای عباس اشرفی
- سرویراستار محترم، سرکار خانم دنیا سلیمی
- تیم ویراستاری علمی گروه ریاضی، سرکار خانم‌ها زهرا انیشه و آزاده فلاح‌زاده
- گروه تولید به مدیریت سرکار خانم سیاوشی و گروه هنری انتشارات به مدیریت جناب آقای محسن فرهادی که ما را در مراحل چاپ این کتاب همراهی کردند.

داورزنی . کمیجانی

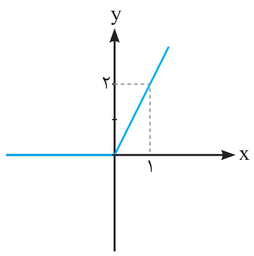
اردوی امتحانی

- درسنامهٔ خلاصه اما کامل
- سؤالات امتحان نهایی و تألیفی به تفکیک فصل‌ها
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی

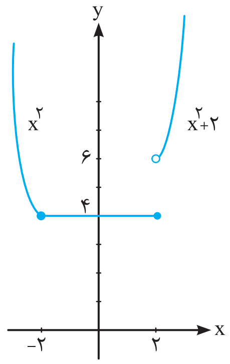


پ) $y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq ۰ \\ x - x & ; x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases}$

نمودار این تابع به‌صورت مقابل است، که در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ ثابت و در بازهٔ $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



ت) $y = \begin{cases} x^۲ & ; x \leq -۲ \\ ۴ & ; -۲ \leq x \leq ۲ \\ x^۲ + ۲ & ; x > ۲ \end{cases}$



این تابع در بازهٔ $(-\infty, -۲]$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-۲, ۲]$ ثابت و در بازهٔ $(۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

پرسش‌های فصل اول - درس اول

۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

الف) $y = -(x-۱)^۳ + ۲$

ب) $y = (x+۲)^۳ - ۳$

۲. ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x+۲)^۳$

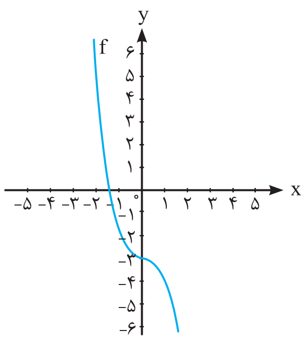
ب) $y = (x+۲)^۳ - ۱$

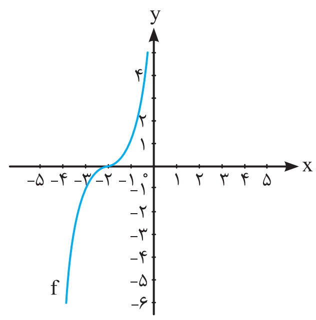
پ) $y = -(x+۱)^۳$

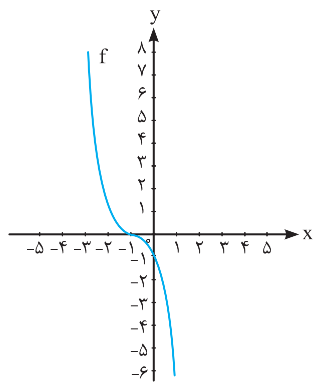
ت) $y = -(-x+۱)^۳$

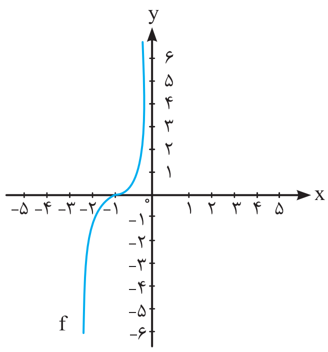
ث) $y = ۲ - (x-۱)^۳$

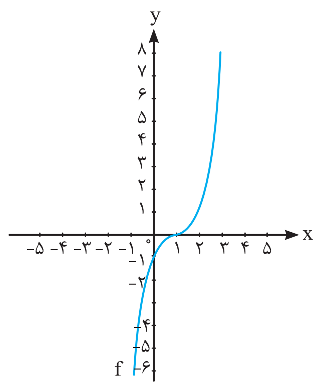
ج) $y = -x^۳ - ۳$

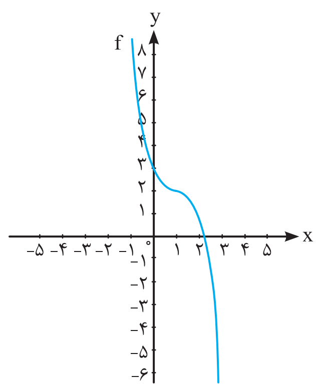

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


(۵)


(۶)

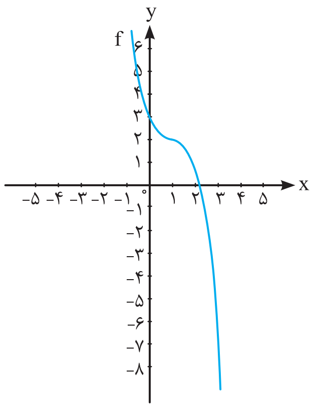
پاسخ پرسش‌های فصل اول

۱ الف)

$y=-(x-۱)^۳+۲$

دامنه: $D=\mathbb{R}$

برد: $R=\mathbb{R}$

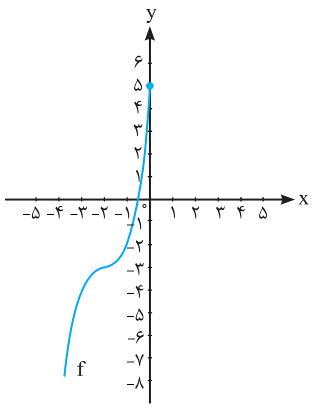


ب)

$y=(x+۲)^۳-۳$

دامنه: $D=\mathbb{R}$

برد: $R=\mathbb{R}$



۲ با توجه به نمودار توابع داده‌شده و ضابطه‌ها داریم:
نمودار (۱) مربوط به ضابطهٔ تابع «ج»، نمودار (۲) مربوط به ضابطهٔ تابع «الف»، نمودار (۳) مربوط به ضابطهٔ تابع «پ»، نمودار (۴) مربوط به ضابطهٔ تابع «ب»، نمودار (۵) مربوط به ضابطهٔ تابع «ت» و نمودار (۶) مربوط به ضابطهٔ تابع «ث» است.

۳ با توجه به نقاط مشخص‌شده روی منحنی‌هایی که ضابطهٔ آن‌ها خواسته شده است و با استفاده از قوانین انتقال نمودار توابع، ضابطه‌های مجهول را مشخص می‌کنیم:

الف) در این شکل، نمودار تابع $y=x^۳$ دو واحد به طرف راست حرکت داده شده، بنابراین حدس می‌زنیم که ضابطه‌اش به‌صورت $y=(x-۲)^۳$ است، نقاط مشخص‌شده را در ضابطه قرار می‌دهیم تا حدسمان را امتحان کنیم:

$y=(x-۲)^۳$

$x=۳ \Rightarrow y=(۳-۲)^۳=۱$ ✓

$x=۲ \Rightarrow y=(۲-۲)^۳=۰$ ✓

$x=۱ \Rightarrow y=(۱-۲)^۳=-۱$ ✓

بنابراین حدس ما صحیح بوده و ضابطهٔ تابع مجهول، $y=(x-۲)^۳$ است.

