ریاضی (۱)

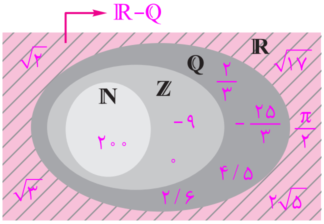
فصل ۱ : مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

کار در کلاس صفحهٔ ۲ و ۳ کتاب‌درسی

① **الف) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.**

این مجموعه $\mathbb{Q}'$ یا مجموعهٔ اعداد گنگ نام دارد؛ زیرا $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ یعنی اعدادی که حقیقی هستند ولی گویا نیستند، مانند: $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، . . . .



ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید. $۴/۵ , \frac{۲}{۳}$

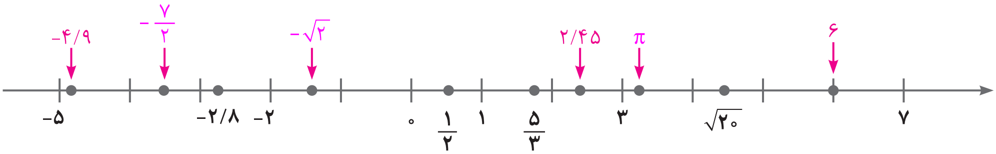
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید. $\sqrt{۱۷} , ۰ , ۲۰۰ , \frac{\pi}{۲} , ۲/۶ , ۲\sqrt{۵} , -\frac{۲۵}{۳} , -۹$

ت) مجموعهٔ اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{-۱,-۲,-۳,...\}$

ث) مجموعه $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟ یک عضو دارد و آن عدد صفر است. $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$

② **هر یک از اعداد داده‌شده را در یکی از جاهای مشخص‌شده روی محور بنویسید. کدام‌یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آنها خط بکشید.**

$۲/۴۵ , \frac{-۷}{۲} = -۳/۵ , ۶ , -۴/۹ , \underline{\pi} \simeq ۳/۱۴ , \underline{-\sqrt{۲}}$



فعالیت صفحهٔ ۳ کتاب‌درسی

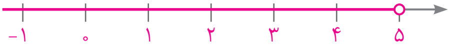
اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری‌که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a , b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	 a b
بسته	$[a , b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	 a b
نیم‌باز	$[a , b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	 a b
نیم‌باز	$(a , b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	 a b
نیم‌باز	$(۱ , ۵]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ < x \le ۵\}$	 ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵
نیم‌باز	$[-۳ , ۲)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \le x < ۲\}$	 -۳ ۰ ۱ ۲

فعالیت

صفحهٔ ۴ کتاب‌درسی

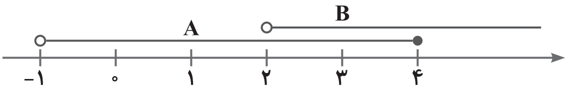
اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	**$\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$**	$(a,+\infty)$	باز
	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$	**$[a,+\infty)$**	**نیم‌باز**
	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز
	$\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$	**$(-\infty,a)$**	باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$	باز
	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq ۳\}$	$[۳,+\infty)$	نیم‌باز
	**$\{x\in\mathbb{R} \mid x<۵\}$**	$(-\infty,۵)$	باز

مثال

صفحهٔ ۴ کتاب‌درسی

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازهٔ $A=(-۱,۴]$ و $B=(۲,+\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A\cup B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از (-۱) یعنی:

$(-۱,۴]\cup(۲,+\infty)=(-۱,+\infty)$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A\cap B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$(-۱,۴]\cap(۲,+\infty)=(۲,۴]$

توضیح دهید که چرا $۲\notin A\cap B$.

اعضای $A\cap B$ یعنی عضوهایی که هم در بازهٔ A و هم در بازهٔ B هستند. عدد ۲ در بازهٔ A هست ولی در بازهٔ B قرار ندارد، پس $۲\notin A\cap B$.

کار در کلاس

صفحهٔ ۵ کتاب‌درسی

① **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:**

الف) $\frac{۴}{۳}\in[\frac{۱}{۲},۲)$ ☑
$\frac{۴}{۳}\simeq ۱/۳$ و $\frac{۱}{۲}=۰/۵$ و می‌دانیم که $۰/۵<۱/۳<۲$.

ب) $-۲\in(-۲,۰]$ ☒
نماد پرانتز در سمت چپ عدد ۲− در بازه، نشان‌دهندهٔ این است که این عدد متعلق به این بازه نیست.

پ) $۰\in(-۲,۰]$ ☑
در سمت راست عدد صفر در بازه، نماد کروشه وجود دارد، بنابراین صفر متعلق به این بازه است.

ت) $-۲\in\{-۲,۰\}$ ☑

☒ ث) $-۱ \in \{-۲ , ۰\}$

☒ ج) $[-۱ , ۲] \subseteq (-۱ , ۲)$ دو عدد ۲ و ۱− عضو بازهٔ $[-۱ , ۲]$ هستند، در حالی که این دو عدد، عضو بازهٔ $(-۱ , ۲)$ نیستند.

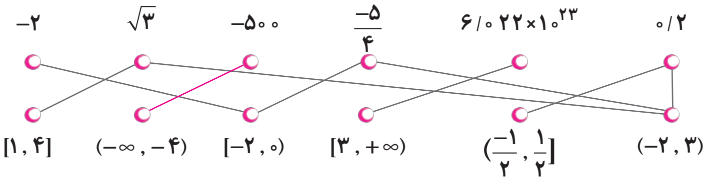
☑ چ) $\{۰ , ۱\} \subseteq [-۱ , ۲)$ دو عدد ۰ و ۱ عضو بازهٔ $[-۱ , ۲)$ هستند.

☑ ح) $\varnothing \subseteq (-۱۷ , ۰]$ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواه است.

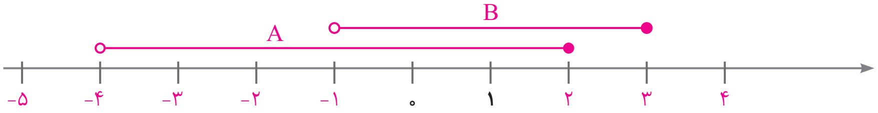
☒ خ) $[۲ , ۵) = (۲ , ۵]$ عدد ۵ به بازهٔ سمت راست تعلق دارد ولی به بازهٔ سمت چپ تعلق ندارد. همچنین عدد ۲ متعلق به بازهٔ سمت راست نیست ولی به بازهٔ سمت چپ تعلق دارد.

☒ د) $\sqrt{۲} \in (۰ , ۱)$ $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و چون $۱/۴ > ۱$، پس $۱/۴ \notin (۰ , ۱)$.

② **هر یک از اعداد زیر، عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده‌شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.**



③ **نمایش هندسی دو بازهٔ $A = (-۴ , ۲]$ و $B = (-۱ , ۳]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.**



الف) $A \cap B = (-۱ , ۲]$

ب) $A \cup B = (-۴ , ۳]$

پ) $A - B = (-۴ , -۱]$

ت) $B - A = (۲ , ۳]$

فعالیت .... صفحهٔ **۵** کتاب‌درسی

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$A = \{۱ , ۲ , ۳\}$

$B = \{\ldots , -۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳\}$

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ مجموعهٔ B دارای بی‌شمار عضو است. به این‌گونه مجموعه‌ها، مجموعه‌های نامتناهی (بی‌پایان) گفته می‌شود. همچنین مجموعهٔ A که دارای ۳ عضو است، یک مجموعهٔ متناهی (باپایان) است.

نکته

مجموعه‌هایی مانند مجموعهٔ A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

با توجه به فعالیت بالا، مجموعهٔ B یک مجموعهٔ متناهی نیست، زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.

کار در کلاس ---- صفحهٔ ۶ کتاب‌درسی

① **متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.**

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی		✓	{۲,۳,۵,۷} و دارای ۴ عضو است.
مجموعهٔ انسان‌های روی زمین		✓	جمعیت کرهٔ زمین تقریباً برابر با ۷ میلیارد نفر است.
مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد	✓		{۱,۳,۵,۷,...}
مجموعهٔ سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	تعداد آنها تقریباً برابر ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تاست.
مجموعهٔ تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ مختصات با شعاع‌های متفاوت وجود دارد.
مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما		✓	تعداد دانش‌آموزان هر مدرسه عدد مشخصی است. (اکثراً عددی سه‌رقمی است.)
مجموعهٔ اعداد طبیعی ده‌رقمی		✓	{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰,۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱,...,۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹} ⇒ تعداد اعضا = ۹,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓	تعداد درخت‌های این جنگل تقریباً ۳۹۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تاست.
مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت یک	✓		$\{\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},...\}$
مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		{۱۰,۲۰,۳۰,۴۰,...}
بازه (۰,۱)	✓		بین صفر و یک، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد.
مجموعهٔ مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	تعداد آنها تقریباً برابر ۶×۱۰^{۲۳} است.

② **دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.** مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، مجموعه‌ای متناهی است: {۱,۲,۳,...,۹}، همچنین مجموعهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی نیز مجموعه‌ای متناهی است: {۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,...,۹۹۹}.

③ **دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.** اگر داشته باشیم: $B=\{۱,۲,۳,...\}$ و $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,...\}$، A و B هر دو مجموعه‌های نامتناهی هستند و A زیرمجموعهٔ B است ($A\subseteq B$).

④ **دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A\subseteq B$ بوده و $B-A$ تک‌عضوی باشد.** اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی و B مجموعهٔ اعداد حسابی باشد، شرایط سؤال برقرار خواهد بود. زیرا:

$$A=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}\quad,\quad B=W=\{۰,۱,۲,۳,...\}\Rightarrow \mathbb{N}\subseteq W\Rightarrow A\subseteq B$$

$$B-A=W-\mathbb{N}=\{۰\}$$

نکته

تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی، ممکن است بسیار زیاد باشد. با این حال، با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی، می‌توان تعداد آنها را به‌دست آورد؛ مانند مجموعهٔ مورچه‌های روی کرهٔ زمین.

فعالیت

صفحهٔ ۷ کتاب‌درسی

الف) $\frac{۱}{۳}$ عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (۰ , ۱) بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

جواب‌های مختلفی به‌دست می‌آید. $\frac{۱}{۹} , \frac{۱}{۸} , \frac{۱}{۷} , \frac{۱}{۶}$

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله، زیرا بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰ , ۱) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نتیجه می‌گیریم تعداد اعداد گویای بین صفر و یک، بی‌شمار هستند. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰ , ۱) نامتناهی است.

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن $\mathbb{Q}$ چه می‌توان گفت؟ $\mathbb{Q}$ (مجموعهٔ اعداد گویا) مجموعه‌ای نامتناهی است.

ث) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعهٔ نامتناهی **خواهد بود.**

اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند مجموعهٔ B باشد، یعنی: $B \subseteq A$، آنگاه مجموعهٔ A که مجموعهٔ بزرگ‌تری نسبت به مجموعهٔ B است نیز نامتناهی خواهد بود.

تمرین

صفحهٔ ۷ کتاب‌درسی

① **فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.**

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $U=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,...\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ U یک مجموعهٔ نامتناهی است.

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید. $B=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,...,۱۰۰\}$

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$C=\{۱۵,۲۰,۲۵,...\}$ و $D=\{۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,...\}$

② **متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی، زیرا برابر است با: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی، زیرا برابر است با: $\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$

پ) بازه $(\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲})$. نامتناهی، زیرا این بازه دارای بی‌شمار عدد حقیقی بین $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ است.

ت) $A=\{x \in \mathbb{N} \mid ۱<x<۲\}$. متناهی، زیرا هیچ عددی طبیعی بین ۱ و ۲ وجود ندارد و $A=\varnothing$ است. $n(A)=۰ \in W$

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی، زیرا برابر است با: $\{۱۰۰,۲۰۰,۳۰۰,۴۰۰,...\}$

③ **دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.** مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج (E) و مجموعهٔ اعداد اول (P)، دو مجموعهٔ نامتناهی هستند که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی است:

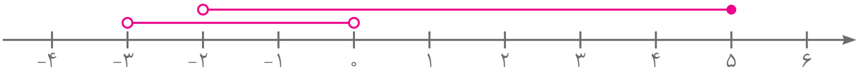
$$E=\{۲,۴,۶,۸,...\} \ , \ P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\} \Rightarrow E \cap P=\{۲\}$$

نکته

تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است.

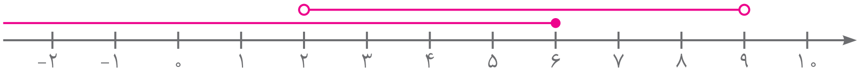
(۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به‌دست آورید:

الف) $(-۳\,,۰)\cup(-۲\,,۵]=(-۳\,,۵]$



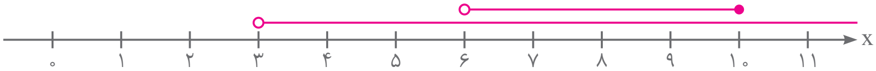
همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، برای به‌دست آوردن اجتماع دو بازه، باید تمام قسمت‌هایی که حداقل در یکی از دو بازه وجود دارد را به حساب آوریم.

ب) $(-\infty\,,۶]\cap(۲\,,۹)=(۲\,,۶]$



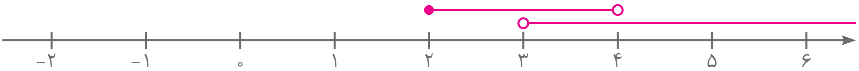
برای به‌دست آوردن اشتراک دو بازه، فقط قسمت‌های مشترک را می‌نویسیم. لازم به ذکر است که چون عدد ۲ به‌صورت بازهٔ باز (در محور دایرهٔ توخالی) است، در اشتراک قرار ندارد.

پ) $(۳\,,+\infty)\cap(۶\,,۱۰]=(۶\,,۱۰]$



ت) $(-\infty\,,۱)\cup[۱\,,+\infty)=(-\infty\,,+\infty)=\mathbb{R}$

ث) $(۳\,,+\infty)-[۲\,,۴)=[۴\,,+\infty)$

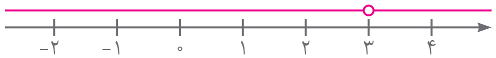


ج) $[۲\,,۴)-(۳\,,+\infty)=[۲\,,۳]$

با توجه به شکل قسمت (ث) پاسخ می‌دهیم.

(۵) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ یعنی تمام اعداد حقیقی به‌جز عدد ۳. توجه کنید که روی محور، باید عدد ۳ را با دایرهٔ توخالی نشان دهیم.



این مجموعه را می‌توان به‌صورت اجتماع دو بازه نوشت، که یکی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳ و دیگری اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۳ باشد:

$$\mathbb{R}-\{۳\}=(-\infty\,,۳)\cup(۳\,,+\infty)$$

(۶) اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

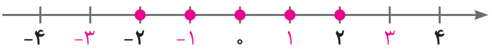
A حتماً یک مجموعهٔ متناهی خواهد بود، زیرا A مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن با تعداد اعضای مجموعهٔ B برابر یا از آن کمتر است.

درس دوم: متمم یک مجموعه

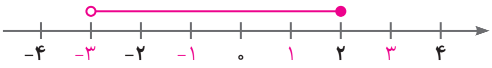
فعالیت .... صفحهٔ ۸ کتاب‌درسی

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -۳<x\leq ۲\}$



$B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۳<x\leq ۲\}$



ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

$A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ $B=(-۳,۲]$

پ) در مورد A ، اگر مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$A'=\{\dots,-۴,-۳,۳,۴,\dots\}$

ت) در مورد B ، با فرض اینکه $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

$B'=(-\infty,-۳]\cup(۲,+\infty)$

کار در کلاس .... صفحهٔ ۹ و ۱۰ کتاب‌درسی

① **اگر U مجموعهٔ شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.** اگر A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی باشد، A' که متمم A است؛ مجموعهٔ استان‌های ساحلی است. در نتیجه مجموعهٔ A' به‌صورت زیر است:

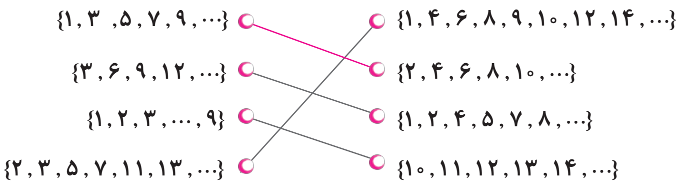
$A'=U-A=$ {سیستان و بلوچستان , هرمزگان , بوشهر , خوزستان , گلستان , مازندران , گیلان}

② **فرض کنیم U مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شدهٔ کشور و B مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟** B' مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک زوج خواهد بود.

نکته

برای به دست آوردن متمم یک مجموعه کافی است مجموعهٔ مرجع را منهای آن مجموعه کنیم. به‌عنوان مثال، اگر $\mathbb{R}$ را مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، داریم: مجموعهٔ اعداد گنگ $=\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'=$ متمم مجموعهٔ اعداد گویا

③ **با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.**



توجه داشته باشید که اجتماع هر دو مجموعه که به‌هم وصل می‌شوند، باید برابر $\mathbb{N}$ باشد.

④ U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن می‌باشد. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$A \cap A' = \varnothing$ $A \cup A' = U$ $U' = U - U = \varnothing$ $\varnothing' = U - \varnothing = U$

نکته

۱- اگر دو مجموعه متمم یکدیگر باشند، اجتماع آنها برابر با مجموعهٔ مرجع است.

۲- اگر دو مجموعه متمم یکدیگر باشند، اشتراک آنها برابر با مجموعهٔ تهی است.

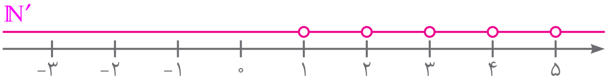
۳- متمم مجموعهٔ تهی، مجموعهٔ مرجع و متمم مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ تهی است.

⑤ الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

یعنی از مجموعهٔ اعداد صحیح، اعداد طبیعی را حذف کرده‌ایم. $\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰\}$

ب) اگر $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، در این‌صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید.

باید از مجموعهٔ اعداد حقیقی، عددهای طبیعی را حذف کنیم.



⑥ فرض کنیم $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۲, ۴\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$B' = \{۱, ۳, ۵\}$ $A' = \{۴, ۵\}$

$(A')'$
$\{۱, ۲, ۳\}$

$\Rightarrow (A')' = A$

$A' \cap B'$	$(A \cup B)'$	$A \cup B$
$\{۵\}$	$\{۵\}$	$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

$A' \cup B'$	$(A \cap B)'$	$A \cap B$
$\{۱, ۳, ۴, ۵\}$	$\{۱, ۳, ۴, ۵\}$	$\{۲\}$

$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$

$A \cap B'$	$A - (A \cap B)$	$A - B$
$\{۱, ۳\}$	$\{۱, ۳\}$	$\{۱, ۳\}$

$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

نکته

بین هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B قوانین زیر برقرار هستند:

۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

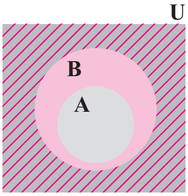
۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۳) $A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

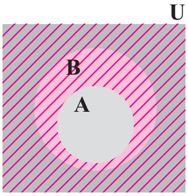
به قوانین ۱ و ۲، «قوانین دمورگان» می‌گویند.

⑦ **الف)** فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعهٔ مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است؟ بله

چگونه؟ همان‌طور که در نمودار مشخص است، $B' \subseteq A'$.



B' را هاشور بزنید



A' را هاشور بزنید

ب) اگر $U=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,b,c\}$، در این‌صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به‌دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است.

$A'=\{c,d,e\}, B'=\{d,e\} \Rightarrow B' \subseteq A'$

نکته

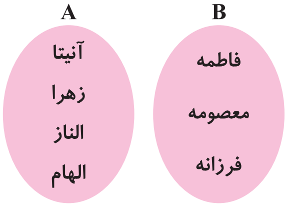
اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $B' \subseteq A'$ خواهد بود.

فعالیت

صفحهٔ ۱۰ و ۱۱ کتاب‌درسی

① یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسهٔ طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعهٔ هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.

اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه $A=$ {آنیتا، زهرا، الناز، الهام} و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B=$ {فاطمه، معصومه، فرزانه} هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به‌عبارت دیگر $A \cap B = \varnothing$.



نکته

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B =$ {فاطمه، معصومه، فرزانه، آنیتا، زهرا، الناز، الهام}

$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$	$n(B)$	$n(A)$
۰	۷	۳	۴

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک فرمول بنویسید.

تعداد اعضای $A \cup B$ برابر مجموع تعداد اعضای A و B است. یعنی: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B برقرار است؟

در صورتی که $n(A \cap B) = ۰$، یعنی A و B جدا از هم (مجزا) و $A \cap B = \varnothing$ باشد.

② **الف)** مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به‌ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته‌شده را بنویسید.

مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۸ : $A = \{۱,۲,۴,۷,۱۴,۲۸\} \Rightarrow n(A) = ۶$

مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۳۰: $B=\{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} \Rightarrow n(B)=۸$

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰: $A\cap B=\{۱,۲\} \Rightarrow n(A\cap B)=۲$

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۱۰,۱۴,۱۵,۲۸,۳۰\} \Rightarrow n(A\cup B)=۱۲$$

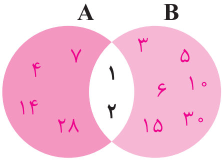
ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$	$n(B)$	$n(A)$
۱۲	۲	۸	۶

پ) چرا رابطه‌ای که در فعالیت (۱) به‌دست آوردید؛ یعنی $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟

رابطهٔ فعالیت (۱) در صورتی درست است که $A\cap B=\varnothing$ یعنی $n(A\cap B)=۰$ باشد ولی در این مثال، اشتراک A و B تهی نیست $(A\cap B\neq\varnothing)$، در نتیجه رابطهٔ فعالیت (۱) برقرار نیست.

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطهٔ درست برای $n(A\cup B)$ را حدس بزنید.



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

این رابطه در حالت کلی برای هر دو مجموعهٔ متناهی A و B برقرار است.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

با توجه به نمودار فوق، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید. هنگامی که تعداد اعضای مجموعهٔ A را با تعداد اعضای مجموعهٔ B جمع می‌کنیم، در واقع تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cap B$ را دو بار شمرده‌ایم (یک بار در اعضای A و یک بار در اعضای B)؛ بنابراین باید یک بار تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cap B$ را کم کنیم تا تعداد درست اعضای $A\cup B$ به‌دست آید.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱ و ۱۲ کتاب‌درسی

① **یک دوره جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به‌طوری‌که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:**

الف) پویانمایی یا طنزند.

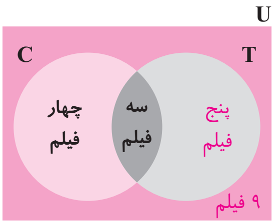
ب) غیر پویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: **مجموعهٔ شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعهٔ فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعهٔ فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.**

الف) $n(C\cup T)=n(C)+n(T)-n(C\cap T)=۷+۸-۳=۱۲$

ب) $n(C\cup T)'=n(U)-n(C\cup T)=۲۱-۱۲=۹$

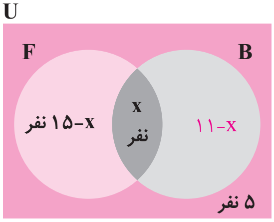
روش دوم حل: **در نمودار وِن مقابل، دو مجموعهٔ C و T سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که عددِ مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.**



الف) تعداد کل فیلم‌های پویانمایی یا طنز $=۴+۳+۵=۱۲$

ب) تعداد کل فیلم‌های غیر پویانمایی و غیرطنز $=۲۱-۱۲=۹$

② در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.



روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.

$۲۵-۵=۲۰$

$۱۵-x+x+۱۱-x=۲۰ \Rightarrow ۲۶-x=۲۰ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow$ ۶ نفر عضو هر دو تیم هستند.

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B\cup F)=۲۰$. حال با نوشتن فرمول $n(B\cup F)$ می‌توان $n(B\cap F)$ را به‌دست آورد.

$n(F)=۱۵\,,\ n(B)=۱۱\,,\ n(F\cup B)=۲۰$

$n(F\cup B)=n(F)+n(B)-n(F\cap B) \Rightarrow ۲۰=۱۵+۱۱-n(F\cap B) \Rightarrow ۲۰=۲۶-n(F\cap B)$

$\Rightarrow n(F\cap B)=۲۶-۲۰=۶ \Rightarrow$ ۶ نفر عضو هر دو تیم هستند.

تمرین

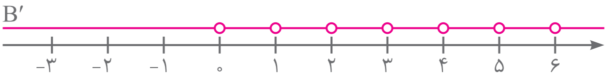
صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی

① $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف) $A=[-۲\,,\,۳)$

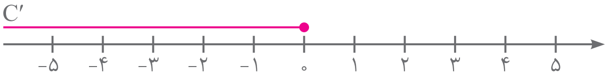
باید از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مجموعهٔ A را حذف کرد. چون ۲− عضو مجموعهٔ A است، پس عضو مجموعهٔ A' نیست و با دایرهٔ توخالی نشان می‌دهیم. همچنین چون ۳ عضو A نیست، پس عضو A' است و با دایرهٔ توپر نشان می‌دهیم.

(ب) $B=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$



در اینجا نیز، اعضای B را به‌صورت دایرهٔ توخالی نشان می‌دهیم.

(پ) $C=(۰\,,\,+\infty)$



چون عدد صفر عضو C نیست، پس عضو C' است و با دایرهٔ توپر نشان می‌دهیم.

(ت) $D=(-\infty\,,\,۱]$

چون عدد ۱ عضو D است، پس عضو D' نیست و با دایرهٔ توخالی نشان می‌دهیم.

② $\mathbb{N}$ را به‌عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج باشد، A' مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد خواهد بود که هردو مجموعهٔ A و A' نامتناهی هستند.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

اگر B اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ باشد، یعنی $B=\{۶,۷,۸,...\}$، در این‌صورت B نامتناهی است و متمم آن، مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۵، یعنی $B'=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه‌ای متناهی است.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به‌دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

اگر C مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، آنگاه خواهیم داشت: $C=\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}\Rightarrow C'=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,\ldots\}$

همان‌طور که دیده می‌شود، مجموعهٔ C' نامتناهی است.

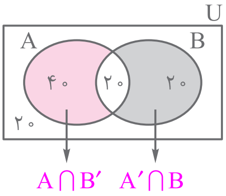
③ **اگر $n(A)=۱۵$ ، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.**

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۵+n(B)-۵\Rightarrow ۳۰=n(B)+۱۰\Rightarrow n(B)=۲۰$$

④ **فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۱۰۰$ ، $n(A)=۶۰$ ، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ مطلوب است:**

(الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶۰+۴۰-۲۰=۱۰۰-۲۰=۸۰$

با توجه به اطلاعات داده‌شده، نمودار ون را رسم می‌کنیم:



برای به‌دست آوردن $n(A\cap B')$ باید تعداد اعضایی را بیابیم که هم عضو A و هم عضو B' باشند. **(ب)** $n(A\cap B')=۴۰$

نکته

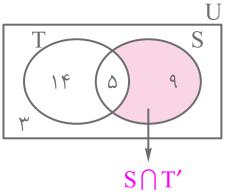
برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم: $A\cap B'=A-B$

(پ) $n(A'\cap B)=۲۰$

طبق قوانین دمورگان، خواهیم داشت: **(ت)** $n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۸۰=۲۰$

⑤ **در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:**

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.



اگر گروه سرود را با S و گروه تئاتر را با T نشان دهیم، خواهیم داشت:

$n(S)=۱۴\ ,\ n(T)=۱۹\ ,\ n(S\cap T)=۵\ ,\ n(S\cap T')=?$

با توجه به نمودار رسم‌شده، داریم: $n(S\cap T')=۹$

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

با توجه به نمودار رسم‌شده در قسمت (الف)، ۳ نفر عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

توجه داشته باشید که بدون رسم شکل نیز می‌توان به این سؤال پاسخ داد:

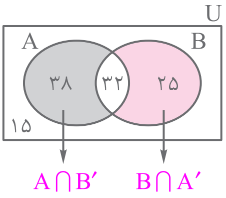
$$n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)=۳۱-۱۹-۱۴+۵=۳$$

⑥ **در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:**

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. $n(A)=۷۰\ ,\ n(B)=۵۷\ ,\ n(A\cap B)=۳۲$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۵۷-۳۲=۱۲۷-۳۲=۹۵$$

یعنی دست‌کم (حداقل) ۹۵ نفر از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.



ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. فقط از شرکت A خرید کرده‌اند، مانند این است که بگوییم از شرکت A خرید کرده‌اند و از شرکت B خرید نکرده‌اند. بنابراین: $n(A\cap B')=۳۸$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند، یعنی از A خرید کرده‌اند و از B خرید نکرده‌اند $(A\cap B')$ یا از B خرید کرده‌اند و از A خرید نکرده‌اند $(B\cap A')$. بنابراین:

$$n[\underbrace{(A\cap B')\cup(B\cap A')}_{\text{جدا از هم هستند.}}]=n(A\cap B')+n(B\cap A')=۳۸+۲۵=۶۳$$

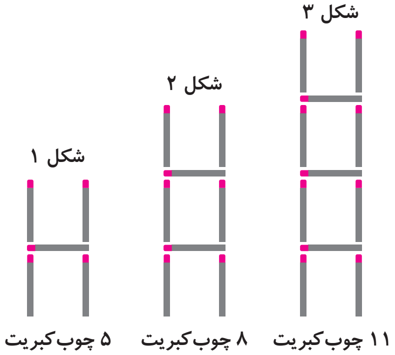
ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند، یعنی از A خرید نکرده‌اند (A') و از B هم خرید نکرده‌اند (B'). بنابراین:

$$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۱۱۰-۹۵=۱۵$$

درس سوم: الگو و دنباله

مثال صفحهٔ **۱۴** کتاب‌درسی

به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	۱۴	...	$۳n+۲$	...
رابطهٔ بین n و a_n	$a_۱=۵$	$a_۲=۸$	$a_۳=۱۱$	$a_۴=۱۴$	...	$a_n=۳n+۲$	...

