

خلاصه درس



فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریسها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایه** (عنصر) آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C, \dots نمایش می‌دهیم.

برای نمونه،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \pi & -0.5 \\ 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad -3] \quad D = [7]$$

مرتبه ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و می‌خوانیم « A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ در m در n است».

برای نمونه، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، بنابراین از مرتبه 2×3 است.

توجه: فرم کلی نمایش ماتریس A از مرتبه $m \times n$ ، به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ است، که a_{ij} (درایه عمومی ماتریس) درایه روی سطر i ام و ستون j ام است.

برای نمونه،

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ، به طوری که برای $i = z$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ ، برای $i > z$ داشته باشیم $a_{ij} = i + z$ و برای $i < z$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ ، در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

(کتاب درسی)

پاسخ: با توجه به صورت مثال، می‌توان نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}; a_{ij} = \begin{cases} i+z & ; i > z \\ 7 & ; i = z \\ i^2 & ; i < z \end{cases}$$

برای درایه‌های a_{11}, a_{22}, a_{33} داریم $i = z$ ، پس $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 7$. همچنین برای درایه a_{12} داریم $i = 1$ و $z = 2$ ($i < z$)، پس $a_{12} = 1^2 = 1$.

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1^2 = 1 & a_{14} &= 1^2 = 1 \\ a_{21} &= 2+1 = 3 & a_{22} &= 2^2 = 4 & a_{23} &= 2^2 = 4 \\ a_{31} &= 3+1 = 4 & a_{32} &= 3+2 = 5 & a_{33} &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ است.

مثال: ماتریس $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $b_{ij} = i - 2j$ تعریف شده است. ماتریس B را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ: ماتریس B به صورت $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ است. همچنین:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 - 2(1) = -1 & b_{12} &= 1 - 2(2) = -3 \\ b_{21} &= 2 - 2(1) = 0 & b_{22} &= 2 - 2(2) = -2 \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس B به صورت $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ است.

توجه: اگر ماتریس A از مرتبه 1×1 باشد، یعنی $A = [k]_{1 \times 1}$ ، در این صورت این ماتریس را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم. برای نمونه، $A = [2]_{1 \times 1} = 2$.

معرفی چند ماتریس خاص

① **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد.

برای نمونه، $A = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 3]_{1 \times 4}$

② **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد.

برای نمونه، $B = \begin{bmatrix} -1 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

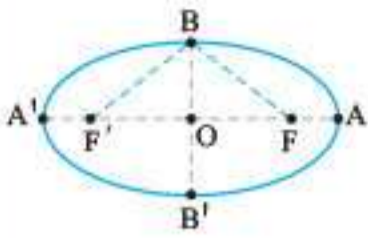
③ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با نماد \bar{O} نشان می‌دهیم. برای نمونه،

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

④ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ می‌نامیم.

برای نمونه، ماتریس A ، ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و B ، ماتریس مربعی از مرتبه ۳ است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$



مثال در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟ (کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم در بیضی طول قطر بزرگ $AA' = 2a$ و طول قطر کوچک $BB' = 2b$ است. بنابراین طبق فرض داریم:

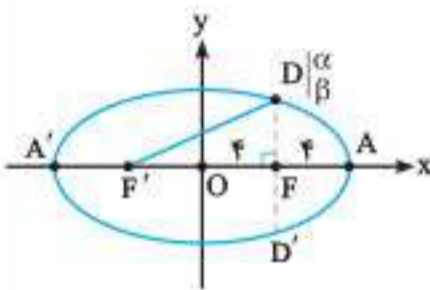
$$AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{3}$$

$$\Delta BOF : \tan \widehat{OBF} = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan \widehat{OBF} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{OBF} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FBF'} = 2\widehat{OBF} = 2(60^\circ) = 120^\circ$$

مثال مطابق شکل، مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای مختصات منطبق است. فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم، بیضی را به ترتیب در نقاط D و D' قطع کند، مختصات D و D' را به دست آورید.



(کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم در بیضی $OF = OF' = c$ و $OA = a$ ، حال چون طبق فرض $OF = FA = 4$ داریم، $a = 4$ و $c = 4$. از D به F' وصل می‌کنیم. طبق تعریف بیضی داریم $DF + DF' = 2a$ ، پس $DF + DF' = 16$ یا $\beta + DF' = 16$ بنابراین:

$$\Delta DFF' : DF^2 = DF'^2 - FF'^2 \Rightarrow \beta^2 = DF'^2 - (2c)^2$$

$$\Rightarrow \beta^2 = DF'^2 - 16 \Rightarrow DF'^2 - \beta^2 = 16$$

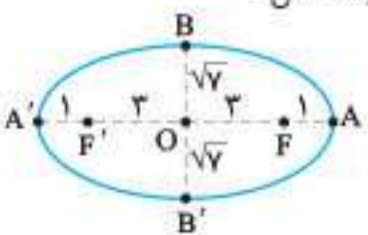
$$\Rightarrow (DF' - \beta)(DF' + \beta) = 16$$

$$\xrightarrow{\beta + DF' = 16} (DF' - \beta) \times 16 = 16 \Rightarrow DF' - \beta = 1$$

$$\begin{cases} DF' - \beta = 1 \\ DF' + \beta = 16 \end{cases} \Rightarrow 2\beta = 15 \Rightarrow \beta = 7.5 \Rightarrow D(4, 7.5), D'(4, -7.5)$$

مثال در یک بیضی $a = 4$ و $c = 3$ است. این بیضی را به طور تقریبی رسم کنید.

پاسخ از آنجا که $c = 3$ ، پس $FF' = 2c = 6$. بنابراین ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ رسم می‌کنیم. می‌دانیم $A'F' = AF = OA - OF = a - c = 4 - 3 = 1$. حال FF' را یک‌بار از طرف F و بار دیگر از طرف F' به اندازه یک واحد امتداد می‌دهیم تا نقاط A و A' به دست آیند. حال:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

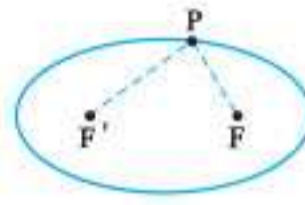
$$\Rightarrow b = \sqrt{7}$$

بنابراین:

$$OB = OB' = b = \sqrt{7}, OA = OA' = a = 4, OF = OF' = c = 3$$

درس سوم: بیضی و سهمی

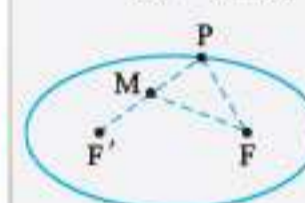
بیضی



تعریف، بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. نقاط ثابت را **کانون‌های بیضی** می‌نامیم و با F و F' نمایش می‌دهیم.

همچنین مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهیم. بنابراین اگر P نقطه‌ای دلخواه روی بیضی باشد، داریم:

توجه! ما ادعا کردیم بیضی مکان هندسی است، بنابراین باید نشان دهیم اگر M نقطه‌ای دلخواه درون بیضی و N نقطه‌ای دلخواه خارج بیضی باشند، مجموع فواصل هر یک از نقاط M و N از F و F' برابر با $2a$ نیست. برای این منظور $F'M$ را از طرف M امتداد می‌دهیم تا بیضی را در نقطه P قطع کند، از F به P وصل می‌کنیم، داریم:



$$P \in \text{بیضی} \Rightarrow PF + PF' = 2a$$

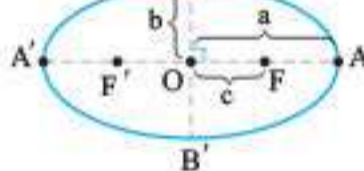
$$\Delta PMF : MF < PF + MP \xrightarrow{+MF'}$$

$$MF + MF' < PF + \underbrace{MP + MF'}_{PF'}$$

$$= PF + PF' = 2a$$

یعنی مجموع فواصل نقطه دلخواه M (داخل بیضی) از F و F' ، کوچک‌تر از $2a$ است. به همین روش می‌توان نشان داد که مجموع فواصل نقطه دلخواه N (خارج بیضی) از F و F' ، بزرگتر از $2a$ است.

اجزای بیضی



① نقاط F, F' را **کانون‌های بیضی** و طول پاره‌خط $FF' = 2c$ را **فاصله کانونی بیضی** می‌گوییم.

② نقاط A و A' را **رأس‌های کانونی (اصلی)** و نقاط B و B' را **رأس‌های ناکانونی (فرعی)** می‌نامیم.

③ وسط پاره‌خط FF' که وسط پاره‌خط‌های AA' و BB' نیز هست را **مرکز بیضی** نامیده و با O نمایش می‌دهیم. ($OF = OF' = c$)

④ **قطر بزرگ بیضی** می‌نامیم و طول آن برابر با $2a$ است، پس $OA = OA' = a$.

