پاسخ‌نامه
هوش و خلاقیت
ریاضی نهم
۹

از مجموعه مرشد

- بیش از ۱۶۰۰ تست (شامل: آزمون‌های ورودی مدارسِ تیزهوشان و نمونه‌ی تهران، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی و...)
- پاسخنامه‌ی تشریحی برای هر فصل
- برخی نکات مهم برای حل سؤالات هوش و خلاقیت ریاضی

وحید اسدی کیا
مهندس امیر طهماسبی
اباصلت نوراللهی

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

با توجه به رویکرد جدید سؤالات آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان در سال‌های اخیر که در طراحی سؤالات آن‌ها، ریاضی، توأم با هوش و خلاقیت و استدلال به کار رفته است، به پیشنهاد دبیر محترم مجموعه «مرشد» جناب آقای عزیززاده، این کتاب را نوشتیم تا علاوه بر این که با مطالعه و تمرین آن، قدرت فکر و تجسم دانش‌آموزان عزیز ارتقا یابد، مجموعه‌ی کاملی از این نوع سؤالات در اختیار همکاران و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه‌ی تهران و مرکز استان‌های کشور
- آزمون‌های ورودی روبوکاپ و المپیادهای کامپیوتر
- مسابقات علمی و المپیادهای ریاضی داخلی کشوری و استانی و المپیادهای خارجی
- مسایل مسابقات جهانی کانگورو و آزمون‌های بین‌المللی مختلف از قبیل IMC
- مسایل مسابقات خارجی (کشورهای انگلیس، مجارستان، بلژیک و آفریقای جنوبی و...)
- مسایل المپیادهای کشوری مبتکران و دانش‌پژوهان جوان
- برخی از مسایل کنکورهای سراسری، استعداد تحصیلی، GMAT و GRE که با کلمه‌ی (کنکور) یا GMAT در پایان هر سؤال مشخص شده است.

این کتاب در دو جلد تألیف شده است. جلد اول: شامل ۱۶۹۰ سؤال و پاسخنامه‌ی کلیدی

جلد دوم: شامل پاسخنامه‌ی تشریحی و نکات لازم برای حل سؤال‌ها.

مسایل این کتاب، براساس ۵ فصل طبقه‌بندی شده است که به ترتیب عبارت‌اند از: اعداد طبیعی، هوش محاسباتی، هوش تصویری، استدلال و تحلیل، هندسه و تحلیل. در هر فصل، سؤال‌ها از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت ⌧ مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند.

این کتاب در مجموع بیش از ۱۶۰۰ تست را شامل می‌شود و برخی از نکته‌های کلیدی را آموزش می‌دهد. امیدواریم این کتاب مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و معلّمان گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

به دانش‌آموزان عزیز توصیه می‌شود جهت آمادگی بیش‌تر برای شرکت در آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، کتاب مسابقات ریاضی نهم (مرشد نهم) تألیف آقای وحید اسدی‌کیا را به همراه این کتاب مطالعه نمایند.

در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از جناب آقای دهقانی مدیر عامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران که شرایط و امکانات چاپ کتاب را فراهم آوردند، سپاس‌گزاری کنیم. همین‌طور از دبیر محترم مجموعه «مرشد» آقای مهندس هادی عزیززاده که در مراحل تألیف این کتاب مشاور ما بودند، متشکریم.

از خانم لیلا مهرعلی‌پور که زحمت حروف‌چینی و ترسیم شکل‌ها را برعهده داشتند و بهاره خدامی (گرافیست) بسیار ممنونم و برای این عزیزان و سایر همکاران شرکت مبتکران از جمله جناب آقای محسن انصاری مدیر محترم واحد فروش و سرکار خانم کبری مرادی مدیر محترم واحد تولید، آرزوی موفقیت داریم.

وحید اسدی‌کیا
مهندس امیر طهماسبی
اباصلت نوراللهی

فهرست

پاسخ‌نامه

فصل ۱ اعداد طبیعی

رقم

۱. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۱: **۹ عدد یک رقمی طبیعی، ۹۰ عدد دو رقمی طبیعی، ۹۰۰ عدد سه رقمی طبیعی و ۹۰۰۰ عدد چهاررقمی طبیعی و در حالت کلی $9\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{رقم}}$ عدد n رقمی طبیعی وجود دارد.**

از ۳۸۸۹ رقم، ۹ رقم مربوط به اعداد یک رقمی و $2\times 90=180$ رقم مربوط به اعداد دو رقمی و $3\times 900=2700$ رقم مربوط به اعداد سه رقمی است. پس باید $3889-(2700+180+9)=1000$ رقم مربوط به اعداد ۴ رقمی باشد در نتیجه تعداد اعداد ۴ رقمی، $1000\div 4=250$ صفحه است. پس تعداد صفحات کتاب برابر است با: $9+90+900+2500=1249$

۲. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۲: **از عدد ۱ تا ۹۹، از هر رقم ۲۰ بار ولی از رقم صفر، ۹ بار استفاده شده است.**
از عدد ۱۰۰ تا ۱۹۹، از هر رقم ۲۰ بار ولی از رقم ۱، ۱۲۰ بار استفاده شده است.
از عدد ۲۰۰ تا ۲۹۹، از هر رقم ۲۰ بار ولی از رقم ۲، ۱۲۰ بار استفاده شده است و...

از ۰ تا ۹۹۹ در مجموع، ۳۰۰۰ رقم داریم که هر رقم $3000\div 10=300$ بار به کار رفته است. از ۱۰۰۰ تا ۱۹۹۹، رقم ۱، ۳۰۰ بار در مرتبه‌های یکان، دهگان و صدگان و ۱۰۰۰ بار در مرتبه‌ی هزارگان به کار رفته است. از ۲۰۰۰ تا ۲۹۹۹ به تعداد ۳۰۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. پس تاکنون در مجموع $300+300+1000+300=1900$ بار رقم ۱ به کار رفته است و هنوز $1997-1900=97$ بار دیگر باید رقم ۱ را استفاده کنیم و چون از ۳۱۰۰ تا ۳۱۹۹، بیش از ۱۰۰ بار رقم ۱ استفاده می‌شود، پس تعداد صفحه‌های کتاب بین ۳۰۰۰ تا ۳۲۰۰ است.

۳. گزینه‌ی (ج) همه‌ی اعداد نوشته شده در این کتاب به صورت $3K+1$ هستند که K عددی طبیعی است.

از طرفی می‌دانیم: $2005=3\times 668+1$

پس ۲۰۰۵ در واقع ۶۶۸ اُمین عدد این کتاب است و چون هر ۱۰۰ عدد در یک صفحه قرار دارند پس ۲۰۰۵ در ۷ اُمین صفحه قرار دارد و چون صفحه‌ی اول ۵۲۶ است پس صفحه‌ی ۷ اُم ۵۳۲ است.

۴. گزینه‌ی (الف) سال بعدی ۲۰۱۸ است یعنی ۱۰ سال بعد.

۵. گزینه‌ی (ب) عدد متقارنِ قبلی ۱۹۹۱ بوده است یعنی $2002-1991=11$ سال قبل.

۶. گزینه‌ی (د) تاریخ‌های موردنظر عبارت‌اند از: $\underbrace{11/1/1, 22/2/2, \ldots, 99/9/9}_{9\ \text{تاریخ}}, \underbrace{11/11/1, 11/1/11, 11/11/11, 22/2/22}_{4\ \text{تاریخ}}$

پس تعداد تاریخ‌های مورد نظر مسئله در یک قرن $9+4=13$ است.

۷. گزینه‌ی (هـ) بعد از تولد ۱۰ سالگی علی تاریخ‌هایی که دارای این ویژگی باشند، عبارت‌اند از:

۹۶/۱۲/۸	۹۶/۴/۲۴	۹۲/۴/۲۳
۹۹/۹/۱۱	۹۶/۶/۱۶	۹۳/۳/۳۱
۹۹/۱۱/۹	۹۶/۸/۱۲	۹۵/۵/۱۹

بنابراین تولد برادرهایش باید در تاریخ‌های ۹۲/۴/۲۳ و ۹۶/۴/۲۴ باشند. پس کوچک‌ترین برادر علی در تاریخ ۹۶/۴/۲۴ به دنیا آمده است.

۸. گزینه‌ی (ب) اگر از بزرگ‌ترین ارزش مکانی شروع کنیم، بهتر است رقم ۲ در عدد مربوط به سال را تغییر ندهیم در نتیجه عدد ماه نمی‌تواند ۱۲ باشد و چون عدد ۱۱ رقم تکراری دارد، پس ۱۱ نیز نیست. پس رقم ۰ در عدد مربوط به ماه است. در نتیجه عدد روز نباید ۰ یا ۲ داشته باشد، پس عددی دو رقمی با دهگان ۱ در عدد مربوط به روز قرار می‌دهیم. پس عدد سال، ۲۳۴۵ و عدد ماه، ۰۶ و عدد روز ۱۷ است.