ب) در این شکل نمودار تابع $y=x^۳$ نسبت به محور yها قرینه شده است. بنابراین ضابطه‌اش به شکل $y=-x^۳$ است. حال با استفاده از نقاط مشخص‌شده درستی پاسخ خود را می‌آزماییم:

$y=-x^۳$

$x=۱ \Rightarrow y=-۱$ ✓

$x=-۱ \Rightarrow y=۱$ ✓

بنابراین پاسخ صحیح بوده و ضابطهٔ تابع مجهول، $y=-x^۳$ است.

پ) با توجه به نمودار تابع مجهول ملاحظه می‌شود که نمودار تابع $y=x^۳$ یک واحد به طرف چپ و یک واحد به طرف بالا رفته است. حدس ما این است که ضابطهٔ این تابع به‌صورت $y=(x+۱)^۳+۱$ است. حال با استفاده از نقاط روی نمودار داریم:

$x=-۱ \Rightarrow y=(-۱+۱)^۳+۱=۱$ ✓

$x=-۲ \Rightarrow y=(-۲+۱)^۳+۱=۰$ ✓

$x=۰ \Rightarrow y=(۰+۱)^۳+۱=۲$ ✓

بنابراین پاسخ ما صحیح بوده و ضابطهٔ نمودار مجهول، $y=(x+۱)^۳+۱$ است.

ت) در این شکل نمودار ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده و سپس یک واحد به طرف راست انتقال داده شده است. بنابراین ضابطهٔ آن به صورت $y=-(x-۱)^۳$ است. آزمایش جواب:

$x=۰ \Rightarrow y=-(۰-۱)^۳=۱$ ✓

$x=۱ \Rightarrow y=-(۱-۱)^۳=۰$ ✓

$x=۲ \Rightarrow y=-(۲-۱)^۳=-۱$ ✓

بنابراین حدس ما صحیح بوده و ضابطهٔ نمودار مجهول، $y=-(x-۱)^۳$ است.

۴ با استفاده از ضابطهٔ $f(n)$ داریم:

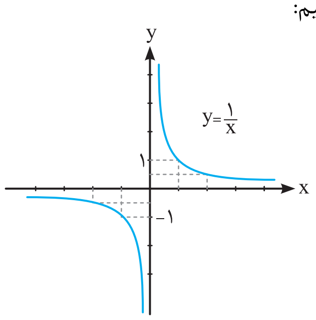
$$n=۵ \Rightarrow f(۵)=\frac{۱}{۲۴}(۵^۴-۶\times ۵^۳+۲۳\times ۵^۲-۱۸\times ۵+۲۴)$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(۶۲۵-۷۵۰+۵۷۵-۹۰+۲۴)=۱۶$$

۱۶ ناحیه روی دایره به وجود می‌آید.

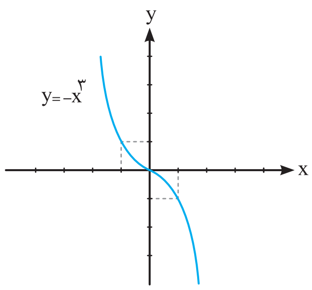
۵ نمودار توابع را رسم می‌کنیم و صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را در بازه‌ها مشخص می‌کنیم:

الف) $y=\frac{۱}{x}$



تابع $y=\frac{۱}{x}$ در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ نزولی است.

ب) $y=-x^۳$



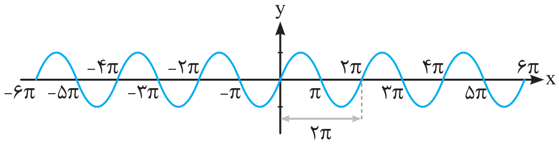
تابع $y=-x^۳$ در دامنهٔ خود یعنی $\mathbb{R}$ نزولی است.

فصل دوم - مثلثات

۲-۱ تناوب و تانژانت

تناوب در توابع مثلثاتی

به‌طورکلی تابع متناوب تابعی است که در یک فاصلهٔ مشخص، نمودار آن تکرار شود. به نمودار تابع $y=\sin x$ دقت کنید:



همان‌طورکه می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin x$ دربازهٔ $[۰,۲\pi]$ عیناً مانند نمودار در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$، $[۴\pi,۶\pi]$، $[-۲\pi,۰]$، $[-۴\pi,-۲\pi]$ و $[-۶\pi,-۴\pi]$ است، یعنی نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌هایی به طول ۲π عیناً تکرار می‌شود.

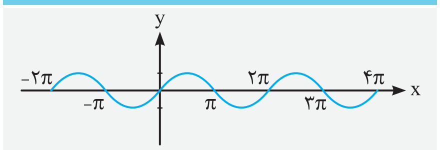
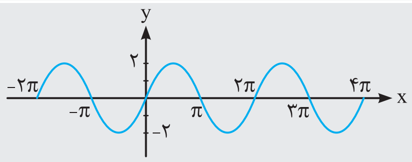
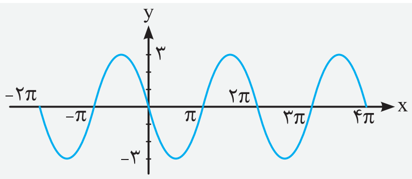
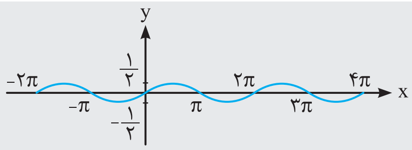
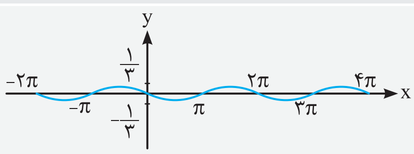
هم‌چنین نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ عیناً مانند نمودار در بازهٔ $[۴\pi,۸\pi]$ و $[-۴\pi,۰]$ و... است، یعنی نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌هایی به طول ۴π عیناً تکرار می‌شود.

به همین ترتیب نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌هایی به طول ۶π، ۸π، ۱۰π و... و $۲k\pi$ تکرار می‌شود. تابع $y=\sin x$ یک تابع متناوب است، زیرا نمودار آن در فاصله‌های مشخصی تکرار می‌شود.

نکته اگر عدد حقیقی $c>۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که تابع مفروض f در رابطهٔ $f(x\pm c)=f(x)$ (به شرطی که $x\pm c\in D_f$) صدق کند، آن‌گاه تابع f را متناوب گویند. کوچک‌ترین مقدار c که در این رابطه صدق کند را دورهٔ تناوب تابع f می‌گویند و آن را با T نمایش می‌دهند.

