

خلاصه درس



فصل ۱ | تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای

تعریف تابع چندجمله‌ای

صورت کلی این‌گونه از توابع به زبان ریاضی به شکل زیر است:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

که در آن ضرایب‌های a_0, a_1, \dots, a_n و a_n اعدادی حقیقی و توان‌ها اعدادی حسابی هستند.

به بیان ساده، در توابع چندجمله‌ای، متغیر، زیر رادیکال یا در مخرج

کسر یا در توان قرار ندارد. برای نمونه توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ و

$h(x) = x^x$ چندجمله‌ای نیستند، اما توابع $y = \frac{1}{3}x^2$ و $y = \sqrt{3}x^2 + 2x$

چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

انواع چندجمله‌ای‌ها

به‌طور کلی، نوع یک تابع چندجمله‌ای با توجه به بزرگ‌ترین توان متغیر آن مشخص می‌گردد. بزرگ‌ترین توان متغیر در یک چندجمله‌ای را **درجه آن** چندجمله‌ای می‌نامیم.

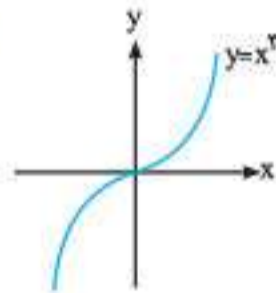
تاکنون با چندجمله‌ای‌های درجه اول یا توابع خطی و درجه دوم یا سهمی‌ها آشنا شده‌ایم. اکنون می‌خواهیم با چندجمله‌ای‌های درجه سوم به فرم کلی $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (به‌خصوص با تابع $y = x^3$ آشنا شویم.

چندجمله‌ای‌های معروف:

- ① توابع خطی: $f(x) = ax + b$
- الف) تابع ثابت: $y = b$
- ب) تابع همانی: $y = x$
- ② توابع درجه دوم (سهمی‌ها): $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ③ توابع درجه سوم: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

بررسی تابع $y = x^3$ و ویژگی‌های آن

نمودار این تابع به شکل مقابل است:



■ دامنه و برد این تابع هر دو \mathbb{R} هستند.

■ نمودار این تابع نسبت به مبدأ مختصات

متقارن است، یعنی اگر از هر نقطه روی این نمودار به مبدأ وصل کرده و به اندازه خود امتداد دهیم، به نقطه‌ای دیگر از همان نمودار می‌رسیم.

■ این تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

مقایسه نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$

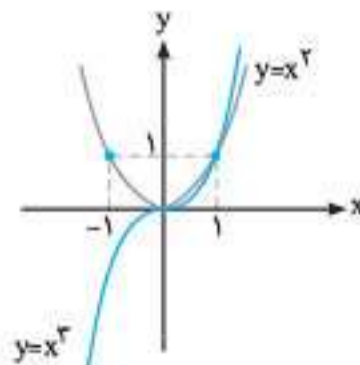
همان‌طور که در نمودار روبه‌رو می‌بینیم:

این دو تابع دارای دو نقطه تقاطع

هستند. زیرا داریم:

$$x^3 = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$



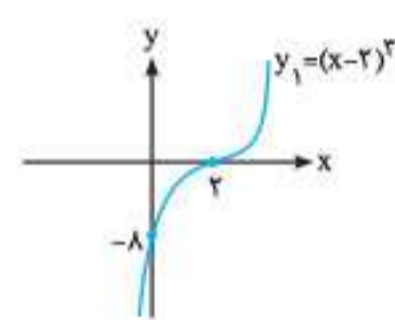
و در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^3$ پایین نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد (چون اعداد بین صفر و یک هرچه قدر دارای توان بیشتری باشند، مقدار کوچک‌تری ایجاد می‌کنند). اما در بازه $(1, +\infty)$ نمودار $y = x^2$ از نمودار $y = x^3$ بالاتر است. در بازه $(-\infty, 0)$ نیز نمودار $y = x^3$ پایین نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد.