۹. گزینه‌ی (د) ابتدا چهار رقم سمتِ چپ عدد را ثابت فرض می‌کنیم. در این صورت دهگان نمی‌تواند ۷ یا ۸ باشد، پس باید ۹ باشد و اگر یکان را صفر در نظر بگیریم، عدد بعدی ۱۸۷۵۹۰ می‌باشد که در $۲۱ = ۱۸۷۵۶۹ - ۱۸۷۵۹۰$ کیلومتر بعد دیده می‌شود.

۱۰. گزینه‌ی (هـ) برای این که ۳ رقم سمت راست برابر ۳ رقم سمت چپ شود لازم است یکان ساعت برابر دهگان ثانیه باشد و دهگان ثانیه حتماً باید بین ۰ تا ۵ باشد (مانند دهگان دقیقه) حالات ممکن به شرح زیر است:

۲۰ : n۲ : ۰n	۱۰ : n۱ : ۰n	۰۰ : n۰ : ۰n
۲۱ : n۲ : ۰n	۱۱ : n۱ : ۰n	۰۱ : n۰ : ۱n
۲۲ : n۲ : ۰n	۱۲ : n۱ : ۰n	۰۲ : n۰ : ۲n
۲۳ : n۲ : ۰n	۱۳ : n۱ : ۰n	۰۳ : n۰ : ۳n
	۱۴ : n۱ : ۰n	۰۴ : n۰ : ۴n
	۱۵ : n۱ : ۰n	۰۵ : n۰ : ۵n

در هر کدام از این حالات n می‌تواند بین ۰ تا ۵ باشد (یعنی ۶ حالت) پس در طول شبانه‌روز $۹۶ = ۶ \times ۱۶$ بار این اتفاق می‌افتد.

۱۱. گزینه‌ی (ب) طبق مسئله، حاصل‌ضربِ رقم‌های عدد باید ۲ باشد، پس عدد باید از یک‌رقم ۲ و چندرقم ۱ تشکیل شده باشد و چون حاصل جمع رقم‌های عدد باید ۲۰۱۰ شود، پس تعداد یک‌های به کار رفته در عدد برابر است با $۲۰۰۸ = ۲ - ۲۰۱۰$ و چون می‌تواند عدد ۲ را هر جایی در عدد گذاشت، پس $۲۰۰۹ = ۱ + ۲۰۰۸$ عدد با این خاصیت می‌توان به دست آورد. به‌طور مثال عدد ۱۱ دو رقمی است اگر بخواهیم رقم ۲ را به ارقام آن اضافه کنیم، اعداد ۱۱۲، ۱۲۱ و ۲۱۱ یعنی $۳ = ۱ + ۲$ عدد مختلف به وجود می‌آید.

۱۲. گزینه‌ی (الف) اگر همه‌ی رقم‌ها ۱ باشند، حاصل جمع از ۶ بیش‌تر می‌شود پس حداقل یکی از رقم‌ها صفر است که در نتیجه حاصل‌ضرب ارقام صفر می‌شود.

۱۳. گزینه‌ی (الف) با هریک از ۳ تایی‌های: (۱,۵,۹)، (۱,۶,۸)، (۲,۴,۹)، (۲,۵,۸)، (۴,۵,۶)، (۳,۵,۷)، (۳,۴,۸)، (۲,۶,۷) و (۲,۵,۸) که مجموع ارقام هر دسته، ۱۵ می‌شود، می‌توان ۶ عدد مختلف ساخت.

با هر یک از ۳ تایی‌های (۰,۷,۸) و (۰,۶,۹) می‌توان ۴ عدد مختلف با مجموع ارقام ۱۵ ساخت. با هر یک از ۳ تایی‌های (۱,۷,۷)، (۳,۳,۹)، (۴,۴,۷) و (۳,۶,۶) می‌توان ۳ عدد مختلف ساخت. و اگر عدد ۵۵۵ را نیز در نظر بگیریم، تعداد کل اعداد سه رقمی که با شرایط مسئله می‌توان ساخت می‌شود: $(۸ \times ۶) + (۲ \times ۴) + (۴ \times ۳) + ۱ = ۴۸ + ۸ + ۱۲ + ۱ = ۶۹$

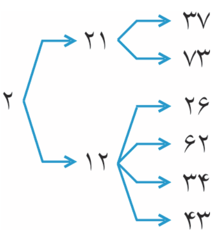
۱۴. گزینه‌ی (ج) اگر با رقم ۱ شروع به نوشتن عدد کنیم، ۱۶ عدد ده رقمی و اگر با عدد ۳ شروع کنیم، ۱۶ عدد ۱۰ رقمی و اگر با رقم ۲ شروع کنیم، ۳۲ عدد ده رقمی می‌توانیم بنویسیم. پس مجموعاً $۶۴ = ۳۲ + ۱۶ + ۱۶$ عدد ۱۰ رقمی می‌توانیم بنویسیم.

۱۵. گزینه‌ی (ج) در این عدد، ۲۵۰ مرتبه رقم ۲، ۵۰۰ مرتبه رقم ۰ و ۲۵۰ مرتبه رقم ۸ به کار رفته است. برای آن که حاصل جمع رقم‌های باقی‌مانده، ۲۰۰۸ شود، با توجه به این که $۲۰۰۸ = (۲ \times ۴) + (۸ \times ۲۵۰)$ است پس ۲۵۰ تا رقم ۸ و ۴ تا رقم ۲ را نگه داشته و بقیه‌ی رقم‌ها یعنی $۷۴۶ = ۲۵۴ - ۱۰۰۰$ رقم را پاک می‌کنیم.

۱۶. گزینه‌ی (ب) مشخص است که اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند زیرا تعداد ارقام توان ۲ و ۳ آن‌ها با هم برابر نمی‌شود. فقط اعداد ۱، ۲ و ۴ در شرایط مسئله صدق می‌کنند.

۱۷. گزینه‌ی (هـ) می‌دانیم $۲۰۰۶ = ۹ \times ۲۲۲ + ۸$ است. پس این عدد دارای یک رقم ۸ و ۲۲۲ رقم ۹ است. در نتیجه اولین رقم کوچک‌ترین عدد طبیعی با ویژگی خواسته شده، ۸ است.

۱۸. گزینه‌ی (د) از راهبرد برگشت به عقب استفاده کنید:



در کل، ۸ عدد ۲ رقمی یعنی ۱۲، ۲۱، ۳۷، ۷۳، ۲۶، ۶۲، ۳۴ و ۴۳ در شرایط مسئله صدق می‌کنند.

۱۹. گزینه‌ی (ج) آن اعداد عبارت‌اند از: ۱۳,۳۱,۲۶,۶۲,۲۲,۶۶,۳۵,۵۳,۴۴

۲۰. گزینه‌ی (ج) اگر در عدد ۷ رقمی ما رقم ۳ به کار نرفته باشد، فقط یک عدد امکان‌پذیر است: ۲۲۲۲۲۲۲
اگر ۱ رقم ۳ به کار رفته باشد، آن رقم می‌تواند در هر جایگاهی باشد پس ۷ عدد امکان‌پذیر است. اگر ۲ رقم ۳ به کار رفته باشد (در نتیجه ۵ رقم ۲) با توجه به شکل مقابل عمل می‌کنیم: ○۲○۲○۲○۲○۲○
چون ارقام ۳ نمی‌توانند کنار هم قرار گیرند فرض می‌کنیم در فضاهایی که با دایره نشان دادیم باید قرار گیرند. یعنی از این ۶ دایره باید ۲ تای آن‌ها را انتخاب کنیم و درون آن‌ها رقم ۳ را قرار دهیم. که این کار به ۱۵ طریق امکان‌پذیر است.
برای حالت ۳ رقم ۳ (و ۴ رقم ۲) نیز از این روش استفاده می‌کنیم: ○۲○۲○۲○۲○
از این ۵ دایره باید ۳ تای آن‌ها انتخاب شود که این کار به ۱۰ طریق امکان‌پذیر است. برای حالت ۴ رقم ۳ (و ۳ رقم ۲) تنها یک راه وجود دارد: ۳ ۲ ۳ ۲ ۳ ۲ ۳
پس در مجموع می‌توان $۳۴ = ۱ + ۱۰ + ۱۵ + ۷ + ۱$ عدد نوشت که ارقام ۳ پشت سر هم نباشند.