مثال **نمودار توابع زیر را رسم کرده و تأثیر ضریب a را در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنید.**

پاسخ

تابع	نمودار تابع	max	min	دورهٔ تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=۲\sin x$		۲	-۲	۲π
$y=-۳\sin x$		۳	-۳	۲π
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$		$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۲π
$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$		$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۲π

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود ضریب a در ضابطهٔ تابع $y=a\sin x$ تأثیری در دورهٔ تناوب آن ندارد، ولی ماکزیمم (max) آن $|a|$ و مینیمم (min) آن $-|a|$ است.

در مورد توابع با ضابطهٔ $y=a\cos x$ نیز این مطلب صدق می‌کند.

ب) اگر $x=۴۵^\circ$ باشد، داریم:

$$L=۳\tan x\xrightarrow{x=۴۵^\circ}L=۳\tan ۴۵^\circ\Rightarrow L=۳$$

۱۰ ابتدا با توجه به نمودار داده شده، مقادیر مجهول a و b را می‌یابیم. از نمودار پیداست که:

۱ تابع از نقطهٔ $(۰,۳)$ می‌گذرد. پس داریم: $۳=a+۰\Rightarrow a=۳$

۲ دورهٔ تناوب تابع برابر ۴ است، بنابراین داریم:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۵-۱=۴\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

اما با توجه به جهت حرکت نمودار تابع که بلافاصله در سمت راست محور yها، تابع به سمت پایین است (نمودار تابع $y=\sin x$، بلافاصله در سمت راست محور yها به سمت بالا حرکت می‌کند) پس $b=\frac{-۱}{۲}$ قابل قبول است. در نتیجه داریم:

$$y=a+\sin(b\pi x)\Rightarrow y=۳+\sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}}y=۳+\sin(\frac{-۲۵\pi}{۶})=۳-\frac{۱}{۲}=۲/۵$$

۱۱ دورهٔ تناوب تابع $y=\sin ax$ و تابع $y=\cos ax$ از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

الف) $y=\sin\frac{۱}{۲}x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$

ب) $y=\sin\sqrt{۲}x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\sqrt{۲}|}=\sqrt{۲}\pi$

پ) $y=\sin(-۴x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|-۴|}=\frac{\pi}{۲}$

ت) $y=\sin(\frac{\pi}{۲}x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴$

ث) $y=\cos(\frac{x}{۳})\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۳}|}=۶\pi$

ج) $y=\cos(\frac{\pi}{۳}x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۳}|}=۶$

چ) $y=\cos(-۴\pi x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|-۴\pi|}=\frac{۱}{۲}$

ح) $y=\cos(۵x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۵|}=\frac{۲\pi}{۵}$

۱۲ صفرهای تابع $y=\sin ax$ یا همان جواب‌های معادلهٔ $\sin ax=۰$ عبارتند از:

$$x=\frac{k\pi}{a}\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین صفرهای $y=\sin ۳x$، جواب‌های معادلهٔ $\sin ۳x=۰$ هستند و عبارتند از:

$$x=\frac{k\pi}{۳}\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

ریشه‌های $y=\sin\frac{x}{۳}$، جواب‌های معادلهٔ $\sin\frac{x}{۳}=۰$ هستند و عبارتند از:

$$x=\frac{k\pi}{\frac{۱}{۳}}=۳k\pi\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

۱۳ الف) از آن‌جایی که ۴۵° دو برابر $۲۲/۵^\circ$ است و مقدار $\cos ۴۵^\circ$ را می‌دانیم، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم تا مقدار $\cos ۲۲/۵^\circ$ را به‌دست آوریم:

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$$

به جای α، زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$ را قرار می‌دهیم:

$$\cos^۲(۲۲/۵^\circ)=\frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$، زاویه‌ای حاده و مقدار کسینوس آن مثبت است، پس:

$$\cos(۲۲/۵^\circ)=\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

ب) برای به‌دست آوردن مقدار $\sin ۷۵^\circ$، چون ۱۵۰° دو برابر ۷۵° است و مقدار $\cos ۱۵۰^\circ$ را می‌دانیم، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم تا مقدار $\sin ۷۵^\circ$ را به‌دست آوریم:

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

به جای α، زاویهٔ ۷۵° را قرار می‌دهیم:

$$\sin^۲ ۷۵^\circ=\frac{۱-\cos ۱۵۰^\circ}{۲}=\frac{۱-\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)}{۲}$$

$$=\frac{۱-(-\cos ۳۰^\circ)}{۲}=\frac{۱+\cos ۳۰^\circ}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}$$

$$=\frac{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$$

زاویهٔ ۷۵°، زاویه‌ای حاده و مقدار سینوس آن مثبت است، پس:

$$\sin ۷۵^\circ=\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

۱۴ می‌دانیم $\sin(۹۰^\circ+\alpha)=\cos\alpha$، داریم:

$$\sin(۹۷/۵^\circ)=\sin(۹۰^\circ+۷/۵^\circ)=\cos(۷/۵^\circ)$$

بنابراین:

$$\sin(۷/۵^\circ)\sin(۹۷/۵^\circ)\cos ۱۵^\circ=\sin(۷/۵^\circ)\cos(۷/۵^\circ)\cos ۱۵^\circ$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۱۵^\circ.\cos ۱۵^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

۱۵ از تساوی داده شده داریم:

$$\frac{\cancel{-}۲\cos x}{\sin x+۳\cos x}=\cancel{-}۲\Rightarrow\cos x=\sin x+۳\cos x$$

$$\Rightarrow -۲\cos x=\sin x\xrightarrow{\div\cos x}\tan x=-۲$$

ابتدا از مقدار مشخص شده برای $\tan x$، حاصل $\tan ۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^۲}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

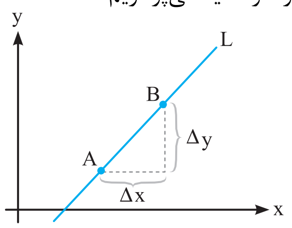
$$\Rightarrow\tan ۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\cot ۲x=\frac{۱}{\tan ۲x}=\frac{۳}{۴}$$

۱۶ عبارت داده شده را در $\sin ۱۲^\circ$ ضرب و تقسیم نموده و به کمک فرمول $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

فصل چهارم - مشتق

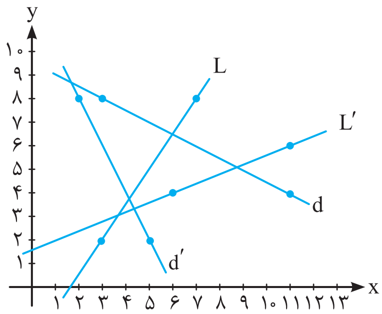
۴-۱ آشنایی با مفهوم مشتق

مفهوم مشتق تا اوایل قرن هفدهم میلادی یعنی تا قبل از آن‌که ریاضی‌دان فرانسوی، پیردوفرما به تعیین ماکزیمم و مینیمم‌های چند تابع خاص بپردازد، معرفی نشده بود. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع، به حل مسئله دیگر یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود، تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم مشتق هدایت کرد. برای آشنایی با این مفهوم، ابتدا به مفهوم شیب که قبلاً هم آن را فرا گرفته‌اید می‌پردازیم.