الف) با این نمادگذاری، $a_۴$ نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

$a_۴$ نشان‌دهندهٔ تعدادچوب‌کبریت‌های شکل چهارم و برابر است با $a_۴=۱۴$.

ب) a_n به چه معناست؟ a_n برابر با تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام است و در حالت کلی، در یک الگو، جملهٔ nام است.

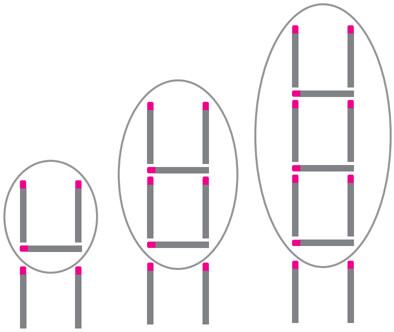
پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را برحسب n به‌دست آورید؟ برای این کار، فعالیت بعد را انجام دهید.

بله، حاصل a_n با توجه به چند عدد اول الگو، برابر $a_n=۳n+۲$ است. روش‌های به‌دست آوردن آن در فعالیت‌های بعدی آمده است.

فعالیت

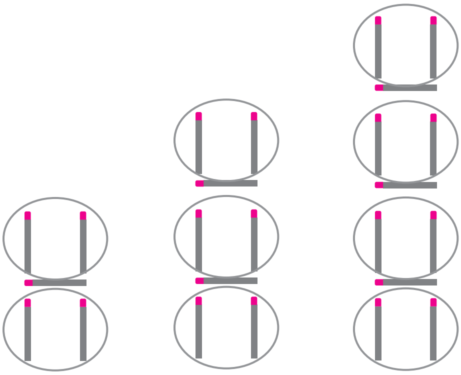
صفحهٔ ۱۵ کتاب‌درسی

① آیدا برای به‌دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به‌صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به‌کمک این روش، مقدار $a_{۱۰}$ و a_n را به‌دست آورید.



$a_۱ = ۱(۳)+۲ \quad a_۲ = ۲(۳)+۲ \quad a_۳ = ۳(۳)+۲ \quad a_۴ = ۴(۳)+۲ \quad \dots \quad a_{۱۰} = ۱۰(۳)+۲ = ۳۲ \quad \dots \quad a_n = n(۳)+۲ = ۳n+۲$

② آیسا روش دیگری را به‌کار برد. او تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به‌طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص‌شده بنویسید.



$a_۱ = ۱+۲(۲) \quad a_۲ = \underbrace{۲}_{\text{چوب‌های افقی}} + \underbrace{۳(۲)}_{\text{چوب‌های عمودی}} \quad a_۳ = ۳+۴(۲) \quad a_۴ = ۴+۵(۲) \quad \dots \quad a_{۱۰} = ۱۰+(۱۰+۱)۲ \quad \dots \quad a_n = n+(n+۱)۲$

③ آیا شما راه دیگری را برای به‌دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

بله، می‌توانیم با اضافه کردن یک چوب‌کبریت به هر شکل، دسته‌های سه‌تایی بسازیم. سپس یک واحد از تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل کم کنیم. یعنی:

$$a_۱ = ۲(۳)-۱ ,\ a_۲ = ۳(۳)-۱ ,\ a_۳ = ۴(۳)-۱ ,\ a_۴ = ۵(۳)-۱ , \dots , a_{۱۰} = ۱۱(۳)-۱ , \dots , a_n = (n+۱)(۳)-۱$$

④ همان‌طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به‌ترتیب به‌صورت‌های $a_n = ۳n+۲$ و $a_n = n+(n+۱)(۲)$ به‌دست آوردند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

$$a_n = n+(n+۱)(۲) = n+۲n+۲ = ۳n+۲$$

⑤ به‌کمک رابطهٔ $a_n = ۳n+۲$ تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

کافی است در این رابطه، به‌جای n، عدد ۲۰ را قرار دهیم. پس:

$$a_{۲۰} = ۳(۲۰)+۲ = ۶۲$$

⑥ با استفاده از رابطهٔ $a_n = ۳n+۲$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

باید به‌جای a_n، عدد ۷۷ را قرار دهیم و از معادلهٔ به‌دست‌آمده، مقدار n را بیابیم.

$$۳n+۲ = ۷۷ \Rightarrow ۳n = ۷۷-۲ \Rightarrow ۳n = ۷۵ \Rightarrow n = \frac{۷۵}{۳} = ۲۵$$

یعنی بیست و پنجمین شکل این الگو، دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

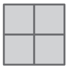
کار در کلاس

صفحهٔ ۱۷ کتاب‌درسی

① **شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.**

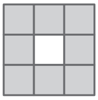
شکل چهارم الگو به این صورت است:

شکل (۱)



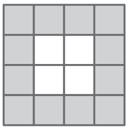
۴ مربع رنگی

شکل (۲)



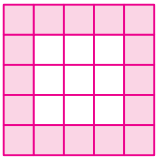
۸ مربع رنگی

شکل (۳)



۱۲ مربع رنگی

شکل (۴)



۱۶ مربع رنگی

n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع‌های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطهٔ بین n و b_n	$b_۱ = ۴$	$b_۲ = ۸$	$b_۳ = ۱۲$	$b_۴ = ۱۶$	$b_۵ = ۲۰$

+۴ +۴ +۴ +۴

② **توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.** زیرا تعداد مربع‌های رنگی در شکل‌ها، ۴ تا ۴ تا افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابت ۴ است.

③ **با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطهٔ $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به‌دست آورید.** با توجه به شکل‌ها و جدول، تعداد مربع‌های رنگی در هر شکل، چهار برابر شمارهٔ شکل است. پس:

$b_n = ۴n = ۴n + ۰ \Rightarrow a = ۴ \ , \ h = ۰$

④ **شکل شمارهٔ ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟**

$b_{۲۵۰} = ۴ \times ۲۵۰ = ۱۰۰۰$ مربع رنگی

⑤ **در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟**

کافی است b_n را برابر ۱۴۴ قرار دهیم و مقدار n را محاسبه کنیم:

$$b_n = ۴n = ۱۴۴ \Rightarrow n = \frac{۱۴۴}{۴} = ۳۶$$

پس در مرحلهٔ سی و ششم از این الگو، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است.

فعالیت

صفحهٔ ۱۷ و ۱۸ کتاب‌درسی

① **در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.**

شکل (۱)

۵ نقطه

شکل (۲)

۱۲ نقطه

شکل (۳)

۲۱ نقطه

شکل (۴)

۳۲ نقطه

n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطهٔ بین n و t_n	$t_۱ = ۵$	$t_۲ = ۱۲$	$t_۳ = ۲۱$	$t_۴ = ۳۲$	$t_۵ = ۴۵$

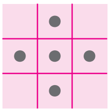
+۷ +۹ +۱۱ +۱۳

② **آیا این الگو یک الگوی خطی است؟** خیر

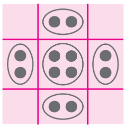
چرا؟ زیرا اختلاف بین دو جملهٔ متوالی عدد ثابتی نیست.

③ **امیررضا برای یافتن جملهٔ عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.**

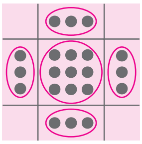
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

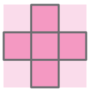


$t_۱ = (۱)^۲ + ۴(۱)$ $t_۲ = (۲)^۲ + ۴(۲)$ $t_۳ = (۳)^۲ + ۴(۳)$ $t_۴ = (۴)^۲ + ۴(۴)$ $\cdots$ $t_n = n^۲ + ۴n$

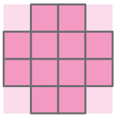
④ **امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به‌صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.**

با توجه به جمله‌های قبلی می‌توانیم الگو را به‌صورت زیر بنویسیم:

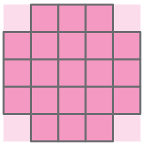
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



$t_۱ = ۳^۲ - ۴ = (۱+۲)^۲ - ۴$ $t_۲ = ۴^۲ - ۴ = (۲+۲)^۲ - ۴$ $t_۳ = (۳+۲)^۲ - ۴$ $t_۴ = (۴+۲)^۲ - ۴$ $\cdots$ $t_n = (n+۲)^۲ - ۴$

⑤ **نشان دهید که دو مقدار به‌دست‌آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.**

اگر الگوی به‌دست‌آمده در قسمت (۴) را ساده کنیم به الگوی قسمت (۳) خواهیم رسید.

$$t_n = (n+۲)^۲ - ۴ = n^۲ + ۴n + ۴ - ۴ = n^۲ + ۴n$$

⑥ **آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.** بله، با توجه به جدول زیر:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه	$۱(۱+۴)$	$۲(۲+۴)$	$۳(۳+۴)$	$۴(۴+۴)$	$۵(۵+۴)$

الگو به‌صورت مقابل خواهد بود: $t_n = n(n+۴)$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۹ و ۲۰ کتاب‌درسی

① **دو دنبالهٔ دلخواه مثال بزنید.**

دنبالهٔ (۱): ۳ , ۷ , ۱۱ , ... دنبالهٔ (۲): ۱- , ۴ , ۹ , ...

② **جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.**

الف) $a_n = n^۲ - ۱ :$ ۰ , ۳ , ۸ , ۱۵ , ۲۴

ب) $b_n = -n + ۴ :$ ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲-

ج) $c_n = -۱۳ + ۲n :$ ۱۱- , ۹- , ۷- , ۵- , ۳-

③ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جملهٔ عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$	$t_۵$	$t_۶$	$t_۷$	…	t_n	…
−۱	−۲	−۳	−۴	−۵	−۶	−۷	…	−n	…
۱	$\sqrt{۳}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۷}$	$\sqrt{۹}$	$\sqrt{۱۱}$	$\sqrt{۱۳}$	…	$\sqrt{۲n-۱}$	…
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	…	$n^۲$	…
۰/۱ ↓ $۱۰^{-۱}$	۰/۰۱ ↓ $۱۰^{-۲}$	۰/۰۰۱ ↓ $۱۰^{-۳}$	۰/۰۰۰۱ ↓ $۱۰^{-۴}$	۰/۰۰۰۰۱ ↓ $۱۰^{-۵}$	۰/۰۰۰۰۰۱ ↓ $۱۰^{-۶}$	۰/۰۰۰۰۰۰۱ ↓ $۱۰^{-۷}$	…	۱۰^{-n}	…
−۱	۸	−۲۷	۶۴	−۱۲۵	۲۱۶	−۳۴۳	…	$(-۱)^n n^۳$	…
۵ $\xrightarrow{+۱۳}$	۱۸ $\xrightarrow{+۱۳}$	۳۱ $\xrightarrow{+۱۳}$	۴۴ $\xrightarrow{+۱۳}$	۵۷ $\xrightarrow{+۱۳}$	۷۰ $\xrightarrow{+۱۳}$	۸۳	…		
−۲ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	۱ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	$\frac{-۱}{۲}$ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	$\frac{۱}{۴}$ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	$-\frac{۱}{۸}$ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	$\frac{۱}{۱۶}$ $\xrightarrow{\times(\frac{-۱}{۲})}$	$-\frac{۱}{۳۲}$	…		
۱ $\xrightarrow{+۱}$	۲ $\xrightarrow{+۲}$	۴ $\xrightarrow{+۳}$	۷ $\xrightarrow{+۴}$	۱۱ $\xrightarrow{+۵}$	۱۶ $\xrightarrow{+۶}$	۲۲	…		
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	…		
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	…		
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	…		

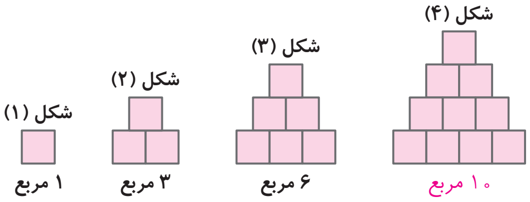
دقت داشته باشید که دنبالهٔ ردیف آخر جدول، دنبالهٔ اعداد اول است.

نکته

در دنبالهٔ یکی مانده به آخر که به «دنبالهٔ فیبوناتچی» معروف است، هر جمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبلی.

این دنباله توسط فیبوناتچی، ریاضی‌دان ایتالیایی معرفی شده است.

④ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



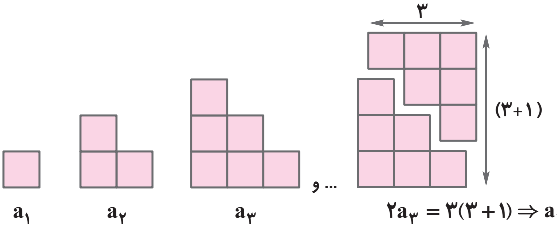
الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد مربع‌ها	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱

$\xrightarrow{+۲}\ \xrightarrow{+۳}\ \xrightarrow{+۴}\ \xrightarrow{+۵}\ \xrightarrow{+۶}$

ب) آیا دنباله حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ خیر چرا؟ زیرا اختلاف جمله‌های متوالی مقدار ثابتی نیست.

پ) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را برحسب n به‌دست آورید.



$$۲a_۳ = ۳(۳+۱) \Rightarrow a_۳ = \frac{۳(۳+۱)}{۲} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ت) به کمک مرحلهٔ قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

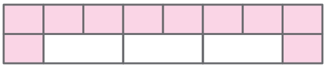
با توجه به اینکه تعداد مربع‌های شکل nام برابر است با مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

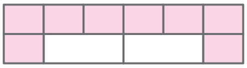
تمرین

صفحهٔ ۲۰ کتاب‌درسی

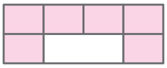
① **به الگوی روبه‌رو توجه کنید.**



۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید



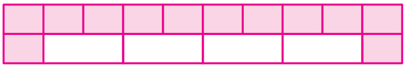
۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید.

۱۲ کاشی تیره و ۴ کاشی سفید



ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

تعداد کاشی‌های تیره: ۶ , ۸ , ۱۰ , ۱۲ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۸ , …

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را برحسب n بنویسید.

با بررسی رابطه بین تعداد کاشی‌های سفید و تیره می‌توانیم t_n را به‌صورت زیر بنویسیم:

تعداد کاشی‌های سفید : n	۱	۲	۳	۴	…	n
تعدادی کاشی‌های تیره : t_n	۶	۸	۱۰	۱۲	…	$۲n+۴$
الگو t_n	$(۲\times۱)+۴$	$(۲\times۲)+۴$	$(۲\times۳)+۴$	$(۲\times۴)+۴$	…	$۲n+۴$

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$n = ۱۰۰ \Rightarrow t_{۱۰۰} = (۲\times۱۰۰)+۴ = ۲۰۴$ کاشی

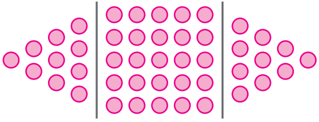
ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله **اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟**

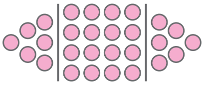
کافی است به‌جای t_n ، ۵۰ قرار دهیم و مقدار n را به‌دست آوریم:

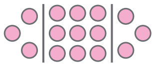
$$۲n+۴ = ۵۰ \Rightarrow ۲n = ۵۰-۴ \Rightarrow ۲n = ۴۶ \Rightarrow n = \frac{۴۶}{۲} = ۲۳$$

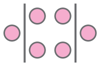
پس برای اینکه ۵۰ کاشی تیره داشته باشیم، باید ۲۳ کاشی سفید داشته باشیم.

② **الگوی زیر را در نظر بگیرید.**


شکل (۵)
۴۵ نقطه


شکل (۴)
۲۸ نقطه


شکل (۳)
۱۵ نقطه


شکل (۲)
۶ نقطه


شکل (۱)
۱ نقطه

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

پس دنبالهٔ مقابل را خواهیم داشت:

۱ , ۶ , ۱۵ , ۲۸ , ۴۵ , ۶۶ , ...
+۵ +۹ +۱۳ +۱۷ +۲۱
+۴ +۴ +۴ +۴

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

n	...	۴	۳	۲	۱	**شمارهٔ شکل**
$n(۲n-۱)$	...	۲۸	۱۵	۶	۱	**تعداد نقطه‌ها**
$n(۲n-۱)$	...	۴×۷	۳×۵	۲×۳	۱×۱	**الگو**

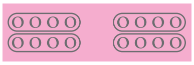
پس جملهٔ عمومی الگو برابر است با: $a_n = n(۲n-۱) = ۲n^۲ - n$

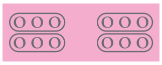
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

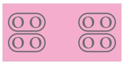
شکل دهم، ۱۹۰ نقطه دارد. $n=۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = ۲\times۱۰^۲ - ۱۰ = ۲۰۰ - ۱۰ = ۱۹۰$

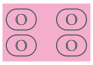
③ **جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.**

(الف) $\mathbf{a_n = ۴n} \Rightarrow a_۱ = ۴\times۱ = ۴ \ , \ a_۲ = ۴\times۲ = ۸ \ , \ a_۳ = ۴\times۳ = ۱۲ \ , \ a_۴ = ۴\times۴ = ۱۶$

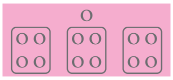

شکل (۴)

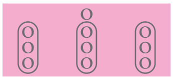

شکل (۳)

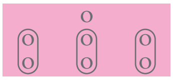

شکل (۲)

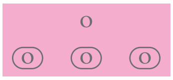

شکل (۱)

(ب) $\mathbf{b_n = ۳n+۱} \Rightarrow b_۱ = ۳(۱)+۱ = ۴ \ , \ b_۲ = ۳(۲)+۱ = ۷ \ , \ b_۳ = ۳(۳)+۱ = ۱۰ \ , \ b_۴ = ۳(۴)+۱ = ۱۳$

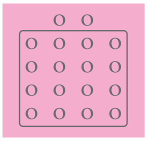

شکل (۴)

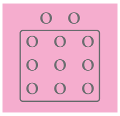

شکل (۳)

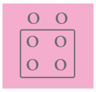

شکل (۲)

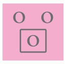

شکل (۱)

(پ) $\mathbf{c_n = n^۲+۲} \Rightarrow c_۱ = ۱^۲+۲ = ۳ \ , \ c_۲ = ۲^۲+۲ = ۶ \ , \ c_۳ = ۳^۲+۲ = ۱۱ \ , \ c_۴ = ۴^۲+۲ = ۱۸$

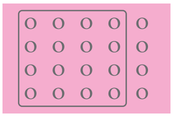

شکل (۴)

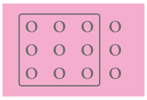

شکل (۳)

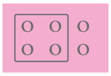

شکل (۲)

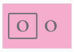

شکل (۱)

(ت) $\mathbf{d_n = n^۲+n} \Rightarrow d_۱ = ۱^۲+۱ = ۲ \ , \ d_۲ = ۲^۲+۲ = ۶ \ , \ d_۳ = ۳^۲+۳ = ۱۲ \ , \ d_۴ = ۴^۲+۴ = ۲۰$


شکل (۴)


شکل (۳)


شکل (۲)

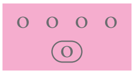

شکل (۱)

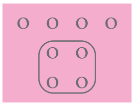
④ **برای هر یک از دنباله‌های درجهٔ دو زیر جملهٔ عمومی را به دست آورید و سپس برای هرکدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.**

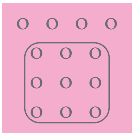
الف) ...,۲۹ ,۲۰ ,۱۳ ,۸ ,۵

شمارهٔ جمله	۱	۲	۳	۴	...	n
جمله	۵	۸	۱۳	۲۰	...	$n^۲+۴$
الگو	$۱^۲+۴$	$۲^۲+۴$	$۳^۲+۴$	$۴^۲+۴$	...	$n^۲+۴$

$$\Rightarrow a_n = n^۲+۴$$


شکل (۱)

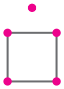

شکل (۲)

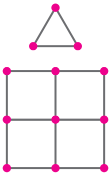

شکل (۳)

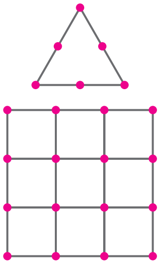
ب) ...,۵۱ ,۳۵ ,۲۲ ,۱۲ ,۵

شمارهٔ جمله	۱	۲	۳	...	n
جمله	۵	۱۲	۲۲	...	$(n+۱)^۲+\frac{n(n+۱)}{۲}$
الگو	$(۱+۱)^۲+\frac{(۱)(۱+۱)}{۲}$	$(۲+۱)^۲+\frac{(۲)(۲+۱)}{۲}$	$(۳+۱)^۲+\frac{(۳)(۳+۱)}{۲}$	...	$(n+۱)^۲+\frac{n(n+۱)}{۲}$

$$\Rightarrow b_n = (n+۱)(\frac{۳}{۲}n+۱)$$


شکل (۱)


شکل (۲)


شکل (۳)

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

فعالیت .... صفحهٔ ۲۱ کتاب‌درسی

① **سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزارهٔ سوم میلادی به بعد به‌صورت زیر است که جملات یک دنبالهٔ حسابی‌اند.**

...,۲۰۲۰ ,۲۰۱۶ ,۲۰۱۲ ,۲۰۰۸ ,۲۰۰۴ ,۲۰۰۰

الف) جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.

$t_۱ = ۲۰۰۰ \quad , \quad d = ۴$

نکته

برای به دست آوردن قدرنسبت یک دنبالهٔ حسابی، کافی است اختلاف دو جملهٔ متوالی را به دست آوریم. مثلاً در اینجا می‌توانیم جملهٔ دوم را منهای جملهٔ اول کنیم: $d = ۲۰۰۴ - ۲۰۰۰ = ۴$

ب) نهمین دورهٔ المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ در سال ۲۰۳۲

$۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ۲۰۲۴, ۲۰۲۸, \boxed{۲۰۳۲}$

پ) با تکمیل جدول زیر، جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

$t_{۱}$	$t_{۲}$	$t_{۳}$	$t_{۴}$	...	$t_{۹}$	...	t_n	...
۲۰۰۰	۲۰۰۰+۱(۴)	۲۰۰۰+۲(۴)	۲۰۰۰+۳(۴)	...	۲۰۰۰+(۸)(۴)	...	۲۰۰۰+(n−۱)(۴)	...

پس جملهٔ عمومی این دنباله، برابر است با: $t_n = ۲۰۰۰ + (n-۱)۴ = ۴n + ۱۹۹۶$

ت) بیست‌و چهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$t_{۲۴} = (۴ \times ۲۴) + ۱۹۹۶ = ۹۶ + ۱۹۹۶ = ۲۰۹۲$

بنابراین در سال ۲۰۹۲ میلادی، بیست و چهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی برگزار خواهد شد.

② **با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آورید.**

$t_{۱}$	$t_{۲}$	$t_{۳}$	$t_{۴}$	$t_{۵}$	$t_{۶}$	...	t_n	...
$t_{۱}$	$t_{۱}+۱d$	$t_{۱}+۲d$	$t_{۱}+۳d$	$t_{۱}+۴d$	$t_{۱}+۵d$	...	$t_{۱}+(n-۱)d$	...

+d +d +d

نکته

اگر $t_{۱}$ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی و d قدرنسبت آن باشد، جملهٔ عمومی این دنبالهٔ حسابی، برابر است با:

$$t_n = t_{۱} + (n-۱)d$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۲۲ کتاب‌درسی

① **در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هرکدام را به‌دست آورید.**

الف) $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, \dots, \quad d = ۵, \quad a_n = a_{۱} + (n-۱)d = ۵ + (n-۱) \times ۵ = ۵n$

ب) $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \dots, \quad d = ۲, \quad b_n = b_{۱} + (n-۱)d = ۱ + (n-۱) \times ۲ = ۲n - ۱$

پ) $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \dots, \quad d = ۴, \quad c_n = c_{۱} + (n-۱)d = ۵ + (n-۱) \times ۴ = ۴n + ۱$

ت) $۱۳, ۷, ۱, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳, \dots, \quad d = -۶, \quad d_n = d_{۱} + (n-۱)d = ۱۳ + (n-۱) \times (-۶) = ۱۳ - ۶n + ۶ = -۶n + ۱۹$

نکته

اگر جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی نزولی باشند، قدرنسبت عددی منفی خواهد بود.

② **A و B دو شرکت عرضه‌کنندهٔ سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.**

سیم‌کارت‌های شرکت A	سیم‌کارت‌های شرکت B
هزینهٔ ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان	هزینهٔ ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان	هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم‌کارت شرکت A و b_n هزینهٔ مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید. $a_n = ۲۰۰۰ + ۳۰n \quad , \quad b_n = ۳۰۰۰ + ۲۰n$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمهٔ ماهانه (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n : هزینهٔ سیم‌کارت A	**۲۰۳۰**	**۳۲۰۰**	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
b_n : هزینهٔ سیم‌کارت B	۳۰۲۰	**۳۸۰۰**	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هرکدام می‌توانند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشند؟ بله **چرا؟** زیرا در هر دو هر جمله از اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، پس a_n و b_n شرایط دنبالهٔ حسابی را دارند.

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

$$a_n \text{ قدرنسبت دنبالهٔ } = a_۲ - a_۱ = (۲۰۰۰+۳۰\times۲)-(۲۰۰۰+۳۰\times۱) = ۲۰۶۰-۲۰۳۰ = ۳۰$$

$$b_n \text{ قدرنسبت دنبالهٔ } = b_۲ - b_۱ = (۳۰۰۰+۲۰\times۲)-(۳۰۰۰+۲۰\times۱) = ۳۰۴۰-۳۰۲۰ = ۲۰$$

نکته

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، ضریب n همان قدرنسبت خواهد بود. به‌عنوان نمونه، در دنبالهٔ $a_n = ۲۰۰۰+۳۰n$ بدون محاسبه می‌توانیم قدرنسبت را به‌دست آوریم که عدد ۳۰ است.

ت) سارا در هر ماه، حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟ سارا در هر ماه، حدود ۶۰ دقیقه مکالمه می‌کند. هزینهٔ او را با هر دو سیم‌کارت محاسبه می‌کنیم:

$$b_{۶۰} = ۳۰۰۰+۲۰\times۶۰ = ۳۰۰۰+۱۲۰۰ = ۴۲۰۰ \qquad a_{۶۰} = ۲۰۰۰+۳۰\times۶۰ = ۲۰۰۰+۱۸۰۰ = ۳۸۰۰$$

به سارا پیشنهاد می‌کنیم از سیم‌کارت شرکت A استفاده کند، چون برایش هزینهٔ کمتری خواهد داشت.

حالا هزینهٔ ۱۵۰ دقیقه مکالمهٔ فاطمه را با هر دو سیم‌کارت محاسبه می‌کنیم:

$$b_{۱۵۰} = ۳۰۰۰+۲۰\times۱۵۰ = ۳۰۰۰+۳۰۰۰ = ۶۰۰۰ \qquad a_{۱۵۰}=۲۰۰۰+۳۰\times۱۵۰=۲۰۰۰+۴۵۰۰=۶۵۰۰$$

به فاطمه پیشنهاد می‌کنیم از سیم‌کارت شرکت B استفاده کند، چون برایش هزینهٔ کمتری خواهد داشت.

مثال صفحهٔ ۲۳ کتاب‌درسی

در دنبالهٔ حسابی زیر جملهٔ شانزدهم را به‌دست آورید. $۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, \ldots$

حل: آرتین و آرکان این مثال را به‌روش‌های زیر حل کرده‌اند.

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس:

$$t_n = ۷n + b$$
$$t_۱ = ۷(۱) + b$$
$$۴ = ۷ + b \Rightarrow b = -۳$$
$$t_n = ۷n - ۳ \text{ جملهٔ عمومی}$$
$$t_{۱۶} = ۷(۱۶) - ۳$$
$$t_{۱۶} = ۱۰۹$$

آرتین: از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی استفاده می‌کنیم:

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d$$
$$t_{۱۶} = t_۱ + ۱۵d$$
$$= ۴ + (۱۵)(۷)$$
$$= ۱۰۹$$

شما کدام روش را می‌پسندید؟ روش آرتین بهتر است، زیرا ساده‌تر و سریع‌تر به جواب رسیده است.

کار در کلاس ---- صفحهٔ ۲۳ کتاب‌درسی

① **الف) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.** $۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, \ldots \Rightarrow d = ۲$

ب) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد. $۱۹, ۱۶, ۱۳, ۱۰, ۷, \ldots \Rightarrow d = -۳$

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جملهٔ مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند. $۵, ۳, ۱, -۱, -۳, \ldots \Rightarrow d = -۲$

② **الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم.**

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_{۱} = ۱۸ \\ t_{۵} = ۶۲ \Rightarrow t_{۱} + ۴d = ۶۲ \Rightarrow d = \dfrac{۶۲ - ۱۸}{۴} = ۱۱ \end{cases}$$

$t_{۱}$	$t_{۲}$	$t_{۳}$	$t_{۴}$	$t_{۵}$
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲

+۱۱ +۱۱ +۱۱ +۱۱

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص‌شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.