اصل ضرب و تعداد اعداد

۲۱. گزینه‌ی (ب) **روش اول:** ۲۰ عدد که آن اعداد عبارت‌اند از:

۱۳,۱۵,۱۷,۱۹,۳۱,۳۵,۳۷,۳۹,۵۱,۵۳,۵۷,۵۹,۷۱,۷۳,۷۵,۷۹,۹۱,۹۳,۹۵,۹۷

روش دوم: قانون ضرب در اصل شمارش (نکته‌ی ۳۳): با توجه به این که تعداد اعداد فردِ یک رقمی ۵ تا می‌باشد، برای انتخابِ عدد یکان ۵ و برای انتخاب عدد دهگان ۴ حالت داریم. زیرا عددی که در یکان استفاده کرده‌ایم، نباید در دهگان استفاده کنیم. که در این صورت تعداد آن‌ها برابر است با: $۵ \times ۴ = ۲۰ \rightarrow$

نکته‌ی ۳: قانون ضرب در اصل شمارش: هرگاه برای انجام عمل اول، تعداد a انتخاب و برای انجام عمل دوم، تعداد b انتخاب و برای انجام عمل سوم، تعداد c انتخاب و... وجود داشته باشد، برای انجام کل عمل، $a \times b \times c \times \cdots$ انتخاب وجود دارد.

۲۲. گزینه‌ی (د) تعداد اعداد یک رقمی زوج ۵ تا است و با توجه به این که از عدد صفر نمی‌توان در صدگان استفاده کرد، تعداد اعداد سه رقمی با سه رقم زوج برابر می‌شود با:

$$\underset{۲,۴,۶,۸}{\boxed{۴}} \times \underset{۰,۲,۴,۶,۸}{\boxed{۵}} \times \underset{۰,۲,۴,۶,۸}{\boxed{۵}} = ۱۰۰$$ ← تعداد انتخاب‌ها

۲۳. گزینه‌ی (د) با توجه به این که رقم صفر را نمی‌توان در صدگان استفاده کرد و هم‌چنین رقمی که برای صدگان استفاده می‌شود را نباید برای دهگان و رقم انتخاب شده در دهگان را نباید برای یکان انتخاب کرد، تعداد کل اعداد برابر می‌شود با:

$$\boxed{۹}\times\boxed{۹}\times\boxed{۸}=۶۴۸$$ ← تعداد انتخاب‌ها

۲۴. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۴: اگر عددی را از راست به چپ خوانده و از چپ به راست بنویسیم، به عدد نوشته شده، مقلوب عدد اولیه می‌گویند به طور مثال عدد ۳۲۱ مقلوب عدد ۱۲۳ است.

توجه: مقلوب یعنی منقلب شده، یعنی دگرگون شده.

توجه: در صورتی مقلوب یک عدد ۵ رقمی با خودش برابر می‌شود که رقمی که در دهگان هزار قرار می‌دهیم را در یکان نیز قرار دهیم و رقمی که در یکان هزار قرار می‌دهیم، در دهگان نیز به کار ببریم. به طور مثال به عددِ ۵ رقمی ۱۲۳۲۱ توجه کنید. برای انتخاب رقم دهگانِ هزار، ۹ انتخاب داریم، برای انتخاب رقم یکان هزار ۱۰ انتخاب و برای رقمِ صدگان نیز ۱۰ انتخاب ولی برای انتخابِ رقم دهگان و رقم یکان فقط یک انتخاب داریم زیرا فقط باید عددی را در دهگان قرار دهیم که در یکانِ هزار استفاده کرده‌ایم. برای یکان نیز به همین توضیح، فقط ۱ انتخاب داریم. پس تعداد کل اعداد ۵ رقمی کمه مقلوبشان با خودشان برابر است، می‌شود: $۹\times۱۰\times۱۰\times۱\times۱=۹۰۰$

۲۵. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۵: اگر دو رقم سمت راست عددی، ...، ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ باشد، آن عدد بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

روش اول: ۱۶ عدد که آن اعداد عبارت‌اند از: ۲۲۵, ۳۲۵, ۵۲۵, ۷۲۵, ۲۵۰, ۳۵۰, ۵۵۰, ۷۵۰, ۲۷۵, ۳۷۵, ۵۷۵, ۷۷۵, ۲۰۰, ۳۰۰, ۵۰۰, ۷۰۰

روش دوم: استفاده از قانون ضرب در اصل شمارش: برای انتخاب یکان و دهگان (با هم) ۴ انتخاب (۰۰, ۲۵, ۵۰, ۷۵) و برای انتخاب صدگان، ۴ انتخاب (۲, ۳, ۵, ۷) داریم. پس تعداد کل اعدادی که می‌توان نوشت برابر است با: $۴\times۴=۱۶$

۲۶. گزینه‌ی (ب) عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد. از طرفی چون مجموع رقم‌های ۳، ۵ و ۷، عدد ۱۵ می‌شود، می‌توان با آن‌ها $۶=۱\times۲\times۳$ عدد مختلف ساخت. از طرفی مجموع رقم‌های ۷، ۵ و صفر نیز ۱۲ می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیر است و می‌توان با آن‌ها $۴=۱\times۲\times۲$ عدد مختلف ساخت پس در مجموع می‌توان $۱۰=۴+۶$ عدد مختلف ساخت که عبارت‌اند از:

$$\underbrace{۷۵۳, ۷۳۵, ۵۳۷, ۵۷۳, ۳۷۵, ۳۵۷}_{۶\text{عدد}}, \underbrace{۷۵۰, ۷۰۵, ۵۰۷, ۵۷۰}_{۴\text{عدد}}$$

۲۷. گزینه‌ی (ب) رقم یکان عدد ۴ رقمی خواسته شده می‌تواند یکی از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ و دومین رقم می‌تواند یکی از ارقام ۲، ۵ و ۸ باشد. سومین رقم نیز ۳ یا ۷ است و چهارمین رقم می‌تواند ۴ یا ۹ باشد. پس در کل می‌توان $۶۰=۲\times۲\times۳\times۵$ عدد با شرایط مسئله نوشت.

۲۸. گزینه‌ی (ب) باید تعداد اعدادی که از عدد ۳۱۴۲ کوچک‌تر هستند را به دست آوریم: رقم هزارگان باید ۱ یا ۲ باشد یعنی ۲ انتخاب و برای رقم صدگان، ۳ انتخاب داریم زیرا رقمی که در هزارگان استفاده کرده‌ایم، نمی‌توانیم در صدگان استفاده کنیم. به همین ترتیب برای رقم دهگان، ۲ انتخاب و برای رقم یکان، ۱ انتخاب داریم. پس تعداد اعداد چهار رقمی که رقم هزارگان آن‌ها ۱ یا ۲ می‌باشد برابر است با: $۲\times۳\times۲\times۱=۱۲$

در بین اعدادی که رقم هزارگان آن‌ها ۳ می‌باشد، عدد ۳۱۲۴ از عدد ۳۱۴۲ کوچک‌تر است. پس در کل، $۱۲+۱=۱۳$ عدد کوچک‌تر از ۳۱۴۲ وجود دارد پس عدد ۳۱۴۲، چهاردهمین عدد می‌باشد.

۲۹. گزینه‌ی (ب) تعداد اعداد ۳ رقمی با ارقام فردِ مختلف، $۵\times۴\times۳=۶۰$ می‌باشد. اگر این اعداد را نوشته و با هم جمع کنیم، هر رقم $۶۰\div۵=۱۲$ مرتبه در یکان، ۱۲ مرتبه در دهگان و ۱۲ مرتبه در صدگان ظاهر می‌شود. پس جمع رقم‌ها در یکان برابر می‌شود با $۱۲\times(۱+۳+۵+۷+۹)=۳۰۰$ که صفر را نوشته و ۳۰ را به ستون دهگان انتقال می‌دهیم. پس در دهگان داریم: $۳۰+۳۰۰=۳۳۰$ که ۰ را نوشته و ۳۳ را به صدگان منتقل می‌کنیم و در صدگان داریم $۳۳+۳۰۰=۳۳۳$ پس حاصل جمع اعداد می‌شود: ۳۳۳۰۰

۳۰. گزینه‌ی (الف) دو حالت داریم: الف) عدد دارای صفر باشد. در نتیجه این که صفر کجا باشد ۲ حالت و این که عدد دیگر چند باشد ۹ حالت داریم در نتیجه تعداد حالت‌ها ۱۸ می‌شود.