خط L را در نظر می‌گیریم، اگر از نقطهٔ A به نقطهٔ دیگری مانند B حرکت کنیم، نسبت تغییر ارتفاع به مسافت طی شده یا همان نسبت تغییر عرض به تغییر طول را شیب خط L می‌نامیم، یعنی:

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



مثال **در شکل مقابل خط‌های L و L' شیب مثبت و خط‌های d و d' شیب منفی دارند. درستی این مطلب را با محاسبهٔ شیب هر خط نشان دهید.**

پاسخ

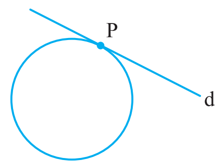
$$m_L = \frac{۸-۲}{۷-۳} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} > ۰$$

$$m_{L'} = \frac{۶-۴}{۱۱-۶} = \frac{۲}{۵} > ۰$$

$$m_d = \frac{۴-(۸)}{۱۱-۳} = \frac{-۴}{۸} = \frac{-۱}{۲} < ۰$$

$$m_{d'} = \frac{۲-(۸)}{۵-۲} = \frac{-۶}{۳} = -۲ < ۰$$

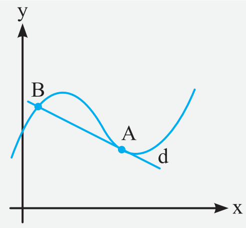
خط مماس بر یک منحنی

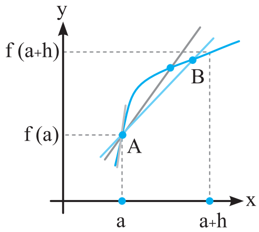


یافتن خط مماس در یک نقطه از منحنی از قرن‌ها پیش موضوع مهمی برای ریاضی‌دانان بوده است. از آن‌جایی‌که دایره منحنی خاص و پرکاربردی است ابتدا به مفهوم خط مماس بر دایره می‌پردازیم.

خط مماس بر دایره: خطی که با دایره **یک** و **فقط یک نقطهٔ مشترک** داشته باشد، مانند خط d که در نقطهٔ P بر دایره مماس است.

تذکر این تعریف برای منحنی‌های دیگر به کار نمی‌رود و نمی‌شود آن را تعمیم داد. منحنی‌های بسیاری وجود دارند که خطی در یک نقطه با آن‌ها مشترک است ولی ممکن است آن را در نقطه یا نقاط دیگری قطع کند. مانند منحنی مقابل که خط d در نقطهٔ A بر آن مماس است و در نقطهٔ B آن را قطع کرده است.





برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر یک منحنی کافی است شیب آن را پیدا کنیم. برای این کار منحنی f و نقطهٔ A به مختصات $(a, f(a))$ را روی آن در نظر می‌گیریم. برای یافتن شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A، نقطهٔ دیگری مانند B به مختصات $(a+h, f(a+h))$ را در نظر می‌گیریم. خط قاطع AB را رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ B را به A نزدیک و نزدیک‌تر کنیم، خطوط قاطع AB به خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A تبدیل می‌شوند.(این کار مبتنی بر مفهوم حد است.)

شیب این خط‌های قاطع در تمام حالت‌ها برابر $m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ است. اگر h به صفر میل کند درصورتی‌که این کسر به عدد حقیقی مشخصی میل کند، این عدد حقیقی شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A نامیده می‌شود.

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{شیب خط مماس بر منحنی } f \text{ در نقطهٔ } A$$

خط مماس

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بازی شامل نقطهٔ a تعریف شده باشد، خط مماس غیر عمودی در نقطهٔ $A(a, f(a))$ روی تابع، خطی است که از نقطهٔ A گذشته و شیب آن برابر با $m = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ است، البته به شرط آن‌که این حد موجود باشد.

پاسخ پرسش‌های فصل چهارم

۱

الف) $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{(۳+h)^۳-۲۷}{h}=\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{\cancel{۲۷}+۲۷h+۹h^۲+h^۳-\cancel{۲۷}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{\cancel{h}(۲۷+۹h+h^۲)}{\cancel{h}}=۲۷$

مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{(۳+h)^۳-۲۷}{h}$ ، مقدار مشتق راست تابع $f(x)=x^۳$ را در نقطهٔ ۳ نشان می‌دهد.

ب) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{((۲+h)^۲+۲)-۶}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۴+۴h+h^۲+۲-۶}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۴+h)}{\cancel{h}}=۴$

مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{((۲+h)^۲+۲)-۶}{h}$ ، مقدار مشتق تابع $f(x)=x^۲+۲$ را در نقطهٔ ۲ نشان می‌دهد.

پ) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{((-۲+h)+۱)^۲-۱}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(h-۱)^۲-۱}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h^۲-۲h+\cancel{۱}-\cancel{۱}}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h-۲)}{\cancel{h}}=-۲$

مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{((-۲+h)+۱)^۲-۱}{h}$ ، مقدار مشتق تابع $f(x)=(x+۱)^۲$ را در نقطهٔ -۲ نشان می‌دهد.

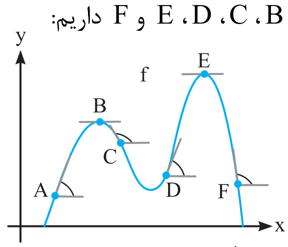
ت) $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{((۱+h)^۳-۴)+۳}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{\cancel{۱}+۳h^۲+۳h+h^۳-\cancel{۴}+\cancel{۳}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{\cancel{h}(۳h+۳+h^۲)}{\cancel{h}}=۳$

مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{((۱+h)^۳-۴)+۳}{h}$ ، مقدار مشتق چپ تابع $f(x)=x^۳-۴$ را در نقطهٔ ۱ نشان می‌دهد.

۲ با توجه به نمودار تابع و نقاط A، B، C، D، E و F داریم:



الف) شیب خطوط مماس در نقاط A و D مثبت است.

ب) شیب خطوط مماس در نقاط C و F منفی است.

پ) شیب خطوط مماس در نقاط B و E صفر است.

ت) با توجه به خطوط مماس در نقاط A و D و زاویه‌هایی که این خطوط با جهت مثبت محور xها می‌سازند می‌بینیم که زاویهٔ خط مماس بر نقطهٔ A بزرگ‌تر است، بنابراین شیب خط مماس در نقطهٔ A بیش‌ترین مقدار خود را دارد.

ث) با توجه به خطوط مماس در نقاط C و F و زاویه‌هایی که این خطوط با جهت مثبت محور xها می‌سازند می‌بینیم که زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ C بزرگ‌تر است، بنابراین شیب خط مماس در نقطهٔ F کم‌ترین مقدار خود را دارد.

