

# خلاصه درس



## فصل اول، تابع

### درس ۱: تبدیل نمودار توابع

#### • انتقال افقی و عمودی

در این درس می‌خواهیم به کمک انتقال یک نمودار، نمودار دیگری را رسم کنیم. ابتدا به انواع انتقال اشاره می‌کنیم.

- انتقال ۱ افقی
- انتقال ۲ عمودی

#### • انتقال افقی

در این نوع انتقال نمودار را تنها به سمت راست یا چپ منتقل می‌کنیم. فرض کنید نمودار  $y = f(x)$  را داریم. برای رسم نمودار  $y = f(x+k)$  اگر  $k > 0$  کافی است نمودار  $y = f(x)$  را  $k$  واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

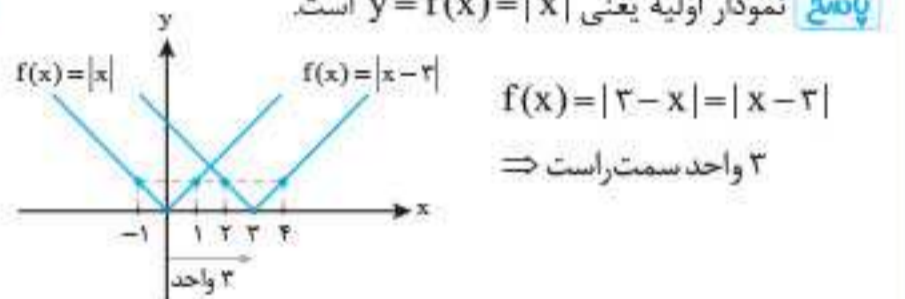
**نکته:** در انتقال افقی، علامت‌ها را برعکس در نظر می‌گیریم.

$y = f(x+k)$	$y = f(x)$	$y = f(x-k)$	
k واحد چپ	k واحد راست		

+ → -	× → ÷
- → +	÷ → ×

#### • مثال نمودار تابع $f(x) = |3-x|$ را رسم کنید.

**پاسخ:** نمودار اولیه یعنی  $y = f(x) = |x|$  است.



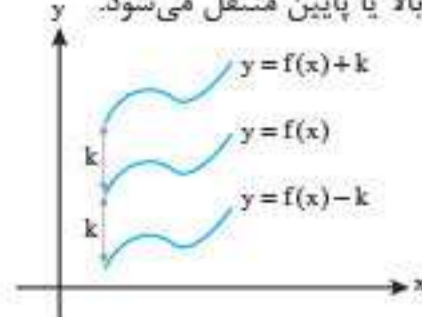
**نکته:** در انتقال افقی تنها دامنه تابع تغییر می‌کند و برد ثابت باقی می‌ماند.

#### • مثال اگر تابع $y = f(x)$ دارای دامنه $(-5, 3)$ باشد، دامنه تابع $y = f(x+2)$ را بیابید.

**پاسخ:**  $D_{جدید} f = [-7, 1)$

#### • انتقال عمودی

در این نوع انتقال نمودار تابع به سمت بالا یا پایین منتقل می‌شود. فرض کنید نمودار تابع  $y = f(x)$  را داریم و می‌خواهیم نمودار تابع  $y = f(x) + k$  ( $k > 0$ ) را رسم کنیم. این کار را با انتقال  $k$  واحد به سمت بالا انجام می‌دهیم.



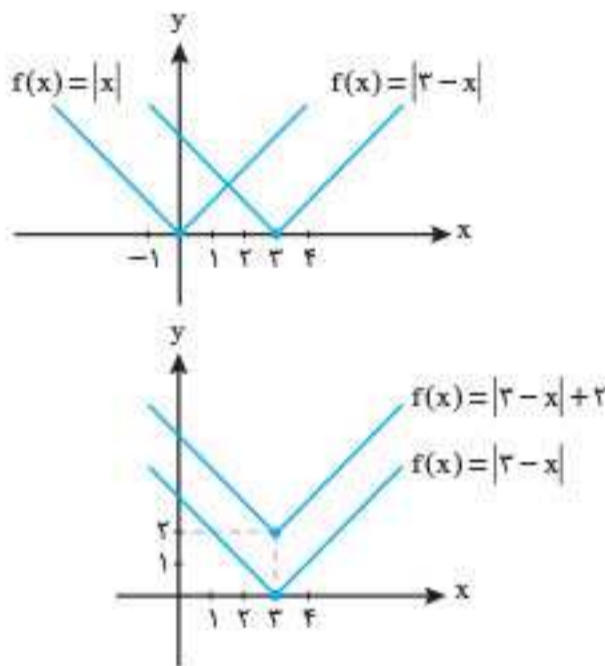
**نکته:** در انتقال عمودی علامت‌ها تغییری نمی‌کنند.

