فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس ریاضی ۲

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۶	۲
دوم		۶	۲/۵
سوم		۶	۲/۵
چهارم	تا صفحه ۷۶	۲	۳
	صفحه ۷۷ به بعد	-	
پنجم		-	۳/۵
ششم		-	۳/۵
هفتم		-	۳
جمع		۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر ۱

فصل اول کتاب شامل هندسهٔ تحلیلی، معادلهٔ درجه دوم، سهمی، معادلهٔ گویا و معادلهٔ رادیکالی است. از این فصل در امتحان نوبت اول ۶ نمره و در امتحان خرداد، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۲/۵ نمره سؤال مطرح می‌شود. این فصل دارای ۵ بسته است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بستهٔ ۱ | بستهٔ ۲ | بستهٔ ۳ | بستهٔ ۴ و ۵

بستهٔ اول

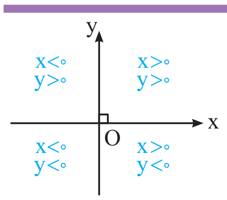
بخش اول هندسه تحلیلی (معادلهٔ خط)

صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی

با معادلهٔ خط، رسم خط، نوشتن معادلهٔ خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف معادلهٔ خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هرکدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطهٔ A از صفحه، یک زوج‌مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در شکل مقابل مشخص شده است:



! نکته ❶ اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به‌صورت $(x,0)$ می‌باشد.

❷ اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به‌صورت $(0,y)$ می‌باشد.

معادلهٔ خط: معادلهٔ یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به‌صورت $ax+by+c=0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی $a^2+b^2\neq 0$

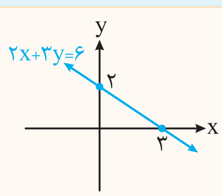
ب رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادلهٔ یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

سؤال نمودار خط به معادلهٔ $2x+3y=6$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

پاسخ در معادله به جای x ، دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار y به‌دست آید و از آن‌جا با مشخص شدن مختصات دو نقطه، خط را رسم می‌کنیم:

x	۰	۳
y	۲	۰



شیب خط

شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطهٔ دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ دو نقطه روی یک خط باشند و $x_A \neq x_B$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال شیب خط گذرنده از نقاط $A(1 , -4)$ و $B(3 , 2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-4)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

محاسبهٔ شیب خط با داشتن معادلهٔ خط

۱ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = 0$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq 0$، آن‌گاه:

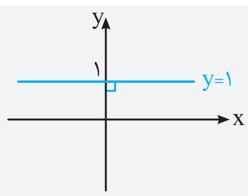
$$\text{شیب خط} = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = -\frac{a}{b}$$

مثال شیب خط به معادلهٔ $2x + 3y = 1$ برابر $-\frac{2}{3} = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}$ است.

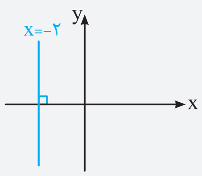
۲ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + h$ باشد، آن‌گاه شیب خط برابر m (ضریب x) است.

مثال شیب خط به معادلهٔ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ برابر $m = -\frac{1}{2}$ است.

! نکته **۱** اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطهٔ (a , b) بگذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = 1$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.

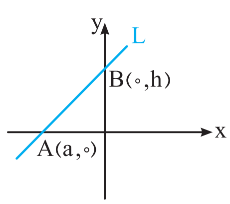


۲ اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطهٔ (a , b) بگذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -2$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.



طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست

با توجه به شکل مقابل، خط L محور x ها را در نقطهٔ $A(a , 0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می‌گوییم. هم‌چنین خط L محور y ها را در نقطهٔ $B(0 , h)$ قطع کرده است، h را عرض از مبدأ خط L می‌گوییم.



! نکته معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y = mx + h$ می‌باشد.

حالا می‌خواهیم معادلهٔ خط را بنویسیم. در دو حالت می‌توانیم معادلهٔ خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادلهٔ خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

پ نوشتن معادلهٔ خط

حالت اول اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ بگذرد، آن‌گاه معادلهٔ خط از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-1 , 3)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.**

پاسخ در رابطهٔ $y - y_1 = m(x - x_1)$، به جای x_1 عدد -1، به‌جای y_1 عدد ۳ و به‌جای m، عدد ۴ قرار می‌دهیم. داریم:

$$y - 3 = 4(x + 1) \Rightarrow y - 3 = 4x + 4 \Rightarrow y = 4x + 4 + 3 \Rightarrow y = 4x + 7$$

حالت دوم اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ بگذرد، آن‌گاه شیب خط از رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به‌دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادلهٔ خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطهٔ مقابل استفاده کرد:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ x_2 \neq x_1$$

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $(۲,-۵)$ و $(-۲,۷)$ بگذرد.**

پاسخ $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-(-۵)}{-۲-۲}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳\ ,\ A(۲,-۵)\Rightarrow y-(-۵)=-۳(x-۲)\Rightarrow y+۵=-۳x+۶\Rightarrow y=-۳x+۱$

نکته اگر $x_۱=x_۲$، آن‌گاه معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به‌صورت $x=x_۱$ است و اگر $y_۱=y_۲$، آن‌گاه معادلهٔ خط به‌صورت $y=y_۱$ می‌باشد.

ت وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی‌اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند.

نکته اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۳,-۴)$ بگذرد و موازی خط $۵x-۳y=۱$ باشد.**

پاسخ شیب خط $۵x-۳y=۱$ برابر $m=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{۵}{-۳}=\frac{۵}{۳}$ است. از آن جایی‌که شیب دو خط موازی با هم برابرند، پس باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از نقطهٔ $(۳,-۴)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{۵}{۳}$ است:

$$y-(-۴)=\frac{۵}{۳}(x-۳)\xrightarrow{\times ۳}۳(y+۴)=۵(x-۳)\Rightarrow ۳y+۱۲=۵x-۱۵\Rightarrow ۳y-۵x+۲۷=۰$$

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع‌اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ معادلهٔ دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+c=۰\\a'x+b'y+c'=۰\end{cases}$، محل تلاقی دو خط به‌دست می‌آید.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات $x+۲y=-۵$ و $۲x-y=۰$ و نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد.**

پاسخ ابتدا محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}x+۲y=-۵\\۲x-y=۰\end{cases}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x+۲y=-۵\\ ۲\times\ ۲x-y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+۲y=-۵\\۴x-۲y=۰\end{cases}\Rightarrow ۵x=-۵\Rightarrow x=-۱\xrightarrow{۲x-y=۰}-۲-y=۰\Rightarrow y=-۲$$

بنابراین نقطهٔ $(-۱,-۲)$ محل تلاقی دو خط است. برای نوشتن معادلهٔ خط داریم:

$$\begin{cases}A(-۱,-۲)\\B(۳,۵)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵+۲}{۳+۱}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow y+۲=\frac{۷}{۴}(x+۱)\xrightarrow{\times ۴}۴(y+۲)=۷(x+۱)\Rightarrow ۴y-۷x+۱=۰$$

دو خط عمود بر هم

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سؤالات خوبی مطرح می‌شود.

نکته اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm'=-۱$، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینهٔ هم می‌باشند.

سؤال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد و بر خط به معادلهٔ $y=-۲x+۳$ عمود باشد.**

پاسخ شیب خط $y=-۲x+۳$ برابر $m=-۲$ است، پس شیب خط عمود بر این خط برابر $m'=-\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد و شیب آن $\frac{۱}{۲}$ باشد، به‌صورت زیر است:

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x+۱)\xrightarrow{\times ۲}۲(y-۴)=(x+۱)\Rightarrow ۲y-۸=x+۱\Rightarrow ۲y-x-۹=۰$$

بسته ۱ **پرسش‌های تشریحی** بخش اول هندسه تحلیلی (معادلهٔ خط)

● درجاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱ . از هر دو نقطهٔ متمایز .... یک خط عبور می‌کند.

۲ . اگر خط L ، محور x ها را در نقطهٔ با طول a قطع کند، آن‌گاه a ، .... خط L نامیده می‌شود و اگر خط L ، محور y ها را در نقطهٔ با عرض b قطع کند، آن‌گاه b ، .... خط L نامیده می‌شود.

۳ . معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۷ , ۰)$ و شیب -۲ برابر .... است.

۴ . دو خط موازی دارای .... برابر هستند.

۵ . شیب خط $۲x + ۵y = ۱۱$ برابر .... است.

۶ . شیب هر خط موازی با محور x ها برابر .... است.

۷ . نمودار هر یک از خط‌های زیر را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲ کتاب درسی)

آ) $y = -۲x + ۵$　ب) $۲x - y = ۱$　پ) $۳x + ۴y = ۱۲$　ت) $x = -۱$　ث) $y = ۴$

۸ . در هر یک از قسمت‌های زیر، معادلهٔ خط را بنویسید.

آ) شیب خط -۴ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ باشد.　ب) شیب خط ۵ باشد و از نقطهٔ $(-۲ , -۳)$ بگذرد.

پ) خط از نقاط $(-۱ , ۲)$ و $(۱ , ۰)$ بگذرد.

ت) خط از نقطهٔ $(۰ , ۳)$ بگذرد و با خط $۵x + ۳y = ۲$ موازی باشد. (مشابه کار در کلاس ۶ صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

ث) خط از نقطهٔ $(۲ , ۴)$ بگذرد و عمود بر خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = ۴$ باشد.

ج) طول از مبدأ خط ۲ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

۹ . معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(-۴ , ۱)$ و موازی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۵ , ۱)$ و $(-۴ , ۳)$ را بنویسید.

۱۰ . معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۳ , ۲)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲ , ۰)$ و $(-۱ , ۶)$ را بنویسید.

۱۱ . معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۳ , -۲)$ و نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات $۴x - y = ۱$ و $x + ۲y = ۷$ را بنویسید.

۱۲ . وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود) (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

$L_۱ : -۳x + ۵y = ۱$, $L_۲ : ۳x - y = ۱$, $L_۳ : ۵x + ۳y = ۷$, $L_۴ : ۶x = ۲y + ۵$

۱۳ . دو خط به معادلات $۳x + (۲m + ۱)y = ۴$ و $mx + ۷y = ۱۱$ داده شده است. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.

۱۴ . مقدار m را طوری به‌دست آورید که دو خط به معادلات $۲x + (-m + ۴)y = ۳$ و $(۵ + ۳m)x + (m^۲ + ۴)y = ۷$ با هم موازی باشند.

۱۵ . خط گذرنده از دو نقطهٔ $(m , ۲m)$ و $(۱ , -۱)$ بر خط به معادلهٔ $۲x - ۵y = ۷$ عمود است. مقدار m را به‌دست آورید.