رسم توابع درجه سوم پیچیده‌تر به کمک انتقال

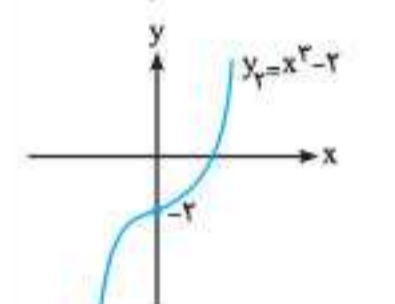
به کمک قوانین انتقال نمودارها می‌توانیم توابع درجه سوم پیچیده‌تر از $y = x^3$ را نیز رسم نماییم.

مثال توابع $y_1 = (x-2)^3$ ، $y_2 = x^3 - 2$ و $y_3 = -x^3$ را به‌طور جداگانه رسم کنید.

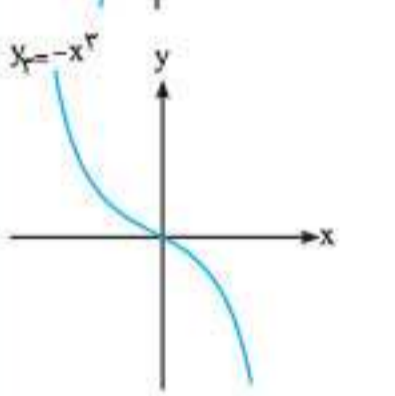
پاسخ برای رسم نمودار تابع y_1 ، باید نمودار $y = x^3$ را دو واحد به راست انتقال دهیم.



برای رسم نمودار تابع y_2 ، باید نمودار $y = x^3$ را دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم.



و در پایان، برای رسم نمودار تابع y_3 باید نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



توابع صعودی و توابع نزولی

تعریف: تابع f را در بازه‌ای مانند I صعودی گوییم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 عضو بازه I داشته باشیم:

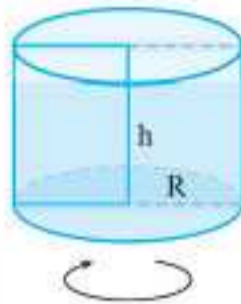
به‌طور مشابه، تابع f را روی بازه I نزولی می‌نامیم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 در این بازه داشته باشیم:

تابع یکنوا: اگر تابع f در بازه I صعودی یا نزولی باشد، آن‌گاه گوییم f بر این بازه یکنواست.

تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f در بازه I ، اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه گوییم f بر این بازه اکیداً یکنواست (روی نمودار توابع اکیداً یکنوا حتی دو نقطه که دارای عرض‌های یکسان باشند هم پیدا نمی‌کنیم).

نکته: هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً نزولی)، صعودی (نزولی) هم محسوب می‌شود. اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست. یعنی هر تابع صعودی (نزولی) را نمی‌توان اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) محسوب کرد.

مثال مستطیلی با ابعاد ۳ و ۴ واحد را حول طول آن دوران داده‌ایم. ابتدا شکل حاصل را رسم کنید، سپس تعیین کنید اگر صفحه‌ای یک‌بار موازی با قاعده شکل به‌وجود آمده و بار دیگر عمود بر آن، شکل را قطع کند، بیشترین مساحت سطح مقطع‌های حاصل چقدر خواهد بود؟



پاسخ شکل حاصل یک استوانه به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ واحد خواهد بود. حال اگر صفحه‌ای موازی با قاعده استوانه (عمود بر محور) آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک دایره خواهد بود (نظیر قاعده استوانه) و مساحت آن برابر است با:

$$S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi \times (3)^2 = 9\pi$$

اما اگر صفحه، عمود بر قاعده استوانه (موازی با محور) آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک مستطیل خواهد بود. برای آن که مساحت این مستطیل ماکزیمم شود، باید شامل محور استوانه (h) باشد. در این حالت، مساحت آن برابر است با:

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S = 4 \times 6 = 24$$

آشنایی با مقاطع مخروطی

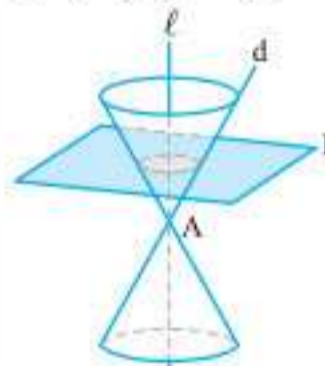
سطح مخروطی، دو خط متقاطع d و l را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