A	۲۰	۵۰	۸۰					$\longrightarrow d = ۳۰$
B	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰				$\longrightarrow d = ۲۰$
C	۲۰	۳۵	۵۰	۶۵	۸۰			$\longrightarrow d = ۱۵$
D	۲۰	۳۲	۴۴	۵۶	۶۸	۸۰		$\longrightarrow d = ۱۲$
E	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	$\longrightarrow d = ۱۰$

$$A \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۳} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۱} + ۲d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۰ + ۲d = ۸۰ \Rightarrow ۲d = ۶۰ \Rightarrow d = ۳۰$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۴} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۱} + ۳d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۰ + ۳d = ۸۰ \Rightarrow ۳d = ۶۰ \Rightarrow d = ۲۰$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۵} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۱} + ۴d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۰ + ۴d = ۸۰ \Rightarrow ۴d = ۶۰ \Rightarrow d = ۱۵$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۶} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۱} + ۵d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۰ + ۵d = ۸۰ \Rightarrow ۵d = ۶۰ \Rightarrow d = ۱۲$$

$$E \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۷} = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۲۰ \\ t_{۱} + ۶d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۰ + ۶d = ۸۰ \Rightarrow ۶d = ۶۰ \Rightarrow d = ۱۰$$

تمرین

صفحهٔ ۲۴ کتاب‌درسی

① از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جملهٔ بیست‌ویکم را بیابید.

الف) $۳ \, , \, ۱۰ \, , \, ۱۷ \, , \, ۲۴ \, , \, \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی است. $\Rightarrow d = ۷$

$+۷ \quad +۷ \quad +۷$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow t_{۲۱} = ۳ + (۲۱-۱)\times ۷ = ۳ + ۲۰ \times ۷ = ۳ + ۱۴۰ = ۱۴۳ \Rightarrow t_{۲۱} = ۱۴۳$$

ب) $۱ \, , \, ۲ \, , \, ۴ \, , \, ۸ \, , \, \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی نیست.

$+۱ \quad +۲ \quad +۴$

دقت داشته باشید که اختلاف جمله‌های متوالی، عددی ثابت نیست.

پ) $\sqrt{۳} \, , \, ۲\sqrt{۳} \, , \, ۳\sqrt{۳} \, , \, ۴\sqrt{۳} \, , \, \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی است. $\Rightarrow d = \sqrt{۳}$

$+\sqrt{۳} \quad +\sqrt{۳} \quad +\sqrt{۳}$

$$t_{۲۱} = \sqrt{۳} + (۲۱-۱)\sqrt{۳} = \sqrt{۳} + ۲۰\sqrt{۳} = ۲۱\sqrt{۳} \Rightarrow t_{۲۱} = ۲۱\sqrt{۳}$$

ت) $۱۰ \, , \, ۷ \, , \, ۴ \, , \, ۱ \, , \, \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی است. $\Rightarrow d = -۳$

$-۳ \quad -۳ \quad -۳$

$$t_{۲۱} = ۱۰ + (۲۱-۱)\times(-۳) \Rightarrow t_{۲۱} = ۱۰ + (۲۰)(-۳) = ۱۰ - ۶۰ = -۵۰ \Rightarrow t_{۲۱} = -۵۰$$

ث) $\frac{۲}{۵} \, , \, \frac{۳}{۵} \, , \, \frac{۴}{۵} \, , \, ۱ \, , \, \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی است. $\Rightarrow d = \frac{۱}{۵}$

$+\frac{۱}{۵} \quad +\frac{۱}{۵} \quad +\frac{۱}{۵}$

$$t_{۲۱} = \frac{۲}{۵} + (۲۱-۱)\times\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۵} + (۲۰)(\frac{۱}{۵}) = \frac{۲}{۵} + \frac{۲۰}{۵} = \frac{۲۲}{۵} \Rightarrow t_{۲۱} = \frac{۲۲}{۵} = ۴\frac{۲}{۵}$$

ج) $۲ \, , \, ۲ \, , \, ۲ \, , \, ۲ \, , \cdots \Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی است (این دنباله ثابت است). $\Rightarrow d = ۰ \Rightarrow t_{۲۱} = ۲$

$+۰ \quad +۰ \quad +۰$

② در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به‌ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به‌دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} t_۳ = ۲۰ \\ t_۷ = ۵۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۲d = ۲۰ \\ t_۱ + ۶d = ۵۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-t_۱} - ۲d = -۲۰ \\ \cancel{t_۱} + ۶d = ۵۶ \end{cases}$$

$$۴d = ۳۶ \Rightarrow d = ۹$$

$$t_۱ + ۲d = ۲۰ \xrightarrow{d=۹} t_۱ + ۲(۹) = ۲۰ \Rightarrow t_۱ + ۱۸ = ۲۰ \Rightarrow t_۱ = ۲$$

پس جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۹ است، یعنی جملات ۹تا ۹تا اضافه می‌شوند. پس داریم: $۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \ldots$

③ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

اگر ۶ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی به صورت مقابل باشند: $a \, , \, a+d \, , \, a+۲d \, , \, a+۳d \, , \, a+۴d \, , \, a+۵d$

داریم:

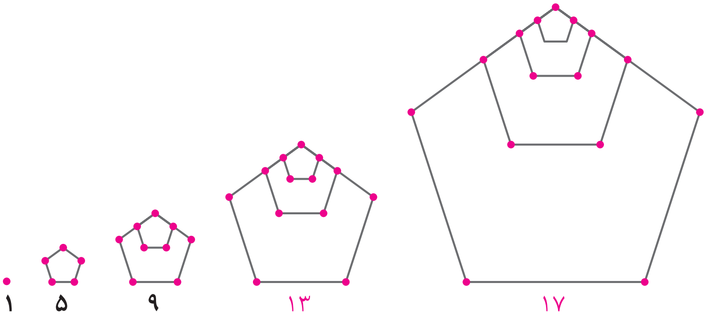
$$\begin{cases} a + (a+d) + (a+۲d) = ۳ \\ (a+۳d) + (a+۴d) + (a+۵d) = ۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a + ۳d = ۳ \\ ۳a + ۱۲d = ۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-۳a} - ۳d = -۳ \\ \cancel{۳a} + ۱۲d = ۳۹ \end{cases}$$

$$۹d = ۳۶ \Rightarrow d = ۴$$

$$۳a + ۳d = ۳ \xrightarrow{d=۴} ۳a + ۳(۴) = ۳ \Rightarrow ۳a + ۱۲ = ۳ \Rightarrow ۳a = -۹ \Rightarrow a = -۳$$

بنابراین، دنباله به‌صورت روبه‌رو خواهد بود: $-۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \ldots$

④ **الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.**



دنباله حسابی با جملهٔ اول $t_۱ = ۱$ و قدرنسبت $d = ۴$ است.

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید. $t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow t_n = ۱ + (n-۱) \times ۴ = ۱ + ۴n - ۴ = ۴n - ۳ \Rightarrow t_n = ۴n - ۳$

پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟ کافی است t_n را مساوی ۳۹۷ قرار دهیم:

$t_n = ۴n - ۳ = ۳۹۷ \Rightarrow ۴n = ۳۹۷ + ۳ \Rightarrow ۴n = ۴۰۰ \Rightarrow n = ۱۰۰ \Rightarrow$ جملهٔ صدم

⑤ **الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟** $\frac{۵+۱۱}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \Rightarrow ۵, \boxed{۸}, ۱۱$

نکته

اگر بخواهیم واسطهٔ حسابی بین دو عدد را به‌دست آوریم، کافی است میانگین آن دو عدد را حساب کنیم. در این‌صورت، آن دو عدد به همراه میانگین، تشکیل دنبالهٔ حسابی خواهند داد.

ب) واسطهٔ حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟ $\frac{۲۰+۳۰}{۲} = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵ \Rightarrow ۲۰, \boxed{۲۵}, ۳۰$

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ واسطهٔ حسابی بین دو عدد، همان میانگین آنها است و با آن دو عدد، دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

⑥ **مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.**

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک‌سومِ مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

اگر سهم نفر اول (کوچک‌ترین سهم) a ، سهم نفر دوم $a+d$ ، سهم نفر سوم $a+۲d$ ، سهم نفر چهارم $a+۳d$ و نفر پنجم $a+۴d$ باشد، خواهیم داشت:

$$a + a + d + a + ۲d + a + ۳d + a + ۴d = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۵a + ۱۰d = ۱۰۰ \xrightarrow{÷۵} a + ۲d = ۲۰ \, (۱)$$

همچنین طبق توضیحات سؤال، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a+۴d+a+۳d+a+۲d}{۳} = a + a + d \Rightarrow \frac{۳a+۹d}{۳} = ۲a + d \Rightarrow ۳a + ۹d = ۶a + ۳d \Rightarrow a = ۲d \, (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۲d + ۲d = ۲۰ \Rightarrow ۴d = ۲۰ \Rightarrow d = ۵ \xrightarrow{(۲)} a = ۲d = ۲ \times ۵ = ۱۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

در نتیجه، سهم‌ها عبارت‌اند از:

نفرپنجم	نفرچهارم	نفرسوم	نفردوم	نفراول
۳۰	۲۵	۲۰	۱۵	۱۰

فعالیت
صفحهٔ ۲۵ کتاب‌درسی

① **جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.**

n : روز	t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند
۱	۲ (امید و محسن)
۲	$۲ \times ۲ = ۲^۲$
۳	$۴ \times ۲ = ۲^۳$
۴	$۸ \times ۲ = ۲^۴$
۵	$۱۶ \times ۲ = ۲^۵$
۶	$۳۲ \times ۲ = ۲^۶$
⋮	⋮
n	$t_n = ۲^n$

② **در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟**

در روز دهم، ۱۰۲۴ فرد جدید مبتلا می‌شوند.

$$t_{۱۰} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

③ **در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟**

$$t_{۱۱} = ۲^{۱۱} = ۲ \times ۲^{۱۰} = ۲ \times ۱۰۲۴ = ۲۰۴۸$$

در روز یازدهم، ۲۰۴۸ شخص جدید مبتلا می‌شوند.

④ **در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.**

تعداد افراد جدیدی که در روز nام مبتلا می‌شوند، برابر است با ۲^n،

بنابراین: $۲^n = ۱۶۳۸۴ = ۲^{۱۴} \Rightarrow n = ۱۴$

پس در روز چهاردهم، تعداد افراد جدیدی که به بیماری مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر است.

فعالیت
صفحهٔ ۲۵ کتاب‌درسی

در حالت کلی در یک دنبالهٔ هندسی، اگر جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	…	t_n	…
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	…	$t_1 r^{n-1}$	…

×r ×r ×r ×r

کار در کلاس
صفحهٔ ۲۶ کتاب‌درسی

① **نرگس و نگار برای محاسبهٔ هفتمین جملهٔ دنبالهٔ هندسی … ,۱ ,۳ ,۹ روش‌های مقابل را به‌کار برده‌اند.**

نرگس	نگار
$r = \frac{۹}{۳} = ۳$	$r = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$
$t_7 = ۹(۳)^{۷-۱}$	$t_7 = ۹(\frac{۱}{۳})^{۷-۱}$
$= ۶۵۶۱$	$= \frac{۱}{۸۱}$

کدام‌یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید. نگار درست حل کرده است، زیرا برای به‌دست آوردن قدرنسبت دنبالهٔ هندسی، باید جملهٔ دوم را بر جملهٔ اول تقسیم کرد، ولی نرگس برعکس این کار را انجام داده است. یعنی به اشتباه، جملهٔ اول را بر جملهٔ دوم تقسیم کرده است.

② **در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.**

الف) $\overset{a_1}{۲}, ۶, ۱۸, ۵۴, \boxed{۱۶۲}, \boxed{۴۸۶}, \dots, a_n = ۲ \times ۳^{n-1}$

×۳ ×۳=r ×۳ ×۳ ×۳

ب) $\overset{b_1}{۵}, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \boxed{۸۰}, \boxed{۱۶۰}, \dots, b_n = b_1 r^{n-1} = ۵ \times ۲^{n-1}$

×۲ ×۲ ×۲ ×۲ ×۲

پ)
$$\begin{tikzcd} \overset{c_۱}{۶} \arrow[r, bend right, "×(-۱۰)"'] & -۶۰ \arrow[r, bend right, "×(-۱۰)"'] & ۶۰۰ \arrow[r, bend right, "×(-۱۰)"'] & -۶۰۰۰ \arrow[r, bend right, "×(-۱۰)"'] & \boxed{۶۰۰۰۰} \arrow[r, bend right, "×(-۱۰)"'] & \boxed{-۶۰۰۰۰۰} & ,\dots, c_n = c_۱r^{n-۱} = ۶\times(-۱۰)^{n-۱} \end{tikzcd}$$

ت)
$$\begin{tikzcd} \overset{d_۱}{۴} \arrow[r, bend right, "×\frac{۱}{۲}"'] & ۲ \arrow[r, bend right, "×\frac{۱}{۲}"'] & ۱ \arrow[r, bend right, "×\frac{۱}{۲}"'] & \frac{۱}{۲} \arrow[r, bend right, "×\frac{۱}{۲}"'] & \boxed{\frac{۱}{۴}} \arrow[r, bend right, "×\frac{۱}{۲}"'] & \boxed{\frac{۱}{۸}} & ,\dots, d_n = d_۱r^{n-۱} = ۴\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱} \end{tikzcd}$$

③ **الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطهٔ هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به‌جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟**

$$\begin{cases} t_۱ = ۳ \\ t_۳ = ۴۸ \Rightarrow t_۱r^۲ = ۴۸ \Rightarrow r^۲ = ۱۶ \Rightarrow r = \pm ۴ \end{cases}$$

$r = ۴ \rightarrow$

۳	۱۲	۴۸

$r = -۴ \rightarrow$

۳	۱۲−	۴۸

پس به‌جز عدد ۱۲، عدد ۱۲− هم واسطهٔ هندسی بین ۳ و ۴۸ است.

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر، مسئله دارای ۲ جواب است.

$$\begin{cases} t_۱ = ۳ \\ t_۵ = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳ \\ t_۱r^۴ = ۴۸ \end{cases} \Rightarrow ۳r^۴ = ۴۸ \Rightarrow r^۴ = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶ \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = \pm ۲$$

پس ۲ دسته جواب وجود دارد.

$r = ۲ \rightarrow$

۳	۶	۱۲	۲۴	۴۸

$r = -۲ \rightarrow$

۳	۶−	۱۲	۲۴−	۴۸

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود.

$$\begin{cases} t_۱ = ۱۰ \\ t_۳ = ۴۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱۰ \\ t_۱r^۲ = ۴۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰r^۲ = ۴۰۰۰ \Rightarrow r^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow \begin{cases} r = ۲۰ \\ r = -۲۰ \end{cases}$$

$r = ۲۰ \rightarrow$

۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰

$r = -۲۰ \rightarrow$

۱۰	۲۰۰−	۴۰۰۰

$$\begin{cases} t_۱ = ۱۰ \\ t_۴ = ۸۰۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱۰ \\ t_۱r^۳ = ۸۰۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰r^۳ = ۸۰۰۰۰ \Rightarrow r^۳ = ۸۰۰۰ \Rightarrow r = ۲۰$$

۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰۰

$$\begin{cases} t_۱ = ۴ \\ t_۶ = ۹۷۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۴ \\ t_۱r^۵ = ۹۷۲ \end{cases} \Rightarrow ۴r^۵ = ۹۷۲ \Rightarrow r^۵ = \frac{۹۷۲}{۴} = ۲۴۳ = ۳^۵ \Rightarrow r = ۳$$

۴	۱۲	۳۶	۱۰۸	۳۲۴	۹۷۲

تمرین

صفحهٔ ۲۷ کتاب‌درسی

① **از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.**

الف) $۷ \xrightarrow{\times ۴} ۲۸ \xrightarrow{\times ۴} ۱۱۲ \xrightarrow{\times ۴} ۴۴۸ , \dots \Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی است. $\Rightarrow r = ۴$

ب) $۲\sqrt{۵} , ۴\sqrt{۵} , ۶\sqrt{۵} , ۸\sqrt{۵} , \dots \Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی نیست.

زیرا جمله‌ها از ضرب جملهٔ قبل از خود در یک مقدار ثابت به‌دست نمی‌آیند. (لازم به ذکر است که دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $d = ۲\sqrt{۵}$ است.)

پ) $۱ \xrightarrow{\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)} \frac{-۱}{۲} \xrightarrow{\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)} \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times\left(\frac{-۱}{۲}\right)} \frac{-۱}{۸} , \dots \Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی است. $\Rightarrow r = -\frac{۱}{۲}$

ت) $۵ \xrightarrow{\times ۱} ۵ \xrightarrow{\times ۱} ۵ \xrightarrow{\times ۱} ۵ , \dots \Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی است. $\Rightarrow r = ۱$. همچنین دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = ۰$ نیز است.

② **چند دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.**

بی‌شمار، زیرا ما می‌توانیم جملهٔ اول را هر عدد دلخواهی در نظر بگیریم. مثلاً:

$$\begin{cases} ۱, \frac{۴}{۵}, \frac{۱۶}{۲۵}, \frac{۶۴}{۱۲۵}, \dots \\ ۲, \frac{۸}{۵}, \frac{۳۲}{۲۵}, \frac{۱۲۸}{۱۲۵}, \dots \end{cases}$$

③ **درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.**

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی. نادرست است. زیرا مثلاً دنبالهٔ ...,۱۶ ,۹ ,۴ ,۱ که جملهٔ عمومی آن $t_n = n^۲$ است، نه حسابی است و نه هندسی. یعنی نه به جملات آن مقدار ثابتی اضافه می‌شود و نه جملات آن در عدد ثابتی ضرب می‌شوند.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی. نادرست است. زیرا مثلاً دنبالهٔ ...,۵ ,۵ ,۵ ,۵ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = ۰$ است، یعنی به همهٔ جملات، مقدار ثابت صفر اضافه می‌شود و همچنین این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r = ۱$ است، یعنی همهٔ جملات در عدد ثابت ۱ ضرب می‌شوند.

④ **علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست‌دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.**

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

وقتی قیمت دوچرخه ٪۲۰ کاهش می‌یابد، یعنی در سال جدید ٪۸۰ ارزش سال قبل را دارد. پس برای به‌دست آوردن قیمت در سال‌های بعد، باید جمله‌ها را در عدد $\frac{۸۰}{۱۰۰}$ یا ۰/۸ ضرب کنیم.

$$۵۰۰۰۰۰ \xrightarrow{\times ۰/۸} \underset{\text{پس از یک سال}}{۴۰۰۰۰۰} \xrightarrow{\times ۰/۸} \underset{\text{پس از دو سال}}{۳۲۰۰۰۰} \xrightarrow{\times ۰/۸} \underset{\text{پس از سه سال}}{۲۵۶۰۰۰}$$

بنابراین پس از ۳ سال، علی دوچرخه را به قیمت ۲۵۶۰۰۰ تومان می‌تواند بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

$$\begin{cases} \text{قیمت پس از ۱ سال} : t_۱ = ۴۰۰۰۰۰ : \text{جملهٔ اول} \\ r = ۰/۸ : \text{قدرنسبت} \end{cases} \Rightarrow t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۴۰۰۰۰۰ \times (۰/۸)^{n-۱}$$

⑤ حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید. **۲ , ۴ , ۸ , ...**

$۲^۱,۲^۲,۲^۳,\dots \Rightarrow$ حاصل‌ضرب ۲۰ جملهٔ اول $= ۲^۱\times ۲^۲\times ۲^۳\times\cdots\times ۲^{۲۰} = ۲^{۱+۲+۳+\cdots+۲۰}$

نکته

برای به‌دست آوردن حاصل‌جمع اعداد طبیعی از ۱ تا n ، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۱+۲+۳+\cdots+۲۰=\frac{۲۰(۲۰+۱)}{۲}=\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$$

پس حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی داده‌شده، برابر است با: $۲^{۱+۲+۳+\cdots+۲۰}=۲^{۲۱۰}$

⑥ جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases}t_۳=۱۲\\ t_۶=۹۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱r^۲=۱۲\\ t_۱r^۵=۹۶\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{t_۱r^۲}{t_۱r^۵}=\frac{۱۲}{۹۶}\Rightarrow\frac{۱}{r^۳}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow r^۳=۸\Rightarrow r=۲$$

$$\Rightarrow t_۱r^۲=۱۲\xrightarrow{r=۲}t_۱\times۲^۲=۱۲\Rightarrow t_۱\times۴=۱۲\Rightarrow t_۱=۳$$

$$\Rightarrow ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸,۹۶,\dots$$

⑦ بنابر آمار منتشرشده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهندهٔ حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸	۱۳۹۷	۱۳۹۶	۱۳۹۵	۱۳۹۴	سال
۱۲۱۹۱	۱۲۸۳۳	۱۳۵۰۸	۱۴۲۱۹	۱۴۹۶۷	۱۵۷۵۵	۱۶۵۸۴	تعداد تلفات مورد انتظار

×۰/۹۵ ×۰/۹۵ ×۰/۹۵ ×۰/۹۵ ×۰/۹۵ ×۰/۹۵

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

دنبالهٔ هندسی، زیرا هر جمله از حاصل‌ضرب جملهٔ قبل در مقدار ثابت ۰/۹۵ به‌دست می‌آید.

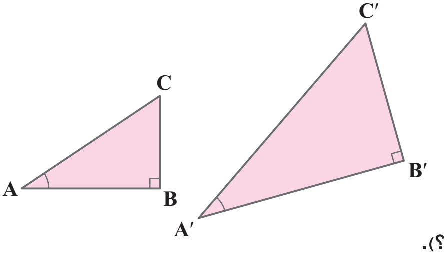
فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

کار در کلاس

صفحهٔ ۳۰ کتاب‌درسی

① در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.



$$\overset{\Delta}{ABC} \boxed{\sim} \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

② از تساوی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$ (چرا؟).

می‌دانیم اگر طرفین یک تساوی را در یک عبارت یکسان ضرب کنیم، باز هم تساوی برقرار خواهد بود. بنابراین:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \xrightarrow{\times(\frac{A'B'}{AC})} \frac{\cancel{AC}}{A'C'} \times \frac{A'B'}{\cancel{AC}} = \frac{AB}{\cancel{A'B'}} \times \frac{\cancel{A'B'}}{AC} \Rightarrow \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ و $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$

نتیجه

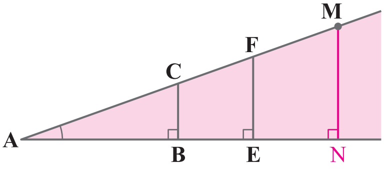
اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویهٔ A' از مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad و \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad و \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

فعالیت

صفحهٔ ۳۰ کتاب‌درسی

① در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{EF}{AE} = \frac{BC}{AB}$ را بررسی کنید.



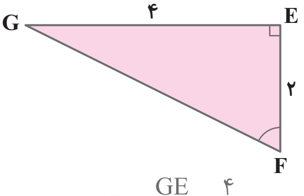
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \text{مشترک} \\ \hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{AEF} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

بنابراین تساوی داده‌شده در سؤال، درست است.

② نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویهٔ A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید: $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$

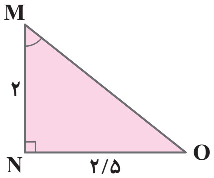
فعالیت — صفحهٔ ۳۱ کتاب‌درسی

① در هریک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



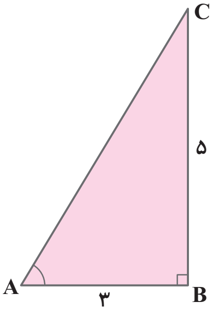
$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$$



$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$$

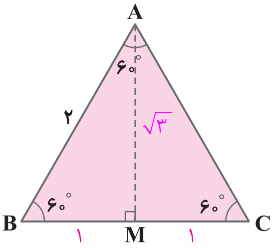
$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$$



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

② مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.



الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ....عمودمنصف.... ضلع BC است. بنابراین:

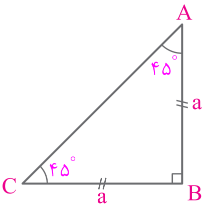
$BM = MC = ۱$

ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$$AM^۲ + BM^۲ = AB^۲ \Rightarrow AM^۲ + ۱^۲ = ۲^۲ \Rightarrow AM^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow AM^۲ = ۳ \Rightarrow AM = \sqrt{۳}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \ , \quad \tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱}$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.



اگر $AB = BC = a$ باشد، آنگاه:

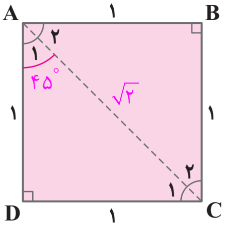
$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱$$

$$\cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = ۱$$

پرسش متن — صفحهٔ ۳۱ کتاب‌درسی

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{AB}{AC}$.

مثال — صفحهٔ ۳۲ کتاب‌درسی



خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AD)^۲ + (DC)^۲ = (AC)^۲$.

در نتیجه $(AC)^۲ = ۱^۲ + ۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲ = ۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC = \sqrt{۲}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو $\widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ = ۴۵^\circ$.

مبینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱ = \sin ۴۵^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

سبا: من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم. $\cos A_۱ = \cos ۴۵^\circ = \frac{AD}{\text{وتر}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مریم: اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC ، طبق تعریف داریم. $\tan A_۱ = \tan ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$ و $\cot A_۱ = \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$

کار در کلاس

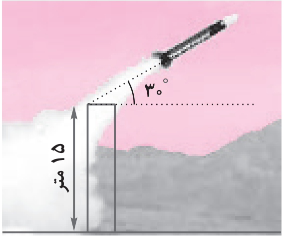
صفحهٔ ۳۲ کتاب‌درسی

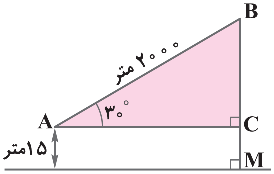
به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (درصورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

۶۰°	۴۵°	۳۰°	مقدار
$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	sinA
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	cosA
$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	tanA
$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	cotA

مثال

صفحهٔ ۳۳ کتاب‌درسی





یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با: $BC + MC = BC + ۱۵$

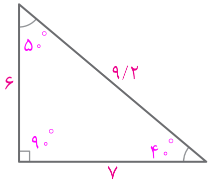
بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۲۰۰۰} \Rightarrow BC = ۱۰۰۰$

و از این‌رو $\text{ارتفاع موشک} = ۱۰۰۰ + ۱۵ = ۱۰۱۵$ متر

فعالیت

صفحهٔ ۳۳ کتاب‌درسی

① یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین‌حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

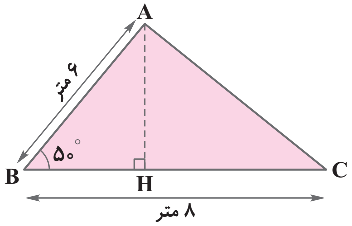


با استفاده از شکل $\Rightarrow \begin{cases} \sin ۵۰^\circ = \frac{۷}{۹/۲} \simeq ۰/۷۶ \\ \cos ۵۰^\circ = \frac{۶}{۹/۲} \simeq ۰/۶۵ \\ \tan ۵۰^\circ = \frac{۷}{۶} \simeq ۱/۱۶ \\ \cot ۵۰^\circ = \frac{۶}{۷} \simeq ۰/۸۵ \end{cases}$

مقادیر واقعی (ماشین حساب) $\Rightarrow \begin{cases} \sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶ \\ \cos ۵۰^\circ \simeq ۰/۶۴ \\ \tan ۵۰^\circ \simeq ۱/۱۹ \\ \cot ۵۰^\circ \simeq ۰/۸۳ \end{cases}$

همان‌طور که دیده می‌شود، مقادیر نوشته‌شده توسط ما، تقریباً با مقادیر به‌دست‌آمده توسط ماشین‌حساب، برابرند.

② می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:



$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$ ، داریم:

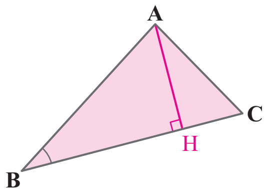
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH \simeq ۶\times ۰/۷۶ = ۴/۵۶ \text{ متر}$$

ب) با توجه به قسمت (الف)، داریم:

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲}\times ۴/۵۶\times ۸ \simeq ۱۸/۲۴ \text{ متر مربع}$$

③ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید:

$$\boxed{\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin B.}$$



ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB خواهیم داشت:

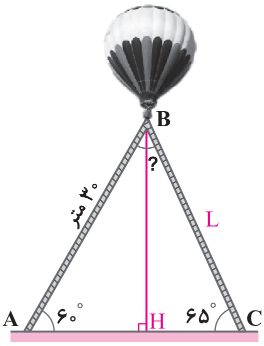
$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB\times \sin B \quad (۱)$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲}\times \underbrace{AH}\times BC = \frac{۱}{۲}\times \underbrace{AB\times \sin B}_{(۱)}\times BC \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin B$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۳۴ کتاب‌درسی

① در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.



الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

$$\hat{B}+۶۰^\circ+۶۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+۱۲۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۵۵^\circ$$

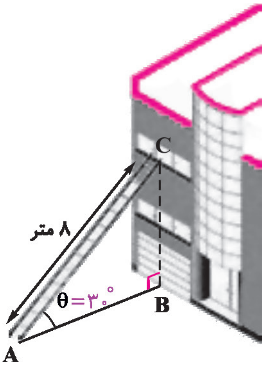
ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

$$\sin\hat{A}=\sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{۳۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۳۰} \Rightarrow BH=\frac{\sqrt{۳}\times ۳۰}{۲}=۱۵\sqrt{۳}\simeq ۱۵\times ۱/۷=۲۵/۵ \text{ متر}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ °۶۵ ، طول طناب دوم را پیدا کنید. ($\sin ۶۵^\circ \simeq ۰/۹$)

$$\sin ۶۵^\circ=\frac{BH}{L}\simeq ۰/۹ \Rightarrow L\simeq\frac{۲۵/۵}{۰/۹} \Rightarrow L\simeq ۲۸/۳ \text{ متر}$$

② **مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟**



$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴ \text{ متر}$$

اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

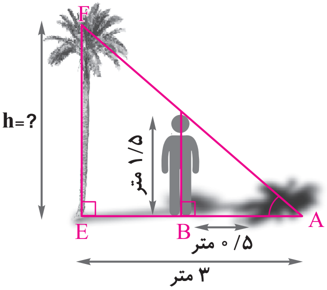
$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۴\sqrt{۳} \text{ متر}$$

تمرین

صفحهٔ ۳۴ و ۳۵ کتاب‌درسی

① **علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟**

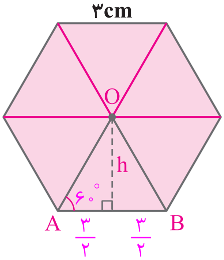


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \text{مشترک} \\ \hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{AEF} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{۰/۵}{۳} = \frac{۱/۵}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{۳ \times ۱/۵}{۰/۵} = ۹ \text{ متر}$$

② **مساحت شش‌ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.**

ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع OAB را به‌دست می‌آوریم . سپس حاصل را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم.