۱۶ . مربع $ABCD$ که $A(۴ , ۱)$ و $B(۶ , ۲)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) شیب ضلع AB را بیابید و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) شیب ضلع BC را به‌دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

پ) اگر $D(-۱ , ۱۱)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.

۱۷ . مقدار a را طوری به‌دست آورید که نقاط $(۳ , ۱)$ ، $(۵ , -۳)$ و $(a , ۲a - ۱)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.

۱۸ . مقدار m را طوری به‌دست آورید که سه خط به معادله‌های $x + ۳y = -۱$ ، $۳x - ۲y = ۸$ و $(m + ۱)x + my = ۷$ از یک نقطه بگذرند.

۱۹ . مربع $ABCD$ که $A(-۳ , -۱)$ و $B(۰ , ۲)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

آ) معادلهٔ ضلع AB را بنویسید.

ب) اگر $C(۳ , a)$ و $D(۰ , ۲a - ۲)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.

بسته دوم

بخش دوم هندسه تحلیلی

صفحه ۵ تا ۱۰ کتاب درسی

در این بسته، مسائلی چون فاصلهٔ دو نقطه، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط، قرینهٔ نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر، معادلهٔ عمود منصف و فاصلهٔ نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

الف فاصلهٔ دو نقطه

۱ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه:

$$AB = |x_B - x_A|$$

۲ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول باشند، آن‌گاه:

$$CD = |y_D - y_C|$$

مثال فاصلهٔ بین دو نقطهٔ هم‌طول $A(۵,-۲)$ و $B(۵,۷)$ برابر است با:

$$AB = |\text{اختلاف بین عرض‌ها}| = |۷-(-۲)| = ۹$$

۳ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

سؤال

۱ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(۳,۲)$ و $(-۱,۰)$ را به‌دست آورید.

۲ اگر نقاط $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۳)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به‌دست آورید.

پاسخ **۱** با فرض $A(\underset{x_۱}{۳},\underset{y_۱}{۲})$ و $B(\underset{x_۲}{-۱},\underset{y_۲}{۰})$، داریم:

$$AB = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲} = \sqrt{(-۱-۳)^۲+(۰-۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴\times۵} = ۲\sqrt{۵}$$

۲ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، طول ضلع مربع می‌باشد:

$$a = BA = \sqrt{(-۱-۳)^۲+(۴-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷}$$

$$\text{محیط مربع} = ۴a = ۴\sqrt{۱۷} \quad \text{و} \quad \text{مساحت مربع} = a^۲ = ۱۷$$

نکته فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$ است. به عنوان مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $(۶,۸)$ تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۶^۲+۸^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ می‌باشد.

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

- اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

سؤال دایره‌ای به مرکز $(۳,-۱)$ از نقطهٔ $(۵,۲)$ گذشته است. شعاع این دایره را به‌دست آورید. آیا نقطهٔ $(۶,۲)$ برروی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر اندازهٔ شعاع دایره است. پس فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۲)$ روی دایره از نقطهٔ $O'(۳,-۱)$ (مرکز دایره) برابر R است:

$$R = O'A = \sqrt{(۵-۳)^۲+(۲+۱)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ $B(۶,۲)$ از نقطهٔ $O'(۳,-۱)$ برابر $R=\sqrt{۱۳}$ شود، آن‌گاه نقطهٔ B روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(۶-۳)^۲+(۲+۱)^۲} = \sqrt{۹+۹} = \sqrt{۱۸} \neq \sqrt{۱۳} \Rightarrow \text{نقطهٔ B روی این دایره قرار ندارد.}$$

ب مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر بخواهیم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره‌خط را وقتی‌که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به‌دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

۱ اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

۲ اگر C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور y ها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$

۳ فرض کنیم A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{\text{مجموع طول‌های A و B}}{۲}, \frac{\text{مجموع عرض‌های A و B}}{۲}\right) = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

سؤال نقاط $A(۵,-۱)$ ، $B(-۱,۳)$ و $C(۳,۵)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

۱ مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع AB را مشخص کنید.

۲ طول میانهٔ CM را به‌دست آورید.

۳ معادلهٔ میانهٔ CM را بنویسید.

پاسخ **۱** M وسط پاره‌خط AB است، بنابراین:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right) = \left(\frac{۵-۱}{۲}, \frac{-۱+۳}{۲}\right) = (۲،۱)$$

۲ طول پاره‌خط CM را با داشتن مختصات دو نقطهٔ C و M به‌دست می‌آوریم:

$$C(۳،۵)، M(۲،۱) \Rightarrow CM = \sqrt{(۲-۳)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۱+۱۶} = \sqrt{۱۷}$$

۳ معادلهٔ خط گذرنده از نقاط C و M ، معادلهٔ میانهٔ CM است:

$$m_{CM} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱-۵}{۲-۳} = \frac{-۴}{-۱} = ۴ \text{ ، } C(۳،۵)$$

$$\text{معادلهٔ } CM: \ y - ۵ = ۴(x-۳) \Rightarrow y - ۵ = ۴x - ۱۲ \Rightarrow y - ۴x + ۷ = ۰$$

پ قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر

اگر نقطهٔ A را به نقطهٔ M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم، آن‌گاه A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است.

! نکته **۱** اگر A' قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A ، y_A)$ نسبت به نقطهٔ $M(x_M ، y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره‌خط AA' است و مختصات نقطهٔ A' از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:

$$A'(۲x_M - x_A , ۲y_M - y_A)$$

مثال قرینهٔ نقطهٔ $A(۳،-۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(۲،۴)$ ، نقطهٔ A' است که در آن:

$$A'(۲x_M - x_A ، ۲y_M - y_A) = (۲×۲-۳، ۲×۴-(-۱)) = (۱،۹)$$

۲ قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha،\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $P'(-\alpha، -\beta)$ است.

یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مختصات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌خواهیم مختصات رأس چهارم را به‌دست بیاوریم. برای این کار از نکتهٔ بعدی که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.

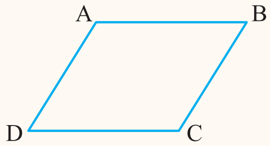
! نکته اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

سؤال اگر $A(۲,۱)$ ، $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۵)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به‌دست آورید.

پاسخ مطابق شکل روبه‌رو، داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲ - ۱ = ۳ + x_D \\ ۱ + ۵ = ۴ + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -۲ \\ y_D = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(-۲,۲)$$



تذکر مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکتهٔ قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

ت عمود منصف یک پاره خط

عمودمنصف: عمودمنصف پاره‌خط AB ، خطی است که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر پاره‌خط AB عمود است.

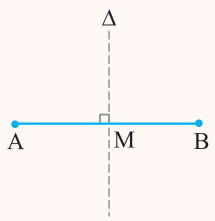
نوشتن معادلهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط

برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB ، ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به‌دست می‌آوریم.

سؤال دو نقطهٔ $A(۳,۶)$ و $B(۱,۲)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

پاسخ عمودمنصف پاره‌خط AB از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:

$$M = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۳+۱}{۲}, \frac{۶+۲}{۲}\right) = (۲,۴)$$



شیب خط Δ ، عکس و قرینهٔ شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲-۶}{۱-۳} = ۲ \Rightarrow m_\Delta = \frac{-۱}{m_{AB}} = -\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۲,۴)$ با شیب $-\frac{۱}{۲}$ برابر است با:

$$y - ۴ = -\frac{۱}{۲}(x-۲) \xrightarrow{\times ۲} ۲y - ۸ = -x + ۲ \Rightarrow ۲y + x = ۱۰$$

! نکته یکی از ویژگی‌های مهم عمود منصف آن است که فاصلهٔ هر نقطه روی آن از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

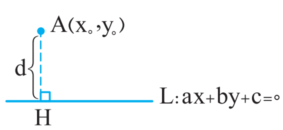
یکی از فرمول‌های خیلی مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصلهٔ نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطه از خط، برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

ث فاصلهٔ نقطه از خط

- اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصلهٔ A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L. از فرمول زیر برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ از خط راست استفاده می‌کنیم:

- اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(x_۰, y_۰)$ و معادلهٔ خط L به‌صورت $ax + by + c = ۰$ باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$



- برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱ همهٔ اجزای معادلهٔ خط در یک طرف تساوی باشند.

۲ در معادلهٔ خط به جای x ، طول نقطه $(x_۰)$ و به جای y ، عرض نقطه $(y_۰)$ را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۳ ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به‌دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۴ نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصلهٔ بین نقطه و خط می‌باشد.

سؤال **مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی**

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ از خط به معادلهٔ $۴x+۳y+۱=۰$ را به‌دست آورید.

۲ خط $۵x-۱۲y+۴=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

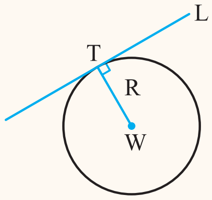
پاسخ ۱

در معادله به جای x،۳ و به جای y،۲ قرار می‌دهیم.

$$d=\frac{|۴(۳)+۳(۲)+۱|}{\sqrt{\underset{\text{ضریب x}}{۴^۲}+\underset{\text{ضریب y}}{۳^۲}}}=\frac{۱۹}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۹}{۵}$$

۲ اگر از مرکز دایره، خطی بر خط مماس رسم کنیم، در نقطهٔ تماس، خط رسم شده بر خط مماس بر دایره عمود است.

پس فاصلهٔ W تا خط، برابر اندازهٔ شعاع دایره است.



$$R=\frac{|۵(۲)-۱۲(-۱)+۴|}{\sqrt{۵^۲+(-۱۲)^۲}}=\frac{|۱۰+۱۲+۴|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

! نکته ۱ فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $x=a$ برابر $d=|x_۰-a|$ و از خط $y=b$ برابر $d=|y_۰-b|$ است.

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ از خط $x=۲$ برابر $d=|۳-۲|=۱$ و از خط $y=-۵$ برابر $d=|۴-(-۵)|=۹$ می‌باشد.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به‌دست آورید.

سؤال **فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $x+y-۳=۰$ و $x+y=۵$ را به‌دست آورید.**

پاسخ نقطهٔ دلخواه روی خط $x+y-۳=۰$ مشخص می‌کنیم:

$$x=۰\Rightarrow y-۳=۰\Rightarrow y=۳\Rightarrow A(۰,۳)$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۰,۳)$ تا خط به معادلهٔ $x+y-۵=۰$، فاصلهٔ بین دو خط موازی می‌باشد:

$$d=\frac{|۰+۳-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

! نکته برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$$\begin{matrix}ax+by+c=۰\\ a'x+b'y+c'=۰\end{matrix}\xrightarrow[\substack{b=b'\\ \text{دو خط موازی هستند.}}]{a=a'}d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

بستهٔ ۲ پرسش‌های تشریحی

۲۰ . اگر $A(۳,-۲)$ و $B(-۱,۶)$ دو نقطه باشند، (مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحهٔ ۹)

آ طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

ب فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط AB به‌دست آورید.