ب) عدد دارای صفر نباشد. ۳ حالت برای انتخاب مکان عدد بزرگ‌تر داریم. هم‌چنین اگر عدد بزرگ‌تر برابر x باشد، $(x-۱)$ حالت برای دو عدد دیگر داریم، در نتیجه: $۱+۲+\cdots+۸=۳۶$

در حالت ب نتیجه می‌شود: $۳۶\times۳=۱۰۸$

در نتیجه پاسخ، برابر ۱۲۶ خواهد بود. $۱۰۸\times۱۸=۱۲۶$

۳۱. گزینه‌ی (ب) در عدد ۳۲۲۲۲۲۲ با تغییر جای رقم ۳، ۷ عدد با شرایط مسئله می‌توان نوشت. در عدد ۳۲۳۲۲۲۲ با ثابت نگه داشتن رقم ۳ در سمت چپ و تغییر جای رقم ۳ دیگر، ۵ عدد با شرایط مسئله می‌توان نوشت. حال اگر رقم ۳ را در مرتبه‌ی صدگان هزار قرار دهیم (دومین رقم از سمت چپ) و جای رقم ۳ دیگر را تغییر دهیم، ۴ عدد با شرایط مسئله می‌توان نوشت و... در کل ۳۳ عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت که شرایط مسئله را دارا هستند:

۲	۲	۳	۲	۲	۳	۲
۲	۲	۳	۲	۲	۲	۳
۲	۲	۲	۳	۲	۳	۲
۲	۲	۲	۳	۲	۲	۳
۲	۲	۲	۲	۳	۲	۳
۳	۲	۳	۲	۳	۲	۲
۳	۲	۳	۲	۲	۳	۲
۳	۲	۳	۲	۲	۲	۳
۳	۲	۲	۳	۲	۳	۲
۳	۲	۲	۳	۲	۲	۳
۳	۲	۲	۲	۳	۲	۳
۲	۳	۲	۳	۲	۳	۲
۲	۳	۲	۳	۲	۲	۳
۲	۳	۲	۲	۳	۲	۳
۲	۲	۳	۲	۳	۲	۳
۳	۲	۳	۲	۳	۲	۳

۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲
۲	۳	۲	۲	۲	۲	۲
۲	۲	۳	۲	۲	۲	۲
۲	۲	۲	۳	۲	۲	۲
۲	۲	۲	۲	۳	۲	۲
۲	۲	۲	۲	۲	۳	۲
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۳	۲	۳	۲	۲	۲	۲
۳	۲	۲	۳	۲	۲	۲
۳	۲	۲	۲	۳	۲	۲
۳	۲	۲	۲	۲	۳	۲
۳	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۲	۳	۲	۳	۲	۲	۲
۲	۳	۲	۲	۳	۲	۲
۲	۳	۲	۲	۲	۳	۲
۲	۳	۲	۲	۲	۲	۳
۲	۲	۳	۲	۳	۲	۲

۳۲. گزینه‌ی (الف) مجموع هر دو عدد نوشته شده در کنار هم، ۱۰۰۱ است. اگر هر دو عدد نوشته شده در کنار یک‌دیگر را یک جفت بنامیم، اولین جفت (یعنی ۱۱۰۰۰) دارای ۵ رقم است. ۸ جفتِ بعدی (یعنی جفت دوم تا نهم) شامل جفت‌های ۲۹۹۹ تا ۹۹۹۲، ۴ رقم دارند. ۹۰ جفت بعدی (یعنی جفت دهم تا ۹۹ اُم) که ۱۰۹۹۱ تا ۹۹۹۰۲ هستند، دارای ۵ رقم هستند. در این صورت تا اکنون $(۱\times۵)+(۸\times۴)+(۹۰\times۵)=۴۸۷$ رقم نوشته شده است. از طرفی جفت بعدی ۱۰۰۹۰۱ است که سومین رقم آن، یعنی ۰، همان ۴۹۰ اُمین رقم خواسته شده است.

۳۳. گزینه‌ی (ه) اگر رقم‌های یکان اعداد را به ترتیبی که در مسئله گفته شده، به دست آوریم، دنباله‌ی متناوب ...,۱,۲,۴,۸,۶,۲,۴,۸,۶,۲,۴ حاصل می‌شود که در آن اعداد ۴ بار ۴ بار تکرار می‌شوند.

و چون این تکرار در هر ۲۰ عدد (در دنباله‌ی داده شده در مسئله یعنی از ۱ تا ۱۳۸۳) صورت می‌گیرد، پس تعداد عددهای خواسته شده، $1 + (1380 \div 20) \times 4 + 1 = 278$ است.

به خاطر رقم ۲ در عدد ۱۳۸۲ — در دنباله‌ی به‌دست آمده، اولین رقم، ۱ است.

۳۴. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۶: (۱) هر عدد مربع کامل زوج، مضرب ۴ است و عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که ۲ رقم سمت راستش صفر یا بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

(۲) همچنین هر عدد مربع کامل فرد به صورت $4K+1$ $(k \in W)$ است.

نکته‌ی ۷: رقم یکان هیچ مربع کاملی، ۲، ۳، ۷ یا ۸ نیست.

طبق نکته‌ی (۶)، اعداد ۲۲ و ۶۶ نمی‌توانند دو رقم سمت راست یک مربع کامل باشند. همچنین طبق قسمت (۲) در نکته‌ی (۶)، اعداد ۱۱، ۵۵ و ۹۹ نیز نمی‌توانند دو رقم سمت راست مربع کامل باشند. طبق نکته‌ی (۷)، اعداد ۳۳، ۷۷ و ۸۸ نیز نمی‌توانند دو رقم سمت راست یک مربع کامل باشند. در نتیجه از جفت‌های باقی مانده، فقط ۰۰ (در سمت راست حاصل 10^2) و ۴۴ (در سمت راست حاصل 12^2) قرار می‌گیرند.

۳۵. گزینه‌ی (ه)

نکته‌ی ۸: اگر $1 \le n \le 3$ باشد، n^2 یک رقمی است. اگر $4 \le n \le 9$ باشد، n^2 دورقمی است. اگر $10 \le n \le 31$ باشد، n^2 سه رقمی است.

طبق نکته‌ی (۸)، دنباله‌ی مربعاتِ داده شده در مسئله تا عدد ۳۱ دارای $(3-1+1)\times 1 + (9-4+1)\times 2 + (31-10+1)\times 3 = 81$ رقم است. پس باید ۵ مربع چهار رقمی به دنباله بیافزاییم و چون $36 = 32+5-1$ و همچنین $36^2 = 1296$ است، پس رقم صدم، ۹ است.

۳۶. گزینه‌ی (د) همه‌ی اعداد دو رقمی مربع کامل عبارت‌اند از ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴ و ۸۱ . در نتیجه همه‌ی عددهای سه رقمی خواسته شده در مسئله، عبارت‌اند از ۱۶۴، ۳۶۴، ۶۴۹ و ۸۱۶ که مجموع آن‌ها ۱۹۹۳ است.

۳۷. گزینه‌ی (ب) با توجه به این که جمع هر سه رقم متوالی ۱۵ است، برای ارقام اول تا سوم داریم:

$$\underset{(1)}{\boxed{B}} + \underset{(2)}{\boxed{5}} + \underset{(3)}{\boxed{}} = 15 \rightarrow \underset{(1)}{\boxed{B}} + \underset{(3)}{\boxed{}} = 10$$

همچنین برای ارقام دوم تا چهارم داریم:

$$\underset{(2)}{\boxed{5}} + \underset{(3)}{\boxed{}} + \underset{(4)}{\boxed{}} = 15 \rightarrow \underset{(3)}{\boxed{}} + \underset{(4)}{\boxed{}} = 10$$

$$\underset{(1)}{\boxed{B}} = \underset{(4)}{\boxed{}}$$

یعنی رقم چهارم و رقم اول با هم برابرند.

همچنین برای ارقام سوم تا پنجم داریم:

$$\underset{(۵)}{\square}+\underset{(۴)}{\boxed{B}}+\underset{(۳)}{\square}=۱۵ \to \underset{(۵)}{\square}+\underbrace{\underset{(۴)}{\boxed{B}}+\underset{(۳)}{\square}}_{=۱۰}=۱۵ \to \underset{(۵)}{\square}=۵$$

یعنی رقم پنجم و دوم با هم برابرند. می‌توان نتیجه گرفت این ارقام هر ۳ خانه یک‌بار، تکرار می‌شوند.

پس ارقام این عدد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

B	A	۵	B	A	۵	B	A	۵	B	A	۵	B
(۱۳)	(۱۲)	(۱۱)	(۱۰)	(۹)	(۸)	(۷)	(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

یعنی $B=۶$ و چون جمع هر سه عدد متوالی برابر ۱۵ است، داریم: $B+۵+A=۱۵ \xrightarrow{B=۶} ۶+۵+A=۱۵ \to A=۴$

پس: $B-A=۶-۴=۲$

۳۸. گزینه‌ی (د) جمع هر چهار عدد متوالی، ۲۰ است. پس برای ارقام اول تا چهارم می‌توان نوشت:

رابطه‌ی (۱): $\underset{(۴)}{\square}+\underset{(۳)}{\boxed{۶}}+\underset{(۲)}{\boxed{B}}+\underset{(۱)}{\square}=۲۰ \to \underset{(۴)}{\square}+\underset{(۲)}{\boxed{B}}+\underset{(۱)}{\square}=۱۴$

برای ارقام دوم تا پنجم می‌توان نوشت:

رابطه‌ی (۲): $\underset{(۵)}{\square}+\underset{(۴)}{\square}+\underset{(۳)}{\boxed{۶}}+\underset{(۲)}{\boxed{B}}=۲۰ \to \underset{(۵)}{\square}+\underset{(۴)}{\square}+\underset{(۲)}{\boxed{B}}=۱۴$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\underset{(۴)}{\square}+\underset{(۱)}{\square}=\underset{(۵)}{\square}+\underset{(۴)}{\square} \Rightarrow \underset{(۱)}{\square}=\underset{(۵)}{\square}$$

یعنی رقم اول با رقم پنجم برابر است.