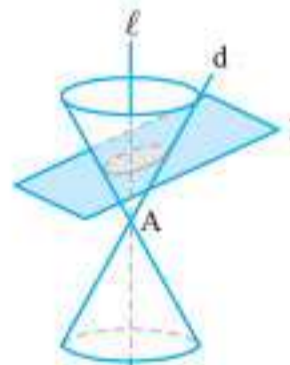
اگر خط d را حول خط L دوران دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی خواهد بود که در آن، خط ثابت (یعنی L) را محور دوران، خط متحرک (یعنی d) را مولد و نقطه تقاطع d و l (یعنی نقطه A) را رأس سطح مخروطی می‌گوییم.

مقاطع مخروطی، شکل‌های حاصل از تقاطع یک صفحه با سطح مخروطی در حالات مختلف را مقاطع مخروطی می‌نامیم که عبارت‌اند از: دایره، بیضی، هذلولی و سهمی.

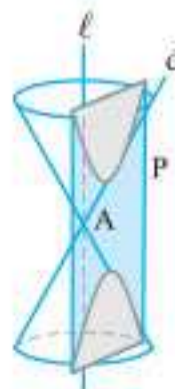
دایره، اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.



بیضی، اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل، بیضی خواهد بود.



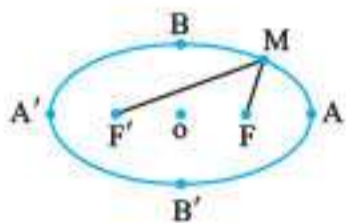
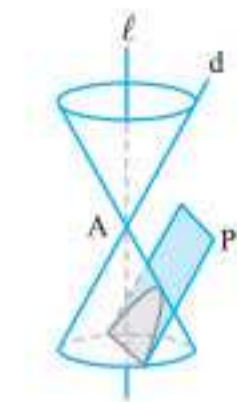
هذلولی، اگر صفحه P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می‌نامیم.



سهمی، اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی، موازی باشد و از رأس عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است. در ادامه از بین مقاطع مخروطی، بیضی و دایره را مورد بحث قرار خواهیم داد.

بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است. در بیضی زیر، مجموع فواصل نقطه M (واقع بر بیضی) از دو نقطه ثابت F و F' که به



آن‌ها کانون می‌گوییم، مقدار ثابتی است. فرض کنیم این مقدار ثابت 2a باشد، یعنی:

$$MF + MF' = 2a$$

MF و MF' را شعاع‌های حامل نقطه M می‌نامیم.

AA' را قطر بزرگ بیضی می‌نامیم و طول آن برابر با 2a می‌باشد.

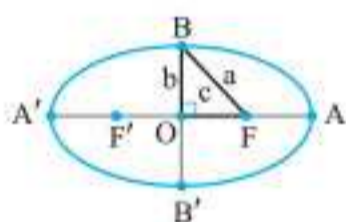
BB' را قطر کوچک بیضی می‌نامیم و طول آن را برابر با 2b فرض می‌کنیم.

FF' را فاصله کانونی بیضی می‌نامیم و طولش را 2c فرض می‌کنیم.

O مرکز بیضی است و وسط AA', BB', FF' قرار دارد.

رابطه طلایی بیضی، در مثلث قائم‌الزاویه OBF، طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



از این رابطه نتیجه می‌گیریم که در بیضی $a > b$ و $a > c$ است.

در بیضی اگر قطر بزرگ (AA') افقی باشد، آن‌گاه بیضی را افقی می‌نامیم و چنانچه قطر بزرگ، عمودی باشد بیضی را قائم می‌نامیم.