۲۱ . نقاط $A(-۴,۴)$ ، $B(۰,۴)$ و $C(-۲,۲)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحهٔ ۹)

آ مثلث ABC را رسم کنید.

ب نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

پ مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۲۲ . نوع مثلث با رأس $(۲,۰)$ ، $(-۱,۴)$ و $(۶,-۳)$ را مشخص کنید.

۲۳ . اگر نقاط $A(۲,۴)$ و $B(۵,۸)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به‌دست آورید.

۲۴ . شخصی برای انجام یک عملیات بانکی نیاز به یک عابربانک دارد. اگر موقعیت این شخص نقطهٔ $(۴,-۲)$ باشد و سه عابربانک با موقعیت‌های $(۲,۵)$ ، $(۱,۴)$ و $(-۳,۳)$ وجود داشته باشد، این شخص برای رسیدن هرچه سریع‌تر به عابربانک، کدام‌یک را باید انتخاب کند؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۲۵ . دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ ، از نقطهٔ $(۴,۲)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. کدام‌یک از نقاط $(۳-,۵)$ و $(-۱,۴)$ روی این دایره قرار دارند؟ چرا؟

۲۶ . دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۱,-۳)$ و $B(۵,-۱)$ هستند. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب آیا نقطهٔ $(۲,۰)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۲۷ . مثلث با رأس‌های $A(-۲,۴)$ ، $B(۳,-۲)$ و $C(۵,۴)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کاردرکلاس ۱ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

پ معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.

۲۸ . با توجه به مختصات نقاط داده‌شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (مشابه کاردرکلاس ۲ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ نقطهٔ $M(۵,-۱)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(۳,۲)$ و B است. مختصات نقطهٔ B را بیابید.

ب قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۴)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۲)$ به‌دست آورید.

پ قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ $(۳,۰)$ مشخص کنید.

ت قرینهٔ نقطهٔ $(-۳,۵)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

۲۹ . نقاط $A(-۲,-۱)$ ، $B(۲,۱)$ و $C(-۳,۱)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

ب مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۳۰ . دو نقطهٔ $A(۳,-۴)$ و $B(-۱,۰)$ مفروض‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۳۱ . نقاط $(۲,۰)$ و $(۴,۲)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادلهٔ قطرهای این مربع را بنویسید.

۳۲ . نقاط $A(۳,۱)$ ، $B(-۱,۳)$ ، $C(-۴,-۱)$ و $D(۴,-۱)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصلهٔ آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد.
(مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۳ . فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,-۶)$ را از دو خط به معادلات $x=-۲$ و $y=۵$ به‌دست آورید. (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۴ . در هر قسمت مختصات یک نقطه و معادلهٔ یک خط داده شده است. فاصلهٔ نقطه تا خط را به‌دست آورید. (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ $۳x+۴y+۱=۰$ ، $(۲,-۱)$ ب $۲x=y-۴$ ، $(-۴,۵)$

۳۵ . یکی از اضلاع مربع روی خط به معادلهٔ $۲x=y-۳$ واقع است. اگر نقطهٔ $(۳,۱)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، مساحت آن را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۶ . اندازهٔ شعاع و مساحت دایره به مرکز $(-۱,۲)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $۲y+x=۵$ را به‌دست آورید. (مشابه کاردرکلاس ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۳۷ . در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا نشان دهید دو خط داده‌شده با هم موازیند و سپس فاصلهٔ بین آن‌ها را به‌دست آورید.
(مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ $۴x-۲y=۵$ ، $۲x-y=۱۱$ ب $۲x+۲y=۷$ ، $x=-y+۴$

۳۸ . مثلث ABC را با رأس‌های $A(۲,۰)$ ، $B(-۱,۴)$ و $C(-۲,۱)$ در نظر بگیرید.

آ طول ارتفاع AH را به‌دست آورید. ب مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۳۹ . اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب ۴۵° و ۳۷° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب ۳۷° و ۳۱° باشد، فاصلهٔ بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟ (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۴۰ . اگر قرینهٔ نقطهٔ $(a+۱,b-۳)$ نسبت به نقطهٔ $(۳,۵)$ ، نقطهٔ $(b-۲,-a)$ باشد. مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۴۱ . فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۴)$ از خط $x+۳y=a$ برابر $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

۴۲ . خطوط $۳x+۴y=۱$ و $۴x-۳y=۵$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(۱,۱)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۴۳ . مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$ ، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ مفروض است.

آ معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید. ب طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

پ معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید. ت نقطهٔ تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.

ث مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

بسته سوم

معادلهٔ درجه دوم

صفحه ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم در سال گذشته آشنا شده‌ایم. در این قسمت برای یادآوری هر ۴ روشی را که برای حل معادله استفاده می‌شود بیان می‌کنیم. این بسته شامل روش تغییر متغیر برای حل معادله، روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد.

معادلهٔ درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد، یک معادلهٔ درجه دوم می‌نامیم.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

۱. روش تجزیه

ویژگی حاصل‌ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:

$AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$

در حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادلهٔ درجه دوم را به حاصل‌ضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده و سپس از ویژگی فوق استفاده می‌کنیم.

سؤال معادلهٔ $x^2+5x+6=0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ عبارت درجهٔ دوم x^2+5x+6 را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم. باید دو عدد مشخص کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۶ و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۵ باشد. این دو عدد، ۲ و ۳ هستند. بنابراین:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

۲. روش ریشه‌گیری

ابتدا نکتهٔ زیر را که به قاعدهٔ ریشه‌گیری معروف بوده و در حل معادلهٔ درجه دوم به کار می‌رود، بیان می‌کنیم:

نکته فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a \geq 0$ باشد، در این صورت:

$$x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $b=0$ و اعداد a و c مختلف‌العلامه باشند، برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این روش استفاده کرد. در واقع داریم:

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

سؤال معادلهٔ $(2x-1)^2=25$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

پاسخ

$$(2x-1)^2=25 \xrightarrow{\text{روش ریشه‌گیری}} 2x-1=\pm\sqrt{25}=\pm5$$

هر یک از معادله‌های $2x-1=5$ و $2x-1=-5$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-1=5 \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=5+1 \\ 2x=-5+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ 2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

۳. روش مربع کامل

مراحل حل یک معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، به‌صورت زیر است:

۱ جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲ اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.

۳ به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

۴ اگر دو طرف معادله مثبت باشد، به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

سؤال معادلهٔ $x^۲+۴x=۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ به دو طرف معادله عدد ۴ را اضافه می‌کنیم ($۴=۲^۲ \xleftarrow{\text{به توان ۲}} ۲ \xleftarrow{\div ۲}$ ضریب $x = ۴$):

$$x^۲+۴x+۴=۴ \Rightarrow (x+۲)^۲=۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}} x+۲=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۲ \\ x+۲=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۴ \end{cases}$$

نکته در حل معادلات درجه دوم به روش مربع کامل، عبارت $x^۲+Ax$ را می‌توان با استفاده از فرمول $x^۲+Ax=(x+\frac{A}{۲})^۲-(\frac{A}{۲})^۲$ به مربع کامل تبدیل کرد.

۴. روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، به عبارت $b^۲-۴ac$ که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، **مبین یا دلتای** معادله می‌گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به علامت Δ، داریم:

آ) اگر $\Delta=b^۲-۴ac<۰$ باشد، معادله **ریشهٔ حقیقی ندارد**.

ب) اگر $\Delta=b^۲-۴ac=۰$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن **ریشهٔ مضاعف** یا مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم و ریشهٔ مضاعف معادله برابر است با:

$$x=-\frac{b}{۲a}$$

پ) اگر $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ باشد، معادله دارای **دو ریشهٔ حقیقی متمایز** است که از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

سؤال ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۱=۰$ را با فرمول کلی به‌دست آورید.

پاسخ در معادلهٔ داده‌شده، $a=۲$، $b=-۵$ و $c=۱$ می‌باشد. مقدار Δ را از فرمول $\Delta=b^۲-۴ac$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴(۱)(۲)=۲۵-۸=۱۷ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-(-۵)+\sqrt{۱۷}}{۲(۲)}=\dfrac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴} \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-(-۵)-\sqrt{۱۷}}{۲(۲)}=\dfrac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴} \end{cases}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات با معادلاتی مواجه می‌شویم که درجه دوم نیستند، ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن‌ها را به معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرد.

سؤال معادلهٔ $x^۴-۵x^۲+۴=۰$ را حل کنید.

پاسخ اگر $x^۲$ را برابر A در نظر بگیریم، آن‌گاه معادلهٔ اصلی به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود:

$$x^۴-۵x^۲+۴=۰ \Rightarrow (x^۲)^۲-۵(x^۲)+۴=۰ \xrightarrow{x^۲=A} A^۲-۵A+۴=۰$$

$$\Rightarrow (A-۱)(A-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} A-۱=۰ \Rightarrow A=۱ \\ A-۴=۰ \Rightarrow A=۴ \end{cases}$$

به‌جای A، $x^۲$ قرار می‌دهیم و سپس مقادیر x را به روش ریشه‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$A=۱ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱، \quad A=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

گاهی اوقات به‌دست آوردن مقدار دقیق ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، اهمیتی ندارد و فقط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ باشند، آن‌گاه:

(حاصل‌ضرب دو ریشه) $P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ (مجموع دو ریشه) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

سؤال **۱** **بدون حل معادلهٔ $3x^2-9x+2=0$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.**

۲ **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+1=0$ باشند، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

آ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

پاسخ **۱** در معادلهٔ داده شده، $a=3$، $b=-9$ و $c=2$ است. جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-9}{3}=\frac{9}{3}=3\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

۲ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+1=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{1}=7\ \ ,\ \ P=\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$$

آ) $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{7}{1}=7$$

ب) عبارت $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را برابر A در نظر می‌گیریم و حاصل A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}A^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$$

$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}=7+2\sqrt{1}=7+2=9\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}A=\pm 3$$

چون A عددی مثبت است، پس داریم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3$$

در بعضی از مسائل می‌خواهیم دو عددی را مشخص کنیم که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌دانیم. برای این کار باید معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیم. با حل معادله، ریشه‌های به‌دست آمده همان دو عدد موردنظر هستند.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آن‌گاه برای نوشتن معادله، ابتدا S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به‌دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ مقابل را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0$$

سؤال **معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3+\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{5}$ باشند.**

پاسخ با فرض $\alpha=3+\sqrt{5}$ و $\beta=3-\sqrt{5}$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6\ ,\ P=\alpha\beta=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$$

معادله: $x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-6x+4=0$

بسته ۳ **پرسش‌های تشریحی** معادلهٔ درجه دوم

۴۴ . معادله‌های درجه دوم زیر را از روش خواسته‌شده حل کنید.