۳ ابتدا شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲$ را در نقطهٔ ۲ به‌دست می‌آوریم:

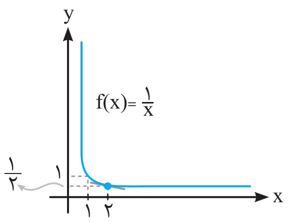
$m=f'(۲)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^۲-۴}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cancel{۴}+۴h+h^۲-\cancel{۴}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۴+h)}{\cancel{h}}=۴$

$y-y_۰=m(x-x_۰)\ ,\ x_۰=۲\ ,\ y_۰=۲^۲=۴$

$\Rightarrow y-۴=۴(x-۲)\Rightarrow y-۴=۴x-۸\Rightarrow y=۴x-۴$

۴ ابتدا نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰,+\infty)$ رسم می‌کنیم سپس خط مماس را در نقطهٔ ۲ رسم می‌کنیم. همان‌طورکه مشاهده می‌شود زاویهٔ این خط مماس با جهت مثبت محور xها یک زاویهٔ منفرجه است بنابراین تانژانت آن منفی بوده و شیب خط مماس نیز منفی است. حال با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:



$f'(۲)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۱}{h}(\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲})$

$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۲-(۲+h)}{۲h(۲+h)}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}}{۲\cancel{h}(۲+h)}$

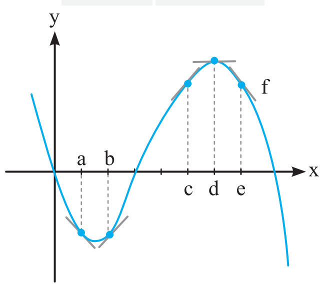
$=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{-۱}{۲(۲+h)}=-\frac{۱}{۴}$

۵ ابتدا خطوط مماس را در نقاط مشخص شده رسم می‌کنیم. وقتی $f'(x)=۰$، شیب خط مماس در نقطهٔ x باید صفر باشد، یعنی $x=d$.

مشتق در نقاط b و c مثبت ولی نمودار در c تندتر است (شیب بیش‌تری دارد)، بنابراین: $f'(c)=۲$ و $f'(b)=۰/۵$

هم‌چنین مشتق در نقاط a و e منفی ولی نمودار در نقطهٔ e تندتر است بنابراین: $f'(e)=-۰/۵$ و $f'(a)=-۱$

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۲
e	−۰/۵



پرسش‌های فصل پنجم - درس دوم

۱۶. دو عدد حقیقی مثبت پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۱۲ باشد و حاصل‌ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۷. دو عدد حقیقی پیدا کنید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل‌ضربشان کمترین مقدار ممکن شود.

۱۸. اگر h ارتفاع و L قاعدهٔ یک مثلث باشد به طوری که $h+2L=5$، بیشترین مقدار برای مساحت این مثلث چقدر است؟

۱۹. می‌خواهیم یک مزرعه کوچک به مساحت ۱۰۰ متر مربع را دیوارکشی کنیم. اگر هزینهٔ دیوارکشی برای دیوارهای افقی و عمودی به ترتیب ۲ و ۸ میلیون تومان باشد، ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینهٔ دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

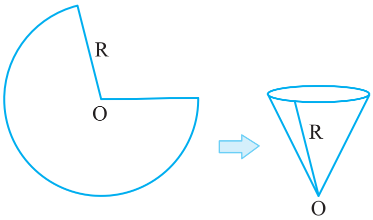
۲۰. هر صفحه از یک کتاب شامل یک متن با مساحت ثابت $32\,cm^2$ است. اگر حاشیه‌های بالا و پایین، $2\,cm$ و حاشیه‌های کناری هر کدام $1cm$ باشند، ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب، کمترین مقدار ممکن شود؟ (نهایی)

۲۱. یک مستطیل در یک نیم‌دایره به شعاع ۴ سانتی‌متر به‌گونه‌ای محاط شده که یک ضلع آن در امتداد قطر نیم‌دایره است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟

۲۲. یک مستطیل در یک نیم‌دایره به شعاع ۴ سانتی‌متر به گونه‌ای محاط شده که یک ضلع آن در امتداد قطر نیم‌دایره است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا محیط آن ماکزیمم شود؟

۲۳. از یک قرص به شعاع R، قطاعی می‌بریم و با قسمت مانده، یک مخروط می‌سازیم.

بیشترین حجم ممکن برای مخروط را به‌دست آورید.

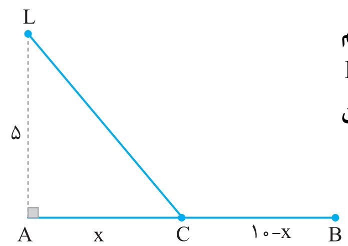


۲۴. یک استوانه را در یک کره به شعاع ۳ واحد محاط کرده‌ایم. بیشترین حجم این استوانه چقدر است؟

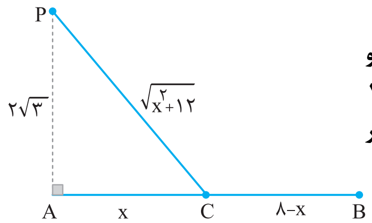
۲۵. یک استوانه را در یک مخروط به شعاع ۳ و ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط کرده‌ایم. بیشترین حجم این استوانه چقدر است؟

۲۶. غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+16}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن را دارد؟

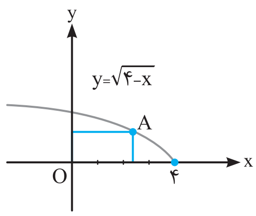
۲۷ چراغ دریایی L در یک جزیرهٔ کوچک و در ۵ کیلومتری نقطهٔ A در ساحل قرار دارد. می‌خواهیم از L به نقطهٔ B در ساحل که در ۱۰ کیلومتری A قرار دارد، کابل بکشیم. اگر هزینهٔ کابل‌کشی از L به C (در زیر آب) برای هر کیلومتر ۵ میلیون و از C به B (در ساحل) برای هر کیلومتر ۳ میلیون باشد، نقطهٔ C را کجا انتخاب کنیم تا هزینهٔ کابل‌کشی مینیمم شود؟



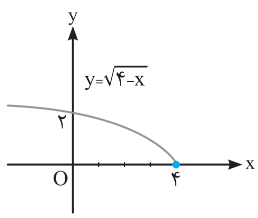
۲۸. محسن درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که از نقطهٔ A در ساحل $2\sqrt{3}$ کیلومتر فاصله دارد. او می‌خواهد به نقطهٔ B در ساحل که در ۸ کیلومتری نقطهٔ A قرار دارد، برسد. اگر سرعت قایق ۲ کیلومتر در ساعت و سرعت پیاده‌روی او در ساحل ۴ کیلومتر در ساعت باشد، محل پیاده‌شدن او در ساحل (نقطهٔ C) را به‌گونه‌ای پیدا کنید که در کوتاه‌ترین زمان ممکن به نقطهٔ B برسد. (نهایی)



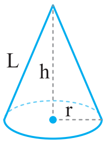
۲۹. در شکل مقابل نقطهٔ A را روی منحنی $y=\sqrt{4-x}$ انتخاب کرده‌ایم. مختصات نقطهٔ A را به گونه‌ای بیابید که مساحت مستطیل ایجاد شده بیشترین مقدار ممکن شود؟



۳۰. کمترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از منحنی $y=\sqrt{4-x}$ را تعیین کنید.