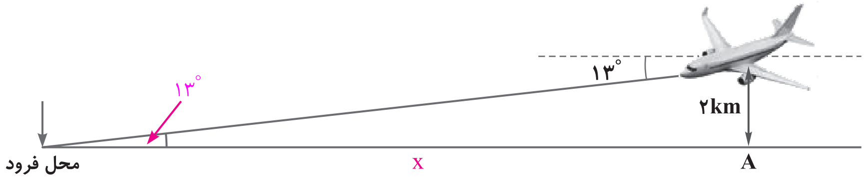


$$\tan ۶۰^\circ = \frac{h}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{h}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow h = \sqrt{۳} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \text{cm}$$

$$\overset{\Delta}{OAB} \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲} \times h \times AB = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۳ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} \text{cm}^۲$$

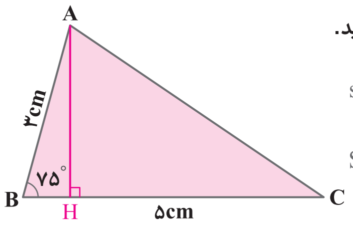
$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} \times ۶ = \frac{۵۴\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲} \text{cm}^۲$$

③ **یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.** $\tan ۱۳^\circ \simeq ۰/۲۳$



پس هواپیما تقریباً در فاصلهٔ ۸/۶۹ کیلومتری از نقطهٔ A فرود می‌آید. $\tan ۱۳^\circ = \frac{۲}{x} \Rightarrow ۰/۲۳ \simeq \frac{۲}{x} \Rightarrow x \simeq \frac{۲}{۰/۲۳} \simeq ۸/۶۹ \text{ km}$

④ **فرض کنید $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.**



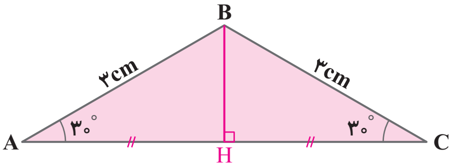
روش اول: $\sin ۷۵^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow ۰/۹۶ \simeq \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH \simeq ۰/۹۶ \times ۳ = ۲/۸۸cm$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times ۲/۸۸ \times ۵ = ۷/۲cm^{۲}$$

روش دوم: با توجه به اینکه اندازهٔ دو ضلع از مثلث و زاویهٔ بین آنها را داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ \simeq \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷/۲cm^{۲}$$

⑤ **مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.**



با توجه به اینکه: $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ ، داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BH}{۳} \Rightarrow BH = \frac{۳}{۲}cm$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AC = ۲ \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}cm$$

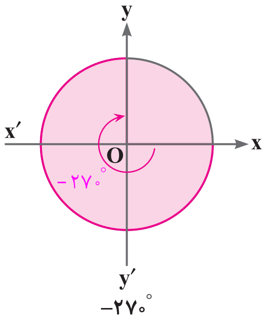
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times BH = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۳} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}cm^{۲}$$

درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی

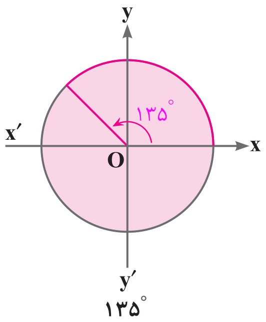
فعالیت

صفحهٔ ۳۶ و ۳۷ کتاب‌درسی

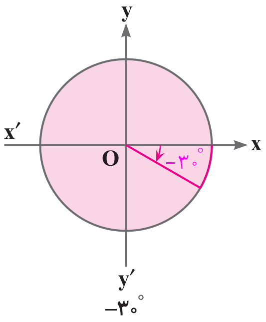
① **هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده‌شده، نشان دهید.**



−۲۷۰°

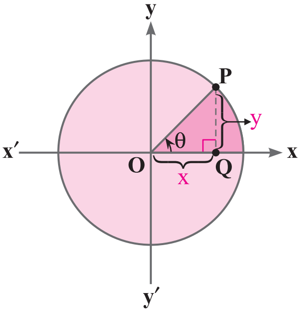


۱۳۵°



−۳۰°

② **فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.**



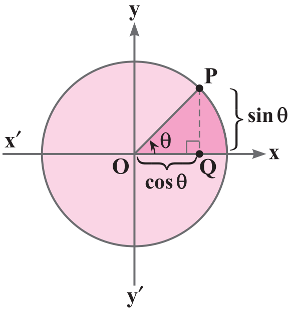
الف) در مثلث OPQ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

شعاع دایرهٔ مثلثاتی $= OP = ۱$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{۱} = x \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{۱} = y \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با $\cos\theta$ **برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با** $\sin\theta$ **برابر است.**

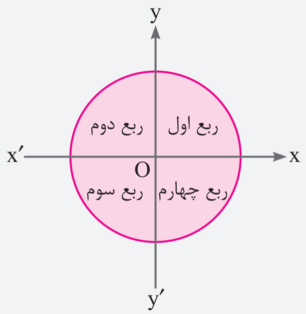
با توجه به قسمت (ب) محور $x'Ox$ یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور $y'Oy$ یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



نکته

۱- دو محور عمود برهم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هریک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xOy را ربع اول، ناحیهٔ $x'Oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ $x'Oy'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

۲-زاویه‌های °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.



کار در کلاس

صفحهٔ ۳۷ کتاب‌درسی

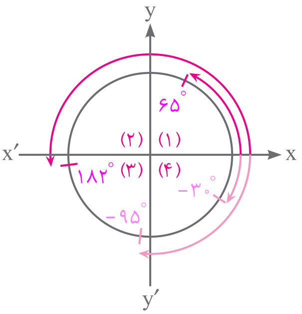
① **مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟**

الف) -۳۰° : ربع چهارم

ب) ۶۵° : ربع اول

پ) ۱۸۲° : ربع سوم

ت) -۹۵° : ربع سوم



② **با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟** در ربع اول، x و y هر دو مثبت هستند $(x>۰ , y>۰)$. بنابراین:

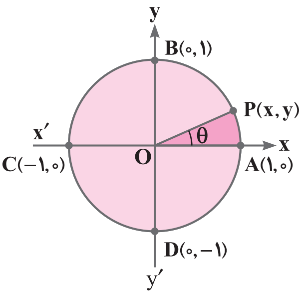
$$\sin\theta=y>۰\Rightarrow\sin\theta>۰ , \cos\theta=x>۰\Rightarrow\cos\theta>۰ , \tan\theta=\frac{y}{x}>۰\Rightarrow\tan\theta>۰ , \cot\theta=\frac{x}{y}>۰\Rightarrow\cot\theta>۰$$

مثال

صفحهٔ ۳۷ کتاب‌درسی

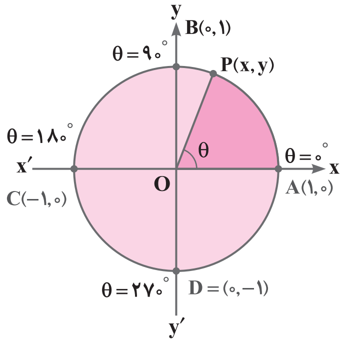
می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۰° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=۰^\circ$ ، آنگاه نقطهٔ P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin ۰^\circ=۰$ ، همچنین $\cos ۰^\circ=۱$ و $\tan ۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۰}{۱}=۰$ ، اما $\cot ۰^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

(صفر در مخرج کسر نمی‌تواند قرار بگیرد.) $\cot ۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۰}=$ تعریف‌نشده



فعالیت

صفحهٔ ۳۸ کتاب‌درسی



① در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=۹۰^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

اگر $\theta=۹۰^\circ$ ، آنگاه P روی نقطهٔ $B(۰,۱)$ قرار می‌گیرد. پس $\begin{cases}x=۰\\y=۱\end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin ۹۰^\circ=y=۱ \quad , \quad \cos ۹۰^\circ=x=۰$$

$$\tan ۹۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۱}{۰}=\text{تعریف‌نشده} \quad , \quad \cot ۹۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{۰}{۱}=۰$$

② اگر $\theta=۱۸۰^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

اگر $\theta=۱۸۰^\circ$ باشد، آنگاه P روی نقطهٔ $C(-۱,۰)$ قرار می‌گیرد. پس $\begin{cases}x=-۱\\y=۰\end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin ۱۸۰^\circ=y=۰ \quad , \quad \cos ۱۸۰^\circ=x=-۱ \quad , \quad \tan ۱۸۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۰}{-۱}=۰ \quad , \quad \cot ۱۸۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{-۱}{۰}=\text{تعریف‌نشده}$$

③ اگر $\theta=۲۷۰^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

اگر $\theta=۲۷۰^\circ$ باشد، آنگاه P روی نقطهٔ $D(۰,-۱)$ قرار می‌گیرد. پس $\begin{cases}x=۰\\y=-۱\end{cases}$ ، بنابراین:

$$\sin ۲۷۰^\circ=y=-۱ \quad , \quad \cos ۲۷۰^\circ=x=۰ \quad , \quad \tan ۲۷۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{-۱}{۰}=\text{تعریف‌نشده} \quad , \quad \cot ۲۷۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{۰}{-۱}=۰$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۳۸ کتاب‌درسی

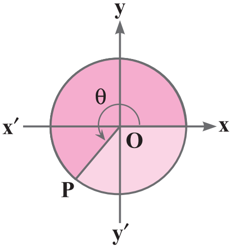
با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

۳۶۰°	۲۷۰°	۱۸۰°	۹۰°	۰°	مقدار
۰	−۱	۰	۱	۰	**sin θ**
۱	۰	−۱	۰	۱	**cos θ**
۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰	**tan θ**
تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	**cot θ**

فعالیت

صفحهٔ ۳۸ کتاب‌درسی

① فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ و در ربع سوم، $x, y<۰$ ، علامت هریک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

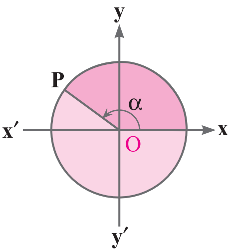


$$\sin\theta=y<۰ \Rightarrow \sin\theta<۰ \quad , \quad \cos\theta=x<۰ \Rightarrow \cos\theta<۰$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\begin{matrix}\to \text{منفی}\\ \to \text{منفی}\end{matrix}>۰ \Rightarrow \tan\theta>۰ \quad , \quad \cot\theta=\frac{x}{y}>۰ \Rightarrow \cot\theta>۰$$

پس در ربع سوم، سینوس و کسینوس منفی و تانژانت و کتانژانت مثبت هستند.

② **فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.**



در ربع دوم، $x<۰$ و $y>۰$ مثبت است. بنابراین:

$$\sin\alpha = y > ۰ \Rightarrow \sin\alpha > ۰ \quad , \quad \cot\alpha = \frac{x}{y} < ۰ \Rightarrow \cot\alpha < ۰$$

$$\tan\alpha = \frac{y \to \text{مثبت}}{x \to \text{منفی}} < ۰ \Rightarrow \tan\alpha < ۰ \quad , \quad \cos\alpha = x < ۰ \Rightarrow \cos\alpha < ۰$$

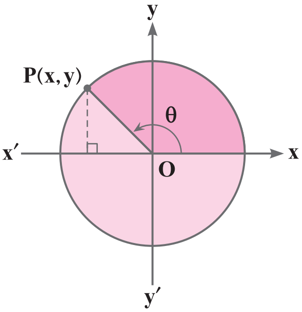
پس در ربع دوم، سینوس مثبت و کسینوس، تانژانت و کتانژانت منفی هستند.

③ **جدول زیر را کامل کنید:**

ربع چهارم $x>۰, y<۰$	ربع سوم $x, y<۰$	ربع دوم $x<۰, y>۰$	ربع اول $x,y>۰$	مقدار
−	−	+	+	$\sin\theta$
+	−	−	+	$\cos\theta$
−	+	−	+	$\tan\theta$
−	+	−	+	$\cot\theta$

مثال

صفحهٔ ۳۹ کتاب‌درسی



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید: اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۵}{۷}$، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{۵}{۷}$، بنابراین P نقطه‌ای به عرض $\frac{۵}{۷}$ **است.**

معلم: درست است و حالا طول نقطهٔ P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$. بنابراین $x^۲ + (\frac{۵}{۷})^۲ = ۱$ **و در نتیجه $x^۲ = \frac{۲۴}{۴۹}$ پس داریم:** $x = \pm\sqrt{\frac{۲۴}{۴۹}} = \pm\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ **.**

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

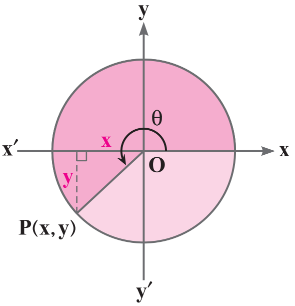
محمدمهدی: چون θ زاویه‌ای در ربع دوم **است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو** $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ **قابل قبول است.**

معلم: استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و P نقطه‌ای به مختصات $(-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ و $\frac{۵}{۷})$ **است. در نتیجه:**

$$\cos\theta = x = \frac{-۲\sqrt{۶}}{۷} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۵}{-۲\sqrt{۶}} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-۲\sqrt{۶}}{۵}$$

فعالیت

صفحهٔ ۳۹ کتاب‌درسی



① **فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری‌که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.**

می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید.

$$P(x,y) = (\cos\theta , \sin\theta) = (\frac{-\sqrt{۲}}{۲} , \frac{-\sqrt{۲}}{۲})$$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}=۱ \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}=۱$$

② اگر $\cos\alpha=\frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

با توجه به اینکه $\cos\alpha=x<۰$ و x در ربع‌های دوم و سوم منفی است، پس α در ربع دوم یا سوم قرار دارد.

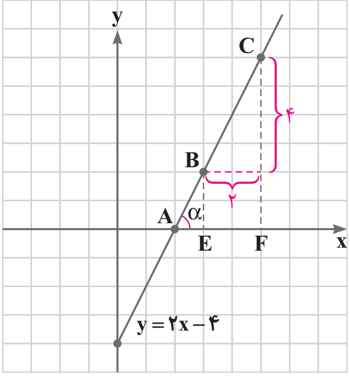
③ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

$\sin\theta<۰\Rightarrow y<۰\ ,\ \cos\theta>۰\Rightarrow x>۰\Rightarrow x>۰, y<۰\ \Rightarrow$ ربع چهارم

در نتیجه زاویهٔ موردنظر باید در ربع چهارم ($۲۷۰^\circ<\theta<۳۶۰^\circ$) قرار داشته باشد. مانند: $\theta=۳۰۰^\circ,۳۵۰^\circ,...$

فعالیت

صفحهٔ **۴۰** کتاب‌درسی



نمودار خط $y=۲x-۴$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به‌ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\tan\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{۲}{۱}=۲$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$B(۳,۲)\ ,\ C(۵,۶)$

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۶-۲}{۵-۳}=\frac{۴}{۲}=۲$$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

در واقع، اگر خطی با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد، شیب این خط با $\tan\alpha$ برابر خواهد بود.

نکته

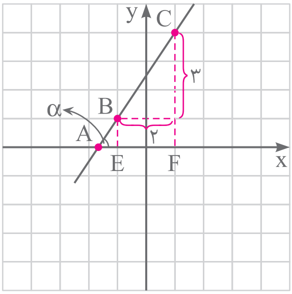
شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه: $\tan\alpha=$ شیب خط

کار در کلاس

صفحهٔ **۴۰** کتاب‌درسی

① مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر تکرار کنید.

الف) $۲y-۳x=۵$



x	−۱	۱
y	۱	۴

$\Rightarrow B(-۱,۱)$ و $C(۱,۴)$ دو نقطه روی خط

مختصات نقطهٔ A را محاسبه می‌کنیم.

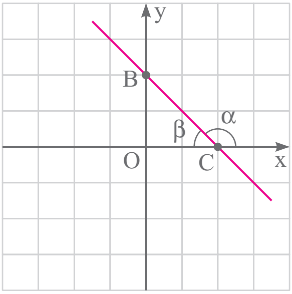
$$۲y-۳x=۵\xrightarrow{y=۰}-۳x=۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow A(-\frac{۵}{۳},۰)$$

$$\Rightarrow AE=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{شیب خط}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۴-۱}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

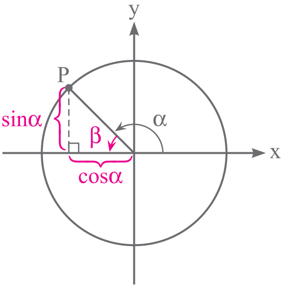
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، داریم: $\tan\alpha=$ شیب خط

ب) $x + y = ۲$



دو نقطه روی خط $\begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۰ \end{array} \Rightarrow B(۰ , ۲)$ و $C(۲ , ۰)$

توجه داشته باشید که $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ ، بنابراین α در ربع دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد و در نتیجه $\tan\alpha < ۰$ خواهد بود. همچنین با توجه به شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ برابر با تانژانت زاویهٔ مکمل آن $(\tan\beta)$ در مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \tan\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta$$

بنابراین مقدار عددی $\tan\alpha$ (بدون در نظر گرفتن علامت)، با مقدار عددی $\tan\beta$ برابر خواهد بود. یعنی:

$$\tan\beta = \frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۲} = ۱ \xrightarrow{\tan\alpha<۰} \tan\alpha = -۱$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۰-۲}{۲-۰} = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

همان‌طور که دیده می‌شود، داریم: $\text{شیب خط} = \tan\alpha$

② **معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۳۰° است و از نقطهٔ $(۱ , ۰)$ می‌گذرد.**

$$\text{شیب خط} = \tan\alpha \Rightarrow a = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{معادلهٔ خط} : y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \xrightarrow{\text{جایگذاری}(۱ , ۰)} ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۱ + b \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱)$$

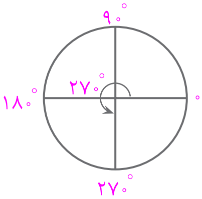
تمرین

صفحهٔ ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی

① **هریک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.**

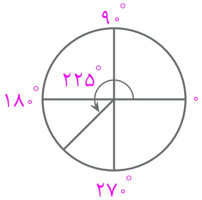
الف) $+۲۷۰^\circ$

مرز ربع‌های سوم و چهارم



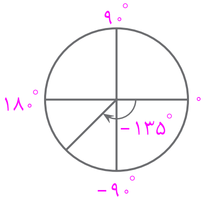
ب) ۲۲۵°

ربع سوم



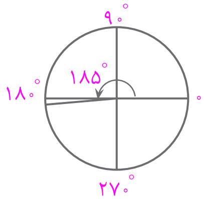
پ) -۱۳۵°

ربع سوم



ت) ۱۸۵°

ربع سوم



② در هریک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

$$x=\cos\alpha=\frac{۳}{۷}$$

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow\left(\frac{۳}{۷}\right)^۲+y^۲=۱\Rightarrow\frac{۹}{۴۹}+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۴۰}{۴۹}\xrightarrow[\text{y منفی است.}]{\text{در ربع چهارم}}y=-\sqrt{\frac{۴۰}{۴۹}}=\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}}{\frac{۳}{۷}}=\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۳}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{۳}{۷}}{\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}}=\frac{-۳}{۲\sqrt{۱۰}}\overset{\text{گویا کردن مخرج}}{=\!=\!=\!=}\frac{-۳}{۲\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{-۳\sqrt{۱۰}}{۲۰}$$

ب) $\sin\beta=\frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

$$y=\sin\beta=\frac{-۱}{۲}$$

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow x^۲+\left(\frac{-۱}{۲}\right)^۲=۱\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۳}{۴}\xrightarrow[\text{x منفی است.}]{\text{در ربع سوم}}x=-\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\beta=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\overset{\text{گویا کردن مخرج}}{=\!=\!=\!=}\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ ,\ \cot\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

③ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در ربع اول $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هر دو مثبت هستند.
در ربع چهارم $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هردو منفی هستند.
⇐ پس θ در ربع اول یا در ربع چهارم قرار دارد.

④ حدود زاویهٔ θ را در هریک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\cos\theta>۰$, $\sin\theta>۰$: در ربع اول، سینوس و کسینوس هر دو مثبت هستند، پس: $۰<\theta<۹۰^\circ$

ب) $\cos\theta>۰$, $\sin\theta<۰$: در ربع چهارم، سینوس منفی و کسینوس مثبت است، پس: $۲۷۰^\circ<\theta<۳۶۰^\circ$

⑤ اگر $\sin\alpha\times\cos\alpha<۰$ ، آنگاه α در کدام‌یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

با توجه به این شرط سینوس و کسینوس غیر هم‌علامت هستند. دو حالت وجود دارد:

حالت اول: سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد، یعنی: $\sin\alpha>۰$, $\cos\alpha<۰$ که در این حالت، α در ربع دوم قرار می‌گیرد.

حالت دوم: سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد، یعنی: $\sin\alpha<۰$, $\cos\alpha>۰$ که دراین حالت، α درربع چهارم قرارمی‌گیرد.

بنابراین α می‌تواند در ربع‌های دوم یا چهارم باشد.

⑥ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\alpha>\cot\alpha$.

$$\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}\\ \cot\alpha=\cot۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۳}>\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\tan\alpha>\cot\alpha$$

اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\cot\beta>\tan\beta$.

$$\beta=۳۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\tan\beta=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot\beta=\cot۳۰^\circ=\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۳}>\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\cot\beta>\tan\beta$$

از این تمرین، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توجه داشته باشید که $\tan۴۵^\circ=\cot۴۵^\circ=۱$.

اگر θ زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۴۵° (بین ۴۵° و ۹۰°) باشد، آنگاه $\tan\theta>\cot\theta$ خواهد بود. مانند: $\tan۶۰^\circ>\cot۶۰^\circ$

اگر θ زاویه‌ای کوچک‌تر از ۴۵° (بین صفر درجه و ۴۵°) باشد، آنگاه $\cot\theta>\tan\theta$ خواهد بود. مانند: $\cot۳۰^\circ>\tan۳۰^\circ$

⑦ در تمرین ۶ به‌جای تانژانت و کتانژانت به‌ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\sin\alpha > \cos\alpha$:

$$\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \sin ۶۰^\circ = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \cos\alpha = \cos ۶۰^\circ = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha$$

اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید به طوری که $\cos\beta > \sin\beta$:

$$\beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta = \sin ۳۰^\circ = \dfrac{۱}{۲} \\ \cos\beta = \cos ۳۰^\circ = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos\beta > \sin\beta$$

نتیجه: توجه داشته باشید که $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$.

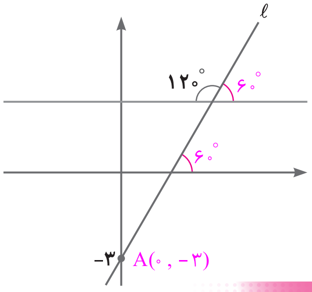
اگر θ زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۴۵° (بین ۴۵° و ۹۰°) باشد، آنگاه $\sin\theta > \cos\theta$ خواهد بود.

اگر θ زاویه‌ای کوچک‌تر از ۴۵° (بین صفر درجه و ۴۵°) باشد، آنگاه $\cos\theta > \sin\theta$ خواهد بود.

⑧ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° است و نقطهٔ $(۰ , ۲)$ روی آن قرار دارد.

$$\text{شیب خط}\,(a) = \tan ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow y = ax + b = ۱x + b \xrightarrow{\text{جایگذاری } (۰,۲)} ۲ = ۰ + b \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow y = x + ۲$$

⑨ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.



$$\text{شیب خط}\,(a) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad A = (۰ , -۳)$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + b \xrightarrow[A(۰ , -۳)]{\text{جایگذاری}} -۳ = \sqrt{۳} \times ۰ + b \Rightarrow -۳ = b$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$$

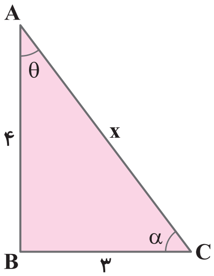
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

فعالیت .... صفحهٔ ۴۲ کتاب‌درسی

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید.

الف) اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$$x^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow x = ۵$$



$$\sin\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۵} \qquad \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵} \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳} \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۳}{۴}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۳}{۴} \qquad \cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف)، مقدار $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta$ و $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=(\frac{۳}{۵})^{۲}+(\frac{۴}{۵})^{۲}=\frac{۹}{۲۵}+\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۲۵}{۲۵}=۱$$

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=(\frac{۴}{۵})^{۲}+(\frac{۳}{۵})^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{۲۵}{۲۵}=۱$$

پ) درستی رابطهٔ $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^{۲}+(\cos\theta)^{۲}=\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=(\frac{BC}{AC})^{۲}+(\frac{AB}{AC})^{۲}=\frac{BC^{۲}+AB^{۲}}{AC^{۲}}=\frac{AC^{۲}}{AC^{۲}}=۱\Rightarrow\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$$

ت) مشابه قسمت (پ)، درستی رابطهٔ $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ را بررسی کنید.

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=(\frac{AB}{AC})^{۲}+(\frac{BC}{AC})^{۲}=\frac{AB^{۲}+BC^{۲}}{AC^{۲}}=\frac{AC^{۲}}{AC^{۲}}=۱\Rightarrow\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

نکته

برای هرزاویهٔ دلخواه α همواره داریم: $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

کار در کلاس — صفحهٔ ۴۳ کتاب‌درسی

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}$

ب) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}$

تذکر

در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α، با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

کار در کلاس — صفحهٔ ۴۳ و ۴۴ کتاب‌درسی

در این قسمت، رابطه‌ای برای تانژانت برحسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\boxed{\Rightarrow\tan^{۲}\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\quad(\cos\alpha\neq۰)}\quad ①$$

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\frac{\sin^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$\boxed{\Rightarrow۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\quad(\sin\alpha\neq۰)}\quad ②$$

③ اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = \tan^۲\alpha + ۱ = (\frac{-۳}{۴})^۲ + ۱ = \frac{۹}{۱۶} + ۱ = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow[\text{در این ربع، کسینوس منفی است.}]{\text{ربع دوم: } ۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} \xrightarrow[\text{سینوس مثبت است.}]{\text{در ربع دوم}} \sin\alpha = +\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} = \sqrt{۱-(\frac{-۴}{۵})^۲} = \sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{-\frac{۳}{۴}} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{۴}{۳}$$

کار در کلاس ---------- صفحهٔ ۴۴ و ۴۵ کتاب‌درسی

① با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times \underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱} = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta = \text{طرف راست}$$

ب) $\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\text{طرف راست} = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} + \cot\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \text{طرف چپ}$$

② کدام‌یک از تساوی‌های زیر، یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\text{می‌رسانیم.}]{\text{به توان ۲}} (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ = ۱^۲ \Rightarrow \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = ۱$$

$\Rightarrow \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha \Rightarrow$ تساوی (ب) یک اتحاد است.

دقت داشته باشید که اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد، تساوی (الف)، برقرار نیست:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^۴ ۳۰^\circ + \cos^۴ ۳۰^\circ = (\frac{۱}{۲})^۴ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴ = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸} \\ &۱ - ۲\sin ۳۰^\circ \times \cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۵}{۸} \neq ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

③ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

$$\cot\alpha(۱ + \tan^۲\alpha) = \cot\alpha(\frac{۱}{\cos^۲\alpha}) \Rightarrow \cot\alpha + \cot\alpha \cdot \tan^۲\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha + \underbrace{\cot\alpha \cdot \tan\alpha}_{۱} \cdot \tan\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \Rightarrow \cot\alpha + \tan\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \ \text{(اتحاد مورد نظر)}$$

درستی اتحاد به‌دست‌آمده را ثابت می‌کنیم:

$$\text{طرف چپ} = \cot\alpha + \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overbrace{\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha}^{۱}}{\sin\alpha \times \cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \text{طرف راست}$$

تمرین ---------- صفحهٔ ۴۵ و ۴۶ کتاب‌درسی

① فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}\xrightarrow[\text{سینوس مثبت است.}]{\text{در ناحیهٔ دوم}}\sin\alpha=\sqrt{۱-(\frac{-۳}{۵})^۲}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۴}{۳}\ ,\ \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

② اگر $\tan\alpha=\frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}=۱+\cot^۲\alpha=۱+(-\frac{۳}{۴})^۲=۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}\xrightarrow[\text{سینوس منفی است.}]{\text{در ناحیهٔ چهارم}}\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\xrightarrow[\text{کسینوس‌مثبت‌است.}]{\text{در ناحیهٔ‌چهارم}}\cos\alpha=+\sqrt{۱-(-\frac{۴}{۵})^۲}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

دقت کنید که می‌توانستیم برای محاسبهٔ کسینوس، از رابطهٔ $\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha$ نیز استفاده کنیم.

③ اگر $\sin۱۳۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ °۱۳۵ را به‌دست آورید. زاویهٔ °۱۳۵ در ربع دوم قرار دارد.