اگر همین کار را برای ارقام سوم تا ششم انجام دهیم، نتیجه می‌گیریم: $\underset{(۶)}{\square}=\underset{(۲)}{\boxed{B}}$

با توجه به نتایج حاصل شده و جدول، می‌توان نتیجه گرفت این رقم‌ها، هر سه خانه یک بار تکرار می‌شوند. پس داریم:

B	x	۸	۶	B	x	۸	۶	B	x	۸	۶	B	x
(۱۴)	(۱۳)	(۱۲)	(۱۱)	(۱۰)	(۹)	(۸)	(۷)	(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

یعنی $A=B$ است. چون جمع هر چهار عدد متوالی برابر ۲۰ است، برای ارقام اول تا چهارم داریم:

$$\underset{(۴)}{\boxed{۸}}+\underset{(۳)}{\boxed{۶}}+\underset{(۲)}{\boxed{B}}+\underset{(۱)}{\boxed{x}}=۲۰ \to B+x=۶$$

طبق صورت سؤال، چون یکی از ارقام، ۸ بار تکرار شده است، باید $B=x=۳$ باشد. در این حالت عدد ۳، ۸ بار در عدد فوق تکرار خواهد شد. پس $A=B=۳$ و در نتیجه: $A+B=۳+۳=۶$

۳۹. گزینه‌ی (الف) چون مجموع هر چهار عدد متوالی برابر ۱۸ است، برای ۴ رقم اول داریم:

$$\boxed{۶}+\underset{(۳)}{\square}+\boxed{۴}+\underset{(۱)}{\square}=۱۸ \to \underset{(۳)}{\square}+\underset{(۱)}{\square}=۸ \qquad (۱)$$

حال برای ارقام دوم تا پنجم داریم:

$$\underset{(۵)}{\square}+\boxed{۶}+\underset{(۳)}{\square}+\underset{(۱)}{\boxed{۴}}=۱۸ \to \underset{(۵)}{\square}+\underset{(۳)}{\square}=۸ \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\square = \square$$
(۵)   (۱)

یعنی مقدار رقم اول با رقم پنجم برابر است. با نوشتن رابطه برای ارقام سوم تا ششم می‌توان نتیجه گرفت:

$$\square = \boxed{۴}$$
(۶)

یعنی رقم ششم با رقم دوم برابرند. پس می‌توان فهمید که ارقام این عدد، هر ۴ خانه یک بار تکرار می‌شوند. پس داریم:

	D		C		D	۴					C		D		C
۶		۴	A	۶		B	C	۶	D	۴		۶		۴	
(۱۶)	(۱۵)	(۱۴)	(۱۳)	(۱۲)	(۱۱)	(۱۰)	(۹)	(۸)	(۷)	(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

یعنی می‌توان نتیجه گرفت: $C = A \ , \ B = ۴$

پس می‌توان نوشت:

$$X = ۲A + B - C + D \xrightarrow[C = A]{B = ۴} X = A + ۴ + D \to X = (A + D) + ۴$$

برای محاسبه مقدار $A + D$، از مجموع خانه‌های زیر داریم:

$$\boxed{A} + \boxed{۶} + \boxed{D} + \boxed{۴} = ۱۸ \to \boxed{A} + \boxed{D} = ۸$$
(۱۳)   (۱۲)   (۱۱)   (۱۰)

پس: $x = ۸ + ۴ \to x = ۱۲$

۴۰. گزینه‌ی (الف) عددهای خواسته شده به صورت کلی □□۱۹۹۸ هستند که در هر یک از □ها می‌توان از رقم‌های ۰ تا ۹ استفاده کرد. یعنی برای هر □، ۱۰ انتخاب داریم. پس طبق اصل ضرب، $۱۰۰ = ۱۰ \times ۱۰$ عدد طبق شرایط مسئله وجود دارد.

۴۱. گزینه‌ی (ب) فقط ۲ عدد با شرایط مسئله وجود دارد:

$$x = y = ۰ \Rightarrow ۰ + ۰ = ۰ \times ۰$$

$$x = y = ۲ \Rightarrow ۲ + ۲ = ۲ \times ۲$$

۴۲. گزینه‌ی (الف) **روش اول:** رسم جدول و نوشتن اعداد:

۱	۱۰	۱۱	۲۰	۲۱	۱۰۰	۱۰۱	۱۱۰	۱۱۱	۱۲۰
۱۲۱	۲۰۰	۲۰۱	۲۱۰	۲۱۱	۲۲۰	۲۲۱	۳۰۰	۳۰۱	۳۱۰
۳۱۱	۳۲۰	۳۲۱	۱۰۰۰	۱۰۰۱	۱۰۱۰	۱۰۱۱	۱۰۲۰	۱۰۲۱	۱۱۰۰
۱۱۰۱	۱۱۱۰	۱۱۱۱	۱۱۲۰	۱۱۲۱	۱۲۰۰	۱۲۰۱	۱۲۱۰	۱۲۱۱	۱۲۲۰
۱۲۲۱	۱۳۰۰	۱۳۰۱	۱۳۱۰	۱۳۱۱	۱۳۲۰	۱۳۲۱	۲۰۰۰	۲۰۰۱	۲۰۱۰
۲۰۱۱	۲۰۲۰	۲۰۲۱	۲۱۰۰	۲۱۰۱	۲۱۱۰	۲۱۱۱	۲۱۲۰	۲۱۲۱	۲۲۰۰
۲۲۰۱	۲۲۱۰	۲۲۱۱	۲۲۲۰	۲۲۲۱	۲۳۰۰	۲۳۰۱	۲۳۱۰	۲۳۱۱	۲۳۲۰
۲۳۲۱	۳۰۰۰	۳۰۰۱	۳۰۱۰	۳۰۱۱	۳۰۲۰	۳۰۲۱	۳۱۰۰	۳۱۰۱	۳۱۱۰
۳۱۱۱	۳۱۲۰	۳۱۲۱	۳۲۰۰	۳۲۰۱	۳۲۱۰	۳۲۱۱	۳۲۲۰	۳۲۲۱	۳۳۰۰
۳۳۰۱	۳۳۱۰	۳۳۱۱	۳۳۲۰	۳۳۲۱	۴۰۰۰	۴۰۰۱	۴۰۱۰	۴۰۱۱	۴۰۲۰

روش دوم: استفاده از اصل ضرب: عدد ۱، یک رقمی است. هم‌چنین ۴ عدد ۲ رقمیِ خوب داریم. تعداد اعداد ۳ رقمی و ۴ رقمی خوب طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underset{\substack{۱\\۲\\۳\\۴}}{\boxed{۴}}\times\underset{\substack{۰\\۱\\۲\\۳}}{\boxed{۴}}\times\underset{\substack{۰\\۱\\۲}}{\boxed{۳}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}=۹۶ \quad , \quad \underset{\substack{۱\\۲\\۳}}{\boxed{۳}}\times\underset{\substack{۰\\۱\\۲}}{\boxed{۳}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}=۱۸$$

در نتیجه تعداد کل اعدادِ خوب با شرایط مسئله، $۱۱۹=۹۶+۱۸+۴+۱$ است. حال اگر از آخرین عدد، ۲۰ عدد به عقب برگردیم، داریم:

۴۳۲۱,۴۳۲۰,۴۳۱۱,۴۳۱۰,۴۳۰۱,۴۳۰۰,۴۲۲۱,۴۲۲۰,۴۲۱۱,۴۲۱۰,۴۲۰۱,۴۲۰۰,۴۱۲۱,۴۱۲۰,۴۱۱۱

صدمین عدد خوب $\boxed{۴۰۲۰}$, ۴۰۲۱, ۴۱۰۰, ۴۱۰۱, ۴۱۱۰,

۴۳. گزینه‌ی (هـ) اگر a و $a+۱$ متعادل باشند، پس جمع ارقام هر یک از این دو عدد، باید زوج باشد. پس رقم یکان a، ۹ است. یعنی a باید یکی از اعداد ۱۸۹,۲۷۹,۳۶۹,۴۵۹,۵۴۹,۶۳۹,۷۲۹,۸۱۹,۹۰۹ باشد که در بین آن‌ها فقط عدد ۵۴۹ شرایط مسئله را دارد.