$y = f(x) + k$  ;  $k > 0$  واحد بالا

$y = f(x) - k$  ;  $k > 0$  واحد پایین

#### • مثال نمودار تابع $f(x) = |3-x| + 2$ را رسم کنید.

$f(x) = |3-x| + 2 = |x-3| + 2$



**نکته:** در انتقال عمودی تنها برد تابع تغییر خواهد کرد.

#### • انقباض و انبساط:

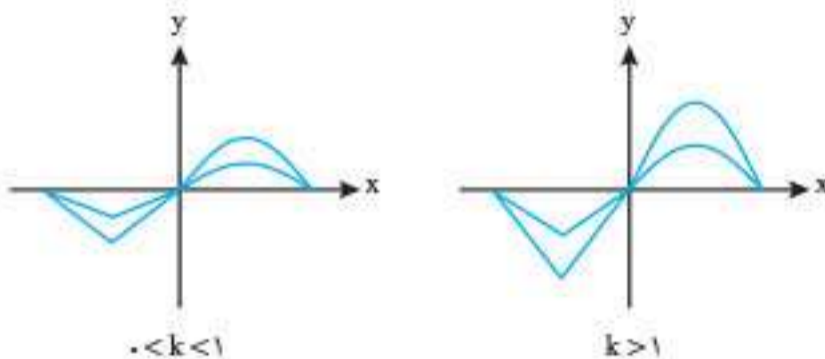
همانند انتقال افقی و عمودی، در رسم نمودارها انقباض و انبساط افقی و عمودی را داریم.

#### • انقباض و انبساط عمودی

این نوع انبساط در مقادیر برد تأثیرگذار است.

فرض کنید می‌خواهیم نمودار  $y = kf(x)$  را رسم کنیم.

کافی است عرض نقاط را در  $k$  ضرب کنیم.



**نکته ۱:** اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود.

**نکته ۲:** اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود.

**نکته ۳:** اگر  $k$  عددی منفی باشد ابتدا نمودار  $y = |k|f(x)$  را رسم می‌کنیم، سپس قرینه آن را نسبت به محور  $x$  ها رسم می‌کنیم.

فصل سوم: حد‌های نامتناهی، حد در بی‌نهایت

درس ۱: حد‌های نامتناهی

• **حد مثبت بی‌نهایت:** فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

• **حد منفی بی‌نهایت:** فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از  $a$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

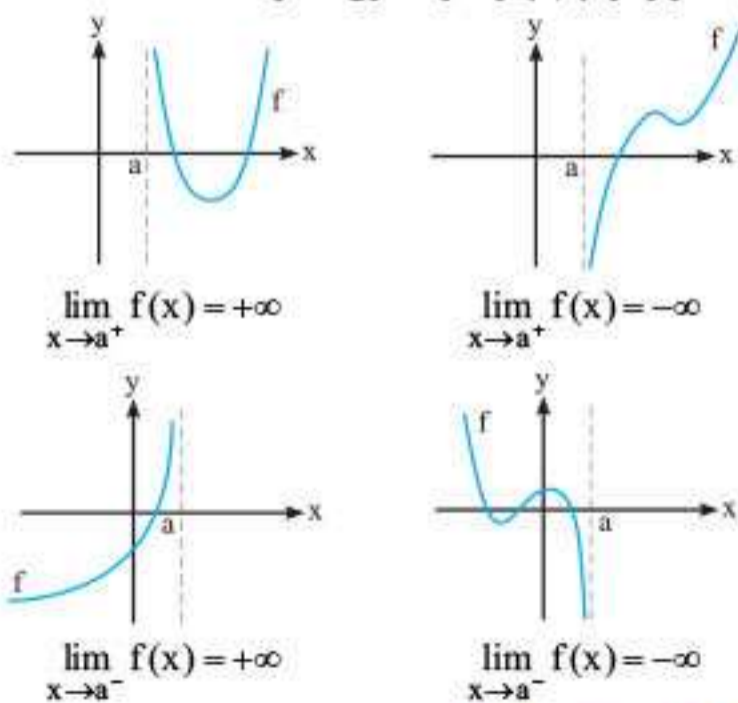
• **حد راست مثبت بی‌نهایت:** فرض کنیم  $f$  در یک همسایگی راست از  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