آ) $3x^2+5x-2=0$ (روش کلی)

ب) $-2x^2+7x+1=0$ (روش کلی)

پ) $x^2+6x=0$ (مربع کامل)

ت) $(3x-1)^2=16$ (روش ریشه‌گیری)

ث) $x^2-4x+3=0$ (تجزیه)

ج) $x^2-5x+6=0$ (تجزیه)

۴۵ . هریک از معادلات زیر را حل کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $5x^4-x^2-4=0$ ب) $4x^4-7x^2-2=0$ پ) $-2x^6+11x^3+40=0$

۴۶ . بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $5x^2-11x+1=0$ را به‌دست آورید.

۴۷ . اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+4=0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\alpha+\beta$ ب) $\alpha\beta$ پ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ت) $\alpha^2+\beta^2$

۴۸ . در معادلهٔ درجه دوم $x^2+(m+3)x-7+m=0$ ، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) مجموع ریشه‌ها برابر ۴ شود.

ب) حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ شود.

۴۹ . در معادلهٔ $2x^2-(2m+1)x+m=0$ ، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، قرینهٔ ریشهٔ دیگر باشد.

ب) یکی از ریشه‌ها، عکس ریشهٔ دیگر باشد.

پ) یکی از ریشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از دو برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۵۰ . معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن: (مشابه کاردرکلاس ۳ صفحهٔ ۱۳ و تمرین ۲ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) -5 و 11 ب) $3+\sqrt{2}$ و $3-\sqrt{2}$ پ) $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ باشند.

۵۱ . دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $\frac{5}{2}$ و حاصل‌ضربشان -21 باشد. (مشابه کاردرکلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۵۲ . دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر یک باشد. (مشابه کاردرکلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۵۳ . طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۰ و محیط آن ۱۳ باشد. (مشابه کاردرکلاس ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۵۴ . اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌های معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}$ ب) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ پ) $\alpha^3+\beta^3$

۵۵ . اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4=0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\alpha\beta^2=-4$.

۵۶ . اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(2m-1)x+m=0$ باشند، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{5}{3}$ ب) $\alpha^2+\beta^2=\frac{13}{4}$

۵۷ . در معادلهٔ $2x^2-8x+m=0$ ، اگر یکی از جواب‌ها دو برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۵۸ . هریک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $x-4\sqrt{x}+3=0$ ب) $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5=0$

فصل ۱ **هندسهٔ تحلیلی و جبر**

۱ | فقط

۲ | طول از مبدأ - عرض از مبدأ

۳ | $y=-2x+7$ زیرا:

$m=-2$ ، $A(0,7) \Rightarrow y-7=-2(x-0) \Rightarrow y=-2x+7$

۴ | شیب

۵ | $-\frac{2}{5}$ ، زیرا شیب خط $ax+by=c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است، پس شیب خط $2x+5y=11$ برابر $-\frac{2}{5}$ است.

۶ | صفر

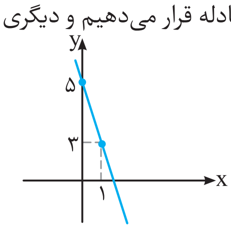
۷ | با مشخص کردن دو نقطهٔ دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم.

آ) برای مشخص کردن دو نقطهٔ دلخواه، به جای x (یا y) دو عدد دلخواه در معادله قرار می‌دهیم و دیگری را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-2(0)+5=5 \\ x=1 \Rightarrow y=-2(1)+5=3 \end{cases}$$

x	0	1
y	5	3

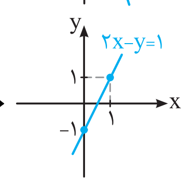
$\xrightarrow{\text{نمودار}}$



ب) $2x-y=1$

x	0	1
y	-1	1

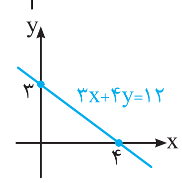
$\xrightarrow{\text{نمودار}}$



پ) $3x+4y=12$

x	0	4
y	3	0

$\xrightarrow{\text{نمودار}}$

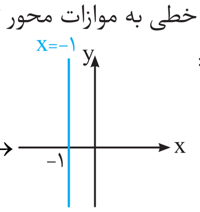


ت) $x=-1$ ، خطی به موازات محور y ها است که طول هر نقطهٔ روی آن برابر -1 است:

$x=-1$

x	-1	-1
y	0	1

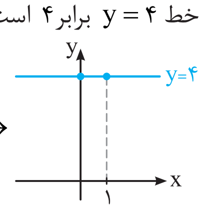
$\xrightarrow{\text{نمودار}}$



ث) عرض تمام نقاط روی خط $y=4$ برابر ۴ است:

x	0	1
y	4	4

$\xrightarrow{\text{نمودار}}$



۸ | آ) معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y=mx+h$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ خط با شیب $m=-4$ و عرض از مبدأ $h=2$ برابر $y=-4x+2$ است.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ (x_1,y_1) با شیب m به‌صورت زیراست:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$m=5 \ ,\ (\underset{x_1}{-2},\underset{y_1}{-3}) \Rightarrow y+3=5(x+2)$$

$$\Rightarrow y+3=5x+10 \Rightarrow y=5x+7$$

پ) شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$A(-1,2)\ ,\ B(1,0) \Rightarrow m=\frac{0-2}{1+1}=-1$$

با داشتن شیب خط (m) و مختصات یک نقطه (مثلاً A)، معادله را می‌نویسیم:

$$m=-1\ ,\ A(-1,2) \Rightarrow y-2=-1(x+1) \Rightarrow y=-x+1$$

ت) شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط $5x+3y=2$ برابر $m=-\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}=-\frac{5}{3}$ است، پس شیب خط مطلوب نیز برابر $-\frac{5}{3}$ می‌باشد:

$$m=-\frac{5}{3}\ ,\ A(3,0) \Rightarrow y-0=-\frac{5}{3}(x-3)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y=-5x+15 \Rightarrow 3y+5x=15$$

ث) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است. شیب خط $3x+2y=4$ برابر $-\frac{3}{2}$ می‌باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر $m=\frac{-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$ می‌باشد:

$$m=\frac{2}{3}\ ,\ A(4,2) \Rightarrow y-2=\frac{2}{3}(x-4)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3(y-2)=2(x-4) \Rightarrow 3y-6=2x-8 \Rightarrow 3y-2x=-2$$

ج) طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور x ها می‌باشد، پس خط از نقطهٔ $(2,0)$ می‌گذرد. هم‌چنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور y ها می‌باشد، پس خط از نقطهٔ $(0,5)$ نیز می‌گذرد:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-0}{0-2}=-\frac{5}{2}$$

$$m=-\frac{5}{2}\ ,\ A(2,0) \Rightarrow y-0=-\frac{5}{2}(x-2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2y=-5(x-2) \Rightarrow 2y=-5x+10 \Rightarrow 2y+5x=10$$

۹ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(5,1)$ و $B(-4,3)$ را به‌دست می‌آوریم. این عدد شیب خط مطلوب است:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-3}{5-(-4)}=-\frac{2}{9}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(-4,1)$ با شیب $m=-\frac{2}{9}$ به‌صورت زیراست:

$$y-1=-\frac{2}{9}(x+4) \Rightarrow 9(y-1)=-2(x+4)$$

$$\Rightarrow 9y-9=-2x-8 \Rightarrow 9y+2x=1$$

۱۰ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(2,0)$ و $(-1,6)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-0}{-1-2}=\frac{6}{-3}=-2$$

اگر m' شیب خط مطلوب باشد، آن‌گاه $m'=-\frac{1}{m}$ است و در نتیجه، داریم:

$$m'=-\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\ ,\ A(3,2)$$

معادلهٔ خط: $y-2=\frac{1}{2}(x-3) \xrightarrow{\times 2} 2(y-2)=x-3$

$$\Rightarrow 2y-4=x-3 \Rightarrow 2y-x=1$$

| ۱۱ | با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}۴x-y=۱\\x+۲y=۷\end{cases}$، نقطهٔ تلاقی دو خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\times ۲\begin{cases}۴x-y=۱\\x+۲y=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۸x-\cancel{۲y}=۲\\x+\cancel{۲y}=۷\end{cases}\Rightarrow ۹x=۹\Rightarrow x=۱$$

$$\xrightarrow{x+۲y=۷}۱+۲y=۷\Rightarrow ۲y=۶\Rightarrow y=۳$$

نقطهٔ $A(۱،۳)$، نقطهٔ تلاقی دو خط است. معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱،۳)$ و $B(۳،-۲)$ به‌صورت زیر است:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۲-۳}{۳-۱}=-\frac{۵}{۲}\ ,\ A(۱،۳)$$

$$y-۳=-\frac{۵}{۲}(x-۱)\xrightarrow{\times ۲}۲(y-۳)=-۵(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۲y-۶=-۵x+۵\Rightarrow ۲y+۵x=۱۱$$

| ۱۲ | شیب هریک از خطوط را به‌دست می‌آوریم. اگر شیب دو خط با هم برابر باشند، آن دو خط موازی، اگر حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر ۱- باشد، دو خط بر هم عمود و در غیر این‌صورت دو خط متقاطع غیرعمودند.

شیب خط $y=ax+b$ برابر a و شیب خط $ax+by=c$ یا $ax+by+c=۰$ برابر $-\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}=-\frac{a}{b}$ است.

$$L_۱:-۳x+۵y=۱\Rightarrow m_۱=-\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}=-\frac{-۳}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$L_۲:۳x-y=۱\Rightarrow m_۲=-\frac{۳}{-۱}=۳$$

$$L_۳:۵x+۳y=۷\Rightarrow m_۳=-\frac{۵}{۳}$$

$$L_۴:۶x=۲y+۵\Rightarrow ۶x-۲y=۵\Rightarrow m_۴=-\frac{۶}{-۲}=۳$$

$m_۱.m_۳=-۱\Rightarrow$ دو خط $L_۱$ و $L_۳$ بر هم عمودند.

$m_۲=m_۴\Rightarrow$ دو خط $L_۲$ و $L_۴$ موازی‌اند.