۴۴. گزینه‌ی (ب) ۱۲ عدد که عبارت‌اند از: ۰,۹,۱۸,۲۷,۳۶,۴۵,۵۴,۶۳,۷۲,۸۱,۹۰,۹۹

که بزرگ‌ترین آن: $۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵=۹۹=۱۱\times۹$

و کوچک‌ترین آن: $-۴-۳-۲-۱+۰+۱+۲+۳+۴=۰=۰\times۹$

است.

۴۵. گزینه‌ی (ج) طبق اصل ضرب، تعداد اعداد چهاررقمی با رقم‌های غیرتکراری، $۲۴=۱\times۲\times۳\times۴$ است. پس هر یک از رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، شش بار در رقم یکان، شش بار در رقم صدگان و شش بار در رقم هزارگان ظاهر می‌شوند که در این صورت مجموع آن‌ها ۶۶۶۶۰ می‌شود.

۴۶. گزینه‌ی (ب) مربع کامل‌های یک رقمی، ۱، ۴ و ۹ هستند. رقم ۱ نمی‌تواند اولین رقم باشد چون در این صورت رقم دوم و سوم با یک‌دیگر مساوی خواهند شد. پس می‌توان عددهای ۴۲۱، ۴۶۳، ۹۳۱ و ۹۶۲ را با شرایط مسئله نوشت.

۴۷. گزینه‌ی (د) عدد شش رقمی $\overline{fedcba}$ را در نظر بگیرید.

رقم ۶ فقط می‌تواند به جای a، b یا c باشد $\leftarrow$ ۳ حالت

رقم ۵ می‌تواند به جای یکی از دو رقم باقی‌مانده از a، b و c و یا به جای رقم d باشد $\leftarrow$ ۳ حالت

رقم ۴ می‌تواند به جای یکی از دو رقم باقی‌مانده از a، b، c، d و یا به جای رقم e باشد $\leftarrow$ ۳ حالت

رقم ۳ می‌تواند به جای یکی از دو رقم باقی‌مانده از a، b، c، d، e و یا به جای رقم f باشد $\leftarrow$ ۳ حالت

رقم ۲ می‌تواند به جای یکی از دو رقم باقی‌مانده باشد $\leftarrow$ ۲ حالت

رقم ۱ می‌تواند در تنها جای باقی‌مانده باشد $\leftarrow$ ۱ حالت

تعداد عددها $۲\times۳\times۳\times۳\times۳$ یعنی ۱۶۲ تا

رقم یکان

۴۸. گزینه‌ی (ب)

از این قسمت به بعد، همه‌ی یکان‌ها صفر می‌شود.

$$\underset{\underline{۱}}{۱}+\underset{\underline{۲}}{۱\times۲}+\underset{\underline{۶}}{۱\times۲\times۳}+\underset{۲\underline{۴}}{۱\times۲\times۳\times۴}+\underset{۱۲\underline{۰}}{\overline{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}}+\underset{۷۲\underline{۰}}{\overline{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶}}+\underbrace{\cdots}_{\text{یکان ۰}}$$

بنابراین یکان عدد حاصل برابر است با: $۱+۲+۶+۴+۰\Rightarrow ۳$

۴۹. گزینه‌ی (ج) به عبارت‌های زیر توجه کنید:

$$۱+\underline{۲}+۱=۴=۲\times۲$$
$$۱+۲+\underline{۳}+۲+۱=۹=۳\times۳$$
$$۱+۲+۳+\underline{۴}+۳+۲+۱=۱۶=۴\times۴$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$۱+۲+۳+۴+\cdots+۱۹+\underline{۲۰}+۱۹+\cdots+۴+۳+۲+۱=۲۰\times۲۰=۴۰۰$$

بنابراین با الگوی به دست آمده می‌توان نوشت:

در نتیجه صدگان عدد حاصل، رقمِ ۴ می‌باشد.

۵۰. گزینه‌ی (هـ) رقم یکان حاصل‌ضرب رشته‌ها، بعد از ۴ بار تکرار می‌شود:

$$۳\times۳=\underline{۹}$$
$$۳\times۳\times۳=۲\underline{۷}$$
$$۳\times۳\times۳\times۳=۸\underline{۱}$$
$$۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۲۴\underline{۳}$$
$$۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۷۲\underline{۹}$$

$\Rightarrow$ بنابراین کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۳۵ بر عدد ۴ را به دست آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۵ & ۴ \\ \hline -۳۲ & ۸ \\ \hline ۳ & \end{array}$$

چون باقی‌مانده ۳ شده است، نتیجه می‌شود رقم یکان رشته‌ی ۳۵ اُم با رقم یکان رشته‌ی سوم که همان یک می‌باشد، برابر است.

۵۱. گزینه‌ی (ج) مشخص است که در یکان ۲۰۰۲ رقمِ یک باید با هم جمع شوند. پس یکانِ عدد حاصل ۲ است.

۵۲. گزینه‌ی (الف) آن اعداد عبارت‌اند از ۵۱، ۶۱، ۷۱، ۸۱ ، ۹۱ و ۹۲.

۵۳. گزینه‌ی (د) به اعدادِ دو رقمی نوشته شده توجه کنید:

عدد ۲ در دهگان: ۲۲,۲۴,۲۵,۲۶,۲۷

عدد ۳ در دهگان: ۳۲,۳۴,۳۵,۳۶,۳۷

مشخص می‌شود برای هر رقم که در دهگان استفاده می‌شود، ۵ رقم در یکان استفاده می‌شود. پس مجموع ارقام یکان اعداد ساخته شده برابر می‌شود با: $۱۲۰=(۷+۶+۵+۴+۲)\times۵$ که صفر در یکان مانده و ۱۲ به روی ستون دهگان منتقل می‌شود. پس در ستون دهگان داریم: $۵\times(۲+۳+۴+۵+۶)=۱۰۰\rightarrow۱۰۰+۱۲=۱۱۲$

بنابراین حاصل جمع تمامِ اعداد دو رقمی ساخته شده می‌شود: ۱۱۲۰

۵۴. گزینه‌ی (ج) یکان عدد مورد نظر از جمع ۳۰ تا عدد ۱ به وجود می‌آید $(۳۰=۱\times۳۰)$، یعنی یکان عدد حاصل صفر است و به دهگان آن ۳ تا اضافه می‌شود. دهگان این عدد از ۲۹ تا یک تشکیل شده است که با ۳ تای اضافه شده از حاصلِ ارقام یکان، مجموع آنها ۳۲ می‌شود $(۳۲=۳+(۱\times۲۹))$. بنابراین دهگان عدد حاصل ۲ می‌شود (یکان عدد ۳۲).

۵۵. گزینه‌ی (د) اگر N را به صورت $\overline{abcde}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{array}{r} ۱\,a\,b\,c\,d\,e \\ \times \qquad ۳ \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,۱ \end{array}$$

$۳\times e$ عددی است با یکان ۱ پس $e=۷$. $۲۱=۳\times۷\Leftarrow۲$ با مرتبه‌ی بعد جمع می‌شود.

$۳\times d+۲$ عددی است با یکان ۷ پس $d=۵$. $۱۷=۳\times۵+۲\Leftarrow۱$ با مرتبه‌ی بعد جمع می‌شود.

$۳\times c+۱$ عددی است با یکان ۵ پس $c=۸$. $۲۵=۳\times۸+۱\Leftarrow۲$ با مرتبه‌ی بعد جمع می‌شود.

$۳\times b+۲$ عددی است با یکان ۸ پس $b=۲$. $۳\times۲+۲=۸$

$۳\times a$ عددی است با یکان ۲ پس $a=۴$. $۱۲=۳\times۴\Leftarrow۱$ با مرتبه‌ی بعد جمع می‌شود.

$۴=۱+۱\times۳$ که با $a=۴$ مطابق است.

پس $N=۴۲۸۵۷$

بسط اعداد طبیعی

۵۶. گزینه‌ی (د) اگر سن اکنون پدر $\overline{xy}$ باشد، پس سن اکنون فرزند، $\overline{yx}$ است. از طرفی سن پدر هنگام تولد فرزند برابر بوده با:

$$\overline{xy}-\overline{yx}=10(x-y)+y-x=9(x-y)$$

در نتیجه سن پدر هنگام تولد فرزند باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد و در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۲۷ این خاصیت را دارد.

۵۷. گزینه‌ی (ج) اگر عدد a را به صورت $\overline{Axy}$ (A عددی حسابی) در نظر بگیریم، به کمک بسط می‌توان نوشت:

$$\overline{Axy}=14\overline{Ax}\Rightarrow 100A+10x+y=140A+14x\Rightarrow y=40A+4x$$

در نتیجه $A=0$ است زیرا y باید عددی یک رقمی باشد. پس در رابطه‌ی $y=4x$، فقط اعداد ۱۴ و ۲۸ صدق می‌کنند.