◄ **مخروط قائم:** اگر r شعاع قاعده، h ارتفاع و L مولد مخروط باشد، آن‌گاه:

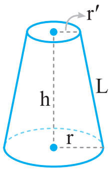


$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{(حجم)}$$

$$S'=\pi r L \ (L=\sqrt{r^2+h^2}) \quad \text{(سطح جانبی)}$$

$$S=\pi r L+\pi r^2 \quad \text{(سطح کل)}$$

◄ **مخروط ناقص:** اگر r و r' شعاع قاعده‌ها، h ارتفاع و L مولد مخروط ناقص باشد، آن‌گاه:

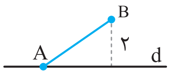


$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2) \quad \text{(حجم)}$$

$$S'=\pi(r+r')L \quad \text{(سطح جانبی)}$$

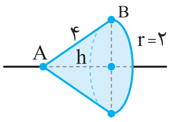
$$S=\pi(r+r')L+\pi r^2+\pi r'^2 \quad \text{(سطح کل)}$$

مثال **پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر حول خط d مطابق شکل مقابل دوران می‌یابد. حجم و سطح شکل حاصل از دوران را پیدا کنید.**



پاسخ از دوران پاره‌خط AB حول خط d، یک مخروط قائم به‌صورت زیر ساخته می‌شود. شعاع دوران $r=2$ است.

اکنون ارتفاع را محاسبه می‌کنیم:



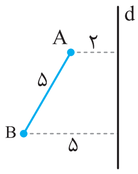
$$h^2+r^2=AB^2 \Rightarrow h^2+4=16 \Rightarrow h^2=12 \Rightarrow h=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

پس:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\times\pi\times 4\times 2\sqrt{3}=\frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$$

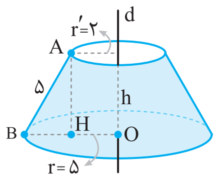
$$S=\pi r L+\pi r^2=\pi\times 2\times 4+\pi\times 4=8\pi+4\pi=12\pi$$

مثال **پاره‌خط AB حول خط d مطابق شکل مقابل دوران می‌یابد. حجم و مساحت شکل حاصل را به‌دست آورید.**



پاسخ از دوران پاره‌خط AB حول محور d، یک سطح مخروطی ناقص حاصل می‌شود. با توجه به شکل، $r=5$ و $r'=2$.

اکنون طول ارتفاع یعنی h را پیدا می‌کنیم.



در مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$:

$$AH^2+BH^2=AB^2 \xrightarrow{BH=5-2=3} AH^2+3^2=5^2 \Rightarrow AH^2=16 \Rightarrow AH=h=4$$

بنابراین:

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)=\frac{1}{3}\pi\times 4(25+10+4)=52\pi$$

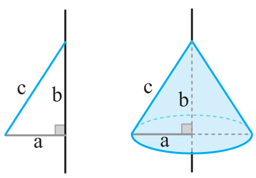
$$S=\pi(r+r')L=\pi(5+2)\times 5=35\pi$$

دوران مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم a و b و طول وتر c را حول یک محور در حالت‌های زیر دوران می‌دهیم:

الف) دوران حول یکی از اضلاع قائم:

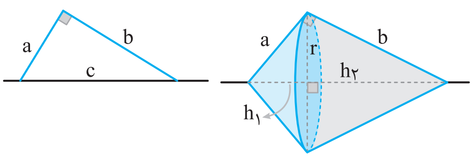
حاصل این دوران، یک مخروط به شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b است.



ب) دوران حول وتر:

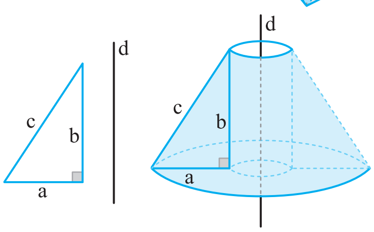
حاصل این دوران، دو مخروط است که از قاعده به هم چسبیده‌اند.

ارتفاع اولی h_1 و ارتفاع دومی h_2 است که $h_1+h_2=c$. شعاع قاعدهٔ هر دو مخروط، یعنی r، همان ارتفاع وارد بر وتر است. از هندسه ۱ می‌دانیم که $h_1=\frac{a^2}{c}$ و $h_2=\frac{b^2}{c}$. همچنین طول شعاع دوران یعنی r از رابطهٔ $r=\frac{a\times b}{c}$ به‌دست می‌آید.



پ) دوران حول محوری موازی یکی از اضلاع قائم:

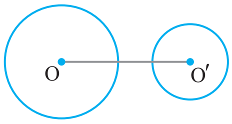
حاصل این دوران، یک مخروط ناقص توخالی است.



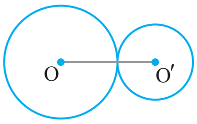
اوضاع نسبی دو دایره

دو دایرهٔ دلخواهِ $C(O\,,r)$ و $C'(O'\,,r')$ را در نظر بگیرید، (فرض می‌کنیم $r \geq r'$). پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط‌المرکزین نامیده می‌شود و آن‌را با d نشان می‌دهیم، پس $OO'=d$ است. وضعیت دو دایره نسبت به یکدیگر، یکی از حالت‌های زیر است:

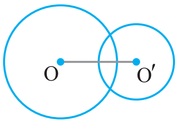
۱ دو دایره بیرون هم (متخارج) هستند. $d > r + r'$



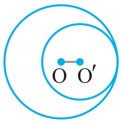
۲ دو دایره مماس بیرون‌اند. $d = r + r'$



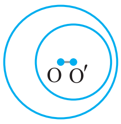
۳ دو دایره متقاطع‌اند. $r - r' < d < r + r'$



۴ دو دایره مماس درون‌اند. $d = r - r'$



۵ دو دایره متداخل‌اند. $d < r - r'$



۶ دو دایره هم‌مرکزاند. $d = ۰$

مثال **وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x-۴y-۴=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.**

پاسخ کافی است r، r' و $d=OO'$ را به‌دست آوریم.

از روابط $O(\frac{-a}{۲}\,,\frac{-b}{۲})$ و $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ استفاده می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰ \Rightarrow O(-۱\,,۱)\,,\, r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۰}=\sqrt{۲}$$

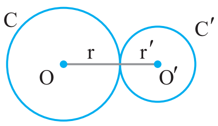
$$x^۲+y^۲-۲x-۴y-۴=۰ \Rightarrow O'(۱\,,۲)\,,\, r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}=۳$$

$$d=OO'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

بنابراین $r'-r<d<r+r'$، پس دو دایره متقاطع‌اند.