$L_۱$ و $L_۳$ با $L_۲$ و $L_۴$ متقاطع غیرعمود می‌باشند.

| ۱۳ | آ) در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند:

$$۳x+(۲m+۱)y=۴\Rightarrow \text{شیب خط}=a=-\frac{۳}{۲m+۱}$$

$$mx+۷y=۱۱\Rightarrow \text{شیب خط}=a'=-\frac{m}{۷}$$

$$a=a'\Rightarrow -\frac{۳}{۲m+۱}=-\frac{m}{۷}\Rightarrow ۳\times ۷=m(۲m+۱)$$

$$\Rightarrow ۲۱=۲m^۲+m\Rightarrow ۲m^۲+m-۲۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۱)^۲-۴(۲)(-۲۱)=۱۶۹=۱۳^۲$$

$$\Rightarrow m=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱\pm ۱۳}{۲(۲)}$$

$$\Rightarrow m_۱=\frac{-۱+۱۳}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳\ ,\ m_۲=\frac{-۱-۱۳}{۴}=\frac{-۱۴}{۴}=-\frac{۷}{۲}$$

ب) اگر حاصل‌ضرب شیب دو خط برابر ۱- شود، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند:

$$aa'=-۱\Rightarrow\left(-\frac{۳}{۲m+۱}\right)\left(-\frac{m}{۷}\right)=-۱\Rightarrow\frac{۳m}{۷(۲m+۱)}=-۱$$

$$\Rightarrow ۳m=-۷(۲m+۱)\Rightarrow ۳m=-۱۴m-۷\Rightarrow ۳m+۱۴m=-۷$$

$$\Rightarrow ۱۷m=-۷\Rightarrow m=-\frac{۷}{۱۷}$$

| ۱۴ | با مساوی قرار دادن شیب‌های دو خط، مقدار m را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x+(-m+۴)y=۳\Rightarrow a=-\frac{۲}{-m+۴}$$

$$(۵+۳m)x+(m^۲+۴)y=۷\Rightarrow a'=-\frac{۵+۳m}{m^۲+۴}$$

$$a=a'\Rightarrow \cancel{-}\frac{۲}{-m+۴}=\cancel{-}\frac{۵+۳m}{m^۲+۴}$$

$$\Rightarrow ۲(m^۲+۴)=(۵+۳m)(-m+۴)$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۸=-۵m+۲۰-۳m^۲+۱۲m\Rightarrow ۵m^۲-۷m-۱۲=۰$$

$$\Delta=(-۷)^۲-۴(۵)(-۱۲)=۲۸۹=۱۷^۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{۷+۱۷}{۲(۵)}=\frac{۲۴}{۱۰}=\frac{۱۲}{۵}\\ m=\frac{۷-۱۷}{۲(۵)}=\frac{-۱۰}{۱۰}=-۱\end{cases}$$

| ۱۵ | شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(m،۲m)$ و $(۱،-۱)$ برابر است با:

$$a=\frac{۲m+۱}{m-۱}$$

از طرفی شیب خط به معادلهٔ $۲x-۵y=۷$ برابر $a'=-\frac{۲}{-۵}=\frac{۲}{۵}$ است.

چون دو خط بر هم عمودند، پس باید داشته باشیم:

$$aa'=-۱\Rightarrow\frac{۲m+۱}{m-۱}\times\frac{۲}{۵}=-۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲(۲m+۱)}{۵(m-۱)}=-۱\Rightarrow ۲(۲m+۱)=-۵(m-۱)$$

$$\Rightarrow ۴m+۲=-۵m+۵\Rightarrow ۹m=۳\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}$$

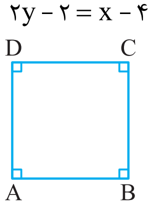
| ۱۶ | آ) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-۱}{۶-۴}=\frac{۱}{۲}\ ,\ A(۴،۱)$$

$$\text{معادلهٔ خط AB}:y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۴)\xrightarrow{\times ۲}۲(y-۱)=x-۴$$

$$۲y-۲=x-۴\Rightarrow ۲y-x=-۲$$

ب) با توجه به شکل فرضی زیر، BC بر AB عمود است، پس:



$$m_{BC}=\frac{-۱}{m_{AB}}\overset{(آ)}{=}\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲\ ,\ B(۶،۲)$$

$$\text{معادلهٔ خط BC}:y-۲=-۲(x-۶)\Rightarrow y=-۲x+۱۴$$

پ) معادلهٔ خط DC را می‌نویسیم. با داشتن معادلهٔ خط BC و قرار دادن آن‌ها در یک دستگاه و حل آن، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید. با توجه به این‌که خط DC موازی AB است، پس شیب خط DC با شیب خط AB برابر می‌باشد:

$$m_{DC}=m_{AB}=\frac{۱}{۲}\ ,\ D(-۱،۱۱)$$

$$\text{معادلهٔ خط DC}:y-۱۱=\frac{۱}{۲}(x+۱)\xrightarrow{\times ۲}۲y-۲۲=x+۱$$

$$\Rightarrow ۲y-x=۲۳$$

$$\times(-۲)\begin{cases}y=-۲x+۱۴\\۲y-x=۲۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{-۲y}=۴x-۲۸\\\cancel{۲y}-x=۲۳\end{cases}\Rightarrow -x=۴x-۵$$

$$\Rightarrow -۵x=-۵\Rightarrow x=۱\xrightarrow{y=-۲x+۱۴}y=-۲+۱۴=۱۲$$

$$\Rightarrow C(۱،۱۲)$$

۱۷ | ابتدا معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ (۳،۱) و (۵،-۳) می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۳-۱}{۵-۳}=\frac{-۴}{۲}=-۲\ ,\ A(۳,۱)$$

$$y-۱=-۲(x-۳)\Rightarrow y-۱=-۲x+۶\Rightarrow y=-۲x+۷$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس مختصات نقطهٔ $C(a,۲a-۱)$ نیز باید در معادلهٔ $y=-۲x+۷$ صدق کند:

$$C(a,۲a-۱)\ ,\ y=-۲x+۷\Rightarrow ۲a-۱=-۲a+۷$$

$$\Rightarrow ۲a+۲a=۷+۱\Rightarrow ۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

---

۱۸ | محل تلاقی دو خط به معادله‌های $x+۳y=-۱$ و $۳x-۲y=۸$ از حل دستگاه $\begin{cases}x+۳y=-۱\\ ۳x-۲y=۸\end{cases}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{matrix}\times ۲\\ \times ۳\end{matrix}\begin{cases}x+۳y=-۱\\ ۳x-۲y=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+\cancel{۶y}=-۲\\ ۹x-\cancel{۶y}=۲۴\end{cases}\Rightarrow ۱۱x=۲۲\Rightarrow x=۲$$

$$\xrightarrow{x+۳y=-۱}۲+۳y=-۱\Rightarrow ۳y=-۳\Rightarrow y=-۱$$

نقطهٔ $(۲,-۱)$ محل تلاقی دو خط است. خط $(m+۱)x+my=۷$ از نقطهٔ $(۲,-۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ $(m+۱)x+my=۷$ صدق می‌کند:

$$۲(m+۱)-m=۷\Rightarrow ۲m+۲-m=۷\Rightarrow m=۵$$

---

۱۹ | آ) شیب ضلع AB برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲+۱}{۰+۳}=۱\ ,\ A(-۳,-۱)$$

معادلهٔ ضلع AB : $y-(-۱)=۱(x-(-۳))$

$$\Rightarrow y+۱=x+۳\Rightarrow y=x+۲$$

ب) ضلع CD موازی ضلع AB است، پس شیب دو خط با هم برابرند:

$$m_{AB}=m_{CD}\ ,\ m_{AB}=۱\ ,\ m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{(۲a-۲)-a}{۰-۳}$$

$$=\frac{a-۲}{-۳}=۱\Rightarrow a-۲=-۳\Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow C(۳,-۱)\ ,\ D(۰,-۴)$$

---

۲۰ | آ) اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشند، آنگاه طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$A(۳,-۲)\ ,\ B(-۱,۶)\Rightarrow AB=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۶-(-۲))^۲}$$

$$=\sqrt{(-۴)^۲+(۸)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=\sqrt{۱۶\times۵}=۴\sqrt{۵}$$

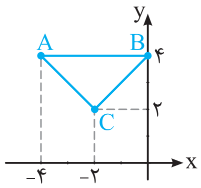
ب) اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشد، آنگاه مختصات نقطهٔ M وسط AB به‌صورت $M=\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$ است. بنابراین:

$$M=\left(\frac{۳-۱}{۲},\frac{-۲+۶}{۲}\right)=(۱,۲)\ ,\ O(۰,۰)$$

$$\Rightarrow OM=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

---

۲۱ | آ) هر یک از نقاط را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم.



ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۴-۴)^۲+(۰+۴)^۲}=\sqrt{۰+۱۶}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$$AC=\sqrt{(۲-۴)^۲+(-۲+۴)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{(۲-۴)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

چون $AC=BC$، پس مثلث متساوی‌الساقین است. از طرفی تساوی $AB^۲=AC^۲+BC^۲$ برقرار است، پس مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است.

پ) مساحت مثلث، نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده است.

$$S=\frac{۱}{۲}CA\times CB=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۸}\times\sqrt{۸}=\frac{۱}{۲}\times۸=۴$$

---

۲۲ | هر یک از رأس‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:

$$A(۲,۰),B(-۱,۴),C(۶,-۳)$$

طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم. فاصلهٔ بین دو نقطه، طول ضلع مثلث است:

$$AB=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

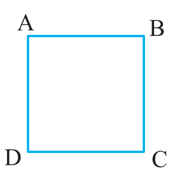
$$AC=\sqrt{(۶-۲)^۲+(-۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۶+۱)^۲+(-۳-۴)^۲}=\sqrt{۴۹+۴۹}=۷\sqrt{۲}$$

طول دو ضلع مثلث برابرند و در نتیجه مثلث متساوی‌الساقین است.

---

۲۳ | فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، طول ضلع مربع است:



$$AB=\sqrt{(۸-۴)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

محیط مربع برابر $۴AB=۴\times۵=۲۰$ و مساحت مربع برابر $a^۲=۵^۲=۲۵$ می‌باشد.

---

۲۴ | اگر $P(۴,-۲)$ موقعیت این شخص و نقاط $A(۲,۵)$، $B(۱,۴)$ و $C(-۳,۳)$ موقعیت‌های این سه عابربانک باشند، با به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ P تا هر یک از نقاط A، B و C، کوتاه‌ترین فاصله را انتخاب می‌کنیم.

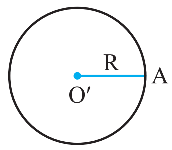
$$PA=\sqrt{(۲-۴)^۲+(۵+۲)^۲}=\sqrt{۴+۴۹}=\sqrt{۵۳}$$

$$PB=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}$$

$$PC=\sqrt{(-۳-۴)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۴۹+۲۵}=\sqrt{۷۴}$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده، کم‌ترین فاصلهٔ این شخص تا عابربانک B است.