۵۸. گزینه‌ی (د) رقم یکان حاصل جمع، x شده است پس $y+z=10$ است. از طرفی با بسط داریم:

$$\overline{xx}+\overline{yy}+\overline{zz}=11(x+y+z)=11\times(10+x)$$

و چون حاصل جمع برابر با عدد $\overline{zyx}$ شده است، پس عدد سه رقمی $\overline{zyx}$ باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد و در نتیجه x نمی‌تواند ۹ باشد. پس رقم صدگان $11\times(10+x)$ باید ۱ باشد پس $z=1$ و در نتیجه $y=9$ است. از طرفی چون $\overline{zyx}$ باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، $x=8$ است.

۵۹. گزینه‌ی (ب) با تشکیل معادله و استفاده از بسط داریم:

$$1388-\overline{13xy}=1+3+x+y\to 1388-1300-10x-y=4+x+y$$

$$\Rightarrow 11x+2y=84\to x=\frac{84-2y}{11}\Rightarrow y=9\ ,\ x=6$$

پس امیر در سال ۱۳۶۹ متولد شده و اکنون $1388-1369=19$ سال دارد.

۶۰. گزینه‌ی (د) اگر عدد مورد نظر را $\overline{xy}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\overline{xy}=10x+y\Rightarrow\frac{10x+y}{x}=n\Rightarrow 10+\frac{y}{x}=n$$

بیش‌ترین مقدار $\frac{y}{x}$، ۹ است در نتیجه بیش‌ترین مقدار n، ۱۹ است.

۶۱. گزینه‌ی (ج) از صورت مسئله می‌توان فهمید که علی، یکان عدد پنج رقمی‌اش را حذف کرده است زیرا در غیر این صورت، حاصل‌جمع یکان‌ها، عددی زوج به دست می‌آمد. اگر عدد ۵ رقمی علی را با $\overline{abcde}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\overline{abcde}+\overline{abcd}=52713$$

$$\overline{abcd}\times11+\overline{e}=52713$$

از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۵۲۷۱۳ بر عدد ۱۱، ۱ است. پس $\overline{e}=1$، و $\overline{abcd}$، همان خارج‌قسمتِ تقسیم یعنی ۴۷۹۲ است. پس:

$$\overline{abcde}=47921\to 4+7+9+2+1=23$$

۶۲. گزینه‌ی (ب) عدد ۳ رقمیِ $\overline{htu}$ برابر است با $100h+10t+u$ و عدد مقلوب آن $\overline{uth}$ یعنی $100u+10t+h$ است. چون $h>u$ است، باید در تفریق، از عمل قرض گرفتن استفاده کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r} 100(h-1)+10(t+9)+(u+10) \\ -\ \ 100u+10t+h \\ \hline 100(h-1-u)+90+10+u-h \end{array}$$

از آن‌جا که $10+u-h=4$ است، پس $h-1-u=5$ و در نتیجه دو رقم دیگر از راست به چپ، اعداد ۹ و ۵ هستند.

۶۳. گزینه‌ی (هـ) اگر اولین عدد دو رقمی رضا را با m و دومین عدد دورقمی او را با $\overline{xy}$ نمایش دهیم، داریم:

$$m\times\overline{yx}-m\times\overline{xy}=۳۸۱۶\Rightarrow m\times(۱۰y+x-۱۰x-y)=۳۸۱۶\Rightarrow m\times۹\times(y-x)=۸\times۹\times۵۳$$

در نتیجه $y-x=۸$ و $m=۵۳$ است. از طرفی $x,y\neq ۰$ هستند. پس $x=۱$ و $y=۹$ است. در نتیجه جواب درست برابر است با: $۵۳\times۱۹=۱۰۰۷$.

۶۴. گزینه‌ی (ب) فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ بعد از جابه‌جایی ارقام عدد $\overline{abc}$ باشد که $a>b>c$. در این صورت کوچک‌ترین عدد $\overline{cba}$ خواهد بود. داریم: $\overline{xyz}=\overline{abc}-\overline{cba}=۹۹(a-c)$

پس $\overline{xyz}$ مضربی از ۹۹ است. ۹ عدد سه رقمی مضرب ۹۹ داریم: ۱۹۸,۲۹۷,۳۹۶,۴۹۵,۵۹۴,۶۹۳,۷۹۲,۸۹۱,۹۹۰

از میان این اعداد تنها عدد ۴۹۵ در شرایط مسئله صدق می‌کنند و صدگان آن ۴ است.

۶۵. گزینه‌ی (هـ) سن علی را $\overline{ab}$ در نظر می‌گیریم در نتیجه با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$۱+\underbrace{\overline{ba}}_{۱۰b+a}=۲\underbrace{\overline{ab}}_{۱۰a+b}\Rightarrow ۲(۱۰a+b)=۱۰b+a+۱\Rightarrow ۲۰a+۲b=۱۰b+a+۱\Rightarrow ۸b+۱=۱۹a$$

حداکثر $۸b+۱$ می‌تواند $۱+۹\times۸$ یعنی ۷۳ باشد و اگر a برابر ۴ باشد از ۷۳ بزرگ‌تر می‌گردد پس می‌توان نتیجه گرفت $a<۴$ است. که در این صورت a برابر ۱ یا ۲ یا ۳ می‌باشد. با بررسی حالات داریم:

$a=۱\Rightarrow ۸b+۱=۱۹\Rightarrow ۸b=۱۸$ غیرقابل قبول

$a=۲\Rightarrow ۸b+۱=۳۸\Rightarrow ۸b=۳۷$ غیرقابل قبول

$a=۳\Rightarrow ۸b+۱=۵۷\Rightarrow ۸b=۵۶\Rightarrow b=۷$

بنابراین سن علی برابر ۳۷ سال می‌باشد.

۶۶. گزینه‌ی (هـ) در سؤال گفته شده که شماره طبقه آپارتمان امیر برابر شماره آپارتمان رضا می‌باشد و از طرفی مجموع شماره‌ی آپارتمان امیر و رضا برابر ۲۳۹ می‌باشد پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جمع شماره‌ی طبقه‌ی آپارتمان و شماره‌ی آپارتمان امیر برابر ۲۳۹ می‌باشد. با کمی بررسی متوجه می‌شویم که شماره‌ی آپارتمان امیر باید عددی سه رقمی باشد مانند $\overline{abc}$ زیرا در غیر این صورت امکان ندارد شماره آپارتمان به علاوه شمناره طبقه آپارتمان به عدد ۲۰۰ برسد، اگر شماره آپارتمان امیر $\overline{abc}$ باشد، شماره طبقه آپارتمان امیر $\overline{ab}+۱$ می‌شود که در این صورت به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\overline{abc}+\overline{ab}+۱=۲۳۹\Rightarrow ۱۰\,\overline{ab}+c+\overline{ab}+۱=۲۳۹\Rightarrow ۱۱\,\overline{ab}+c+۱=۲۳۹$$

حال با توجه به این که $۰\leq c<۱۰$ می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت: $۱\leq c+۱<۱۱$.

به این ترتیب برای به دست آوردن $c+۱$ و $\overline{ab}$ کافی است تقسیم ۲۳۹ بر ۱۱ را انجام دهیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l|l} ۲۳۹ & ۱۱ \\ \hline ۲۳۱ & ۲۱\rightarrow \overline{ab} \\ ۸=c+۱\Rightarrow c=۷ & \end{array}\right\}\Rightarrow \overline{abc}=۲۱۷$$ شماره‌ی آپارتمان امیر

۶۷. گزینه‌ی (ب) با در نظر گرفتن عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ داریم:

$$n=\overline{xyz}=\underbrace{x+y+z}_{S(n)}+\underbrace{z^۲}_{u^۲(n)}\Rightarrow ۱۰۰x+۱۰y+z=x+y+z+z^۲\Rightarrow ۹۹x+۹y=z^۲$$

با توجه به این که x و y و z، اعداد یک رقمی هستند، پس $z^۲$ حداکثر می‌تواند ۸۱ باشد، پس $x=۰$ است. در نتیجه داریم:

$۹y=z^۲\Rightarrow$ $z^۲$ باید بر ۹ و در نتیجه بر ۳ بخش‌پذیر باشد $\Rightarrow\begin{cases} z=۳ \\ \text{یا}\ z=۶ \\ \text{یا}\ z=۹\end{cases}$

داریم:

$z=3 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \overline{yz}=13$

$z=6 \Rightarrow y=4 \Rightarrow \overline{yz}=46$

$z=9 \Rightarrow y=9 \Rightarrow \overline{yz}=99$

در نتیجه فقط ۳ عدد با شرایط خواسته شده وجود دارد.