خروج از مرکز بیضی، خروج از مرکز، پارامتری است که انحنای بیضی را با دایره مقایسه می‌کند و به‌صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$e = \frac{c}{a}$$

از آن‌جا که c و a مقادیری مثبت‌اند و $c < a$ است، خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین صفر و یک است. یعنی:

$$0 < \frac{c}{a} < 1$$

هرقدر $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک‌تر شود (c → a)، بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر قدر

$\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک‌تر شود (c → 0)، شکل بیضی به دایره شبیه‌تر می‌شود.

مثال کانون‌های یک بیضی نقاط $F(3,1)$ و $F'(-5,1)$ است. الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای کوچک و بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = 5$ باشد، اندازه قطر کوچک، بزرگ و خروج از مرکز بیضی را بیابید.

پاسخ الف) چون عرض کانون‌ها برابرند، پس بیضی، افقی است و داریم:

$$FF' = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

ردیف	سوالات	نمره
فصل اول		
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. ب) تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه خود یکنوا است.	-۱/۵
۲	نقطه $(4, -2)$ واقع بر نمودار $f(x)$ در نمودار تابع $g(x) = f(2x) + 1$ متناظر با نقطه _____ است.	-۱/۲۵
۳	با توجه به نمودار تابع f که در روبه‌رو رسم شده است، معین کنید: پرتکرار الف) f در چه بازه‌های صعودی اکید و در کدام بازه نزولی اکید است؟ ب) f در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است، اما اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست؟	۱
۴	به کمک نمودار $y = \sin x$ و قوانین انتقال نمودارها، نمودار تابع $y = -2\sin(\frac{1}{3}x)$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید. پرتکرار	۱/۲۵
۵	تابع $f = \{(3, 2), (1, 0), (-1, 0), (-2, -1)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟	-۱/۵
۶	تابع $y = x^2 + ax^2 - bx + c$ انتقال یافته تابع $f(x) = x^2$ به اندازه دو واحد در امتداد محور طول‌ها به سمت چپ و سه واحد در امتداد محور عرض‌ها به سمت پایین است. مقادیر a ، b و c را بیابید.	۱/۲۵
۷	ابتدا ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را با شرط $D_f = (-\infty, 1)$ بیابید. سپس نمودار $(f^{-1} \circ f)(x)$ را رسم کنید.	۱/۲۵
۸	اگر $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ و $g = \{(1, -3), (0, 1), (-2, 0)\}$ باشند، آنگاه تابع $f \circ g^{-1}$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
فصل دوم		
۹	ضابطه تابعی به شکل $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که ماکزیمم آن ۴، مینیمم آن ۲- و دوره تناوبش ۲ باشد. پرتکرار	۱
۱۰	معادله مثلثاتی $\cos 2x + 3 \cos x = -1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. پرتکرار	۱/۲۵
۱۱	مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن ۲ و ۶ واحد باشد، آنگاه چند مثلث با این مشخصات می‌توان رسم کرد؟ پرتکرار	۱
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ در دامنه تنازات قرار ندارند. پرتکرار	-۱/۲۵
۱۳	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف) اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ باشد، آنگاه $\tan \alpha$ _____ $\sin \alpha$ است. ب) دوره تناوب تابع $f(x) = 3 \cos(2x) + 5$ برابر با _____ است.	-۱/۲۵ -۱/۵
۱۴	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) کمترین مقدار تابع $y = 1 - \sin x \cos x$ کدام است؟	-۱/۵
	$\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)	