۲۵ مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۲)$ تا مرکز دایره، یعنی $O'(۲,-۱)$ برابر اندازهٔ شعاع دایره است:



$$R=O'A=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

هر نقطه‌ای روی دایره باشد، باید فاصلهٔ آن تا O' برابر $\sqrt{۱۳}$ شود.

فاصلهٔ هر یک از نقاط $B(۵,-۳)$ و $C(-۱,۴)$ را تا نقطهٔ O' به‌دست می‌آوریم، هرکدام برابر $\sqrt{۱۳}$ شود، روی این دایره قرار دارد:

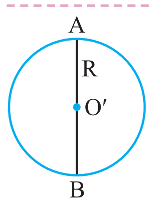
$$O'B=\sqrt{(۵-۲)^۲+(-۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

پس B روی این دایره قرار دارد.

$$O'C=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۴+۱)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

بنابراین C روی این دایره قرار ندارد.

۲۶ آ) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، مرکز دایره است:



$$O'=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=(\frac{۵+۱}{۲},\frac{-۱-۳}{۲})=(۳,-۲)$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ A و O' برابر اندازهٔ شعاع دایره است:

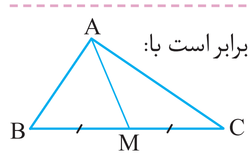
$$R=O'A=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۲+۳)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

ب) اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(۰,۲)$ تا O' (مرکز دایره) برابر $\sqrt{۵}$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ M روی این دایره قرار دارد. فاصلهٔ O' تا M را به‌دست می‌آوریم:

$$O'M=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

پس نقطهٔ M روی محیط این دایره قرار ندارد.

۲۷ آ) مختصات M وسط پاره‌خط BC برابر است با:



$$M=(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})=(\frac{۳+۵}{۲},\frac{-۲+۴}{۲})=(\frac{۸}{۲},\frac{۲}{۲})=(۴,۱)$$

ب) با داشتن مختصات دو نقطهٔ A و M، طول پاره‌خط AM را به‌دست می‌آوریم:

$$A(-۲,۴)\ ,\ M(۴,۱)\Rightarrow AM=\sqrt{(۴+۲)^۲+(۱-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۳۶+۹}=\sqrt{۴۵}=\sqrt{۹\times۵}=۳\sqrt{۵}$$

پ) مختصات نقطهٔ A و M را داریم. معادلهٔ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$m=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{۱-۴}{۴-(-۲)}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$ (شیب ضلع AM)

$$m=-\frac{۱}{۲},A(-۲,۴)\Rightarrow y-۴=-\frac{۱}{۲}(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۲(y-۴)=-(x+۲)\Rightarrow ۲y-۸=-x-۲\Rightarrow ۲y+x=۶$$

۲۸ آ) اگر $M(۵,-۱)$، $A(۳,۲)$ و $B(x_B,y_B)$، آن‌گاه:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow ۵=\frac{۳+x_B}{۲}\Rightarrow ۳+x_B=۱۰\Rightarrow x_B=۷\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{۲+y_B}{۲}\Rightarrow y_B+۲=-۲\Rightarrow y_B=-۴\end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ B، به‌صورت $B(۷,-۴)$ است.

ب) اگر A' قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۲)$ باشد، آن‌گاه:

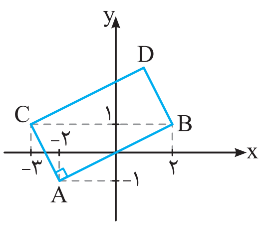
$$A'=(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)=$$
$$(۲(-۱)-(-۳),۲(۲)-۴)=(-۲+۳,۴-۴)=(۱,۰)$$

پ) مختصات نقطهٔ B از قسمت (آ) به‌صورت $B(۷,-۴)$ است. قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(۳,۰)$ به‌صورت زیر است:

$$B'=(۲x_M-x_B,۲y_M-y_B)=(۲\times۳-۷,۲\times۰+۴)$$
$$=(-۱,۴)$$

ت) قرینهٔ نقطهٔ (x,y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $(-x,-y)$ است، پس قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۵)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $A'(۳,-۵)$ می‌باشد.

۲۹ با مشخص کردن نقاط A، B و C در دستگاه محورهای مختصات، رأس‌های روبه‌رو را مشخص می‌کنیم:



آ) نقاط B و C روبه‌روی هم و نقاط A و D روبه‌روی هم قرار دارند. در مستطیل (هرمتوازی‌الاضلاعی) داریم:

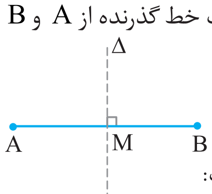
$$\begin{cases}x_A+x_D=x_B+x_C\\ y_A+y_D=y_B+y_C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲+x_D=۲-۳\\ -۱+y_D=۱+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_D=۱\\ y_D=۳\end{cases}\Rightarrow D(۱,۳)$$

ب) مساحت مستطیل $ABDC$ برابر حاصل‌ضرب AB در AC است:

$$AB=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}$$
$$AC=\sqrt{(-۳+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow S=AB\times AC=\sqrt{۲۰}\times\sqrt{۵}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

۳۰ عمودمنصف پاره‌خط AB از وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است. مختصات M وسط AB و هم‌چنین شیب خط گذرنده از A و B را به‌دست می‌آوریم:



$$M=(\frac{۳-۱}{۲},\frac{-۴+۰}{۲})=(۱,-۲)$$

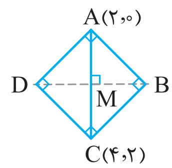
شیب خط Δ، قرینهٔ عکس شیب خط AB است:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰+۴}{-۱-۳}=-۱\Rightarrow m_\Delta=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۱,-۲)$ با شیب ۱ برابر است با:

$$y-(-۲)=۱(x-۱)\Rightarrow y+۲=x-۱\Rightarrow y=x-۳$$

۳۱ | با توجه به شکل فرضی زیر، مختصات دو نقطهٔ A و C مشخص است. برای نوشتن معادلهٔ قطر AC، داریم:



$$m_{AC}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-۰}{۴-۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$A(۲,۰)\ ,\ m=۱$

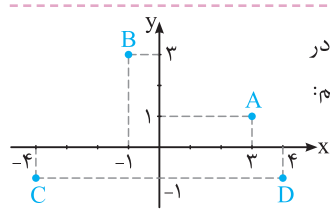
AC معادله: $y-۰=۱(x-۲)\Rightarrow y=x-۲$

قطر BD، عمودمنصف قطر AC است، پس شیب آن برابر $m'=-\frac{۱}{m_{AC}}=-۱$ است. همچنین قطر BD از نقطهٔ وسط پاره‌خط AC می‌گذرد:

$$M=\frac{A+C}{۲}=\left(\frac{۲+۴}{۲},\frac{۰+۲}{۲}\right)=(۳,۱)\ ,\ m'=-۱$$

معادلهٔ قطر BD: $y-۱=-۱(x-۳)\Rightarrow y-۱=-x+۳\Rightarrow y=-x+۴$

۳۲ | نقاط A، B، C و D را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:



فاصلهٔ تمام نقاط روی عمودمنصف CD از نقاط C و D به یک اندازه است. معادلهٔ عمودمنصف CD به‌صورت زیر است:

(وسط CD) $M=\left(\frac{-۴+۴}{۲},\frac{-۱-۱}{۲}\right)=(۰,-۱)$

بنابراین $x=۰$ عمودمنصف CD است.

فاصلهٔ تمام نقاط روی عمودمنصف AB از نقاط A و B به یک اندازه است. معادلهٔ عمودمنصف AB به‌صورت زیر است:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-۱}{-۱-۳}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{شیب عمودمنصف } AB=\frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$$

(وسط AB) $N=\left(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۳+۱}{۲}\right)=(۱,۲)$

معادلهٔ عمودمنصف AB: $y-۲=۲(x-۱)\Rightarrow y-۲=۲x-۲\Rightarrow y=۲x$

محل تلاقی دو خط به معادلات $x=۰$ و $y=۲x$، از چهار نقطهٔ A، B، C و D به یک فاصله است:

$$\begin{cases}x=۰\\y=۲x\end{cases}\Rightarrow y=۲(۰)=۰\Rightarrow O(۰,۰)$$

۳۳ | فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $x=a$ برابر $d=|x_۰-a|$ و از خط $y=b$ برابر $d=|y_۰-b|$ است، بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,-۶)$ از خط $x=-۲$ برابر $d=|۴-(-۲)|=۶$ و از خط $y=۵$ برابر $d=|-۶-۵|=۱۱$ می‌باشد.

۳۴ | فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد:

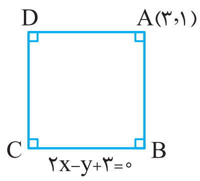
آ) $۳x+۴y+۱=۰\ ,\ A(۲,-۱)$

$$\Rightarrow d=\frac{|۳(۲)+۴(-۱)+۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۳}{۵}$$

ب) $۲x=y-۴\Rightarrow ۲x-y+۴=۰\ ,\ A(-۴,۵)$

$$\Rightarrow d=\frac{|۲(-۴)-۵+۴|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۹\sqrt{۵}}{۵}$$

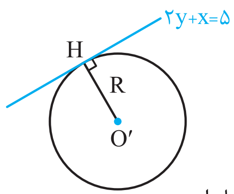
۳۵ | نقطهٔ $A(۳,۱)$ روی خط $۲x=y-۳$ قرار ندارد، زیرا مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ $۲x-y+۳=۰$ صدق نمی‌کند. اگر شکل فرضی زیر را در نظر بگیریم، آن‌گاه $۲x-y+۳=۰$ معادلهٔ ضلع BC است. چون AB بر BC عمود است، پس فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $۲x-y+۳=۰$، طول ضلع مربع است:



$$\text{فاصلهٔ رأس } A \text{ تا ضلع } BC=\frac{|۲(۳)-۱+۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow S=\left(\frac{۸}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\frac{۶۴}{۵}$$

۳۶ | مطابق شکل زیر، فاصلهٔ O' (مرکز دایره) تا خط $x+۲y-۵=۰$ برابر اندازهٔ شعاع دایره است:



$$R=\frac{|-۱+۲(۲)-۵|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

مساحت دایره به شعاع R برابر $\pi R^۲$ است، بنابراین:

$$S=\pi R^۲=\pi\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\pi\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴\pi}{۵}$$

۳۷ | اگر شیب دو خط داده‌شده با هم برابر باشند، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند:

آ)

$$۲x-y=۱۱\Rightarrow m_۱=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{۲}{-۱}=۲$$

$$۴x-۲y=۵\Rightarrow m_۲=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{۴}{-۲}=۲$$

$m_۱=m_۲\Rightarrow$ دو خط با هم موازی‌اند.