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\xrightarrow{\text{در ربع دوم کسینوس منفی است.}}\cos\theta=-\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}$$

$$=-\sqrt{۱-\frac{۲}{۴}}=-\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\overset{\text{گویاکردن مخرج}}{=\!=\!=\!=}\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos۱۳۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}=-۱\Rightarrow\tan۱۳۵^\circ=-۱\ ,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۱}{-۱}=-۱\Rightarrow\cot۱۳۵^\circ=-۱$$

④ اگر $\tan۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ °۲۴۰ را به‌دست آورید. زاویهٔ °۲۴۰ در ربع سوم قرار دارد.

$$\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\overset{\text{گویاکردن مخرج}}{=\!=\!=\!=}\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\cot۲۴۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

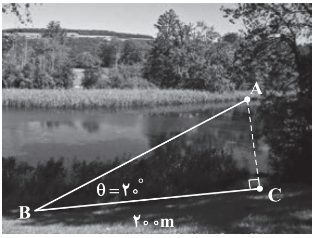
$$\frac{۱}{\sin^۲\theta}=۱+\cot^۲\theta=۱+(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲=۱+\frac{۳}{۹}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\sin^۲\theta=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{۳}{۴}}\xrightarrow[\text{منفی است.}]{\text{در ربع سوم سینوس}}\sin\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\sin۲۴۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta=۱+(\sqrt{۳})^۲=۱+۳=۴\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{۱}{۴}}$$

$$\xrightarrow[\text{کسینوس منفی است.}]{\text{در ربع سوم}}\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-۱}{۲}$$

دقت کنید که می‌توانستیم برای محاسبهٔ کسینوس، از رابطهٔ $\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}$ نیز استفاده کنیم.



⑤ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin ۲۰^\circ \simeq ۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)

ابتدا کتانژانت زاویهٔ ۲۰° را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}\Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{\sin^۲ ۲۰^\circ}\simeq\frac{۱}{(۰/۳۴)^۲}=\frac{۱}{۰/۱۱۵۶}\simeq ۸/۶۵$$

$$\Rightarrow \cot^۲ ۲۰^\circ=۸/۶۵-۱=۷/۶۵\Rightarrow \cot ۲۰^\circ\simeq ۲/۷۶$$

$$\cot ۲۰^\circ=\frac{BC}{AC}\Rightarrow ۲/۷۶=\frac{۲۰۰}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۲۰۰}{۲/۷۶}=۷۲/۴۶$$ متر

⑥ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

طرف چپ $=\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cancel{\sin\theta}}\times\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}=$ طرف راست

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

طرف چپ $=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{\underbrace{۱-\sin^۲\theta}_{\cos^۲\theta}}=\frac{\cancel{\cos\theta}(۱-\sin\theta)}{\cancel{\cos^۲\theta}\,{}_{\cos\theta}}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}=$ طرف راست

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

طرف چپ $=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\frac{\frac{۱}{۱}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{۱}{۱}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha(\cancel{\cos\alpha+\sin\alpha})}{\cos\alpha(\cancel{\sin\alpha+\cos\alpha})}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=$ طرف راست

ت) $۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=\sin x$

طرف چپ $=۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x-\cos^۲x}{۱+\sin x}\overset{\cos^۲x=۱-\sin^۲x}{=\!=\!=}\frac{۱+\sin x-(۱-\sin^۲x)}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x-۱+\sin^۲x}{۱+\sin x}$

$=\frac{\sin x+\sin^۲x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x(\cancel{۱+\sin x})}{(\cancel{۱+\sin x})}=\sin x=$ طرف راست

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

طرف چپ $=\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\frac{\overbrace{۱-\sin^۲x}^{\cos^۲x}}{\cos x(۱+\sin x)}$

$=\frac{\overset{\cos x}{\cancel{\cos^۲x}}}{\cancel{\cos x}(۱+\sin x)}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}=$ طرف راست

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

فعالیت

صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow ۹^۲ = ۸۱$ $\qquad$ $(-۳)^۳ = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

$\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow (۵\sqrt{۲})^۲ = ۵۰$ $\qquad$ $(-۵)^۳ = -۱۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$

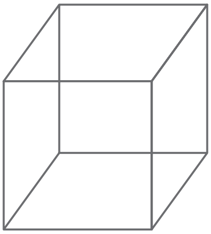
$\sqrt[۳]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow (-۲)^۳ = -۸$ $\qquad$ $(۰/۲۵)^۲ = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۰۶۲۵} = ۰/۲۵$

$\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۳\sqrt{۵})^۲ = ۴۵$ $\qquad$ $(۰/۵)^۲ = ۰/۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$

کاردرکلاس

صفحهٔ ۴۸ تا ۵۰ کتاب درسی

① **حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هر گاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر $a^۳$ متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.**



طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

با توجه به جدول، متوجه می‌شویم $۲۷ > ۲۵ > ۸$ و در نتیجه $۳ > \sqrt[۳]{۲۵} > ۲$. چون ۲۵ خیلی به ۲۷ نزدیک‌تر است، بنابراین حدس می‌زنیم $\sqrt[۳]{۲۵}$ خیلی به ۳ نزدیک باشد، مثلاً: $\sqrt[۳]{۲۵} \simeq ۲/۹$.

دو دانش آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به دست آورده‌اند:

احمد: چون $۲۷ = ۳^۳$ و $۸ < ۲۵ < ۲۷$، پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۳$، بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم. آیا $(۲/۸)^۳ \overset{?}{=} ۲۵$

$$(۲/۸)^۳ = (۲/۸)^۲ \times (۲/۸) = ۲۱/۹۵۲ \simeq ۲۲$$

محسن: ۲۵به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹را امتحان کنم.

$$(۲/۹)^۳ = (۲/۹)^۲ \times ۲/۹ = ۲۴/۳۸۹ \simeq ۲۴/۴$$

روش‌های این دو دانش آموز را توضیح دهید.

هر دو نفر از روش‌های حدس و آزمایش استفاده کرده‌اند. محسن با استدلال بهتر، عدد مناسب و نزدیک‌تری را برای حدس خود انتخاب کرده است، به همین دلیل پاسخ محسن به جواب اصلی نزدیک‌تر است.

② **مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:**

الف) چون $۳۶ > ۳۰ > ۲۵$ پس $۶ > \sqrt{۳۰} > ۵$. همچنین چون $۸ > ۵ > ۱$ پس $۲ > \sqrt[۳]{۵} > ۱$.

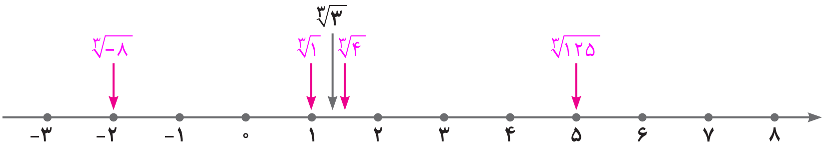
ب) $\boxed{۳} < \sqrt{۱۰} < \boxed{۴} : ۹ < ۱۰ < ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶} \Rightarrow ۳ < \sqrt{۱۰} < ۴$

پ) $\boxed{-۳} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \boxed{-۲} : -۲۷ < -۱۷ < -۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \sqrt[۳]{-۸} \Rightarrow -۳ < \sqrt[۳]{-۱۷} < -۲$

ت) $\boxed{۲} < \sqrt[۳]{۲۰} < \boxed{۳} : ۸ < ۲۰ < ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{۲۷} \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۲۰} < ۳$

③ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۴} \simeq ۱/۵$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۳} \simeq ۱/۴$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۱} = ۱$



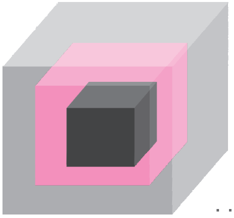
④ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \sqrt{\ \ } < ۵$: $۴ < \sqrt{x} < ۵ \Rightarrow ۱۶ < x < ۲۵ \Rightarrow x \in (۱۶, ۲۵) \xrightarrow{\text{مانند}} x = ۱۶/۱, ۱۸, ۲۴/۹, \ldots$

ب) $۹ < \sqrt[۳]{\ \ } < ۱۰$: $۹ < \sqrt[۳]{x} < ۱۰ \Rightarrow ۹^۳ < x < ۱۰^۳ \Rightarrow ۷۲۹ < x < ۱۰۰۰ \Rightarrow x \in (۷۲۹, ۱۰۰۰)$

$\xrightarrow{\text{مانند}} x = ۷۲۹/۵, ۹۰۰, ۹۹۹/۹, \ldots$

⑤ سه مکعب تودرتو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)



اگر x طول ضلع مکعب میانی باشد: $۲۷ < x^۳ < ۶۴ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} < \sqrt[۳]{x^۳} < \sqrt[۳]{۶۴} \Rightarrow ۳ < x < ۴$

بنابراین تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۴ می‌توانند به‌جای x قرار گیرند، مانند: ۳/۱ ، ۳/۲ ، ۳/۳ ، ... .

فعالیت
صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی

① آیا ۱۶− ریشهٔ چهارم دارد؟ خیر **آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶− شود؟**

خیر، زیرا توان چهارم هر عددی مانند x ، نامنفی است. $x^۴ = \underbrace{x^۲}_{\text{نامنفی}} \times \underbrace{x^۲}_{\text{نامنفی}} = \text{نامنفی}$

اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای دو **ریشهٔ چهارم است که** قرینهٔ **یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.**

کار در کلاس
صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی

① جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

۸۱		۳۱۲۵		۱۰,۰۰۰		۶۲۵		۱۶		عدد
-۳	۳	$-۵\sqrt[۴]{۵}$	$۵\sqrt[۴]{۵}$	-۱۰	۱۰	-۵	۵	-۲	۲	ریشه‌های چهارم

② جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

۱۰۲۴	-۱۰۰۰۰۰	-۱	-۲۴۳	۳۱۲۵	-۳۲	عدد
۴	-۱۰	-۱	-۳	۵	-۲	ریشهٔ پنجم

③ **ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟** ۰، ۱ و ۱- ، یعنی: $\sqrt[۵]{۰}=۰\,,\ \sqrt[۵]{۱}=۱\,,\ \sqrt[۵]{-۱}=-۱$

④ **محاسبه کنید.**

$\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$

$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۳۲}=-۰/۲$

$\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$

⑤ **عبارت را کامل کنید.**

هر عدد مثبت یا منفی، دارای یک **ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن** منفی **است.**

تمرین .... صفحهٔ ۵۱ تا ۵۳ کتاب درسی

① **برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.**

$\sqrt[۴]{۴۰۰}\Rightarrow ۴<\sqrt[۴]{۴۰۰}<۵$

$\sqrt{۲۰}\Rightarrow ۴<\sqrt{۲۰}<۵$

$\sqrt{۱۶}=۴$

$\sqrt[۵]{۴۰۰}\Rightarrow ۳<\sqrt[۵]{۴۰۰}<۴$

$\sqrt[۳]{-۸}=-۲$

$\sqrt{۷۵}\Rightarrow ۸<\sqrt{۷۵}<۹$

$\sqrt[۵]{۱}=۱$

$\sqrt[۳]{۲۵۰}\Rightarrow ۶<\sqrt[۳]{۲۵۰}<۷$

$\sqrt[۳]{-۹۰}\Rightarrow -۵<\sqrt[۳]{-۹۰}<-۴$

$-\sqrt[۴]{۲۰}\Rightarrow -۳<-\sqrt[۴]{۲۰}<-۲$

② **مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید** (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

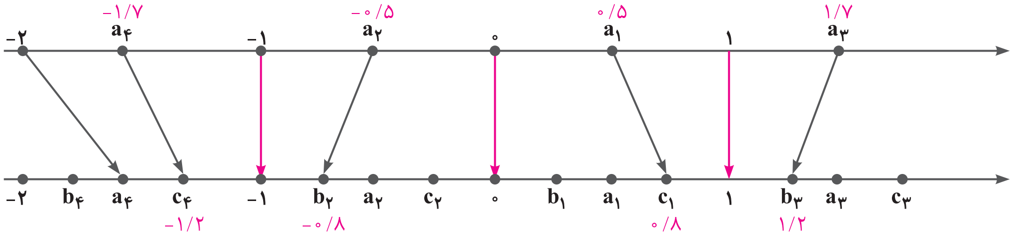
$\sqrt[۵]{۶۴}\simeq ۲/۳$

$\sqrt[۵]{۱۶}\simeq ۱/۷$

$\sqrt[۳]{۷/۲۵}\simeq ۱/۹$

$\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۲$

③ **مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص‌شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص‌شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید** (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



④ **با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.**

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[۳]{a}>a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟ هر عددی بین صفر و یک، مانند: ۰/۵، ۰/۶، ... .

ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[۳]{a}=a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ صفر، ۱ و ۱-

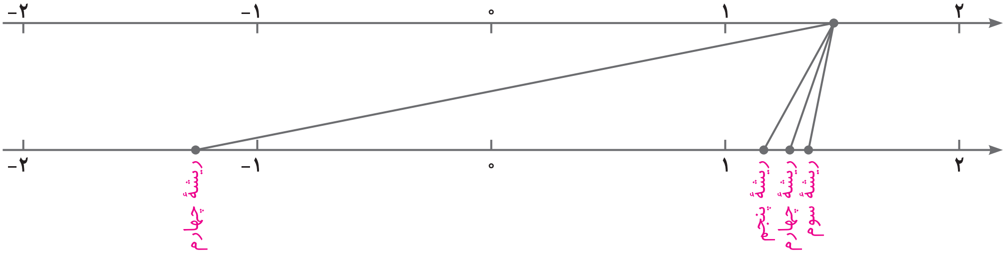
پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[۳]{a}<a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ هر عددی بزرگ‌تر از یک، مانند: ۲، ۳، ...

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

$$\begin{cases} a<۰\,,\ \sqrt[۳]{a}>a\Rightarrow a<-۱ \\ a<۰\,,\ \sqrt[۳]{a}<a\Rightarrow -۱<a<۰ \end{cases}$$

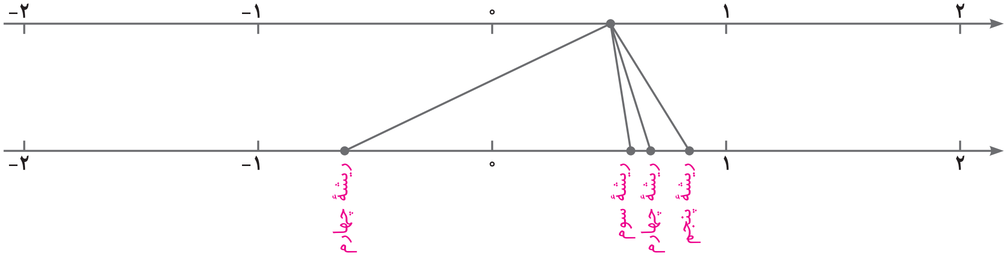
⑤ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

الف)



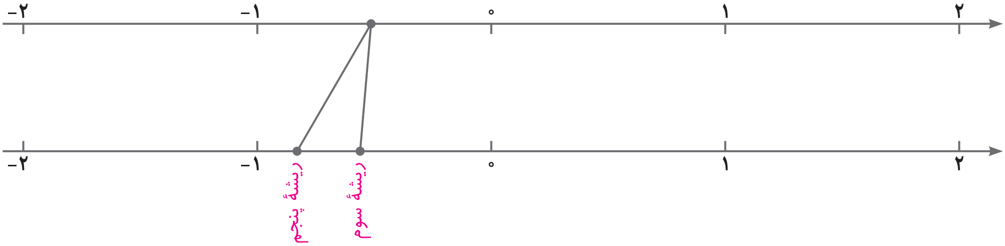
به‌عنوان مثال: $\sqrt[۳]{۱/۵}\simeq ۱/۱۴\,,\ \sqrt[۴]{۱/۵}\simeq \pm ۱/۱۰\ \ ,\ \ \sqrt[۵]{۱/۵}\simeq ۱/۰۸$

ب)



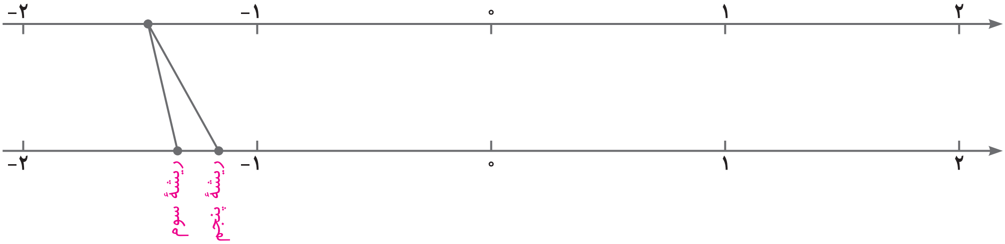
به‌عنوان مثال: $\sqrt[۳]{۰/۵}\simeq ۰/۷۹\ ,\ \sqrt[۴]{۰/۵}\simeq \pm ۰/۸۴\ ,\ \sqrt[۵]{۰/۵}\simeq ۰/۸۷$

پ)



به‌عنوان مثال: $\sqrt[۳]{-۰/۵}\simeq -۰/۷۹\,,\ \sqrt[۵]{-۰/۵}\simeq -۰/۸۷$

ت)



به‌عنوان مثال: $\sqrt[۳]{-۱/۵}\simeq -۱/۱۴\,,\ \sqrt[۵]{-۱/۵}\simeq -۱/۰۸$

⑥ **جاهای خالی را پر کنید.**

الف) اعداد ۳ و -۳ **ریشه‌های چهارم عدد** ۸۱ **می‌باشند.**

ب) اگر $a = \sqrt[۴]{۱۶}$ باشد، در این‌صورت حاصل عبارت $a^{۳} + ۵$ برابر است با ۱۳ **.**

$$a = \sqrt[۴]{۱۶} = \sqrt[۴]{۲^{۴}} = ۲ \Rightarrow a^{۳} + ۵ = ۲^{۳} + ۵ = ۸ + ۵ = ۱۳$$

⑦ **در جاهای خالی یکی از علامت‌های « < »، « > » یا « = » را قرار دهید.**

$(۰/۱)^{۵}$ < $(۰/۱)^{۳}$ (زیرا: $۰/۰۰۰۰۱ < ۰/۰۰۱$)

$(-۰/۱)^{۵}$ > $(-۰/۱)^{۳}$ (زیرا: $-۰/۰۰۰۰۱ > -۰/۰۰۱$)

$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}$ = $۰/۱$ (زیرا: $۰/۱ = ۰/۱$)

$(-۲)^{۵}$ < $(-۲)^{۴}$ (زیرا: $-۳۲ < +۱۶$)

درس دوم: ریشهٔ nام

فعالیت .... صفحهٔ ۵۴ و ۵۵ کتاب درسی

① **مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد.**

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشهٔ هفتم	ریشه‌های ششم	ریشهٔ پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشهٔ سوم	ریشه‌های دوم
$\sqrt[۸]{۶۴}$ و $-\sqrt[۸]{۶۴}$	$\sqrt[۷]{۶۴}$	$\sqrt[۶]{۶۴} = ۲$ و $-\sqrt[۶]{۶۴} = -۲$	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۴]{۶۴}$ و $-\sqrt[۴]{۶۴}$	$\sqrt[۳]{۶۴} = ۴$	$\sqrt{۶۴} = ۸$ و $-\sqrt{۶۴} = -۸$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[۶]{۶۴}$ و $-\sqrt[۶]{۶۴}$ یا همان ۲ **و** -۲ **هستند؛ زیرا $۶۴ = ۲^{۶}$ و $۶۴ = (-۲)^{۶}$**

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ ریشهٔ هفتم عدد ۶۴ برابر با $\sqrt[۷]{۶۴}$ است، زیرا $۶۴ = (\sqrt[۷]{۶۴})^{۷}$.

همچنین ریشه‌های هشتم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[۸]{۶۴}$ و $-\sqrt[۸]{۶۴}$ هستند، زیرا $۶۴ = (\sqrt[۸]{۶۴})^{۸}$ و $۶۴ = (-\sqrt[۸]{۶۴})^{۸}$.

به‌طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n عددی فرد باشد، آنگاه ریشهٔ nام عدد ۶۴ برابر با $\sqrt[n]{۶۴}$ است، زیرا $۶۴ = (\sqrt[n]{۶۴})^{n}$ و اگر n عددی زوج باشد، آنگاه ریشه‌های nام عدد ۶۴ با اعداد $\sqrt[n]{۶۴}$ و $-\sqrt[n]{۶۴}$ برابر هستند، زیرا $۶۴ = (\sqrt[n]{۶۴})^{n}$ و $۶۴ = (-\sqrt[n]{۶۴})^{n}$.

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، دربارهٔ تعداد ریشه‌های nام a چه می‌توان گفت؟

اگر n زوج باشد، آنگاه عدد مثبت a دارای دو ریشهٔ nام و اگر n فرد باشد، آنگاه عدد مثبت a دارای یک ریشهٔ nام خواهد بود. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$(\sqrt[n]{a})^{n} = a$$

② **جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.**

ریشهٔ هشتم	ریشهٔ هفتم	ریشهٔ ششم	ریشهٔ پنجم	ریشهٔ چهارم	ریشهٔ سوم	ریشهٔ دوم
وجود ندارد	$\sqrt[۷]{-۶۴}$	وجود ندارد	$\sqrt[۵]{-۶۴}$	وجود ندارد	$\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان زوج **برسد و مساوی ۶۴- شود.**

دربارهٔ ریشه‌های nام ۶۴- $(n \in \mathbb{N})$ بحث کنید. اگر n فرد باشد، عدد ۶۴- فقط یک ریشهٔ nام دارد ولی اگر n زوج باشد، عدد ۶۴- ریشهٔ nام ندارد.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشهٔ nام a چه می‌توان گفت؟ عدد منفی a زمانی ریشهٔ nام دارد که n فرد باشد و اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a}$ وجود ندارد.

③ **جدول زیر را کامل کنید.**

$a>۰$	**n زوج**	**a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.**	$a=۸۱$ $n=۴$	**۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم** **$۳=\sqrt[۴]{۸۱}$ و $-۳=-\sqrt[۴]{۸۱}$ است.**
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nام، $\sqrt[n]{a}$ است.	$a=۲۷$ $n=۳$	۲۷ دارای یک ریشهٔ سوم $۳=\sqrt[۳]{۲۷}$ است.
$a<۰$	**n زوج**	**ریشهٔ nام وجود ندارد.**	$a=-۹$ $n=۲$	۹- ریشهٔ دوم ندارد.
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nام، $\sqrt[n]{a}$ است.	$a=-۸$ $n=۳$	۸- دارای یک ریشهٔ سوم $-۲=\sqrt[۳]{-۸}$ است.

④ **در سال نهم دیدید که:**

برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{ab}$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[۴]{a}\times\sqrt[۴]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید. بله برای a و b نامنفی برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{۲۵۶}=۴\\ \sqrt[۴]{۸۱}=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۴]{۲۵۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۴\times۳=۱۲\ ,\ \sqrt[۴]{۲۵۶\times۸۱}=\sqrt[۴]{۲۰۷۳۶}=۱۲\Rightarrow\sqrt[۴]{۲۵۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۲۵۶\times۸۱}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b نامنفی **باشند.**

$$\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۲\times۳=۶$$

$$\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۱۶\times۸۱}=۶$$

دربارهٔ $\sqrt[۵]{a}\times\sqrt[۵]{b}=\sqrt[۵]{ab}$ چه می‌توان گفت؟ این تساوی، به‌ازای هر مقداری برای a و b ، همواره برقرار است.

آیا a و b حتماً باید نامنفی باشند؟ خیر **مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.**

$$\left.\begin{array}{l}a,b>۰:\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[۵]{۳۲}=۲\\ \sqrt[۵]{۲۴۳}=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}=\sqrt[۵]{۷۷۷۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=\sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}a,b<۰:\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲\\ \sqrt[۵]{-۲۴۳}=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۵]{-۳۲}\times\sqrt[۵]{-۲۴۳}=(-۲)\times(-۳)=۶\\ \sqrt[۵]{(-۳۲)\times(-۲۴۳)}=\sqrt[۵]{۷۷۷۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۵]{-۳۲}\times\sqrt[۵]{-۲۴۳}=\sqrt[۵]{(-۳۲)\times(-۲۴۳)}$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی

① **حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:**

$\sqrt[۹]{-۱}=-۱$

$\sqrt[۸]{۲۵۶}=\sqrt[۸]{۲^۸}=۲$

$\sqrt[۷]{۱۲۸}=\sqrt[۷]{۲^۷}=۲$

$\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}=\sqrt[۵]{(\frac{-۱}{۲})^۵}=-\frac{۱}{۲}$

$-\sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶}=-\sqrt[۴]{(۰/۲)^۴}=-۰/۲$

$\sqrt[۴]{۶۲۵}=\sqrt[۴]{۵^۴}=۵$

$\sqrt[۶]{۰}=۰$

$\sqrt[۷]{-۱۲۸}=\sqrt[۷]{(-۲)^۷}=-۲$

تمرین صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی

درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به k ، m و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$a = ۲, m = ۶, k = ۳ \rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{۲^۶} = ۴ \\ (\sqrt[۳]{۲})^۶ = ۴ \end{cases}$$

$$a = -۲, m = ۲, k = ۲ \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-۲)^۲} = |-۲| = ۲ \\ (\sqrt{-۲})^۲ \text{ وجود ندارد} \end{cases}$$

$$a = -۲, m = ۹, k = ۳ \rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{(-۲)^۹} = -۸ \\ (\sqrt[۳]{-۲})^۹ = -۸ \end{cases}$$

پس اگر k فرد باشد، رابطه همیشه برقرار است ولی اگر k زوج باشد، رابطه درصورتی برقرار است که a حتماً نامنفی باشد.

فعالیت صفحهٔ ۵۶ و ۵۷ کتاب درسی

① **جدول زیر را کامل کنید.**

$\sqrt[n]{a^n}$	$a \geq ۰$	**n زوج**	$n = ۴$ $a = ۲$	$\sqrt[۴]{۲^۴} = ۲$ $(۲ = \|۲\|)$
		n فرد	$n = ۳$ $a = ۲$	$\sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$
	$a < ۰$	**n زوج**	$n = ۴$ $a = -۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = ۲$ $(۲ = \|-۲\|)$
		n فرد	$n = ۳$ $a = -۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^۳} = -۲$

اگر $a \geq ۰$ از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt[n]{a^n} = a$

و اگر $a < ۰$ آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{n زوج} \\ a & \text{n فرد} \end{cases}$

② **جدول زیر را کامل کنید.**

$(\sqrt[n]{a})^n$	$a \geq ۰$	**n زوج**	$n = ۴$ $a = ۱۶$	$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$
		n فرد	$n = ۳$ $a = ۸$	$(\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۲^۳ = ۸$
	$a < ۰$	**n زوج**	$n = ۴$ $a = -۱۶$	$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \rightarrow$ **تعریف‌نشده**
		n فرد	$n = ۳$ $a = -۸$	$(\sqrt[۳]{-۸})^۳ = (-۲)^۳ = -۸$

اگر $a \geq ۰$ آنگاه از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt[n]{a^n} = a$

و اگر $a < ۰$ آنگاه $(\sqrt[n]{a^n})^n = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & \text{n زوج} \\ a & \text{n فرد} \end{cases}$

کار در کلاس

صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی

تساوی زیر به‌ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟ $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$

به‌ازای $a<۰$ و n زوج رابطه برقرار نیست، زیرا به‌ازای این مقادیر $\sqrt[n]{a}$ تعریف نشده است.

تمرین

صفحهٔ ۵۷ و ۵۸ کتاب درسی

① **الف) یکی از علامت‌های > یا < یا = را در ☐ قرار دهید.**

$۰/۷۰\simeq \sqrt{۰/۵}\ \boxed{<}\ \sqrt[۳]{۰/۵}\simeq ۰/۷۹$ $\qquad$ $۰/۲۵=(۰/۵)^۲\ \boxed{>}\ (۰/۵)^۳=۰/۱۲۵$

$۲=\sqrt{۴}\ \boxed{>}\ \sqrt[۳]{۴}\simeq ۱/۵۸$ $\qquad$ $۴^۲\ \boxed{<}\ ۴^۳$

ب) وقتی $۰<a<۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در ☐ قرار دهید.

$\sqrt{a}\ \boxed{<}\ \sqrt[۳]{a}$ $\qquad$ $a^۲\ \boxed{>}\ a^۳$

پ) وقتی $a>۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در ☐ قرار دهید.