• **حد راست منفی بی‌نهایت:** فرض کنیم  $f$  در یک همسایگی راست از  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از  $a$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

• **حد چپ منفی بی‌نهایت:** فرض کنیم  $f$  در یک همسایگی چپ از  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  با مقادیر کوچک‌تر از  $a$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

• **حد چپ مثبت بی‌نهایت:** فرض کنیم  $f$  در یک همسایگی چپ از  $a$  تعریف شده باشد. رابطه  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  به این معناست که می‌توان مقادیر  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن که  $x$  با مقادیر کوچک‌تر از  $a$  به قدر کافی به  $a$  نزدیک اختیار شود.

مثال‌های زیر در فهم بهتر تعاریف فوق بسیار مفید هستند:



فضای حد بی‌نهایت

قضیه، اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد: آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & ; n \text{ عددی زوج باشد} \\ -\infty & ; n \text{ عددی فرد باشد} \end{cases}$$

درس ۲: معادلات مثلثاتی

۱ حل معادله  $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

نکته ۱: جواب‌های معادله  $\sin x = 0$  برابر  $x = k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  است.

نکته ۲: جواب‌های معادله  $\sin x = 1$  برابر  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  است.

نکته ۳: جواب‌های معادله  $\sin x = -1$  برابر  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  است.

۲ حل معادله  $\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha (k \in \mathbb{Z})$

نکته ۱: جواب‌های معادله  $\cos x = 0$  به صورت  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  است.

نکته ۲: جواب‌های معادله  $\cos x = 1$  به صورت  $x = 2k\pi$  است.

نکته ۳: جواب‌های معادله  $\cos x = -1$  به صورت  $x = 2k\pi + \pi$  است.

۳ حل معادله  $\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$

۴ حل معادله  $\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

- الف)  $2\sin^2 x - \sin x = 0$       ب)  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$   
 پ)  $4\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 0$       ت)  $\cos x(2\cos x - 9) = 5$   
 ث)  $\tan 5x = \tan 2x$       ج)  $\cot x - 3\tan x = 0$

پاسخ

الف)  $2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب)  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پ)  $4\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 0 \xrightarrow{t=\cos x} 4t^2 + 9t + 5 = 0$   
 $\Rightarrow (t+1)(4t+5) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{5}{4} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

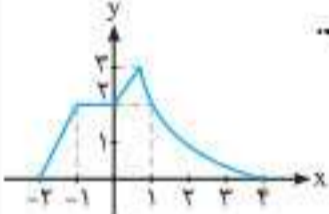
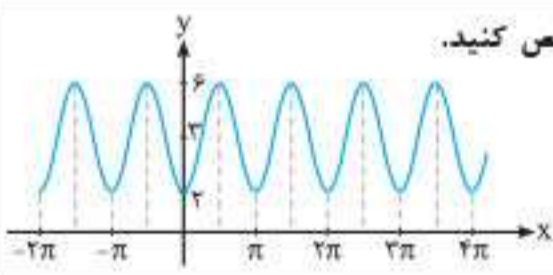
ت)  $\cos x(2\cos x - 9) = 5 \xrightarrow{t=\cos x} 2t^2 - 9t - 5 = 0$   
 $\Rightarrow (2t+1)(t-5) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ t = 5 \Rightarrow \cos x = 5 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

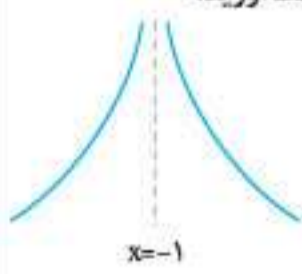
ث)  $\tan 5x = \tan 2x \Rightarrow 5x = k\pi + 2x \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