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی داده‌شده، نقطهٔ دلخواهی روی یکی از خط‌ها، مثلاً $۲x-y=۱۱$ مشخص می‌کنیم، سپس فاصلهٔ این نقطه را تا خط دیگر، یعنی خط به معادلهٔ $۴x-۲y-۵=۰$ به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ $A(۵,-۱)$ روی خط $۲x-y=۱۱$ قرار دارد. فاصلهٔ A تا خط $۴x-۲y-۵=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۴(۵)-۲(-۱)-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۴\times۵}}=\frac{۱۷}{۲\sqrt{۵}}$$

نکته می‌توانیم ضرایب x و y را در دو خط موازی یکسان کنیم و از فرمول زیر برای فاصلهٔ دو خط استفاده کنیم:

$$\begin{matrix}ax+by+c=۰\\ax+by+c'=۰\end{matrix}\Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ب) $x=-y+۴\Rightarrow x+y-۴=۰$

$۲x+۲y=۷\Rightarrow ۲x+۲y-۷=۰$

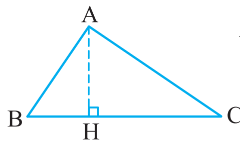
شیب خط به معادلهٔ $x+y-۴=۰$ برابر $m_۱=-\frac{۱}{۱}=-۱$ و شیب خط به معادلهٔ $۲x+۲y-۷=۰$ برابر $m_۲=-\frac{۲}{۲}=-۱$ می‌باشد:

$m_۱=m_۲ \Rightarrow$ دو خط با هم موازیند.

نقطهٔ $A(۲،۲)$ روی خط $x+y-۴=۰$ قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ A را تا خط به معادلهٔ $۲x+۲y-۷=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۲(۲)+۲(۲)-۷|}{\sqrt{۲^۲+۲^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۸}}\times\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۸}}{۸}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۸}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۳۸ | آ) مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ A تا ضلع BC برابر طول ارتفاع AH است:



معادلهٔ BC را با داشتن مختصات دو نقطهٔ B و C می‌نویسیم:

$$B(-۱،۴)\ ,\ C(-۲،۱)\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۱}{-۱+۲}=۳$$

$$\text{معادلهٔ } BC: y-۴=۳(x+۱)\Rightarrow y-۳x-۷=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲،۰)$ تا خط به معادلهٔ $y-۳x-۷=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|۰-۳(۲)-۷|}{\sqrt{(-۳)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

ب) مساحت مثلث ABC برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC$

طول پاره‌خط BC برابر است با:

$$BC=\sqrt{(-۲+۱)^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=\frac{۱۳}{۲}$$

۳۹ | موقعیت شهر A به‌صورت $(۴۵،۳۷)$ و موقعیت شهر B به‌صورت $(۳۷،۳۱)$ می‌باشد:

$$x_۲-x_۱=۴۵^\circ-۳۷^\circ=۸^\circ \xrightarrow{\times ۱۱۰km} x_۲-x_۱=۸۸۰km$$

$$y_۲-y_۱=۳۷^\circ-۳۱^\circ=۶^\circ \xrightarrow{\times ۱۱۰km} y_۲-y_۱=۶۶۰km$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ بین دو شهر}=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$=\sqrt{(۸\times ۱۱۰)^۲+(۶\times ۱۱۰)^۲}=\sqrt{۸^۲\times ۱۱۰^۲+۶^۲\times ۱۱۰^۲}$$

$$=\sqrt{۱۱۰^۲(۸^۲+۶^۲)}=\sqrt{۱۱۰^۲\times ۱۰۰}=۱۱۰\times ۱۰=۱۱۰۰km$$

۴۰ | با فرض $A(a+۱،b-۳)$، $M(۳،۵)$ و $A'(b-۲،-a)$، داریم:

$$\begin{cases}۳=\dfrac{(a+۱)+(b-۲)}{۲}\\ ۵=\dfrac{(b-۳)-a}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+b-۱}{۲}=۳\\ \dfrac{b-a-۳}{۲}=۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b-۱=۶\\ b-a-۳=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{a}+b=۷\\ b-\cancel{a}=۱۳\end{cases}\Rightarrow ۲b=۷+۱۳=۲۰\Rightarrow b=۱۰$$

$$\xrightarrow{a+b=۷} a+۱۰=۷\Rightarrow a=-۳$$

۴۱ | فاصلهٔ نقطهٔ $(۳،۴)$ را از خط $x+۳y-a=۰$ به‌دست می‌آوریم و آن را برابر $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ قرار می‌دهیم:

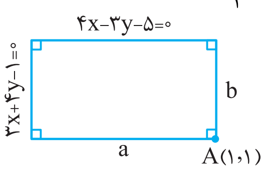
$$d=\frac{|۳+۳(۴)-a|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{|۱۵-a|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow|۱۵-a|=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۵-a=۳\\ ۱۵-a=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۵-۳=a\\ ۱۵+۳=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱۲\\ a=۱۸\end{cases}$$

۴۲ | دو خط $۳x+۴y=۱$ و $۴x-۳y=۵$ بر هم عمودند، زیرا:

$$\left.\begin{aligned}۳x+۴y=۱&\Rightarrow m=-\frac{۳}{۴}\\ ۴x-۳y=۵&\Rightarrow m'=\frac{۴}{۳}\end{aligned}\right\}\Rightarrow mm'=-۱$$

مختصات نقطهٔ $A(۱،۱)$ در هیچ‌یک از معادلات $۳x+۴y=۱$ و $۴x-۳y=۵$ صدق نمی‌کنند، پس نقطهٔ A روی هیچ‌یک از این دو خط قرار ندارند.



طبق شکل، فاصلهٔ نقطهٔ A از دو خط، طول و عرض مستطیل خواهند بود:

$$a=\frac{|۳(۱)+۴(۱)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۶}{۵}\ ,\ b=\frac{|۴(۱)-۳(۱)-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow S=ab=\frac{۶}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

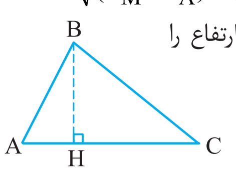
۴۳ | برای قسمت‌های (آ) و (ب)، مختصات M وسط پاره‌خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$M=(\frac{-۲+۴}{۲},\frac{-۲+۲}{۲})=(۱،۰)$$

آ) $M(۱،۰)\ ,\ A(۱،۴)\xrightarrow{x_A=x_M} x=۱$ (معادلهٔ میانهٔ AM)

ب) $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰-۴)^۲}=۴$

پ) برای نوشتن معادلهٔ ارتفاع BH، شیب ارتفاع را به‌دست می‌آوریم:



$$m_{BH}=\frac{-۱}{m_{AC}}\ ,\ m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۲-۴}{۴-۱}=-\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow m_{BH}=\frac{-۱}{m_{AC}}=\frac{۳}{۲}\ ,\ B(-۲،-۲)\Rightarrow y+۲=\frac{۳}{۲}(x+۲)$$

$$\Rightarrow ۲y-۳x-۲=۰$$

ت) معادلهٔ دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل دستگاه محل تلاقی دو خط را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=۱\\ ۲y-۳x-۲=۰\end{cases}\Rightarrow ۲y-۳(۱)-۲=۰\Rightarrow ۲y=۵$$

$$\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}\Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=(۱،\frac{۵}{۲})$$

ث) مساحت مثلث ABC برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}BH\times AC$

AC فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و C است. داریم:

$$AC=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

BH، فاصلهٔ نقطهٔ B تا خط AC است. ابتدا معادلهٔ خط AC را می‌نویسیم:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-4}{4-1}=-\frac{2}{3}\ ,\ A(1,4)$$

معادله خط AC : $y-4=-\frac{2}{3}(x-1)\xrightarrow{\times 3}3y-12=-2(x-1)$

$$\Rightarrow 3y+2x-14=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $B(-2,-2)$ از خط به معادلهٔ $2x+3y-14=0$ برابر است با:

$$BH=\frac{|2(-2)+3(-2)-14|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{24}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}BH\times AC=\frac{1}{2}\times\frac{24}{\sqrt{13}}\times\sqrt{13}=12$$

| ۴۴ |

آ) $a=3\ ,\ b=5\ ,\ c=-2\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=25-4(3)(-2)=49$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-7}{6}=-2\end{cases}$$

ب) $a=-2\ ,\ b=7\ ,\ c=1$

$$\Delta=b^2-4ac=7^2-4(-2)(1)=49+8=57$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{57}}{-4}$$

پ) ضریب $x=6\xrightarrow{\div 2}3\xrightarrow{\text{به توان ۲}}9$

۹ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2+6x=0\Rightarrow x^2+6x+9=9\Rightarrow (x+3)^2=(\pm 3)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+3=3\\ x+3=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-6\end{cases}$$

ت) $(3x-1)^2=16\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}3x-1=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

هر یک از معادلات $3x-1=4$ و $3x-1=-4$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}3x-1=4\\ 3x-1=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=4+1\\ 3x=-4+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=5\\ 3x=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\[2mm] x=-\dfrac{3}{3}=-1\end{cases}$$

ث) $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\Rightarrow x=3\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$

ج) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\\ x-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=3\end{cases}$

| ۴۵ | آ) با تغییر متغیر $x^2=t$، معادلهٔ درجه ۴ بر حسب x را به یک معادلهٔ درجه ۲ بر حسب t تبدیل می‌کنیم:

$$5(x^2)^2-x^2-4=0\ ,\ x^2=t\Rightarrow 5t^2-t-4=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(5)(-4)=81\Rightarrow t=\frac{-(-1)\pm 9}{2(5)}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{10}{10}=1\\[2mm] t=-\dfrac{8}{10}=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

$t=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

$t=-\frac{4}{5}\Rightarrow x^2=-\frac{4}{5}$ غیرممکن

ب) با تغییر متغیر $x^2=A$، داریم:

$$4x^4-7x^2-2=0\Rightarrow 4(x^2)^2-7(x^2)-2=0\Rightarrow 4A^2-7A-2=0$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $4A^2-7A-2=0$ را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$a=4,b=-7,c=-2\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4(4)(-2)=81$$

$$\begin{cases}A=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{+7+\sqrt{81}}{2(4)}=\dfrac{7+9}{8}=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\[2mm] A=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-\sqrt{81}}{2(4)}=\dfrac{-2}{8}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow x^2=-\dfrac{1}{4}\ \text{غیرممکن}\end{cases}$$

بنابراین معادله فقط دو ریشهٔ حقیقی $\pm\sqrt{2}$ دارد.