$\sqrt{a}\ \boxed{>}\ \sqrt[۳]{a}$ $\qquad$ $a^۲\ \boxed{<}\ a^۳$

② **الف) یکی از علامت‌های > = < را در مربع قرار دهید.**

$۴=(-۲)^۲\ \boxed{>}\ (-۲)^۳=-۸$ $\qquad$ $۰/۲۵=(-۰/۵)^۲\ \boxed{>}\ (-۰/۵)^۳=-۰/۱۲۵$

$-۸=(-۲)^۳\ \boxed{>}\ (-۲)^۵=-۳۲$ $\qquad$ $-۰/۱۲۵=(-۰/۵)^۳\ \boxed{<}\ (-۰/۵)^۵=-۰/۰۳۱۲۵$

$۱۶=(-۲)^۴\ \boxed{>}\ (-۲)^۲=۴$ $\qquad$ $۰/۰۶۲۵=(۰/۵)^۴\ \boxed{<}\ (-۰/۵)^۲=۰/۲۵$

③ **با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a}=b$ آنگاه $b^n=a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط بامعنا بودن رادیکال) رابطهٔ زیر برقرار است:**

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{\text{n تا}}=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{\text{n تا}}}=\sqrt[n]{a^n}=a$$

④ **آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است؟** این رابطه در حالت کلی برقرار نیست.

n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

اگر $n=۳$، $a=۱$ و $b=۸$:

$$\begin{cases}\sqrt[۳]{۱+۸}=\sqrt[۳]{۹}\\ \sqrt[۳]{۱}+\sqrt[۳]{۸}=۱+۲=۳\end{cases}\Rightarrow \sqrt[۳]{۹}\neq ۳\Rightarrow \sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

اگر $n=۴$، $a=۱$ و $b=۱۶$:

$$\begin{cases}\sqrt[۴]{۱+۱۶}=\sqrt[۴]{۱۷}\\ \sqrt[۴]{۱}+\sqrt[۴]{۱۶}=۱+۲=۳\end{cases}\Rightarrow \sqrt[۴]{۱۷}\neq ۳\Rightarrow \sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

اگر $n=۵$، $a=۱$ و $b=۳۲$:

$$\begin{cases}\sqrt[۵]{۱+۳۲}=\sqrt[۵]{۳۳}\\ \sqrt[۵]{۱}+\sqrt[۵]{۳۲}=۱+۲=۳\end{cases}\Rightarrow \sqrt[۵]{۳۳}\neq ۳\Rightarrow \sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

⑤ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$۵^{-۳}=\frac{۱}{۵^۳}=(\frac{۱}{۵})^۳\rightarrow\sqrt[۳]{۵^{-۳}}=\frac{۱}{۵}$$

$\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}$: $\frac{۱}{۱۲۸}=\frac{۱}{۲^۷}=(\frac{۱}{۲})^۷\Rightarrow\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}=\frac{۱}{۲}$

$\sqrt[۵]{۲^{-۵}}$: $۲^{-۵}=\frac{۱}{۲^۵}=(\frac{۱}{۲})^۵\Rightarrow\sqrt[۵]{۲^{-۵}}=\frac{۱}{۲}$

$\sqrt[۴]{۳^{-۴}}$: $۳^{-۴}=\frac{۱}{۳^۴}=(\frac{۱}{۳})^۴\Rightarrow\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=\frac{۱}{۳}$

⑥ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری‌که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد. اگر $a=۴$ ، $b=۱$ و $n=۲$ باشد، رابطه برقرار است.

$$\sqrt{\frac{۴}{۱}}=\frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۱}}\Rightarrow۲=\frac{۲}{۱}$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

اگر $a=-۸$ ، $b=-۲$ و $n=۲$ باشد، رابطه برقرار نیست.

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{-۸}{-۲}}=\sqrt{۴}=۲\\ \frac{\sqrt{-۸}}{\sqrt{-۲}}\ \text{تعریف نشده}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\frac{-۸}{-۲}}\neq\frac{\sqrt{-۸}}{\sqrt{-۲}}$$

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت
صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی

هر یک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$۴^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt{۲}$

$۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{۳}$

$۲^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲}$

$۸۱^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳$

$۶^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۶}$

$۵^{\frac{۱}{۷}}=\sqrt[۷]{۵}$

فعالیت
صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی

اکنون شما اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

ب) $۳^{\frac{۲}{۷}}=\sqrt[۷]{۳^۲}$

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۵^۲}$

ت) $۱۶^{-\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۱۶^{-۱}}=\sqrt[۴]{(۲^۴)^{-۱}}=\sqrt[۴]{۲^{-۴}}=\frac{۱}{۲}$

پ) $۸۱^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{۸۱^۳}=\sqrt[۴]{(۳^۴)^۳}=\sqrt[۴]{(۳^۳)^۴}=۳^۳=۲۷$

کار در کلاس
صفحهٔ ۶۱ کتاب درسی

① تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$$۳^{\frac{۵}{۴}}=\sqrt[۴]{۳^۵}=\sqrt[۴]{۳^۴\times۳}=\sqrt[۴]{۳^۴}\times\sqrt[۴]{۳}=۳\sqrt[۴]{۳}$$

$۳^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۳^۲}$

$۲^{\frac{۲}{۳}}\times۲^{\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}=\sqrt[۶]{۲^{۱۳}}=\sqrt[۶]{۲^{۱۲}}\times\sqrt[۶]{۲^۱}=۲^۲\times\sqrt[۶]{۲}=۴\sqrt[۶]{۲}$

$۴^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۴}$

$۵^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۳]{۵^{-۴}}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{۵})^۴}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{۵})^۳}\times\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}=\frac{۱}{۵}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}$

$(۴\times۲)^{\frac{۱}{۳}}=۸^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^۳}=۲$

$۶^{\frac{۳}{۸}}=\sqrt[۸]{۶^۳}$

$(۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}}=۱۶^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۱۶}=\sqrt[۴]{۲^۴}=۲$

② **رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.**

$\sqrt[۳]{۷^۲}=۷^{\frac{۲}{۳}}$ $\qquad$ $\sqrt{۲^۵}=۲^{\frac{۵}{۲}}$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{۳^۲}=۳^{\frac{۲}{۷}}$

$\sqrt[۵]{۲^۵}=۲^۱$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۶۴}=۶۴^{\frac{۱}{۵}}=(۲^۶)^{\frac{۱}{۵}}=۲^{\frac{۶}{۵}}$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۱۹}=۱۹^{\frac{۱}{۵}}$

③ **با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ است. تساوی را کامل کنید $(a>۰)$.**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{۱}{n}}}=(a^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}}=a^{\frac{۱}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

تمرین

صفحهٔ ۶۱ کتاب درسی

① **هریک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.**

$۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{۵}=\sqrt{۵}$ $\qquad$ $۱۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{۱۶}=\sqrt[۲]{۴^۲}=۴$

$۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۳^۲}=\sqrt[۳]{۳^۳}=۳$ $\qquad$ $۴^{\frac{۳}{۷}}=\sqrt[۷]{۴^۳}$

$۴^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴^۲}=\sqrt[۳]{۲^۴}=\sqrt[۳]{۲^۳}\times\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۳}$ $\qquad$ $(۴^۲)^{\frac{۱}{۳}}=۴^{\frac{۲}{۶}}=۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}$

$۳۲^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۳۲^۲}=\sqrt[۵]{(۲^۵)^۲}=\sqrt[۵]{(۲^۲)^۵}=\sqrt[۵]{۴^۵}=۴$ $\qquad$ $۳۲^{\frac{-۱}{۵}}=(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\sqrt[۵]{(\frac{۱}{۲})^۵}=\frac{۱}{۲}$

$$۱۲۵^{-\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۱۲۵^{-۲}}=\sqrt[۳]{(۵^۳)^{-۲}}=\sqrt[۳]{(۵^{-۲})^۳}=۵^{-۲}=\frac{۱}{۲۵}$$

② **می‌دانیم**

$\sqrt[۱۲]{a^۴}=(a^۴)^{\frac{۱}{۱۲}}=a^{\frac{۴}{۱۲}}=a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[۶]{a^۲}=a^{\frac{۲}{۶}}=a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$ همواره برقرار است $(a>۰)$ ؟ m ، n و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هرسه عدد $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۴]{۲^۲}$ و $\sqrt[۶]{۲^۳}$ برابرند.

بله، وقتی $a>۰$ و m ، n و k اعدادی طبیعی هستند، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۲}=۲^{\frac{۱}{۲}}\\ \sqrt[۴]{۲^۲}=۲^{\frac{۲}{۴}}=۲^{\frac{۱}{۲}}\\ \sqrt[۶]{۲^۳}=۲^{\frac{۳}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۲}}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt{۲}$$

③ **فرض کنیم $a=۶۴$ ، $r=\frac{۱}{۲}$ و $s=\frac{۱}{۳}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^r}{a^s}=\dfrac{۶۴^{\frac{۱}{۲}}}{۶۴^{\frac{۱}{۳}}}=\dfrac{\sqrt[۲]{۶۴}}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\dfrac{\sqrt{۸^۲}}{\sqrt[۳]{۴^۳}}=\dfrac{۸}{۴}=۲\\ a^{r-s}=۶۴^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=۶۴^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۶۴}=\sqrt[۶]{۲^۶}=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین‌حساب کمک بگیرید.

$$a=۱۶\ ,\ r=\frac{۱}{۲},s=\frac{۱}{۴}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^r}{a^s}=\frac{۱۶^{\frac{۱}{۲}}}{۱۶^{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\sqrt{۱۶}}{\sqrt[۴]{۱۶}}=\frac{\sqrt{۴^۲}}{\sqrt[۴]{۲^۴}}=\frac{۴}{۲}=۲\\ a^{r-s}=۱۶^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}}=۱۶^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۱۶}=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ در تقسیم اعداد توان‌دار (با پایهٔ مثبت) با توان‌های گویا، اگر پایه‌ها با هم برابر باشند، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و سپس توان‌ها را از هم کم می‌کنیم، یعنی توان صورت را منهای توان مخرج می‌کنیم.

۴ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{\mathbf{۸۱}}}=\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۳^۴}=۳$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt[۳]{\mathbf{۶۴}}}=\sqrt[۶]{۶۴}=\sqrt[۶]{۲^۶}=۲$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{\sqrt{\mathbf{۵}}}=\sqrt[۳\times۲]{۵}=\sqrt[۶]{۵}$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

فعالیت

صفحهٔ ۶۲ و ۶۳ کتاب درسی

۱ با محاسبهٔ $(a+b)^۳$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^۳=(a+b)^۲(a+b)=(a^۲+۲ab+b^۲)(a+b)$$

$$=a^۳+\underline{a^۲b}+\underline{۲a^۲b}+\underline{\underline{۲ab^۲}}+\underline{\underline{ab^۲}}+b^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\boxed{(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳}$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم:

$$(a-b)^۳=a^۳+۳a^۲(-b)+۳a(-b)^۲+(-b)^۳$$

$$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^۳$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^۳=(a-b)^۲(a-b)$$

$$=(a^۲-۲ab+b^۲)(a-b)=a^۳-\underline{a^۲b}-\underline{۲a^۲b}+\underline{\underline{۲ab^۲}}+\underline{\underline{ab^۲}}-b^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$$

کاردرکلاس

صفحهٔ ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳-a^۲b+ab^۲+a^۲b-ab^۲+b^۳=a^۳+b^۳$$

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳+a^۲b+ab^۲-a^۲b-ab^۲-b^۳=a^۳-b^۳$$

② با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^{۳}+b^{۳}$ و $a^{۳}-b^{۳}$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$

$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$

③ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$\mathbf{۸x^{۳}-۲۷=(۲x)^{۳}-۳^{۳}=(۲x-۳)[(۲x)^{۲}+۲x\times ۳+۳^{۲}]=(۲x-۳)(۴x^{۲}+۶x+۹)}$

$\mathbf{x^{۳}+۱=}\ x^{۳}+۱^{۳}=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)$

$\mathbf{x^{۳}-۸=}\ x^{۳}-۲^{۳}=(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)$

$\mathbf{x^{۳}-۱۲۵=}\ x^{۳}-۵^{۳}=(x-۵)(x^{۲}+۵x+۲۵)$

$\mathbf{x^{۶}-۱=}\ (x^{۲})^{۳}-(۱)^{۳}=(x^{۲}-۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)=(x-۱)(x+۱)(x^{۴}+x^{۲}+۱)$

فعالیت

صفحهٔ ۶۴ و ۶۵ کتاب درسی

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟ بله، بی‌شمار مضرب دارد. مانند: $a^{۴}-b^{۴}$ ، $a^{۸}-b^{۸}$ ، ...

① مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آیند:

بعضی از مضرب‌های $a+b$: $a+b$ و $۲(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^{۲}$ و $-۴(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و ...

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید. $(a+b)^{۲}(a-b)\,,\ -۳(a-b)\,,\ldots$

② دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارندهٔ هر یک از آنها باشد. $(a+b)(a-b)$ و $a^{۳}-b^{۳}$

③ عبارت $۲۷a^{۳}-۱$ مضرب کدام‌یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-۱$ ب) $۳a-۱$ پ) $۹a^{۲}+۳a+۱$ ت) $۳a+۱$

$۲۷a^{۳}-۱=(۳a)^{۳}-(۱)^{۳}=(۳a-۱)((۳a)^{۲}+۳a(۱)+۱)=(۳a-۱)(۹a^{۲}+۳a+۱)$

پس $۲۷a^{۳}-۱$ مضرب عبارت‌های (ب) و (پ) است.

نکته

عبارت $\sqrt{۳}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی، فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

④ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف) $\dfrac{۳x-\sqrt{۷}}{x^{۲}}$: گویا هست.

ب) $\dfrac{x^{۳}-۱}{x^{۳}+۱}$: گویا هست.

پ) $\sqrt[۳]{x}-۱$: گویا نیست (به علت وجود x زیر رادیکال)

ت) $\sqrt[۳]{x^{۲}}+x-۱$: گویا نیست (به علت وجود x زیر رادیکال)

نکته

یک عبارت گویا، به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌شود (مقدار ندارد).

⑤ عبارت گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$\mathbf{\dfrac{۱}{x-۱}+\dfrac{۱}{x+۱}-\dfrac{۱}{x^{۲}+۴}}$: $x-۱=۰\Rightarrow x=۱$ و $x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$ و $x^{۲}+۴=۰\Rightarrow \underbrace{x^{۲}}_{\text{نامنفی}}=\underbrace{-۴}_{\text{منفی}}$ (جواب ندارد.)

بنابراین عبارت گویای داده‌شده، به‌ازای $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف نمی‌شود.

⑥ **حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.**

الف) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۳}{x-۱}$

با توجه به اینکه $x-۱=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)$، پس مخرج‌مشترک کسرها برابر است با: $x-۱$

عبارت $=\frac{۱(\sqrt{x}+۱)+۲(\sqrt{x}-۱)+۳}{x-۱}=\frac{\sqrt{x}+۱+۲\sqrt{x}-۲+۳}{x-۱}=\frac{۳\sqrt{x}+۲}{x-۱}$

ب) $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^۲-۱}$

باتوجه به اینکه $x^۲-۱=(x+۱)(x-۱)$، پس مخرج‌مشترک کسرها برابر است با: $x^۲-۱$

عبارت $=\frac{x+۱+x-۱-۱}{x^۲-۱}=\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}$

کار در کلاس

صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی

① **صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید (جاهای خالی را پر کنید).**

الف) $\frac{x^۶+۱}{x^۴+۲x^۲+۱}=\frac{(x^۲)^۳+(۱)^۳}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{\cancel{(x^۲+۱)}(x^۴-x^۲+۱)}{\cancel{(x^۲+۱)}(x^۲+۱)}=\frac{x^۴-x^۲+۱}{x^۲+۱}$

ب) $\frac{x^۳-۱}{(x-۱)^۳}=\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x-۱)^۲}=\frac{x^۲+x+۱}{(x-۱)^۲}$

پ) $\frac{x^۲+۱}{x^۴-۱}=\frac{\cancel{(x^۲+۱)}}{(x^۲-۱)\cancel{(x^۲+۱)}}=\frac{۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}$

ت) $\frac{y^۵-y^۳-۱۲y}{۸y^۲+۱۶y}=\frac{y(y^۴-y^۲-۱۲)}{۸y(y+۲)}=\frac{y(y^۲-۴)(y^۲+۳)}{۸y(y+۲)}=\frac{\cancel{y}(y-۲)\cancel{(y+۲)}(y^۲+۳)}{۸\cancel{y}\cancel{(y+۲)}}=\frac{(y-۲)(y^۲+۳)}{۸}$

② **در اتحاد**

$$a^۳+۱=(a+۱)(a^۲-a+۱)$$

قرار دهید $a=\sqrt[۳]{x^۲}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[۳]{x^۲})^۳+۱=(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)\left((\sqrt[۳]{x^۲})^۲-\sqrt[۳]{x^۲}+۱\right)=(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)(x\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x^۲}+۱)$$

فعالیت

صفحهٔ ۶۵ تا ۶۷ کتاب درسی

① **از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب، ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسرهای $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$ و $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}$ گویا شده‌اند. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.**

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲\times۳}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴^۲}}{\sqrt[۳]{۴^۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۴^۲}}{\sqrt[۳]{۴^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲^۳\times۲^۴}}{۴}=\frac{\sqrt[۳]{۲^۶\times۲}}{۴}=\frac{۴\sqrt[۳]{۲}}{۴}=\sqrt[۳]{۲}$$

② **مانند نمونه بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.**

الف) $\frac{\mathbf{۱}}{\sqrt{\mathbf{۵}}-\sqrt{\mathbf{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{(\sqrt{۵})^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۵-۳}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\frac{\mathbf{۸}}{\mathbf{۳}\sqrt{\mathbf{۲}}+\mathbf{۴}}=\frac{۸}{۳\sqrt{۲}+۴}\times\frac{۳\sqrt{۲}-۴}{۳\sqrt{۲}-۴}=\frac{۸(۳\sqrt{۲}-۴)}{(۳\sqrt{۲})^{۲}-۴^{۲}}=\frac{۸(۳\sqrt{۲}-۴)}{۱۸-۱۶}=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}(۳\sqrt{۲}-۴)}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۲\sqrt{۲}-۱۶$

پ) $\frac{\mathbf{x-y}}{\sqrt{\mathbf{x}}-\sqrt{\mathbf{y}}}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^{۲}-(\sqrt{y})^{۲}}=\frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ت) $\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathbf{x+h}}-\sqrt{\mathbf{x}}}=\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^{۲}-(\sqrt{x})^{۲}}=\frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{x+h-x}=\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$

③ **از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}$ استفاده می‌کنیم. در هر کدام از اتحادهای زیر، قرار دهید $x=\sqrt[۳]{a}$ ، $y=\sqrt[۳]{b}$ و آنها را بازنویسی کنید.**

$$\begin{cases}(x-y)(x^{۲}+xy+y^{۲})=x^{۳}-y^{۳}\\(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}})=a-b\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲})=x^{۳}+y^{۳}\\(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}})=a+b\end{cases}$$

آیا سمت راست تساوی‌های بالا، شامل یک عبارت رادیکالی است؟ خیر

مانند نمونهٔ بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{\mathbf{۲}}{\sqrt[۳]{\mathbf{۵}}+\mathbf{۱}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^{۲}}-\sqrt[۳]{۵}+۱}{\sqrt[۳]{۵^{۲}}-\sqrt[۳]{۵}+۱}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱)}{۵+۱}=\frac{(\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱)}{۳}$

ب) $\frac{\mathbf{۱}}{\sqrt[۳]{\mathbf{۷}}-\sqrt[۳]{\mathbf{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۷^{۲}}+\sqrt[۳]{۷\times۳}+\sqrt[۳]{۳^{۲}}}{\sqrt[۳]{۷^{۲}}+\sqrt[۳]{۷\times۳}+\sqrt[۳]{۳^{۲}}}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۲۱}+\sqrt[۳]{۹}}{۷-۳}=\frac{(\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۲۱}+\sqrt[۳]{۹})}{۴}$

پ) $\frac{\mathbf{x+۸}}{\sqrt[۳]{\mathbf{x}}+\mathbf{۲}}=\frac{x+۸}{\sqrt[۳]{x}+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۲^{۲}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۲^{۲}}=\frac{\cancel{(x+۸)}(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{\cancel{(x+۸)}}=\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۴$

ت) $\frac{\mathbf{۱}}{\sqrt[۳]{\mathbf{x}^{۲}}+\mathbf{۱}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۴}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}{\sqrt[۳]{x^{۴}}-\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}=\frac{x\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}{x^{۲}+۱}$

تمرین

صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی

① **هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.**

الف) $\mathbf{x^{۴}-y^{۴}}=(x^{۲}-y^{۲})(x^{۲}+y^{۲})=(x-y)(x+y)(x^{۲}+y^{۲})$

ب) $\mathbf{x^{۶}-y^{۶}}=(x^{۳})^{۲}-(y^{۳})^{۲}=(x^{۳}-y^{۳})(x^{۳}+y^{۳})=(x-y)(x^{۲}+xy+y^{۲})(x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲})$

پ) $\mathbf{۸a^{۳}+۲۷}=(۲a)^{۳}+۳^{۳}=(۲a+۳)(۴a^{۲}-۶a+۹)$

ت) $\mathbf{a^{۳}b^{۶}-۸}=(ab^{۲})^{۳}-۲^{۳}=(ab^{۲}-۲)(a^{۲}b^{۴}+۲ab^{۲}+۴)$

② **مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.**

الف) $$\frac{۳}{۳+\sqrt{۷}}=\frac{۳}{۳+\sqrt{۷}}\times\frac{۳-\sqrt{۷}}{۳-\sqrt{۷}}=\frac{۳(۳-\sqrt{۷})}{۳^{۲}-(\sqrt{۷})^{۲}}=\frac{۳(۳-\sqrt{۷})}{۹-۷}=\frac{۳(۳-\sqrt{۷})}{۲}$$

ب) $$\frac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=\frac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=\frac{۸(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{(\sqrt{۵})^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۸(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{۵-۳}=۴(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})$$

پ) $$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۲^{۲}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۲^{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{x-۸}$$

ت) $$\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۲}-۱}\times\frac{۴\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}+۱}{۴\sqrt[۳]{۲^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۶(۴\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۱۶-۱}=\frac{۲(۴\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۵}$$

③ **با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.**

الف) $۱۶\times۱۴=(۱۵+۱)(۱۵-۱)=۱۵^{۲}-۱=۲۲۴$

ب) $۱۰۵^{۲}=(۱۰۰+۵)^{۲}=۱۰۰^{۲}+۲(۱۰۰)(۵)+۵^{۲}=۱۰۰۰۰+۱۰۰۰+۲۵=۱۱۰۲۵$

پ) $۹۹۹۹^{۲}=(۱۰^{۴}-۱)^{۲}=۱۰^{۸}-۲\times۱۰^{۴}\times۱+۱=۱۰^{۸}-۲۰۰۰۰+۱=۹۹۹۸۰۰۰۱$

ت) $۱۰۵^{۳}=(۱۰۰+۵)^{۳}=۱۰۰^{۳}+۳\times(۱۰۰)^{۲}\times۵+۳\times۱۰۰\times۵^{۲}+۵^{۳}=۱۱۵۷۶۲۵$

④ **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}-\frac{۵x}{x-۱}\ :\ \frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=\frac{\sqrt{x}+۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}\ \text{و}\ \frac{۲}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۲(\sqrt{x}-۱)}{(\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}-۱)}=\frac{۲\sqrt{x}-۲}{x-۱}$$

$$\text{عبارت}=\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}+\frac{۲\sqrt{x}-۲}{x-۱}-\frac{۵x}{x-۱}=\frac{\sqrt{x}+۱+۲\sqrt{x}-۲-۵x}{x-۱}=\frac{۳\sqrt{x}-۵x-۱}{x-۱}$$

ب) $$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}-\frac{۱}{x-۱}\ :\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{x-۱}$$

$$\text{عبارت}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱-۱}{x-۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}}{x-۱}=\frac{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x}+۱)}{x-۱}$$

⑤ **اگر $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}=۳$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}$ را به دست آورید.**

$$\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴}=(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۴})\times\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}}=\frac{(\sqrt{x+۲})^{۲}-(\sqrt{x-۴})^{۲}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۴}}=\frac{x+۲-x+۴}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$

خواندنی

صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی

سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا $۵^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. $(۱۲,۱۳,۵)$

چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

تعداد زیادی. هرسه‌تایی به صورت $(۳k,۴k,۵k)$ یا $(۵k,۱۲k,۱۳k)$ به شرط اینکه $k>۰$ باشد، تشکیل سه‌تایی فیثاغورسی می‌دهند.

(جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(۱/۰۱)^{۳۶۵} = ۳۷/۸$$

$$(۰/۹۹)^{۳۶۵} = ۰/۰۳$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ پایه‌های توان‌ها در محدوده متفاوتی قرار دارند. $۰ < ۰/۹۹ < ۱$ است، به همین دلیل با افزایش توان کوچک‌تر می‌شود و $۱/۰۱ > ۱$ است که با افزایش توان بزرگ‌تر می‌شود.

حال $(۱/۰۱)^{۷۳۰}$ و $(۰/۹۹)^{۷۳۰}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

با افزایش n مقدار عدد $(۰/۹۹)^n$ کوچک‌تر می‌شود. $(۱/۰۱)^{۷۳۰} = ۱۴۲۷/۶$ $(۰/۹۹)^{۷۳۰} = ۰/۰۰۰۷$

(مثلث خیام)

$$(a+b)^۱ = a+b$$

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ در هر بسط به توان n، ضرایب آن از سطر $(n+۱)$ مثلث خیام به دست می‌آید. برای مثال ضرایب بسط $(a+b)^۲$ از سطر سوم مثلث خیام یعنی عددهای «۱،۲،۱» به دست می‌آید:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$\begin{aligned}(a+b)^۴ &= (a+b)^۳(a+b)\\ &= (a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳)(a+b)\\ &= \underline{۱}a^۴ + \underline{۴}a^۳b + \underline{۶}a^۲b^۲ + \underline{۴}ab^۳ + \underline{۱}b^۴\end{aligned}$$

از ضرب $(a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳)$ در $(a+b)$ می‌توان $(a+b)^۴$ را محاسبه کرد. برای رسیدن سریع‌تر به جواب می‌توان از سطر پنجم مثلث خیام استفاده کرد. ضرایب را نوشته، سپس از توان ۴ متغیر a شروع می‌کنیم. در هر ضریب بعدی، یک واحد از توان a کم و به توان b اضافه می‌کنیم. به این ترتیب نیز حاصل $(a+b)^۴$ به دست می‌آید.

درس اول: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

پرسش متن .... صفحهٔ ۷۰ کتاب‌درسی

صبا بعد از حل یک مسئلهٔ هندسه به نکتهٔ جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئلهٔ او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم‌الزاویه است (چرا؟).

$۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ \to ۲۵ = ۱۶ + ۹ \to ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه است.

فعالیت .... صفحهٔ ۷۱ کتاب‌درسی

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

① با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. $(x+۱)(x-۳) = ۰$

نکته

ویژگی حاصل‌ضرب صفر:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = ۰$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$AB = ۰ \Rightarrow A = ۰$ یا $B = ۰$

② از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$(x+۱)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x+۱ = ۰$ یا $x-۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱$ یا $x = ۳$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل‌شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست‌آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم.

یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$x = ۳$	$x = -۱$
$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$	$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$
$(۳)^۲ - ۲(۳) - ۳ \overset{?}{=} ۰$	$(-۱)^۲ - ۲(-۱) - ۳ \overset{?}{=} ۰$
$۹ - ۶ - ۳ \overset{?}{=} ۰$	$۱ + ۲ - ۳ \overset{?}{=} ۰$
$۰ = ۰$ ✓	$۰ = ۰$ ✓

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ خیر

توضیح دهید. زیرا طول اضلاع مثلث باید اعداد مثبت باشند، پس $x = -۱$ نمی‌تواند طول ضلع مثلث باشد. بنابراین فقط یک مثلث قائم‌الزاویه داریم که اضلاع آن سه عدد متوالی باشند.

کار در کلاس .... صفحهٔ ۷۱ کتاب‌درسی

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به‌روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^۲ - ۳x = ۱۰$

$$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$x = ۵ \Rightarrow ۵^۲ - ۳(۵) - ۱۰ \overset{?}{=} ۰ \Rightarrow ۲۵ - ۱۵ - ۱۰ \overset{?}{=} ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ✓

$x = -۲ \Rightarrow (-۲)^۲ - ۳(-۲) - ۱۰ \overset{?}{=} ۰ \Rightarrow ۴ + ۶ - ۱۰ \overset{?}{=} ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ✓

ب) $۳t^۲ - t = ۰$

$$t(۳t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ ۳t-۱=۰ \Rightarrow ۳t=۱ \Rightarrow t=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$t=۰ \Rightarrow ۳(۰)^۲-(۰)\overset{?}{=}۰ \Rightarrow ۰=۰$$ ✓

$$t=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳(\frac{۱}{۳})^۲-\frac{۱}{۳}\overset{?}{=}۰ \Rightarrow ۳(\frac{۱}{۹})-\frac{۱}{۳}\overset{?}{=}۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}\overset{?}{=}۰ \Rightarrow ۰=۰$$ ✓

فعالیت

صفحهٔ ۷۲ کتاب‌درسی

معادلهٔ درجه دوم $x^۲=۲۵$ را در نظر بگیرید.

① **جواب‌های این معادله را به‌روش تجزیه به‌دست آورید.**

$$x^۲=۲۵ \Rightarrow x^۲-۲۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۵=۰ \Rightarrow x=۵ \\ x+۵=۰ \Rightarrow x=-۵ \end{cases}$$

② **ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به دست آورید و آنها را با جواب‌های حاصل از تجزیه به‌دست آورید. این معادله را به‌روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به‌دست‌آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.** ریشه‌های دوم عدد ۲۵ برابر ±۵ است. جواب‌های حاصل از تجزیه $(x^۲=۲۵)$ و ریشه‌های دوم عدد با هم برابر هستند.

③ **اگر $x^۲=a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت $x=\pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.** خیر فقط درصورتی می‌توان این کار را انجام داد که a یک عدد حقیقی مثبت باشد.

نکته

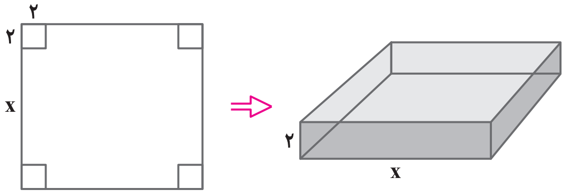
اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=a$ عبارت‌اند از:

$x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

مثال

صفحهٔ ۷۲ و ۷۳ کتاب‌درسی

با یک دستگاه برش، یک صفحهٔ مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به‌دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به‌دست آید. حجم این جعبه عبارت است از: طول × عرض × ارتفاع $=(x)(x)(۲)=۲x^۲$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^۲=۲۰۰$. بنابراین $x^۲=۱۰۰$ و با محاسبهٔ ریشه‌های دوم این معادله، جواب‌های $x=\pm۱۰$ به‌دست می‌آید.