ج)  $\cot x - 3\tan x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tan x} - 3\tan x = 0 \Rightarrow 1 - 3\tan^2 x = 0$

$$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) برای رسم نمودار تابع $y = -\cos 2x$ ، باید نمودار $y = \cos x$ را نسبت به محور $x$ ها قرینه کرده، سپس طول‌ها را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. ب) تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است. <b>پرتکرار</b> پ) چندجمله‌ای $x^3 + x + 2$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. ت) دوره تناوب تابع $y = -2 \sin 4x$ برابر $\pi$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) مقدار ماکزیمم تابع $y = -4 \sin 2x + 5$ برابر _____ است. ب) اگر $\tan \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، آن‌گاه $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ برابر _____ است. پ) نمودار $y = \sqrt{-x}$ را $\Delta$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، ضابطه تابع به صورت _____ است.	۱/۵
۳	نمودار تابع $y = ( x  - 2)^2$ را رسم کنید.	۱/۵
۴	مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $2x^3 + ax^2 - bx + 3$ بر $x - 1$ و $x + 2$ بخش‌پذیر باشد. <b>پرتکرار</b>	۱/۵
۵	نمودار تابع $f$ در شکل مقابل داده شده است. با توجه به آن، نمودار تابع $g(x) = f(x +  x )$ را رسم کنید. 	۱/۵
۶	اگر $f$ تابعی اکیداً صعودی با دامنه $[-2, 6]$ باشد و داشته باشیم $f(3) = 0$ ، دامنه تابع $g(x) = \log(f(x - 1))$ را به دست آورید.	۱/۵
۷	معادله $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ را حل کنید. <b>پرتکرار</b>	۱/۲۵
۸	نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ در شکل مقابل داده شده است. ضابطه تابع را مشخص کنید. 	۱/۵
۹	معادله $\tan^2 2x - 3 = 0$ را حل کنید و جواب‌های آن را در بازه $[0, \pi]$ به دست آورید. <b>پرتکرار</b>	۱/۷۵
۱۰	حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید. <b>پرتکرار</b> الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(1-x)^2}{x + x^2 - 3x^3}$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x +1}{x^2-1}$	۳
۱۱	مجاانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x^2}{x^2 - 1} - x$ را در صورت وجود به دست آورید. <b>پرتکرار</b>	۲
۱۲	نمودار تابع $f$ را با شرایط زیر رسم کنید. خط $x = 2$ مجانب قائم آن باشد. $f(0) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.	۱/۲۵
۱۳	نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 1}$ در مجاورت مجانب قائم خودش به چه شکلی است؟	۰/۷۵
۲۰	جمع نمره	

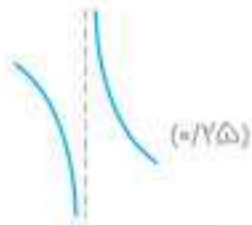


ردیف	سؤالات	نمره
<b>فصل اول</b>		
۱	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(2x+1)$ برابر _____ است. <b>پرتکرار</b>	۰/۵
۲	نمودار تابع مقابل را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید. $y = \cos 2x - 1$	۱
۳	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) چند جمله‌ای $p(x) = (2-x)^2(x+1)^3$ یک چند جمله‌ای از درجه ۵ است. ب) اگر تابع $f$ در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.	۰/۵
۴	مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^2 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x-2)$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد. <b>پرتکرار</b>	۱/۵
<b>فصل دوم</b>		
۵	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{4}x$ را محاسبه کنید.	۱
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مقدار تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{4}$ تعریف نشده است.	۰/۲۵
۷	معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید. <b>پرتکرار</b>	۱/۲۵
<b>فصل سوم</b>		
۸	حدود زیر را محاسبه کنید. <b>پرتکرار</b> الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+1}$	۱/۵
۹	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید. <b>انتخابی</b>	۲
۱۰	نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟ <b>پرتکرار</b>	۱
۱۱	اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه $x = -1$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر $b$ و $c$ را به دست آورید. 	۱
<b>فصل چهارم</b>		
۱۲	اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق، $f'(1)$ را حساب کنید.	۱/۲۵
۱۳	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید. <b>انتخابی</b>	۲