پ) با تغییر متغیر $x^3=t$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-2(x^3)^2+11x^3+40=0\Rightarrow -2t^2+11t+40=0$$

$$\Delta=11^2-4(-2)(40)=121+320=441=21^2$$

$$\Rightarrow t=\frac{-11\pm 21}{2(-2)}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{10}{-4}=-\dfrac{5}{2}\\[2mm] t=\dfrac{-32}{-4}=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{-\dfrac{5}{2}}\\[2mm] x^3=8\Rightarrow x=2\end{cases}$$

| ۴۶ | مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$5x^2-11x+1=0\Rightarrow a=5,b=-11,c=1$$

$$\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-11}{5}=\frac{11}{5}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$$

| ۴۷ | آ) در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس:

$$x^2-8x+4=0\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{1}=8$$

ب) در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد. پس:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}=4$$

پ) عبارت $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ را به‌صورت یک کسر می‌نویسیم و سپس از S و P استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{8}{4}=2$$

ت) از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده می‌کنیم و مقدار $\alpha^2+\beta^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=8^2-2(4)=56$$

| ۴۸ | آ) مجموع ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوم، برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد. پس:

$$a=1,\ b=m+3\Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{m+3}{1}=4$$

$$\Rightarrow m+3=-4\Rightarrow m=-7$$

با جایگذاری m در معادله، داریم: $x^2-4x-14=0$

در معادلهٔ اخیر، Δ عددی مثبت است، پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی می‌باشد و در نتیجه m به‌دست آمده قابل قبول است.

ب) چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها، یعنی $\frac{c}{a}$ عددی منفی است، پس معادله حتماً دو ریشهٔ حقیقی دارد و در نتیجه m ای که به‌دست می‌آید، قابل قبول است:

$$a=1\,,\ c=-7+m \Rightarrow \frac{c}{a}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-7+m}{1}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2(-7+m)=-3$$

$$\Rightarrow -14+2m=-3 \Rightarrow 2m=11 \Rightarrow m=\frac{11}{2}$$

---

۴۹ | آ) اگر دو ریشهٔ معادله، قرینهٔ یکدیگر باشند، آن‌گاه جمع آن‌ها برابر صفر است و می‌دانیم جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است:

ریشه‌ها: $\alpha, \beta=-\alpha \Rightarrow \alpha+\beta=\alpha-\alpha=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$

$$\Rightarrow 2m+1=0 \Rightarrow 2m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

ب) اگر یکی از ریشه‌های معادله α باشد، آن‌گاه ریشهٔ دیگر معادله $\beta=\frac{1}{\alpha}$ است. داریم:

$$\alpha\beta=\alpha\times\frac{1}{\alpha}=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a \Rightarrow 2=m$$

پ) اگر α یکی از ریشه‌های معادله باشد، آن‌گاه ریشهٔ دیگر معادله $\beta=2\alpha+1$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{2m+1}{2}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}\end{cases} \xrightarrow{\beta=2\alpha+1} \begin{cases}\alpha+(2\alpha+1)=\frac{2m+1}{2}\\ \alpha(2\alpha+1)=\frac{m}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3\alpha=\frac{2m+1}{2}-1=\frac{2m-1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{2m-1}{6} \quad (1)\\ 2\alpha^2+\alpha=\frac{m}{2} \quad (2)\end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow 2\left(\frac{2m-1}{6}\right)^2+\frac{2m-1}{6}=\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\times\frac{(2m-1)^2}{\underset{18}{\cancel{36}}}+\frac{2m-1}{6}=\frac{m}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 18} (2m-1)^2+3(2m-1)=9m$$

$$\Rightarrow 4m^2-4m+1+6m-3=9m$$

$$\Rightarrow 4m^2-7m-2=0\ ,\quad \Delta=49-4(4)(-2)=81$$

$$m=\frac{7+\sqrt{81}}{2(4)}=\frac{7+9}{8}=2\ ,\quad m=\frac{7-\sqrt{81}}{8}=\frac{7-9}{8}=-\frac{1}{4}$$

---

۵۰ | اگر مجموع دو ریشه و حاصل‌ضرب آن‌ها به ترتیب S و P باشند، آن‌گاه ریشه‌ها از معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ به‌دست می‌آیند.

آ) ریشه‌ها: $-5, 11 \Rightarrow \begin{cases}S=-5+11=6\\ P=-5\times 11=-55\end{cases} \Rightarrow x^2-6x-55=0$

ب) $S=(3-\cancel{\sqrt{2}})+(3+\cancel{\sqrt{2}})=6$

$$P=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=3^2-(\sqrt{2})^2=9-2=7$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-6x+7=0$$

پ) $S=\frac{5+\sqrt{3}}{2}+\frac{5-\sqrt{3}}{2}=\frac{5+\cancel{\sqrt{3}}+5-\cancel{\sqrt{3}}}{2}=\frac{10}{2}=5$

$$P=\frac{5+\sqrt{3}}{2}\times\frac{5-\sqrt{3}}{2}=\frac{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{4}$$

$$=\frac{5^2-(\sqrt{3})^2}{4}=\frac{25-3}{4}=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$$

معادله: $x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-10x+11=0$

---

۵۱ | فرض کنیم α و β دو عدد حقیقی مطلوب باشند. داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2}\ ,\ \alpha\beta=-21$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-\frac{5}{2}x-21=0$ می‌باشند:

$$x^2-\frac{5}{2}x-21=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-5x-42=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(-42)=361=19^2$$

$$x=\frac{5\pm 19}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases}x=\alpha=\frac{5+19}{4}=6\\ x=\beta=\frac{5-19}{4}=-\frac{7}{2}\end{cases}$$

---

۵۲ | فرض کنیم دو عدد حقیقی موردنظر α و β باشند، در این‌صورت طبق فرض داریم: $S=\alpha+\beta=4\ ,\ P=\alpha\beta=1$

معادله‌ای که ریشه‌های آن α و β باشند، به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است. معادله: $x^2-4x+1=0$

برای حل معادله از روش کلی استفاده می‌کنیم:

$$a=1\,,\ b=-4\,,\ c=1 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=16-4(1)(1)=12$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{12}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}{\cancel{2}}\\ =2+\sqrt{3}\\ \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(2-\sqrt{3})}{\cancel{2}}\\ =2-\sqrt{3}\end{cases}$$

---

۵۳ | اگر α و β طول و عرض مستطیل باشند، آن‌گاه:

مساحت $=\alpha\beta=10$

محیط $=2(\alpha+\beta)=13 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{13}{2}$

α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-\frac{13}{2}x+10=0$ می‌باشند، داریم:

$$x^2-\frac{13}{2}x+10=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-13x+20=0$$

$$\Delta=(-13)^2-4(2)(20)=169-160=9$$

$$\Rightarrow x=\frac{13\pm 3}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases}x=\alpha=4\\ y=\beta=\frac{5}{2}\end{cases}$$

۵۴

آ) $x^2-3x-5=0 \Rightarrow a=1 , b=-3 , c=-5 \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=3 \\ P=\frac{c}{a}=-5 \end{cases}$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{S+2}{P+S+1}=\frac{3+2}{-5+3+1}=\frac{5}{-1}=-5$$

ب) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=P((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=P(S^2-2P)$

$$=-5(3^2-2(-5))=-5\times 19=-95$$

پ) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$

$$\alpha^3+\beta^3=3^3-3(-5)(3)=27+45=72$$

---

۵۵ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$x^2-3mx+4=0 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{c}{a}=4 \qquad (*)$$

فرض : $\alpha\beta^2=-4 \Rightarrow (\alpha\beta)\beta=-4 \xrightarrow{(*)} 4\beta=-4 \Rightarrow \beta=-1$

عدد ۱- یک ریشهٔ این معادله است. با قرار دادن عدد ۱- به‌جای x ، مقدار m را به‌دست می‌آوریم:

$$(-1)^2-3m(-1)+4=0 \Rightarrow 1+3m+4=0 \Rightarrow 3m=-5 \Rightarrow m=-\frac{5}{3}$$

---

۵۶ در معادلهٔ $2x^2-(2m-1)x+m=0$ ، با شرط $\Delta>0$ ، داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{2m-1}{2} \ , \ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}$$

آ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{2m-1}{2}}{\frac{m}{2}}=\frac{2m-1}{m}=\frac{5}{3}$

$$\Rightarrow 5m=3(2m-1) \Rightarrow 5m=6m-3 \Rightarrow m=3$$

با قرار دادن عدد ۳ به جای m در معادله، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2x^2-5x+3=0 \ , \ \Delta=25-4(2)(3)=1>0$$

پس m به‌دست آمده قابل قبول است.

ب) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=\frac{13}{4} \Rightarrow \frac{(2m-1)^2}{4}-2\times\frac{m}{2}=\frac{13}{4}$

$$\xrightarrow{\times 4} (2m-1)^2-4m=13 \Rightarrow 4m^2-4m+1-4m=13$$

$$\Rightarrow 4m^2-8m-12=0 \xrightarrow{\div 4} m^2-2m-3=0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$$

هر دو مقدار m قابل قبول است:

$$m=3 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2-5x+3=0 \ , \ \Delta=1>0$$

$$m=-1 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2+3x-1=0 \ , \ \Delta=17>0$$

---

۵۷ اگر α یکی از ریشه‌های معادله باشد، آن‌گاه ریشهٔ دیگر معادله $\beta=2\alpha$ است، داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{2}=4 \\ \beta=2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha+2\alpha=4$$

$$\Rightarrow 3\alpha=4 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{3} \Rightarrow \beta=2\alpha=\frac{8}{3}$$

برای به‌دست آوردن مقدار m ، داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{8}{3}=\frac{m}{2} \Rightarrow m=\frac{64}{9}$$

---

۵۸ آ) x را می‌توان به‌صورت $(\sqrt{x})^2$ نوشت. پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}+3 \xrightarrow{\sqrt{x}=A} A^2-4A+3=0$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $A^2-4A+3=0$ را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$A^2-4A+3=(A-1)(A-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} A-1=0 \\ \text{یا} \\ A-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ \text{یا} \\ A=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x=1 \\ \sqrt{x}=3 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x=9 \end{cases}$$

ب) با تغییر متغیر $x^2-4x=t$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t^2-4t-5=0 \Rightarrow (t-5)(t+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$t=5 \Rightarrow x^2-4x=5 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$t=-1 \Rightarrow x^2-4x=-1 \Rightarrow x^2-4x+1=0 , \Delta=16-4=12$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

---

۵۹ بالا

---

۶۰ ۸

مقدار ماکزیمم سهمی به ازای $x=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2(-1)}=3$ به‌دست می‌آید:

$$x=3 \Rightarrow y=-(3)^2+6(3)-1=8$$

---

۶۱ ۱ و ۳

با حل معادلهٔ $f(x)=0$ ، صفرهای تابع f به‌دست می‌آید:

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

---

۶۲ درست

ضریب x^2 منفی است و در نتیجه سهمی دارای ماکزیمم است.

۶۳ نادرست

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=1>0$ است و در نتیجه دو ریشه هم‌علامتند اما جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}=-7$ است و در نتیجه دو ریشه منفی‌اند.