مثال **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۶y+۱۲=۰$ مماس بیرون بوده و مرکز آن نقطهٔ $O(۱\,,-۱)$ باشد.**

پاسخ اگر دایرهٔ داده شده را $C'(O'\,,r')$ بنامیم، با توجه به شکل، $d=r+r'$. ابتدا $d=OO'$ را به‌دست می‌آوریم و از این تساوی r را پیدا می‌کنیم:



$$C': x^۲+y^۲+۴x-۶y+۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(\frac{-a}{۲}\,,\frac{-b}{۲})=(-۲\,,۳) \\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۴۸}=۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(۱\,,-۱) \\ O'(-۲\,,۳) \end{cases} \Rightarrow d=OO'=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

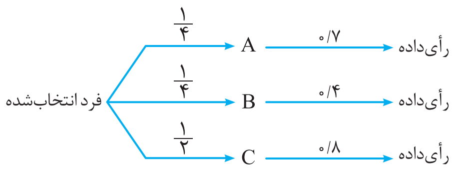
$$d=r+r' \Rightarrow r=d-r'=۵-۱=۴$$

اکنون با در اختیار داشتن $r=۴$ و $O(۱\,,-۱)$، معادلهٔ دایرهٔ C را در شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$C:(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۶$$

مثال **میزان مشارکت ۳ شهر A، B و C از یک استان در انتخابات، ۷۰٪، ۶۰٪ و ۸۰٪ است. جمعیت این سه شهر به ترتیب، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ جمعیت این استان را تشکیل می‌دهند. اگر فردی به تصادف از این استان انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد رأی داده است؟**

پاسخ چون $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=۱$ است پس این سه شهر این استان را افراز می‌کنند،پس از قانون احتمال کل می‌توان استفاده کرد؛ حال نمودار درختی این پیشامد را رسم می‌کنیم:

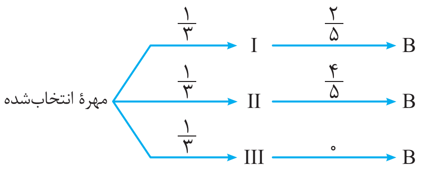


$$\Rightarrow P(\text{رأی‌داده})=P(A)P(\text{رأی‌داده}\,|\,A)+P(B)P(\text{رأی‌داده}\,|\,B)+P(C)P(\text{رأی‌داده}\,|\,C)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times ۰/۷+\frac{۱}{۴}\times ۰/۶+\frac{۱}{۲}\times ۰/۸=\frac{۲۹}{۴۰}$$

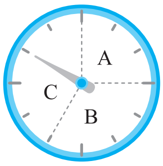
مثال **جعبهٔ I شامل ۲ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز، جعبهٔ II شامل ۴ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز و جعبهٔ III شامل ۴ مهرهٔ قرمز است. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که این مهره آبی باشد، چقدر است؟**

پاسخ قرمز و آبی را به ترتیب با R و B نشان می‌دهیم. با رسم نمودار درختی، $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(B)=P(I)P(B\,|\,I)+P(II)P(B\,|\,II)+P(III)P(B\,|\,III)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۳}\times ۰=\frac{۲}{۵}$$

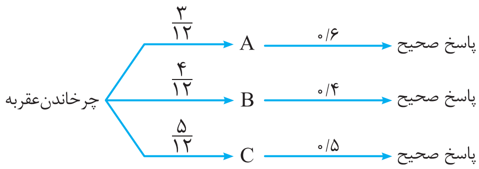
مثال **در شکل زیر، عقربهٔ چرخان حول مرکز دایره می‌چرخد و در یک ناحیه متوقف می‌شود. اگر در ناحیهٔ A بایستد، یک سؤال ورزشی، اگر در ناحیهٔ B بایستد، یک سؤال تاریخی و اگر در ناحیهٔ C بایستد، یک سؤال ریاضی از سینا پرسیده می‌شود. توانایی سینا در پاسخ صحیح دادن به سؤالات ورزشی، تاریخی و ریاضی به ترتیب ۰/۶، ۰/۴ و ۰/۵ است. با چه احتمالی سینا می‌تواند در این مسابقه برنده شود؟**



پاسخ مساحت دایره به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده است. با توجه به شکل، احتمال قرارگیری عقربه در این ناحیه‌ها برابر است با:

$$P(A)=\frac{۳}{۱۲}\quad,\quad P(B)=\frac{۴}{۱۲}\quad,\quad P(C)=\frac{۵}{۱۲}$$

اکنون نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



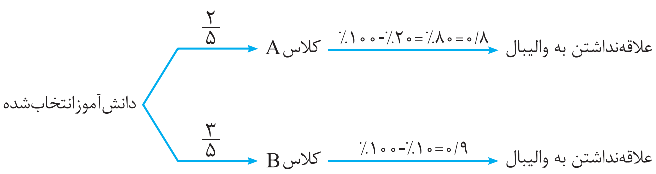
$$\Rightarrow P(\text{پاسخ‌صحیح})=\frac{۳}{۱۲}\times ۰/۶+\frac{۴}{۱۲}\times ۰/۴+\frac{۵}{۱۲}\times ۰/۵=\frac{۵۹}{۱۲۰}$$

مثال **در کلاس A، ۲۰ درصد و در کلاس B، ۱۰ درصد دانش‌آموزان به والیبال علاقه دارند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A، $\frac{۲}{۳}$ تعداد دانش‌آموزان کلاس B باشد، و دانش‌آموزی به تصادف از این دو کلاس انتخاب شود، به چه احتمالی این دانش‌آموز به والیبال علاقه ندارد؟**

پاسخ اگر S مجموعهٔ کل دانش‌آموزان دو کلاس A و B باشد، آن‌گاه $n(A)+n(B)=n(S)$ و چون $n(A)=\frac{۲}{۳}n(B)$، بنابراین داریم:

$$\frac{۲}{۳}n(B)+n(B)=n(S)\Rightarrow\frac{۵}{۳}n(B)=n(S)\Rightarrow n(B)=\frac{۳}{۵}n(S)\ ,\ n(A)=\frac{۲}{۵}n(S)$$

پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۵}$ و $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۵}$. اکنون نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{علاقه‌نداشتن‌به‌والیبال})=\frac{۲}{۵}\times ۰/۸+\frac{۳}{۵}\times ۰/۹=\frac{۴۳}{۵۰}=۰/۸۶$$

مثال **دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ قرمز و در دومی ۳ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، این مهره قرمز است؟**