۱۰

$$x(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0 \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2+x} = +\infty \quad (0/25), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^2+x} = -\infty \quad (0/25)$$



(فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)

۱۱ چون هر دو شاخه منحنی رو به  $+\infty$  است، پس مخرج ریشه مضاعف دارد:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2 \quad (0/5)$$

$$(-1)^2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \quad (0/5)$$

(فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)

۱۲

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1 \quad (0/25)$$

(فصل ۴ / تعریف مشتق)

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 \quad (0/5)$$

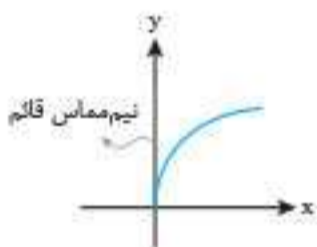
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad (0/5), \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \quad (0/5)$$

پس تابع در  $x=0$  مشتق پذیر نیست.

(فصل ۴ / مشتق پذیری و پیوستگی)

۱۴ نادرست. خط  $x=0$  مماس قائم این

نمودار است. (0/25)



(فصل ۴ / نقاط مشتق ناپذیر)

۱۵

$$\text{الف) } f'(x) = \left( \frac{2}{2\sqrt{2x+2}} \right) (x^2+1) + (2x^2) \left( \frac{1}{\sqrt{2x+2}} \right) \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{2(2x+2)(x^2+2x+1)^2}{(0/25)}$$

$$\text{پ) } h'(x) = \frac{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2-5x+7)}{(-2x+9)^2} \quad (0/25)$$

(فصل ۴ / فرمولهای مشتق گیری)

۱۶

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = 2 \sin 2x \quad (0/5)$$

$$f''(x) = 4 \cos 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \quad (0/5)$$

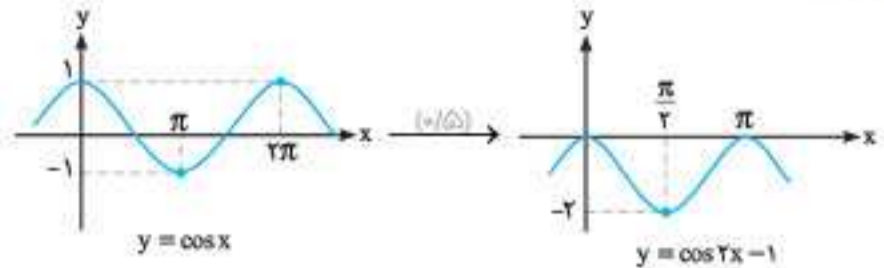
(فصل ۴ / مشتق مرتبه دوم)

$$\frac{1}{6} \quad (0/5) \quad \text{آهنگ تغییرات}$$

امتحان ۸ - شهریور ماه ۱۳۹۹ (نوبت دوم)

۱ [۰, ۱] (فصل ۱ / تبدیل نمودار توابع) (0/5)

۲



(فصل ۱ / تبدیل نمودار توابع)

۳ الف) درست (فصل ۱ / درجه چند جمله‌ای) (0/25)

ب) درست (توابع یکنوا) (0/25)

۴

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{p(2)=0} 2a + 2b = -6 \quad (0/5) \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{p(-1)=2} a - b = 6 \quad (0/5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad (0/25), \quad b = -5 \quad (0/25)$$

(فصل ۱ / تقسیم چند جمله‌ای و بخش پذیری)

۵

$$\max = \pi + \sqrt{5} \quad (0/25), \quad \min = -\pi + \sqrt{5} \quad (0/25)$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad (0/5)$$

(فصل ۲ / دوره تناوب)

۶ نادرست (فصل ۲ / توابع مثلثاتی) (0/25)

۷

$$\cos 2x = \cos x \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi - x \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0/5) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0/5)$$

(فصل ۲ / معادلات مثلثاتی)

۸

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty \quad (0/25), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \quad (0/25) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{3x^2} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad (0/25)$$

(فصل ۳ / حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت)

۹

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \quad (0/25)$$

$\Rightarrow y = -2$  (0/5): مجانب افقی

$$1-x^2=0 \quad (0/5) \Rightarrow x = \pm 1 \quad (0/5)$$

مجانب‌های قائم:

(فصل ۳ / مجانب قائم و افقی)