و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x=۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x+۴=۱۰+۴=۱۴$ سانتی‌متر است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۷۳ کتاب‌درسی

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به‌روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲ = ۲۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x = \pm ۲$

ب) $t^۲ + ۷ = ۰ \Rightarrow t^۲ = -۷$

مربع یک عدد مانند $t^۲$، همواره نامنفی است و هرگز نمی‌تواند با یک عدد منفی مانند ۷− برابر باشد. پس این معادله جواب ندارد.

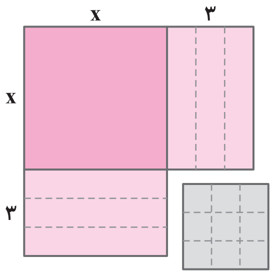
پ) $(r-۲)^۲ = ۱۶ \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} r-۲ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} r-۲=۴ \Rightarrow r=۴+۲ \Rightarrow r=۶ \\ r-۲=-۴ \Rightarrow r=-۴+۲ \Rightarrow r=-۲ \end{cases}$

فعالیت

صفحهٔ ۷۳ کتاب‌درسی

① **دوجمله‌ای $x^۲+۶x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دوجمله‌ای اضافه شود تا چندجمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.**

$$x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲$$

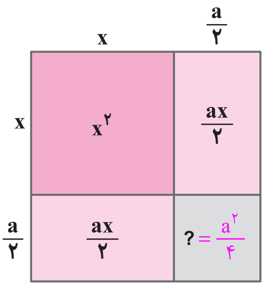


اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟ هر دو طرف تساوی، مساحت کل شکل را محاسبه می‌کنند. عبارت سمت راست تساوی، یعنی $(x+۳)^۲$، مساحت شکل را به‌عنوان یک مربع بزرگ به‌طول ضلع $x+۳$ حساب می‌کند و عبارت سمت چپ تساوی، یعنی $x^۲+۶x+۹$، مجموع مساحت‌های ۴ قسمت مشخص‌شده روی شکل است. همان‌طور که دیده می‌شود، عدد ۹ مساحت مربع کوچک به ضلع ۳ است که با اضافه کردن آن، کل شکل به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.

② **اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دوجمله‌ای $x^۲+ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟** $\frac{a^۲}{۴}$

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}=(x+\frac{a}{۲})^۲$$



نکته

اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دوم را به روش مربع کامل حل کنیم، باید به دوجمله‌ای $x^۲+ax$، جملهٔ $\frac{a^۲}{۴}$ را اضافه کنیم. یعنی ضریب x را ابتدا نصف می‌کنیم $(\frac{a}{۲})$ و سپس آن را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی $\frac{a^۲}{۴}=(\frac{a}{۲})^۲$. در این صورت می‌توانیم به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، معادله را حل کنیم.

مثال

صفحهٔ ۷۳ کتاب‌درسی

معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ را به‌روش مربع کامل حل می‌کنیم.

معادلهٔ درجه دوم	$x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$
به دو طرف معادله، ۴- را اضافه کرده‌ایم	$x^۲ - ۶x = -۴$
به دو طرف معادله ۹ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود	$x^۲ - ۶x + ۹ = -۴ + ۹$
سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم	$(x - ۳)^۲ = ۵$
از دو طرف معادله، ریشهٔ دوم می‌گیریم	$x - ۳ = \pm\sqrt{۵}$
به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده‌ایم	$x = ۳ \pm \sqrt{۵}$

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از $۳ + \sqrt{۵}$ و $۳ - \sqrt{۵}$.

کار در کلاس

صفحهٔ ۷۴ کتاب‌درسی

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲ + \overset{\overset{a}{\downarrow}}{۲}x = ۲۴$ $\qquad a = ۲ \Rightarrow \dfrac{a^۲}{۴} = \dfrac{۴}{۴} = ۱$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۲۴ + ۱ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x+۱ = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۵ \Rightarrow x = ۴ \\ x+۱ = -۵ \Rightarrow x = -۶ \end{cases}$$

ب) $t^۲ + \overset{\overset{a}{\downarrow}}{۳}t = ۳$ $\qquad a = ۳ \Rightarrow \dfrac{a^۲}{۴} = \dfrac{۹}{۴}$

$$\Rightarrow t^۲ + ۳t + \frac{۹}{۴} = ۳ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow (t+\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۲۱}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} t + \frac{۳}{۲} = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{۳}{۲} = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{۲۱} - ۳}{۲} \\ t + \frac{۳}{۲} = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲} \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{۲۱} - ۳}{۲} \end{cases}$$

پ) $n^۲ - ۴n + ۵ = ۰ \Rightarrow n^۲ - \overset{\overset{a}{\downarrow}}{۴}n = -۵$ $\qquad a = -۴ \Rightarrow \dfrac{a^۲}{۴} = ۴$

$$\Rightarrow n^۲ - ۴n + ۴ = -۵ + ۴ \Rightarrow \underbrace{(n-۲)^۲}_{\text{نامنفی}} = \underbrace{-۱}_{\text{منفی}}$$

این معادله جواب ندارد، زیرا یک عبارت نامنفی نمی‌تواند برابر با یک عدد منفی شود.

ت) $۲r^۲ + r - ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} r^۲ + \frac{۱}{۲}r - ۱ = ۰ \Rightarrow r^۲ + \overset{\overset{a}{\downarrow}}{\frac{۱}{۲}}r = ۱$ $\qquad a = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \dfrac{a^۲}{۴} = \dfrac{۱}{۱۶}$

$$\Rightarrow r^۲ + \frac{۱}{۲}r + \frac{۱}{۱۶} = ۱ + \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow (r+\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱۷}{۱۶} \xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} r + \frac{۱}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r + \frac{۱}{۴} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۱۷} - ۱}{۴} \\ r + \frac{۱}{۴} = -\frac{\sqrt{۱۷}}{۴} \Rightarrow r = \frac{-\sqrt{۱۷} - ۱}{۴} \end{cases}$$

فعالیت صفحهٔ ۷۴ کتاب‌درسی

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\neq ۰$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادلهٔ درجه دوم را حل کرد؟

معلم: بله. برای حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم: $ax^۲+bx+c=۰$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم $x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$

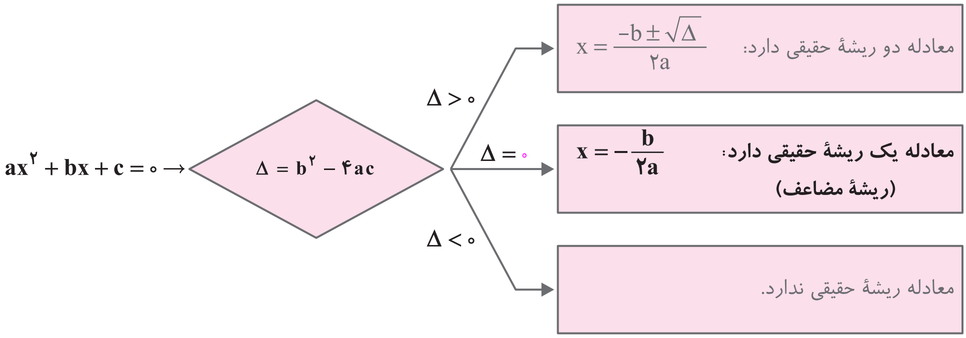
به دو طرف معادله، $\frac{c}{a}$- را اضافه کرده‌ایم $x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

به دو طرف معادله، $\frac{b^۲}{۴a^۲}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ، مربع کامل شود $x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲}$

دو طرف را ساده کرده‌ایم $(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$

کار در کلاس صفحهٔ ۷۵ کتاب‌درسی

① با توجّه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.


$ax^۲+bx+c=۰\rightarrow$ $\Delta=b^۲-۴ac$

$\Delta>۰$: معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

$\Delta=۰$: معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد: $x=-\frac{b}{۲a}$
(ریشهٔ مضاعف)

$\Delta<۰$: معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

② معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^۲-x+۱=۰$

$a=۱,\ b=-۱,\ c=۱\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱-۴=-۳\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب) $-۲x^۲+x+۳=۰$

$a=-۲,\ b=۱,\ c=۳\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱-۴(-۲)(۳)=۱+۲۴=۲۵\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۵}}{-۴}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{-۱+۵}{-۴}=\frac{۴}{-۴}=-۱\Rightarrow x_۱=-۱\\ x_۲=\frac{-۱-۵}{-۴}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۲=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

پ) $-x^۲+۴x-۴=۰$

$a=-۱,b=۴,c=-۴\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(۴)^۲-۴(-۱)(-۴)=۱۶-۱۶=۰\xrightarrow{\Delta=۰}$ معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow x=۲$$

تمرین

صفحهٔ ۷۶ و ۷۷ کتاب‌درسی

① **معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.**

۱) $x^۲-۱۱x=-۱۰$

$$x^۲-۱۱x+۱۰=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۱۰)=۰\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x-۱۰=۰\Rightarrow x=۱۰\end{cases}$$

۲) $۵t^۲=۲۰$

$$۵t^۲-۲۰=۰\Rightarrow ۵(t^۲-۴)=۰\Rightarrow ۵(t-۲)(t+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}t-۲=۰\Rightarrow t=۲\\ t+۲=۰\Rightarrow t=-۲\end{cases}$$

۳) $۵a^۲-۷a=۲a(a-۳)$

$$۵a^۲-۷a=۲a^۲-۶a\Rightarrow ۵a^۲-۲a^۲-۷a+۶a=۰\Rightarrow ۳a^۲-a=۰\Rightarrow a(۳a-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ ۳a-۱=۰\Rightarrow ۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۴) $۴k^۲-۱۲k+۸=۰$

$$۴(k^۲-۳k+۲)=۰\Rightarrow ۴(k-۱)(k-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}k-۱=۰\Rightarrow k=۱\\ k-۲=۰\Rightarrow k=۲\end{cases}$$

② **هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.**

۱) $n^۲-۲=۲۶$

$$n^۲=۲۶+۲\Rightarrow n^۲=۲۸\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} n=\pm\sqrt{۲۸}=\pm\sqrt{۴\times۷}=\pm۲\sqrt{۷}\Rightarrow\begin{cases}n=۲\sqrt{۷}\\ n=-۲\sqrt{۷}\end{cases}$$

۲) $x^۲+۱۲=۳$

$x^۲=۳-۱۲\Rightarrow \underbrace{x^۲}_{\text{نامنفی}}=\underbrace{-۹}_{\text{منفی}}\Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳) $(۳t-۲)^۲=۴\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} ۳t-۲=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}۳t-۲=۲\Rightarrow ۳t=۲+۲=۴\Rightarrow t=\frac{۴}{۳}\\ ۳t-۲=-۲\Rightarrow ۳t=۰\Rightarrow t=۰\end{cases}$

۴) $۳-۳k=۳k(۲k-۱)\Rightarrow ۳-۳k=۶k^۲-۳k\Rightarrow -\cancel{۳k}-۶k^۲+\cancel{۳k}=-۳\Rightarrow -۶k^۲=-۳$

$$\Rightarrow k^۲=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} k=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\begin{cases}k=\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ k=-\sqrt{\frac{۱}{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

③ **معادله‌های زیر را به‌روش مربع کامل حل کنید.**

۱) $x^۲-\overset{\overset{a}{\downarrow}}{۶}x=۷$ $\qquad a=-۶\Rightarrow\frac{a^۲}{۴}=۹$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹=۷+۹\Rightarrow (x-۳)^۲=۱۶\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}} x-۳=\pm۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۴\Rightarrow x=۴+۳\Rightarrow x=۷\\ x-۳=-۴\Rightarrow x=-۴+۳\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

۲) $$\mathbf{s^۲-۳s+۳=۰}\Rightarrow s^۲-\overset{\overset{a}{\downarrow}}{۳}s=-۳ \qquad a=-۳\Rightarrow\frac{a^۲}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow s^۲-۳s+\frac{۹}{۴}=-۳+\frac{۹}{۴}\Rightarrow\overbrace{(s-\frac{۳}{۲})^۲}^{\text{نامنفی}}=\overbrace{\frac{-۳}{۴}}^{\text{منفی}}\Rightarrow$$ این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳) $$\mathbf{r^۲+۴r+۴=۰}\Rightarrow r^۲+\overset{\overset{a}{\downarrow}}{۴}r=-۴ \qquad a=۴\Rightarrow\frac{a^۲}{۴}=۴$$

$$\Rightarrow r^۲+۴r+۴=-۴+۴\Rightarrow(r+۲)^۲=۰\xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}}r+۲=۰\Rightarrow r=-۲$$

توجه داشته باشید که صفر، فقط یک ریشهٔ دوم دارد و آن هم خودِ صفر است.

۴) $$\mathbf{۲a^۲+۵a-۳=۰}\xrightarrow{\div ۲}a^۲+\overset{\overset{a}{\downarrow}}{\frac{۵}{۲}}a=\frac{۳}{۲} \qquad a=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{a^۲}{۴}=\frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow a^۲+\frac{۵}{۲}a+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow(a+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶}\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}}a+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=\frac{۷}{۴}-\frac{۵}{۴}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ a+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=-\frac{۷}{۴}-\frac{۵}{۴}=-\frac{۱۲}{۴}\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

۴) هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $\mathbf{۴x^۲-۱۳x+۳=۰}$

$$a=۴,b=-۱۳,c=۳\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۱۳)^۲-۴(۴)(۳)=۱۶۹-۴۸=۱۲۱\xrightarrow{\Delta>۰}$$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱۳)\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲(۴)}=\frac{۱۳\pm۱۱}{۸}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱۳+۱۱}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳\Rightarrow x_۱=۳\\ x_۲=\frac{۱۳-۱۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

۲) $\mathbf{r-r^۲=۳}\Rightarrow -r^۲+r-۳=۰$

$$a=-۱,b=۱,c=-۳\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(۱)^۲-۴(-۱)(-۳)=۱-۱۲=-۱۱\xrightarrow{\Delta<۰}$$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳) $\mathbf{a^۲+۲\sqrt{۳}a=۹}\Rightarrow a^۲+۲\sqrt{۳}a-۹=۰$

$$a=۱,\ b=۲\sqrt{۳},c=-۹\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac,=(۲\sqrt{۳})^۲-۴(۱)(-۹)=۱۲+۳۶=۴۸\xrightarrow{\Delta>۰}$$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۴۸}}{۲(۱)}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm۴\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}a_۱=\frac{-۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow a_۱=\sqrt{۳}\\ a_۲=\frac{-۲\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}}{۲}=\frac{-۶\sqrt{۳}}{۲}=-۳\sqrt{۳}\Rightarrow a_۲=-۳\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$۴)\ \frac{t^{۲}}{۳}-\frac{t}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\times ۶} ۶(\frac{t^{۲}}{۳})-۶(\frac{t}{۲})-۶(\frac{۳}{۲})=۶\times ۰ \Rightarrow ۲t^{۲}-۳t-۹=۰$$

$a=۲,\ b=-۳,\ c=-۹ \Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=(-۳)^{۲}-۴(۲)(-۹)=۹+۷۲=۸۱ \xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۳)\pm\sqrt{۸۱}}{۲(۲)}=\frac{۳\pm۹}{۴}\Rightarrow\begin{cases} t_{۱}=\frac{۳+۹}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳\Rightarrow t_{۱}=۳\\ t_{۲}=\frac{۳-۹}{۴}=\frac{-۶}{۴}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow t_{۲}=\frac{-۳}{۲}\end{cases}$$

⑤ هر یک از معادله‌های زیر را به‌روش دلخواه حل کنید.

$۱)\ ۲x^{۲}=۲۵۰$ حل به روش ریشه‌گیری:

$$x^{۲}=\frac{۲۵۰}{۲}\Rightarrow x^{۲}=۱۲۵\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}}x=\pm\sqrt{۱۲۵}=\pm۵\sqrt{۵}\Rightarrow x_{۱}=۵\sqrt{۵},\ x_{۲}=-۵\sqrt{۵}$$

$۲)\ ۹-۶z+z^{۲}=۰$ حل به روش مربع کامل:

$$z^{۲}-۶z+۹=۰\Rightarrow(z-۳)^{۲}=۰\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}}z-۳=۰\Rightarrow z=۳$$

$۳)\ ۴a^{۲}+۳a=۱$ $\Rightarrow ۴a^{۲}+۳a-۱=۰$ حل به روش فرمول کلی:

$a=۴,\ b=۳,\ c=-۱\Rightarrow\Delta=b^{۲}-۴ac=(۳)^{۲}-۴(۴)(-۱)=۹+۱۶=۲۵\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۴)}=\frac{-۳\pm۵}{۸}\Rightarrow\begin{cases} a_{۱}=\frac{-۳+۵}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a_{۱}=\frac{۱}{۴}\\ a_{۲}=\frac{-۳-۵}{۸}=\frac{-۸}{۸}=-۱\Rightarrow a_{۲}=-۱\end{cases}$$

$۴)\ b^{۲}+\sqrt{۲}b-۴=۰$ حل به روش فرمول کلی:

$a=۱,\ b=\sqrt{۲},\ c=-۴\Rightarrow\Delta=b^{۲}-۴ac=(\sqrt{۲})^{۲}-۴(۱)(-۴)=۲+۱۶=۱۸\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$b=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۸}}{۲(۱)}=\frac{-\sqrt{۲}\pm۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\begin{cases} b_{۱}=\frac{-\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow b_{۱}=\sqrt{۲}\\ b_{۲}=\frac{-\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{-۴\sqrt{۲}}{۲}=-۲\sqrt{۲}\Rightarrow b_{۲}=-۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

⑥ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

اگر عدد فرد اول را x در نظر بگیریم، عدد فرد بعدی x + ۲ خواهد بود، زیرا فاصلهٔ هر دو عدد فرد متوالی، برابر ۲ است. بنابراین:

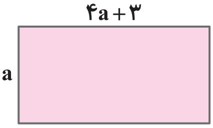
$$x^{۲}+(x+۲)^{۲}=۲۹۰\Rightarrow x^{۲}+x^{۲}+۴x+۴=۲۹۰\Rightarrow ۲x^{۲}+۴x+۴=۲۹۰\xrightarrow{\div۲}x^{۲}+۲x+۲=۱۴۵$$

$$\Rightarrow\ x^{۲}+۲x+۲-۱۴۵=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲x-۱۴۳=۰\Rightarrow(x+۱۳)(x-۱۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} x+۱۳=۰\Rightarrow x=-۱۳\Rightarrow x+۲=-۱۱\\ x-۱۱=۰\Rightarrow x=۱۱\Rightarrow x+۲=۱۳\end{cases}$$

پس مسئله دو دسته جواب دارد: $\{۱۱,۱۳\}$ و $\{-۱۳,-۱۱\}$.

⑦ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



$\text{عرض} = a$ و $\text{طول} = ۴a + ۳$

$\text{مساحت} = a(۴a+۳) = ۴۵ \Rightarrow ۴a^۲ + ۳a = ۴۵ \Rightarrow ۴a^۲ + ۳a - ۴۵ = ۰$

$a = ۴, b = ۳, c = -۴۵ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (۳)^۲ - ۴(۴)(-۴۵)$

$\Rightarrow \Delta = ۹+۷۲۰=۷۲۹ \xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۷۲۹}}{۲(۴)} = \frac{-۳ \pm ۲۷}{۸} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \dfrac{-۳+۲۷}{۸} = \dfrac{۲۴}{۸} = ۳ \Rightarrow a_۱ = \text{عرض} = ۳\text{cm} \\ \Rightarrow \text{طول} = ۴a_۱ + ۳ = ۴(۳) + ۳ = ۱۵\text{cm} \\ a_۲ = \dfrac{-۳-۲۷}{۸} = \dfrac{-۳۰}{۸} = -\dfrac{۱۵}{۴} \\ \Rightarrow \text{اندازهٔ ضلع نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

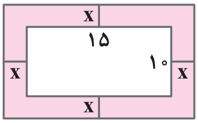
⑧ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\begin{cases} \text{سن برادر کوچک‌تر} = x \\ \text{سن برادر بزرگ‌تر} = x+۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از ۴ سال}} \begin{cases} \text{سن برادر کوچک‌تر} = x+۴ \\ \text{سن برادر بزرگ‌تر} = x+۴+۴ = x+۸ \end{cases}$$

$\Rightarrow (x+۴)(x+۸) = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۳۲ = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۳۲ - ۶۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x - ۲۸ = ۰$

$$\xrightarrow{\text{حل به روش تجزیه}} (x+۱۴)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۱۴=۰ \Rightarrow x=-۱۴ \quad \text{سن نمی‌تواند منفی باشد، پس این جواب قابل قبول نیست.} \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \quad \text{سن برادر کوچک‌تر} \Rightarrow x+۴=۲+۴=۶ \quad \text{سن برادر بزرگ‌تر} \end{cases}$$

⑨ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



$\text{مساحت قاب عکس} = \underbrace{(۲x+۱۰)}_{\text{عرض}}\underbrace{(۲x+۱۵)}_{\text{طول}} = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x + ۱۵۰ = ۳۰۰$

$\Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲ + ۲۵x - ۷۵ = ۰$

$a = ۲, b = ۲۵, c = -۷۵ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (۲۵)^۲ - ۴(۲)(-۷۵) = ۶۲۵ + ۶۰۰ = ۱۲۲۵$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲۵ \pm \sqrt{۱۲۲۵}}{۲(۲)} = \frac{-۲۵ \pm ۳۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۲۵+۳۵}{۴} = \dfrac{۱۰}{۴} = \dfrac{۵}{۲} = ۲/۵ \Rightarrow x_۱ = ۲/۵ \\ x_۲ = \dfrac{-۲۵-۳۵}{۴} = \dfrac{-۶۰}{۴} = -۱۵ \\ \Rightarrow x \text{ نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طول} = ۲x+۱۵ = ۲(۲/۵)+۱۵ = ۵+۱۵ = ۲۰ \text{سانتی‌متر} \\ \text{عرض} = ۲x+۱۰ = ۲(۲/۵)+۱۰ = ۵+۱۰ = ۱۵ \text{سانتی‌متر} \end{cases} \Rightarrow \text{بنابراین ابعاد این قاب عکس ۲۰ در ۱۵ سانتی‌متر است.}$$

(۱۰) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد تیم‌ها برابر n باشد، چون هر تیم با $n-۱$ تیم بازی می‌کند، پس تعداد بازی‌ها $n(n-۱)$ است و چون بازی تیم A با تیم B همان بازی تیم B با تیم A است، بنابراین باید تعداد بازی‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم و حاصل برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌شود.

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵\Rightarrow n(n-۱)=۹۰\Rightarrow n^۲-n=۹۰\Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل به‌روش تجزیه}}(n-۱۰)(n+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}n-۱۰=۰\Rightarrow n=۱۰ \text{ تعداد تیم‌ها}\\ n+۹=۰\Rightarrow n=-۹\Rightarrow \text{.تعداد تیم‌ها نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست}\end{cases}$$

اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

اگر همهٔ تیم‌ها فقط یک بار با هم بازی کنند: $N=\frac{n(n-۱)}{۲}$

اگر بازی‌ها به صورت رفت‌وبرگشت باشند، یعنی تیم‌ها دو بار با هم بازی کنند: $N=n(n-۱)$

(۱۱) فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که برحسب میلی‌مترجیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ $P=۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌مترجیوه باشد. (از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

$$۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰=۱۲۵\Rightarrow ۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s-۵=۰\xrightarrow{\times ۱۰۰۰}۶s^۲-۲۰s-۵۰۰۰=۰$$

$$a=۶,b=-۲۰,c=-۵۰۰۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۰)^۲-۴(۶)(-۵۰۰۰)$$

$$=۴۰۰+۱۲۰۰۰۰=۱۲۰۴۰۰\xrightarrow{\Delta>۰}\text{.معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد}$$

$$s=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲۰)\pm\sqrt{۱۲۰۴۰۰}}{۲(۶)}\simeq\frac{۲۰\pm۳۴۷}{۱۲}\Rightarrow\begin{cases}s_۱\simeq\frac{۲۰+۳۴۷}{۱۲}=\frac{۳۶۷}{۱۲}\simeq ۳۰/۵ \text{ سن شخص}\\ s_۲\simeq\frac{۲۰-۳۴۷}{۱۲}=\frac{-۳۲۷}{۱۲}\\ \Rightarrow \text{.سن نمی‌تواند منفی باشد، پس قابل قبول نیست}\end{cases}$$

درس دوم: سهمی

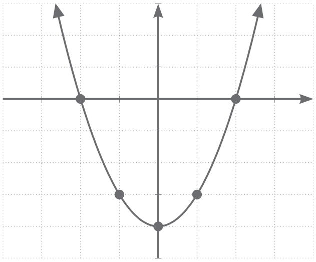
فعالیت صفحهٔ ۷۸ کتاب‌درسی

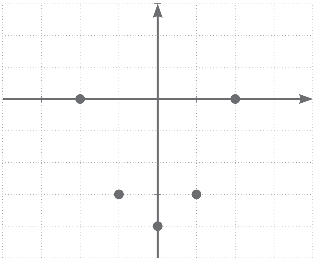
معادلهٔ $y=x^۲-۴$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

(x,y)	$y=x^۲-۴$	x
$(-۲,۰)$	$y=(-۲)^۲-۴=۴-۴=۰$	-۲
$(-۱,-۳)$	$y=(-۱)^۲-۴=۱-۴=-۳$	-۱
$(۰,-۴)$	$y=(۰)^۲-۴=۰-۴=-۴$	۰
$(۱,-۳)$	$y=۱^۲-۴=۱-۴=-۳$	۱
$(۲,۰)$	$y=۲^۲-۴=۴-۴=۰$	۲

نقاط به‌دست‌آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).





ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ $(۰,-۴)$ **آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟** بله، محور تقارن این نمودار، محور yها $(x=۰)$ است.

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ ۵ نقطه **آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟** بله، با ۳ نقطه هم می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم، ولی هر چه تعداد نقاط بیشتر باشد، می‌توانیم نمودار دقیق‌تری را رسم کنیم.

ت) محل برخورد منحنی رسم‌شده با محور xها در چه نقاطی است؟

منحنی رسم‌شده، در دو نقطه به‌طول ۲ و ۲− محور xها را قطع کرده است. یعنی در نقاط $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$.

فعالیت

صفحهٔ ۷۹ کتاب‌درسی

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^۲ - ۴x + ۵$ است.

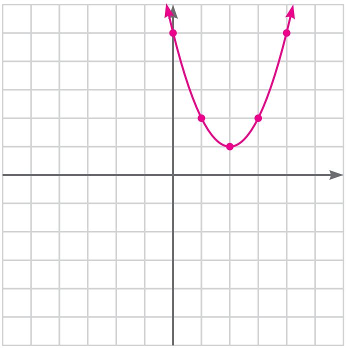
الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید. $y = x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۱$

ب) ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

x	$y = x^۲ - ۴x + ۵$	(x,y)
۰	$y = ۰^۲ - ۴(۰) + ۵ = ۵$	$(۰,۵)$
۱	$y = ۱^۲ - ۴(۱) + ۵ = ۱ - ۴ + ۵ = ۲$	$(۱,۲)$
۲	$y = ۲^۲ - ۴(۲) + ۵ = ۴ - ۸ + ۵ = ۱$	$(۲,۱)$
۳	$y = ۳^۲ - ۴(۳) + ۵ = ۹ - ۱۲ + ۵ = ۲$	$(۳,۲)$
۴	$y = ۴^۲ - ۴(۴) + ۵ = ۱۶ - ۱۶ + ۵ = ۵$	$(۴,۵)$

پ) پنج نقطهٔ حاصل‌شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.



ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y=(x-۲)^{۲}+۱$ به‌دست آورید؟

بله، نقطهٔ $(۲\,,۱)$ (که رأس سهمی است) پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است و برای به‌دست آوردن طول این نقطه، کافی است عبارت داخل پرانتز را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=(\underbrace{x-۲}_{x-۲=۰\Rightarrow x=۲})^{۲}+۱\Rightarrow \text{رأس}\ (۲\,,۱)$$

نکته

هر سهمی به‌صورت $y=a(x-h)^{۲}+k$ که $a\neq ۰$ است، رأسی به مختصات $(h\,,k)$ و خط تقارنی به معادلهٔ $x=h$ دارد.

کار در کلاس

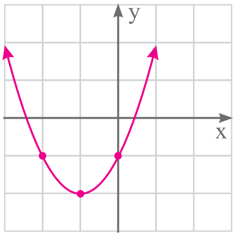
صفحهٔ ۸۰ کتاب‌درسی

① **در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.**

الف) $y=(x+۱)^{۲}-۲$

$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ y=-۲\Rightarrow \text{رأس}(-۱,-۲)$

x	-۲	-۱	۰
y	-۱	-۲	-۱



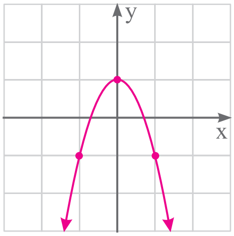
نکته

برای رسم سهمی، پس از محاسبهٔ مختصات رأس، یک نقطه در سمت راست و یک نقطه در سمت چپ رأس با فاصله‌های یکسان از آن را نیز به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم سهمی را رسم کنیم.