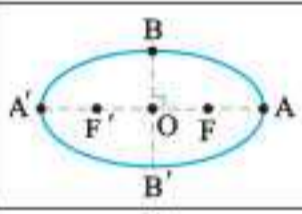
⑤ **قطر کوچک بیضی** می‌نامیم و طول آن برابر با $2b$ است، پس $OB = OB' = b$.

⑥ بین a, b, c رابطه فیثاغورس برقرار است: $a^2 = b^2 + c^2$. بنابراین $a > c$ و $a > b$.

⑦ مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز** (کشیدگی) بیضی می‌نامیم که عددی بین صفر و یک است (زیرا $c < a$). هرچه قدر این عدد به ۰ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر و شکل آن به دایره نزدیک‌تر می‌شود و هرچه قدر این عدد به ۱ نزدیک‌تر شود، کشیدگی بیضی کمتر و شکل آن به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود (۰ شبیه دایره است و ۱ شبیه پاره خط).

درحالتی که $\frac{c}{a} = 0$ شود، بیضی به دایره تبدیل می‌شود و درحالتی که $\frac{c}{a} = 1$ شود، بیضی به پاره‌خط AA' تبدیل می‌شود.

ردیف	سوالات	نمره
فصل اول		
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی _____ ب) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با _____ پ) یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن _____ باشد.	۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & y \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه داریم: $x+y+z=13$. ب) اگر A, B, C سه ماتریس باشند و $AB=AC$ ، آن‌گاه $B=C$. پ) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد. ت) اگر $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر ۱ است.	۱
۳	اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ ، به صورت زیر تعریف شوند، حاصل $AB+I$ را به دست آورید. $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i > j \\ 2 & i = j \\ i^2 & i < j \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} i-j & i \leq j \\ j-i & i > j \end{cases}$	۱/۵
۴	اگر $A^2 = I - 2A$ باشد، نشان دهید $(A^2 + I)^2 = A + I$.	۱
۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{100} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $2a+b-c+3d$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۶	اگر دترمینان ماتریس $A_{2 \times 2}$ برابر $-\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $ -4A^{-1} $ چقدر است؟	۰/۵
۷	ثابت کنید وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود از رابطه $A^{-1} = \frac{1}{ A } \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.	۱/۲۵
۸	اگر $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار x را بیابید.	۱
۹	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A + B $ را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۰	دستگاه $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ -3x+2y=-4 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱
فصل دوم		
۱۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله‌اند، _____ است. ب) رابطه $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر _____. پ) اگر در معادله تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta = 0$ ، آن‌گاه خط و دایره _____. ت) اگر صفحه P هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت سطح مقطع _____ است.	۱

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، آن گاه: $ AB = A B $ ب) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (ℓ) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. ت) نقطه با مختصات $(-2, 3, -4)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است. درست. درست.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون نامیده می شود. ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن ها یک ویژگی داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در بیضی است. ت) اگر برای دو بردار \vec{a} و \vec{b} داشته باشیم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} $ ، در این صورت زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر است.	۱
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشد، در این صورت حاصل $x + 2y + 3z$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۴	اگر $A = [2i - 3j]_{2 \times 2}$ و $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & i+j \\ 0 & i=j \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید. پرتکرار	۲
۵	اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX = B$ ، ماتریس X را به دست آورید. پرتکرار	۱/۵
۶	اگر A ماتریس 3×3 باشد، $ A = 4$ باشد، آن گاه حاصل $ A A $ را به دست آورید.	۰/۷۵
۷	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, 3)$ بوده و $M(1, 1)$ یک نقطه از آن باشد.	۱
۸	در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.	۱/۵
۹	اگر در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟ 	۱/۲۵
۱۰	در بیضی روبه رو: $OA = OA' = a$ ، $OB = OB' = b$ ، $OF = OF' = c$. ثابت کنید: $b^2 + c^2 = a^2$. 	۱/۲۵
۱۱	سه می $y^2 = 2x + 4y$ را در نظر بگیرید. پرتکرار الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سه می را به دست آورید. ب) نقاط برخورد سه می با محورهای مختصات را به دست آورید.	۲
۱۲	الف) در فضای سه بعدی، نقطه A روی محور x ها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض ۳ و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصله وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید. ب) اگر طول، عرض و ارتفاع اتاقی به ترتیب ۴، ۵ و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می کند را به دست آورید.	۲
۱۳	بردارهای $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را در نظر بگیرید. پرتکرار الف) زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید. ب) برداری همود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} پیدا کنید.	۲
۱۴	بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض اند به طوری که $ \vec{a} = 3$ و $ \vec{b} = 26$ و $ \vec{a} \times \vec{b} = 72$ است. اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را به دست آورید.	۱/۵
۲۰	جمع نمره	