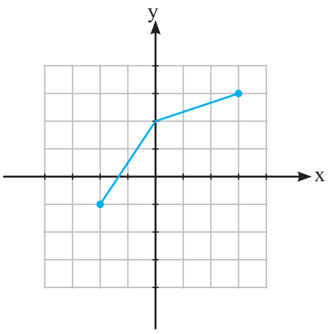
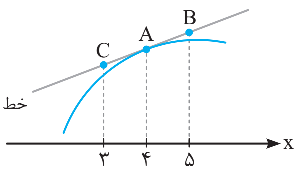
پاسخ رنگ مهرهٔ خارج شده در آخرین مرحله از ظرف دوم، وابسته به رنگ مهره‌ای است که از ظرف اول به ظرف دوم منتقل شده است. نمودار درختی این مسئله را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

آزمون‌ها

۳ دوره امتحان نهایی

به‌همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی

سؤال امتحان نهایی نوبت دوم			
درس: ریاضی ۳ (دوازدهم)	رشته: تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: دی

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. الف) تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و ... $g(x)=$ است. ب) حد تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ;x>۰\\ \frac{۵x^۲-۳x}{-x^۲+۱} & ;x\leq ۰\end{cases}$ وقتی $x\to -\infty$ برابر .... است. پ) اگر $f'(۲)=۳$ و $g'(۲)=۵$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $(۲g-f)'(۲)$ برابر .... است. ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر .... است.	۱
۳	الف) توابع $f(x)=\frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x)=۳x-۱$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.	۱/۷۵
۴	با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})-۲$ را رسم کنید.  	۰/۷۵
۵	الف) دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به‌دست آورید. ب) دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(۲x)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin x-\cos ۲x=۰$ را حل کنید.	۱/۵
۷	حد توابع زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}$	۱/۷۵
۸	برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۴$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A ،B و C را بیابید.  	۰/۷۵
۹	اگر $f(x)=۱-۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۰	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=(\frac{x}{۲x-۱})^۵$ ب) $g(x)=x^۲(\sqrt{x}+۱)$	۲

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها

آزمون ۱- نوبت دوم

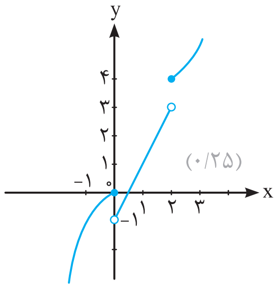
۱ اگر تابع y دو واحد به طرف راست انتقال یابد، به صورت $y=(x-۲)^۳+۱$ می‌شود (۰/۲۵) و اگر تابع دو واحد به طرف پایین انتقال داده شود، به صورت زیر می‌شود:

$$\underbrace{y=(x-۲)^۳+۱-۲}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(x-۲)^۳-۱}_{(۰/۵)}$$

۲ اکیداً صعودی $(-\infty,۰]$ (۰/۲۵)

اکیداً صعودی $(۰,۲)$ (۰/۲۵)

اکیداً صعودی $[۲,+\infty)$ (۰/۲۵)



۳

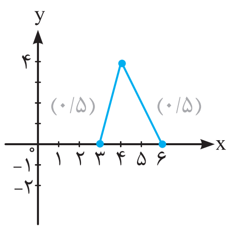
$$(fog)(x)=\underbrace{f(g(x))=f(\cos x)}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\underbrace{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\sqrt{\sin^۲ x}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{|\sin x|}_{(۰/۲۵)}$$

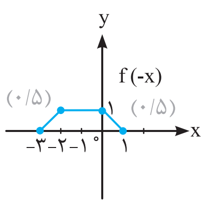
$$(gof)(x)=\underbrace{g(f(x))=g(\sqrt{۱-x^۲})}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\cos(\sqrt{۱-x^۲})}_{(۰/۲۵)}$$

$$(gog)(x)=\underbrace{g(g(x))=g(\cos x)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\cos(\cos x)}_{(۰/۲۵)}$$

۴



۵



۶

الف) $f(x)=y=۷x-۵\Rightarrow x=\frac{y+۵}{۷}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۵}{۷}$ (۰/۲۵)

$g(x)=y=۲-x\Rightarrow x=۲-y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۲-x$ (۰/۲۵)

ب) $(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(\frac{x+۵}{۷})$ (۰/۲۵)

$=\underbrace{۲-(\frac{x+۵}{۷})}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱۴-x-۵}{۷}=\frac{۹-x}{۷}$ (۰/۲۵)

پ) $(fog)(x)=f(g(x))=f(۲-x)=۷(۲-x)-۵$ (۰/۲۵)

$=۱۴-۷x-۵=۹-۷x\Rightarrow y=۹-۷x\Rightarrow x=\frac{۹-y}{۷}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=\frac{۹-x}{۷}$ (۰/۲۵)

۷

الف) $T=\frac{۲\pi}{|۸|}=\frac{\pi}{۴}$ (۰/۲۵)

$\max=|۲|+۳=۵$ (۰/۲۵) و $\min=-|۲|+۳=۱$ (۰/۲۵)

ب) $T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲$ (۰/۲۵)

$\max=|-\pi|-۲=\pi-۲$ (۰/۲۵) و $\min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲$ (۰/۲۵)

۸ خیر این جمله صحیح نیست. (۰/۲۵)

چون مثلاً $\frac{۳\pi}{۴}>\frac{\pi}{۴}$ ولی $\underbrace{\tan\frac{۳\pi}{۴}}_{-۱}<\underbrace{\tan\frac{\pi}{۴}}_{۱}$ (۰/۲۵)

۹

$$\underbrace{\cos ۳۰°=۱-۲\sin^۲ ۱۵°}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱-۲\sin^۲ ۱۵°}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۱۵°=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow \sin ۱۵°=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{\sin ۳۰°=۲\sin ۱۵°\cos ۱۵°}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{\frac{۱}{۲}=۲\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}\times\cos ۱۵°}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\cos ۱۵°\Rightarrow \cos ۱۵°=\frac{۱}{۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\ (۰/۲۵)$$

۱۰

$۴\sin x+\sqrt{۸}=۰\Rightarrow ۴\sin x=-\sqrt{۸}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \sin x=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴})$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow\begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} & ;\ k\in\mathbb{Z}\ (۰/۲۵)\\ x=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۴})=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴} & ;\ k\in\mathbb{Z}\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

۱۱

$x=-۲\Rightarrow\underbrace{(-۲)^۳+a(-۲)^۲+۳=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow -۸+۴a+۳=۰$

$\Rightarrow ۴a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow p(x)=x^۳+\frac{۵}{۴}x^۲+۳=۰\Rightarrow ۴x^۳+۵x^۲+۱۲=۰$

$$(۰/۲۵)\ \begin{array}{l|l} ۴x^۳+۵x^۲+۱۲ & x+۲ \\ \hline -۴x^۳\mp ۸x^۲ & ۴x^۲-۳x+۶\ \ (۰/۲۵) \\ -۳x^۲+۱۲ & \\ \pm ۳x^۲\pm ۶x & \\ ۶x+۱۲ & \\ -۶x\pm ۱۲ & \\ ۰ & \end{array}$$