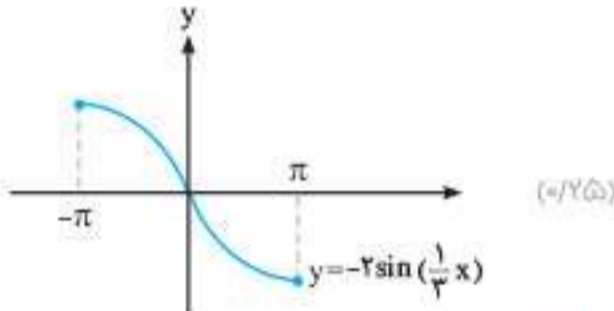


ردیف	سوالات	نمره
۱۰	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). پرتکرار الف) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^7$	۱/۷۵
۱۱	خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟ پرتکرار	۰/۵
۱۲	اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود به دست آورید. پرتکرار	۱/۵
۱۳	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. پرتکرار	۱/۲۵
بخش انتخابی		
دانش‌آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۴ تا ۲۱ فقط ۴ سؤال را به دلخواه انتخاب و پاسخ دهید.		
۱۴	ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ را به دست آورید. پرتکرار	۱
۱۵	مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید. پرتکرار	۱
۱۶	با توجه به نمودار $y = f(x)$. پرتکرار الف) حدود خواسته شده را بنویسید. ب) تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست؟ ۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$	۱
۱۷	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای اکسترمم نسبی برابر -3 باشد، مقادیر a و b را بیابید. پرتکرار	۱
۱۸	در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. الف) اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی _____ خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی) پرتکرار ب) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل _____ نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه) پرتکرار پ) دو پیشامد A و B را _____ گوئیم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار) پرتکرار ت) احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت _____ نمایش داده می‌شود. پرتکرار ($P(A-B), P(A B), P(B A)$)	۱
۱۹	کانون‌های یک بیضی نقاط $(2, 5)$ و $(2, -3)$ و $a = 5$ است، مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید. پرتکرار	۱
۲۰	معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y = 1$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.	۱
۲۱	اگر احتمال انتقال نوهی بیماری هفتوی به نوزاد پسر $0/07$ و نوزاد دختر $0/04$ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟ پرتکرار	۱
۲۴	جمع نمره	

پاسخنامه تشریحی



در آخر قسمت واقع در بازه $[-\pi, \pi]$ را از نمودار می‌بریم:



(فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

۵ ابتدا x ها را مرتب می‌نویسیم:

$x \Rightarrow -2, -1, 1, 3$ (۰/۲۵)

سپس عرض هر کدام را زیرش قرار می‌دهیم: همان‌طور که می‌بینیم تابع صعودی است (۰/۲۵)

(فصل ۱ / یکتوایی)

۶

$f(x) = x^2 \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{واحد انتقال افقی}} y = (x+2)^2$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{واحد انتقال عمودی}} y = (x+2)^2 - 2 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 2$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\text{مقایسه}} a = 4, b = 4, c = 2$ (۰/۲۵), (۰/۲۵), (۰/۲۵)

(فصل ۱ / تبدیل توابع)

$y = (x^2 - 2x + 1) - 1$ (۰/۲۵)

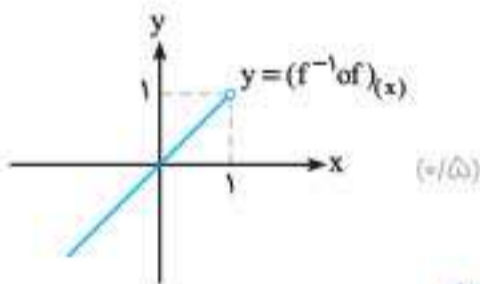
۷

$\Rightarrow y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x-1|$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{x < 1} \sqrt{y+1} = -x+1$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ (۰/۲۵)

می‌دانیم: $(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$



(فصل ۱ / تابع وارون)

۸

$g^{-1} = \{(-3, 1), (1, 0), (0, -2)\}$ (۰/۲۵)

$x = -3 \Rightarrow g^{-1}(-3) = 1$

$\Rightarrow f(g^{-1}(-3)) = f(1) = \frac{1+2}{(1)^2-1} = \frac{3}{0}$ تعریف نشده (۰/۲۵)

$x = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(g^{-1}(1)) = f(0) = -2 \Rightarrow (1, -2)$ (۰/۲۵)

$x = 0 \Rightarrow g^{-1}(0) = -2 \Rightarrow f(g^{-1}(0)) = f(-2) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow fog^{-1} = \{(1, -2), (0, 0)\}$

(فصل ۱ / ترکیب توابع)

امتحان ۱ - نوبت اول



۱ الف) نادرست (اگر $k > 1$ باشد، منحنی در راستای افقی منقبض می‌شود.) (فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