۶۸. گزینه‌ی (ب)

$$x=0/\overline{abc} \Rightarrow 1000x=abc/\overline{abc} \Rightarrow 999x=abc \Rightarrow x=\frac{abc}{999}$$

از طرفی با تجزیه‌ی ۹۹۹ داریم:

$$999=3^3\times 37 \Rightarrow x=\frac{abc}{3^3\times 37} \Rightarrow abc=37$$

پس کوچک‌ترین عدد گویای مثبت $\frac{1}{3}$ و در نتیجه $q^3=\frac{1}{27}$ یعنی $0/\overline{037}$ است. در نتیجه $a+b+c=0+3+7=10$ است.

۶۹. گزینه‌ی (ج) فرض کنید عدد اول به صورت $\overline{ab}$ باشد و عدد دوم به صورت $\overline{ba}$. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\overline{ba}\geq 3\times\overline{ab} \Rightarrow 10b+a\geq 30a+3b \Rightarrow 7b\geq 29a \Rightarrow \frac{b}{a}\geq\frac{29}{7}=4+\frac{1}{7}$$

پس $\frac{b}{a}$ می‌تواند $\frac{5}{1}$، $\frac{6}{1}$، $\frac{7}{1}$، $\frac{8}{1}$، $\frac{9}{1}$ یا $\frac{9}{2}$ باشد. یعنی اعداد دو رقمی ممکن عبارت‌اند از ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۹. پس ۶ عدد دو رقمی با این خصوصیت وجود دارد.

۷۰. گزینه‌ی (ب) عدد سه رقمی اولیه را $\overline{abc}$ در نظر می‌گیریم. اگر رقم حذف شده یکان باشد، داریم:

$\overline{abc}=7\times\overline{ab} \Rightarrow 100a+10b+c=70a+7b \Rightarrow 30a+3b+c=0 \Rightarrow$ امکان ندارد

اگر رقم حذف شده دهگان باشد، داریم:

$$\overline{abc}=7\times\overline{ac} \Rightarrow 100a+10b+c=70a+7c \Rightarrow 30a+10b=6c \Rightarrow a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=5$$

اگر رقم حذف شده صدگان باشد، داریم:

$$\overline{abc}=7\times\overline{bc} \Rightarrow 100a+10b+c=70b+7c \Rightarrow 100a=60b+6c \Rightarrow a=3\ ,\ b=5\ ,\ c=0$$

پس اعداد هفتالوی سه رقمی عبارت‌اند از ۱۰۵ و ۳۵۰

۷۱. گزینه‌ی (ب) بررسی حالت‌های I، II و III؛

بررسی حالت I: اگر رقم سمت چپ را با x و تعداد رقم‌های باقی‌مانده را با m و عدد را که بعد از حذف رقم سمت چپ باقی می‌ماند را با y نمایش دهیم، داریم:

$$x\times 10^m+y=57y \Rightarrow x\times 10^m=56y$$

از طرفی $7\times 2^3=56$ است. در نتیجه اگر $x=7$ و $m=2$ باشد، $y=125$ و در نتیجه عدد ۷۱۲۵ حاصل می‌شود.

بررسی حالت II: چنین عددی وجود ندارد زیرا مطابق قسمت (I) می‌توان نوشت:

$$x\times 10^m+y=58y \Rightarrow x\times 10^m=57y=3\times 19y$$

عبارت سمت راست بر ۱۹ بخش‌پذیر است ولی عبارت سمت چپ بر ۱۹ بخش‌پذیر نیست.

بررسی حالت III: مانند حالت (II) پیش بروید و نتیجه می‌گیرید که امکان‌پذیر نیست.

۷۲. گزینه‌ی (ب) از یکان عدد متوجه می‌شویم که یکانِ حاصلِ $3\times C$، C شده است که در نتیجه C فقط می‌تواند ۵ باشد. با توجه به عبارت داده شده می‌توان نتیجه گرفت $3\times ABC=555$ است. در نتیجه $ABC=555\div 3=185$ است و مجموع ارقام آن $1+8+5=14$ است.

۷۳. گزینه‌ی (د) طبق مسئله ○، ۷ است پس T باید ۸ و F باید ۱ باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{r} TW۷ \\ +TW۷ \\ \hline F۷U۴ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} ۸W۷ \\ ۸W۷ \\ \hline ۱۷U۴ \end{array}$$

مشخص است که ۱ واحد از ستون دهگان به ستون صدگان منتقل شده است. پس W باید از ۴ بزرگ‌تر باشد. W نمی‌تواند ۵ باشد زیرا در این صورت $۱۱ = ۱ + ۵ + ۵$ و U برابر با ۱ می‌شود که قابل قبول نیست زیرا $F = ۱$ است و ارقام باید متفاوت باشند به همین دلیل W نمی‌تواند ۷ یا ۸ باشد، پس $W = ۶$ است که در این صورت $U = ۳$ می‌شود زیرا:

$$\begin{array}{r} ۸۶۷ \\ +۸۶۷ \\ \hline ۱۷۳۴ \end{array}$$

۷۴. گزینه‌ی (ه) از آن‌جا که رقم D، یک بار در صدگان و ۲ بار در یکان آمده است، بیش‌ترین ارزش را دارد و رقم M که یک بار در صدگان و یک بار در یکان قرار دارد، پس از رقم D، بیش‌ترین ارزش را دارد. رقم B که فقط یک بار در صدگان آمده و رقم A هم که ۳ بار در دهگان آمده به ترتیب بعد از این دو، دارای ارزش هستند. پس برای این که حاصل جمع، حداکثر شود، باید $D = ۹$ ، $M = ۸$ ، $B = ۳$ و $A = ۱$ باشند.

$$\begin{array}{r} BAD \\ +MAD \\ +DAM \\ \hline \end{array}$$

بنابراین بیش‌ترین مقداری که حاصل جمع می‌تواند داشته باشد، ۲۰۵۶ است، زیرا: $۳۱۹ + ۸۱۹ + ۹۱۸ = ۲۰۵۶$

۷۵. گزینه‌ی (ب) کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی ۱۰۰ و کوچک‌ترین عدد ۲ رقمی با دهگان ۹، ۹۰ است. پس کوچک‌ترین حاصل‌ضرب ممکن ۹۰۰۰ است. پس اعداد باید طوری انتخاب شوند که حاصل‌ضرب به صورت □□۹۲ به دست آید.

$۱۰۰ \times ۹۲ = ۹۲۰۰$ ✓

$۱۰۱ \times ۹۲ = ۹۲۹۲$ ✓

$۱۰۲ \times ۹۱ = ۹۲۸۲$ ✓

$۱۰۳ \times ۹۰ = ۹۲۷۰$ ✓

ضرب اعداد ۱۰۴ به بالا در اعداد ۹۰ به بالا حداقل برابر $۱۰۴ \times ۹۰ = ۹۳۶۰$ است که در شرایط مسئله صدق نمی‌کند. پس برای عدد ۳ رقمی تنها ۴ جواب وجود دارد.

۷۶. گزینه‌ی (د) T نمی‌تواند با H برابر باشد، پس $H = ۹$ است (چرا؟) در نتیجه $t = ۸$ است.

۷۷. گزینه‌ی (ب) می‌دانیم x و y و z، صفر یا یک هستند. با توجه به متمایز بودن رقم‌های A، B و C از جمع رقم‌های هزارگان نتیجه می‌گیریم $z = ۱$ است.

پس در جمع ارقام یکان، $C \neq A + B$ است. پس $x = ۱$ است. اکنون از جمع رقم‌های صدگان می‌توان نتیجه گرفت $y = ۰$ است.

در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = C + ۱ \\ C = A + B - ۱۰ \\ B = ۲A + ۱ \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} A = ۳A - ۸ \Rightarrow A = ۴ \,,\, B = ۹ \,,\, C = ۳$$

پس $A + B + C = ۴ + ۹ + ۳ = ۱۶$ است.

۷۸. گزینه‌ی (ه) $S = ۳$ یا $S = ۴$ است. ا ما با توجه به جمع ارقام در ردیف هزارگان مشخص می‌شود که S نمی‌تواند ۴ باشد. در نتیجه $S = ۳$ و در نتیجه $U = ۸$ یا $U = ۹$ است. اما $U = ۸$ در بین گزینه‌ها نیست پس $U = ۹$ است.

۷۹. گزینه‌ی (ج) حاصل‌ضرب $a \times ab$ دو رقمی و حاصل‌ضرب $b \times ab$ سه رقمی است. پس $b > a$ است. با توجه به رقم یکان حاصل $b \times ab$، $b = ۵$ یا $b = ۶$ است زیرا $b > a$ است (پس $b \neq ۱$) از طرفی b نمی‌تواند ۵ باشد چون در این صورت عدد $\overline{ca}$ باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی باید $a = ۵$ باشد که این غیرممکن است. پس $b = ۶$ است. از طرفی با توجه به رقم صدگان