امتحان ۱۰ - خرداد ماه ۱۴۰۰ (نوبت دوم)

۱ الف) ۸ (فصل ۱ / ماتریس اسکالر) (۰/۷۵) / (ب) خط (فصل ۲ / مقاطع مخروطی) (۰/۷۵) / (پ) دایره (فصل ۲ / خروج از مرکز بیضی) (۰/۷۵) / (ت) ۶ (فصل ۳ / معرفی فضای \mathbb{R}^3) (۰/۷۵)

۲ الف) درست (فصل ۲ / ضرب عدد حقیقی در ماتریس) (۰/۷۵) / (ب) نادرست (فصل ۲ / مکان هندسی) (۰/۷۵) / (پ) درست (فصل ۲ / ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها) (۰/۷۵) / (ت) نادرست (فصل ۳ / ضرب داخلی) (۰/۷۵)

$$\begin{cases} m-2=0 \\ n+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases} \quad (۰/۷۵)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۱ / ضرب دو ماتریس)

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2 \quad (۰/۷۵)$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۱ / خواص دترمینان)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2+8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۱ / حل دستگاه با استفاده از ماتریس وارون)

۶ فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r = \frac{|2(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (۰/۷۵)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad (۰/۷۵)$$

معادله دایره برابر است با:

(فصل ۲ / معادله دایره مماس بر خط)

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (۰/۷۵)$$

برابر است با: $O' = (3, 1), r' = 1$

فاصله دو مرکز برابر $d = OO' = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$ است و $d > r + r' = 2$ بنابراین دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج‌اند) (۰/۷۵)

(فصل ۲ / وضعیت نسبی دو دایره)

۸ نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد، در نتیجه:

$$BF = BF' \quad (۰/۷۵)$$

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

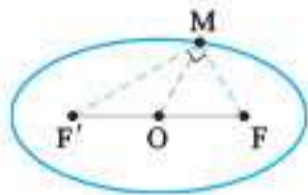
$$BF + BF' = 2a \xrightarrow{(1)} BF = BF' = a \quad (۰/۷۵)$$

بنا به رابطه فیثاغورس در مثلث BOF، داریم:

$$OF^2 + OB^2 = BF^2 \xrightarrow{(۰/۷۵)} c^2 + b^2 = a^2 \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۹ الف)



$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \quad (۰/۷۵) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \quad (۰/۷۵)$$

در مثلث MFF'، میانه وارد بر یک ضلع، نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۷۵)

$$MO = \frac{1}{2} FF' = 4 \quad (۰/۷۵)$$

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF \quad (۰/۷۵)$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow MF = 5 - \sqrt{7} \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۱۰ الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات، خواهیم داشت: $a = -4$ (۰/۷۵)

دهانه سهمی رو به پایین است و معادله آن برابر است با:

$$(x-2)^2 = 4(-4)(y-3) \quad (۰/۷۵)$$

(ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F = (2, -1)$ (۰/۷۵)

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۱ اگر قطر دهانه دیش را با $2b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم، فاصله کانونی برابر $a = \frac{4b^2}{16h}$ (۰/۷۵) است.

$h = 9$ و $2b = 60$ با جای‌گذاری در رابطه فوق، داریم:

$$a = \frac{(2b)(2b)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25 \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۲ الف) $b = -2$ (ب) محور Z ها (۰/۷۵)

(پ) نقطه $A = (0, 2, 3)$ و مختصات وسط AB برابر است با:

$$(-2, 4, 0) \quad (۰/۷۵) \quad (فصل ۳ / معرفی فضای \mathbb{R}^3)$$

۱۳

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6) \quad (۰/۷۵), \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) \quad (۰/۷۵)$$

$$= \frac{25}{49} (2, -3, 6) \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۳ / تصویر قائم بردار)

۱۴

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{0}|^2 \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7 \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۳ / ضرب داخلی)