ب) نادرست تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ به‌طور جداگانه اکیداً نزولی است، ولی در دامنه‌اش غیر یکنواست. (فصل ۱ / یکتوایی) (۰/۲۵)

۲ $(2, -1)$ (فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

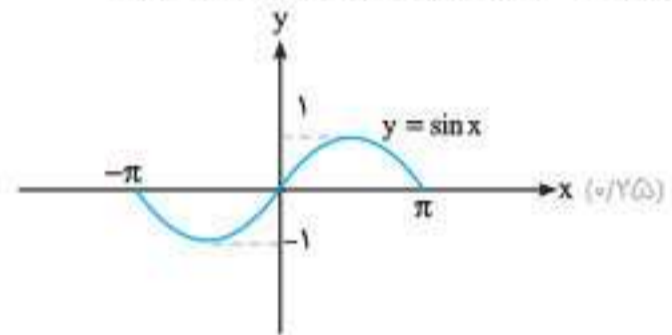
۳ الف) f در بازه $(2, 3)$ نزولی اکید و در بازه $(3, 4)$ صعودی اکید است. (۰/۵)

ب) f در بازه $(0, 3)$ نزولی است اما اکیداً نزولی نیست، همچنین f در بازه $(3, +\infty)$ صعودی است اما اکیداً صعودی نیست. (فصل ۱ / یکتوایی) (۰/۵)

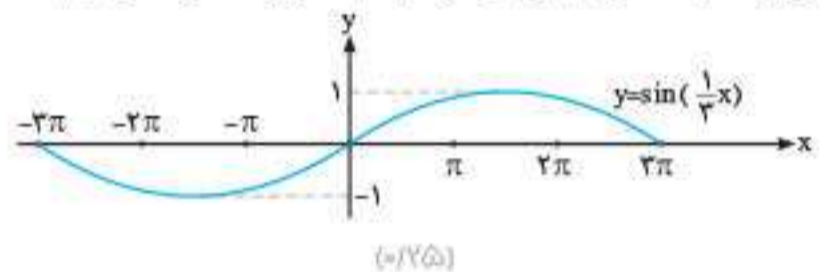
۴

$y = -2\sin(\frac{1}{3}x)$

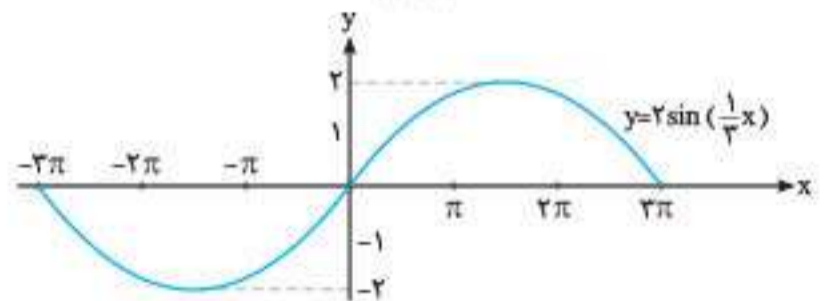
ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم می‌کنیم:



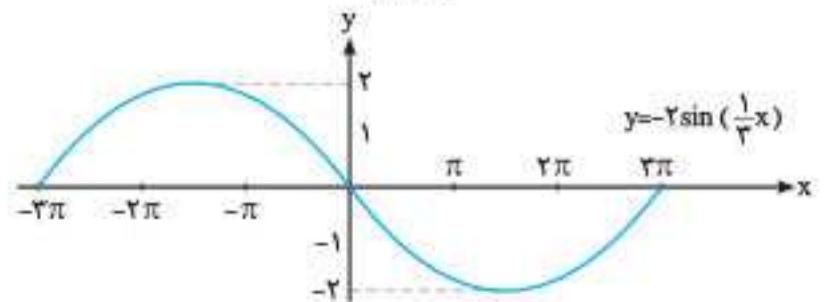
سپس آن را در راستای افقی با ضریب ۳ منبسط می‌کنیم، بعد در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم و در آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



(۰/۲۵)



(۰/۲۵)



(۰/۲۵)