ب) $y=-۲x^{۲}+۱$

$y=-۲x^{۲}+۱=-۲(x-۰)^{۲}+۱\Rightarrow \text{رأس}\ (۰\,,۱)$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۱	-۱



فعالیت

صفحهٔ ۸۰ کتاب‌درسی

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید: $y=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$

$$\text{سمت راست}=ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})\Rightarrow \text{ضریب}\ x=\frac{b}{a}\xrightarrow{\text{نصف}}\frac{b}{۲a}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

پس در این مرحله، عبارت $\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$ را در داخل پرانتز، اضافه و کم می‌کنیم:

$$\text{سمت راست}=a(\underbrace{x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}}_{\text{اتحاد}}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a})=a((x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a})=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴a}+\frac{۴ac}{۴a}$$

$$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ و خط تقارن آن نیز $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

برای به‌دست آوردن طول رأس سهمی، باید ریشهٔ عبارت داخل پرانتز در عبارت $y=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ را به‌دست آوریم:

خط تقارن و طول رأس سهمی $\Leftarrow$ $x+\frac{b}{۲a}=۰\Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow$

عرض رأس سهمی $\Leftarrow$ $y=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}\xrightarrow{x=\frac{-b}{۲a}}y=a(\underbrace{-\frac{b}{۲a}+\frac{b}{۲a}}_{۰})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}\Rightarrow y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}\Rightarrow$

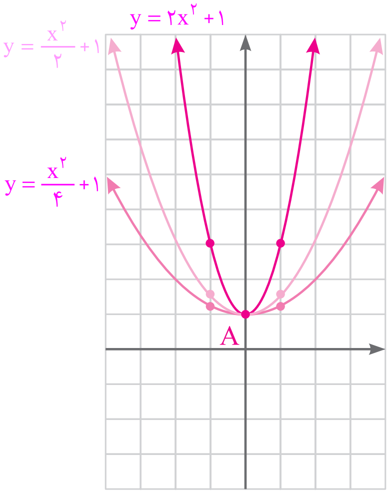
بنابراین مختصات رأس سهمی به‌صورت $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است.

فعالیت

صفحهٔ ۸۱ کتاب‌درسی

معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y=\frac{x^۲}{۲}+۱$ و $y=۲x^۲+۱$ است.

الف) مختصات رأس و دو نقطهٔ دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(۰,۱)$ است.



طول رأس سهمی $y=۲x^۲+۱\Rightarrow y=۲(x-۰)^۲+۱\Rightarrow x=۰$

طول رأس سهمی $y=\frac{x^۲}{۲}+۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۰)^۲+۱\Rightarrow x=۰$

(x , y)	$y=\frac{x^۲}{۲}+۱$	x
$(-۱,\frac{۳}{۲})$	$y=\frac{(-۱)^۲}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$	-۱
$(۰,۱)$	$y=\frac{۰^۲}{۲}+۱=۱$	۰
$(۱,\frac{۳}{۲})$	$y=\frac{۱^۲}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$	۱

(x , y)	$y=۲x^۲+۱$	x
$(-۱,۳)$	$y=۲(-۱)^۲+۱=۳$	-۱
$(۰,۱)$	$y=۲(۰)^۲+۱=۱$	۰
$(۱,۳)$	$y=۲(۱)^۲+۱=۳$	۱

همان‌طور که از نمودارهای رسم‌شده دیده می‌شود، مختصات رأس هر دو سهمی، نقطهٔ $A(۰,۱)$ است.

ب) معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

۱	۰	-۱	x
$\frac{۵}{۴}$	۱	$\frac{۵}{۴}$	y

$y=\frac{۱}{۴}(x-۰)^۲+۱\Rightarrow y=\frac{x^۲}{۴}+۱\Rightarrow$ رأس $(۰,۱)$

تمرین

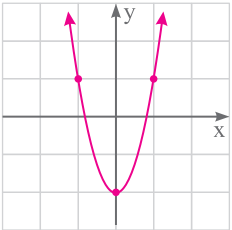
صفحهٔ ۸۱ و ۸۲ کتاب‌درسی

① **نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.**

ب) $y = ۳x^۲ - ۲$

$\Rightarrow y = ۳(x-۰)^۲ - ۲ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow$ رأس $(۰, -۲)$

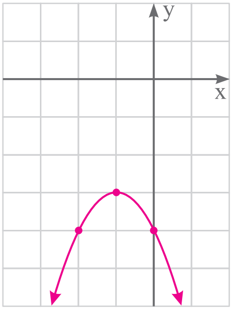
x	-۱	۰	۱
y	۱	-۲	۱



الف) $y = -(x+۱)^۲ - ۳$

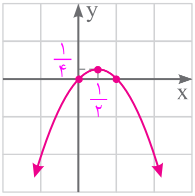
$\Rightarrow x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow$ رأس $(-۱, -۳)$

x	۰	-۱	-۲
y	-۴	-۳	-۴



پ) $y = x - x^۲ \Rightarrow y = -x^۲ + x$

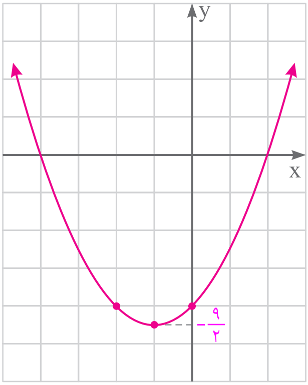
$\Rightarrow a = -۱, b = ۱, c = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲(-۱)} = \frac{۱}{۲}, y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴(-۱)(۰) - (۱)^۲}{۴(-۱)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$ رأس $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴})$



x	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
y	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰

ت) $y = \frac{x^۲}{۲} + x - ۴$

$\Rightarrow a = \frac{۱}{۲}, b = ۱, c = -۴ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲(\frac{۱}{۲})} = -۱, y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴(\frac{۱}{۲})(-۴) - (۱)^۲}{۴(\frac{۱}{۲})} = -\frac{۹}{۲} \Rightarrow$ رأس $(-۱, -\frac{۹}{۲})$



x	-۲	-۱	۰
y	-۴	$-\frac{۹}{۲}$	-۴

② **اگر $(۵\,,\,-۲)$ و $(۵\,,\,۰)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.** با توجه به اینکه عرض دو نقطه با هم برابر هستند، پس کافی است میانگین طول‌ها را به‌دست آوریم: $x=\frac{-۲+۰}{۲}=-۱ \Rightarrow x=-۱$ خط تقارن سهمی

③ **نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ ، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به طول ۱– و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.** چون نمودار سهمی، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $A(۰\,,\,۲)$ روی سهمی قرار دارد. از طرفی نمودار سهمی، محور x ها را نیز در نقاط به طول ۱ – و ۲ قطع می‌کند، پس نقاط $B(-۱\,,\,۰)$ و $C(۲\,,\,۰)$ روی سهمی قرار دارند. بنابراین:

$$A(۰\,,\,۲)\,,\; y=ax^۲+bx+c \Rightarrow ۲=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow ۲=۰+۰+c \Rightarrow c=۲$$

$$B(-۱\,,\,۰)\,,\; y=ax^۲+bx+۲ \Rightarrow ۰=a(-۱)^۲+b(-۱)+۲ \Rightarrow ۰=a-b+۲ \Rightarrow -a+b=۲ \;\;(۱)$$

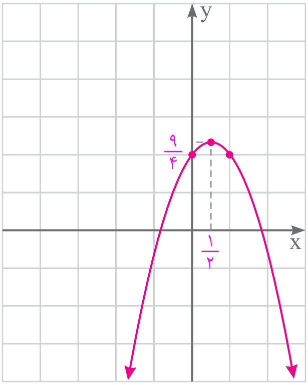
$$C(۲\,,\,۰)\,,\; y=ax^۲+bx+۲ \Rightarrow ۰=a(۲)^۲+b(۲)+۲ \Rightarrow ۰=۴a+۲b+۲ \Rightarrow -۴a-۲b=۲ \;\;(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \begin{array}{l} ۲\times \\ \end{array}\begin{cases} -a+b=۲ \\ -۴a-۲b=۲ \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{cases} -۲a+\cancel{۲b}=۴ \\ -۴a-\cancel{۲b}=۲ \end{cases}}$$

$$-۶a=۶ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow -a+b=۲ \Rightarrow ۱+b=۲ \Rightarrow b=۱$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به این صورت خواهد بود: $y=ax^۲+bx+c \Rightarrow y=-x^۲+x+۲$

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲(-۱)}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}\;,\;\; y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۱)(۲)-(۱)^۲}{۴(-۱)}=\frac{-۹}{-۴}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow \text{رأس}\left(\frac{۱}{۲},\frac{۹}{۴}\right)$$



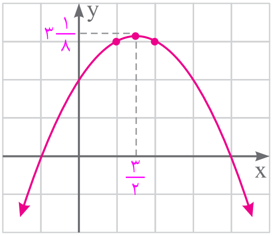
x	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
y	۲	$\frac{۹}{۴}$	۲

④ **دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha<\beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ $y=-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ $y=-۲x^۲+۳x+۲$ به‌دست می‌آید. در هردو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی‌شده، برحسب متر است.**

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

$$A\ \text{وزنهٔ}: y=-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲},\; b=\frac{۳}{۲},\; c=۲$$

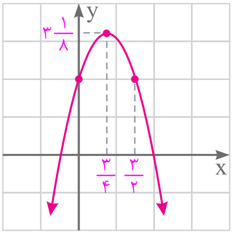
$$\Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{\frac{۳}{۲}}{۲(\frac{-۱}{۲})}=\frac{۳}{۲},\; y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-\frac{۱}{۲})(۲)-(\frac{۳}{۲})^۲}{۴(-\frac{۱}{۲})}=\frac{-۴-\frac{۹}{۴}}{-۲}=۳\frac{۱}{۸} \Rightarrow \text{رأس}\left(\frac{۳}{۲},۳\frac{۱}{۸}\right)$$



x	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
y	۳	$۳\frac{۱}{۸}$	۳

وزنهٔ B : $y=-۲x^۲+۳x+۲\Rightarrow a=-۲\,,\,b=۳\,,\,c=۲$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲(-۲)}=\frac{۳}{۴},y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۲)(۲)-(۳)^۲}{۴(-۲)}=\frac{-۱۶-۹}{-۸}=۳\frac{۱}{۸}\Rightarrow \text{رأس}\left(\frac{۳}{۴},۳\frac{۱}{۸}\right)$$



x	۰	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$
y	۲	$۳\frac{۱}{۸}$	۲

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام‌یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

وزنهٔ A : $y=۰\Rightarrow -\frac{x^۲}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲=۰\xrightarrow{\times(-۲)}x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۱)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۰\to x=۴\\ x+۱=۰\to x=-۱\end{cases}\Rightarrow \text{محل برخورد وزنهٔ A با محور xها}:(۴\,,\,۰)\text{ و }(-۱\,,\,۰)\Rightarrow \text{مسافت افقی طی‌شده}=۴-(-۱)=۵$$

وزنهٔ B : $y=۰\Rightarrow -۲x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow a=-۲,b=۳,c=۲$

$\Rightarrow \Delta=(۳)^۲-۴(-۲)(۲)=۹+۱۶=۲۵\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(-۲)}=\frac{-۳\pm۵}{-۴}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{-۳+۵}{-۴}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x_۱=\frac{-۱}{۲}\\ x_۲=\frac{-۳-۵}{-۴}=\frac{-۸}{-۴}=۲\Rightarrow x_۲=۲\end{cases}$$

$\Rightarrow$ محل برخورد وزنهٔ B با محور xها : $(-\frac{۱}{۲}\,,\,۰)$ و $(۲\,,\,۰)$

$\Rightarrow$ مسافت افقی طی‌شده $=۲-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲}=۲/۵$

بنابراین وزنهٔ A مسافت افقی بیشتری را طی کرده است.

پ) کدام‌یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آنها را مشخص کنید.

بیش‌ترین ارتفاع وزنهٔ A از سطح زمین، برابر $۳\frac{۱}{۸}$ و بیشترین ارتفاع وزنهٔ B از سطح زمین نیز برابر $۳\frac{۱}{۸}$ است، در نتیجه هر دو وزنه به یک اندازه از سطح زمین، ارتفاع پیدا کرده‌اند.

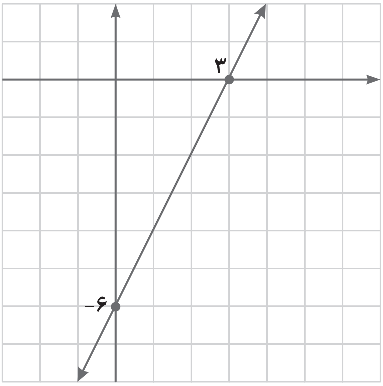
نکته

ارتفاع وزنه‌ها، در حقیقت، عرض رأس سهمی است.

درس سوم: تعیین علامت

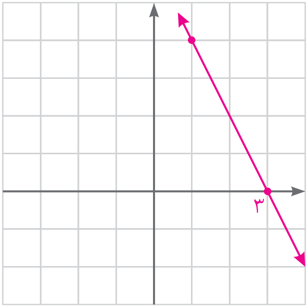
فعالیت .... صفحهٔ ۸۳ و ۸۴ کتاب درسی

① نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.



x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y = ۲x - ۶$	−	۰	+

② نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.



x	۱	۳
y	۴	۰

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y = -۲x + ۶$	+	۰	−

③ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟ جای علامت‌های مثبت و منفی مربوط به y را جابه‌جا کرده است. یعنی در جدول بالایی، علامت (+) در سمت راست صفر و علامت (−) در سمت چپ صفر است، ولی در جدول پایینی، علامت (+) در سمت چپ صفر و علامت (−) در سمت راست صفر است.

④ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

حالت اول: فرض می‌کنیم $x < -\frac{b}{a}$ باشد، در این صورت:

اگر $a < ۰ \Rightarrow ax > a(-\frac{b}{a}) \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \underbrace{ax+b}_{y} > ۰ \Rightarrow y > ۰ \Rightarrow a < ۰ , y > ۰$

اگر $a > ۰ \Rightarrow ax < a(-\frac{b}{a}) \Rightarrow ax < -b \Rightarrow \underbrace{ax+b}_{y} < ۰ \Rightarrow y < ۰ \Rightarrow a > ۰ , y < ۰$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر $x < -\frac{b}{a}$ باشد، آنگاه علامت y مخالف علامت a است.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $x = -\frac{b}{a}$ باشد، در این صورت:

$$x = -\frac{b}{a} \xrightarrow{\times a} ax = a(-\frac{b}{a}) \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \underbrace{ax+b}_{y} = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر $x=-\frac{b}{a}$ باشد، آنگاه مقدار y برابر با صفر خواهد بود.

حالت سوم: فرض می‌کنیم $x>-\frac{b}{a}$ باشد، در این صورت:

اگر $a<۰\Rightarrow ax<a(-\frac{b}{a})\Rightarrow ax<-b\Rightarrow \underbrace{ax+b}_{y}<۰\Rightarrow y<۰\Rightarrow a<۰, y<۰$

اگر $a>۰\Rightarrow ax>a(-\frac{b}{a})\Rightarrow ax>-b\Rightarrow \underbrace{ax+b}_{y}>۰\Rightarrow y>۰\Rightarrow a>۰, y>۰$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر $x>-\frac{b}{a}$ باشد، آنگاه علامت y موافق علامت a است.

مثال

صفحهٔ ۸۴ کتاب‌درسی

عبارت $y=۵x-۲$ را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشهٔ عبارت $۵x-۲$ از معادلهٔ $۵x-۲=۰$ به‌دست می‌آید که برابر $x=\frac{۲}{۵}$ است.

با توجه به اینکه علامت ضریب x؛ یعنی $a=۵$، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است:

x	$x<\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$x>\frac{۲}{۵}$
$y=۵x-۲$	−	۰	+

مقدار y را برای $x=۳$ و $x=-۱$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست‌آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x=۳\Rightarrow y=۵(۳)-۲=۱۳>۰\Rightarrow x>\frac{۲}{۵}, y>۰$ و $x=-۱\Rightarrow y=۵(-۱)-۲=-۷<۰\Rightarrow x<\frac{۲}{۵}, y<۰$

همان‌طور که دیده می‌شود، به‌ازای $x>\frac{۲}{۵}$ علامت y، مثبت و به‌ازای $x<\frac{۲}{۵}$ علامت y، منفی است.

مثال

صفحهٔ ۸۵ کتاب‌درسی

x		$\frac{۱}{۲}$		۳	
$۲x-۱$	−	○	+		+
$۳-x$	+		+	○	−
A	−	○	+	○	−

دقت کنید که روی ستون‌ها نیز قاعدهٔ ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x=۴$ و $x=۰$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست‌آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$A=(۲x-۱)(۳-x)\xrightarrow{x=۴}A=۷\times(-۱)=-۷\Rightarrow x>۳, A<۰$$

$$A=(۲x-۱)(۳-x)\xrightarrow{x=۰}A=(-۱)\times(۳)=-۳\Rightarrow x<\frac{۱}{۲}, A<۰$$

همان‌طور که دیده می‌شود، به‌ازای $x>۳$ یا $x<\frac{۱}{۲}$ علامت A، منفی است.

کار در کلاس .... صفحهٔ ۸۵ کتاب‌درسی

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(۳x+۱)(x-۲)$

$$\begin{cases} ۳x+۱=۰ \Rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۳x+۱$	−	○	+		+
$x-۲$	−		−	○	+
A	+	○	−	○	+

ب) $B=(۲x-۳)^۲ \Rightarrow B=(۲x-۳)(۲x-۳)$

$$۲x-۳=۰ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

چون توان $۲x-۳$ برابر با ۲ است، در جدول، دو ردیف را به $۲x-۳$ اختصاص می‌دهیم.

x		$\frac{۳}{۲}$	
$۲x-۳$	−	○	+
$۲x-۳$	−	○	+
B	+	○	+

پ) $C=x^۳(۷-x) \Rightarrow C=x\cdot x\cdot x\cdot(۷-x)$

$$\begin{cases} x=۰ \\ ۷-x=۰ \Rightarrow x=۷ \end{cases}$$

چون توان x، برابر ۳ است، در جدول، سه ردیف را به x اختصاص می‌دهیم.

x		۰		۷	
x	−	○	+		+
x	−	○	+		+
x	−	○	+		+
$۷-x$	+		+	○	−
C	−	○	+	○	−

ت) $D=\frac{x-۱}{۵-۲x}$

$$\begin{cases} \text{ریشهٔ صورت: } x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ \text{ریشهٔ مخرج: } ۵-۲x=۰ \Rightarrow -۲x=-۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

x		۱		$\frac{۵}{۲}$	
$x-۱$	−	○	+		+
$۵-۲x$	+		+	○	−
D	−	○	+	تعریف‌نشده	−

نکته

چون $\frac{۵}{۲}$ باعث صفر شدن مخرج کسر و در نتیجه تعریف نشدن D می‌شود، پس در ردیف مربوط به D برای $\frac{۵}{۲}$ «تعریف‌نشده» می‌نویسیم.

فعالیت

صفحهٔ ۸۶ کتاب‌درسی

① **فرض کنید که معادلهٔ $P(x)=۰$ ، دو ریشهٔ متمایز $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱<x_۲)$ داشته و به شکل $P(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.**

x		$x_۱$		$x_۲$	
$x-x_۱$	−	۰	+		+
$x-x_۲$	−		−	۰	+
$(x-x_۱)(x-x_۲)$	+	۰	−	۰	+
$P(x)$	موافق علامت a	۰	**مخالف علامت a**	۰	موافق علامت a

② **اگر معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر با $x_۱$ داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_۱)^۲$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.**

x		$x_۱$	
$(x-x_۱)^۲$	+	۰	+
$P(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

③ **اکنون فرض کنید $\Delta<۰$ باشد، در این‌صورت معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a^۲}\right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.**

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

$$\left.\begin{array}{l}\Delta<۰\Rightarrow-\frac{\Delta}{۴a^۲}>۰\\(x+\frac{b}{۲a})^۲\geq۰\end{array}\right\}\Rightarrow(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a^۲}>۰\Rightarrow \text{علامت}\,P(x)=\text{علامت}\,a$$

④ **با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.**

با توجه به فعالیت (۳)، اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ مثبت باشد: $\Delta<۰$ و $a>۰$

اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ منفی باشد: $\Delta<۰$ و $a<۰$

کار در کلاس

صفحهٔ ۸۸ کتاب درسی

① چندجمله‌ای $y=-x^{۲}+x+۲$ را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست‌آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$$-x^{۲}+x+۲=۰\Rightarrow a=-۱,b=۱,c=۲$$

$\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=(۱)^{۲}-۴(-۱)(۲)=۱+۸=۹\xrightarrow{\Delta>۰}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

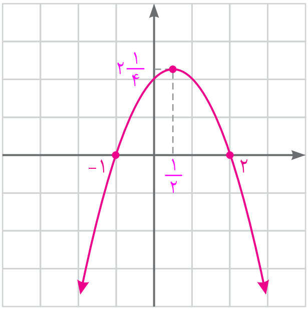
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۹}}{۲(-۱)}=\frac{-۱\pm ۳}{-۲}\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=\frac{-۱+۳}{-۲}=\frac{۲}{-۲}=-۱\Rightarrow x_{۱}=-۱\\ x_{۲}=\frac{-۱-۳}{-۲}=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow x_{۲}=۲\end{cases}$$

x		−۱		۲	
$y=-x^{۲}+x+۲$	−	۰	+	۰	−

$$y=-x^{۲}+x+۲\Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

$$y=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴(-۱)(۲)-(۱)^{۲}}{۴(-۱)}=\frac{۹}{۴}=۲\frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{رأس}\left(\frac{۱}{۲},۲\frac{۱}{۴}\right)$$

x	−۱	$\frac{۱}{۲}$	۲
y	۰	$۲\frac{۱}{۴}$	۰



همان‌طور که در نمودار نیز مشخص است، اگر $x<-۱$ یا $x>۲$ باشد، آنگاه $y<۰$، اگر $-۱<x<۲$ باشد، آنگاه $y>۰$ و اگر $x=-۱$ یا $x=۲$ باشد، آنگاه $y=۰$ خواهد بود.

② عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(x^{۲}-۹)(۳x-۱)$

$$\begin{cases}x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x^{۲}=۹\xrightarrow{\text{ریشه‌های دوم}}x=\pm ۳\\ ۳x-۱=۰\Rightarrow ۳x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

x		−۳		$\frac{۱}{۳}$		۳	
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$۳x-۱$	−		−	۰	+		+
A	−	۰	+	۰	−	۰	+

ب) $B=\frac{-x^{۲}+۶x-۹}{x^{۲}+x+۳}$

صورت: $-x^{۲}+۶x-۹=۰\Rightarrow -(x^{۲}-۶x+۹)=۰\Rightarrow -(x-۳)^{۲}=۰\Rightarrow x=۳$ ریشهٔ مضاعف

مخرج: $x^{۲}+x+۳=۰\Rightarrow a=۱,b=۱,c=۳$

$\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۱^{۲}-۴(۱)(۳)=۱-۱۲=-۱۱\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

$\Rightarrow\begin{cases}a=۱>۰\\ \Delta<۰\end{cases}\Rightarrow$ همواره مثبت

x		۳	
$-x^{۲}+۶x-۹$	−	۰	−
$x^{۲}+x+۳$	+		+
B	−	۰	−

فعالیت

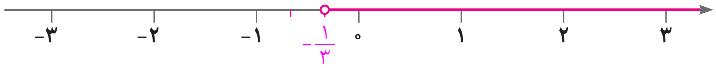
صفحهٔ ۸۹ کتاب درسی

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$-۲ < ۳x - ۱ \quad , \quad ۳x - ۱ \le ۸$$

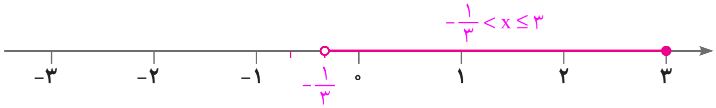
① هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه‌جواب‌های به‌دست‌آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

$$-۲ < ۳x - ۱ \Rightarrow -۲ + ۱ < +۳x - ۱ + ۱ \Rightarrow -۱ < ۳x \xrightarrow{÷۳} -\frac{۱}{۳} < x$$



$$۳x - ۱ \le ۸ \Rightarrow ۳x - ۱ + ۱ \le ۸ + ۱ \Rightarrow ۳x \le ۹ \xrightarrow{÷۳} x \le ۳$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه‌جواب‌های به‌دست‌آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



② می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانه به‌صورت $-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید:

$-۲ < ۳x - ۱ \le ۸$ به دو نامعادله ۱+ را اضافه می‌کنیم.

$-۱ < ۳x \le ۹$ دو نامعادله را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم.

$$-\frac{۱}{۳} < x \le ۳$$

جواب به‌دست‌آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

با جواب به‌دست‌آمده در بالا، برابر است.

نامعادلهٔ دوگانهٔ فوق را به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳x - ۱ > -۲ \\ ۳x - ۱ \le ۸ \end{cases}$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۹۰ کتاب‌درسی

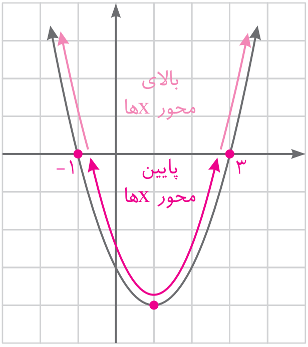
حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵ \le C \le ۲۵$؛ سپس از رابطهٔ داده‌شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست‌آمده را حل کنید.)

$$۱۵ \le C \le ۲۵ \Rightarrow ۱۵ \le \frac{۵}{۹}(F - ۳۲) \le ۲۵ \xrightarrow{×۹} ۱۳۵ \le ۵(F - ۳۲) \le ۲۲۵ \xrightarrow{÷۵} ۲۷ \le F - ۳۲ \le ۴۵$$

$$\xrightarrow{+۳۲} ۲۷ + ۳۲ \le \underbrace{F - ۳۲ + ۳۲}_{۰} \le ۴۵ + ۳۲ \Rightarrow ۵۹ \le F \le ۷۷$$

فعالیت .... صفحهٔ ۹۰ کتاب‌درسی

سهمی $y = x^{۲} - ۲x - ۳$ را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم‌شده، برای چه مقادیری از x ، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

اگر $-۱ < x < ۳$ باشد، نمودار سهمی، پایین محور xها قرار می‌گیرد.

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y = x^{۲} - ۲x - ۳$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x ، علامت y منفی است؟

روش اول:

$$y = x^{۲} - ۲x - ۳ \xrightarrow{\text{تجزیه}} y = (x-۳)(x+۱) \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

x		-۱		۳	
$x - ۳$	$-$		$-$	۰	$+$
$x + ۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$y = x^{۲} - ۲x - ۳$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

روش دوم:

$$y = x^{۲} - ۲x - ۳ \Rightarrow a = ۱, b = -۲, c = -۳$$

$$\Rightarrow \Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۲)^{۲} - ۴(۱)(-۳) = ۴ + ۱۲ = ۱۶ \xrightarrow{\Delta > ۰}$$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۲) \pm \sqrt{۱۶}}{۲(۱)} = \frac{۲ \pm ۴}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \frac{۲+۴}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow x_{۱} = ۳ \\ x_{۲} = \frac{۲-۴}{۲} = \frac{-۲}{۲} = -۱ \Rightarrow x_{۲} = -۱ \end{cases}$$

x		-۱		۳	
$y = x^{۲} - ۲x - ۳$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

همان‌طور که در هر دو روش مشاهده می‌شود، اگر $-۱ < x < ۳$ باشد، علامت y، منفی و در نتیجه نمودار سهمی پایین محور yها خواهد بود.

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده در هریک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^{۲} - ۲x - ۳ < ۰$ استفاده کرد. برای حل این نامعادله، باید مقادیری از x را پیدا کنیم که به‌ازای آنها نمودار سهمی $y = x^{۲} - ۲x - ۳$ ، پایین محور xها (یعنی $y < ۰$) باشد. همان‌طور که مشاهده شد، به‌ازای $-۱ < x < ۳$ این اتفاق می‌افتد و در نتیجه مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\underbrace{x^{۲} - ۲x - ۳}_{y} < ۰$ برابر $-۱ < x < ۳$ است.

کار در کلاس

صفحهٔ ۹۰ کتاب‌درسی

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^۲ \le ۴$

روش هندسی:

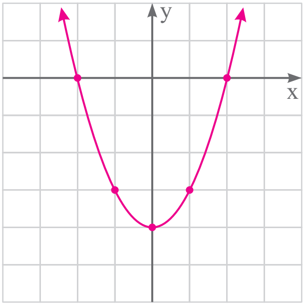
$\Rightarrow x^۲ - ۴ \le ۰ \Rightarrow y = x^۲ - ۴ \le ۰$

چون $y \le ۰$، بنابراین باید xهایی را پیدا کنیم که به‌ازای آنها، نمودار سهمی روی محور xها یا پایین آن قرار گیرد.

x	-۱	۰	۱
y	-۳	-۴	-۳

محل برخورد سهمی با محور xها: $y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴$

$\Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow (۲,۰),(-۲,۰)$



همان‌طور که دیده می‌شود، نمودار سهمی به‌ازای $-۲ \le x \le ۲$ روی محور xها یا پایین آن قرار دارد. بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^۲ \le ۴$ به‌صورت $-۲ \le x \le ۲$ است.

روش جدول تعیین علامت:

$x^۲ \le ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴ \le ۰ \Rightarrow y = x^۲ - ۴ \Rightarrow x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

x		-۲		۲	
$y \le ۰$	+		−		+
		جواب	جواب	جواب	

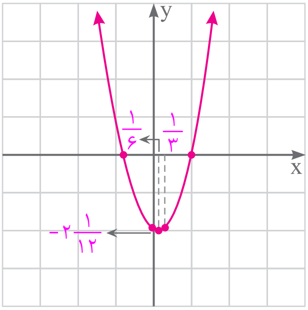
با توجه به جدول، به‌ازای $-۲ \le x \le ۲$، $y = ۰$ (نمودار سهمی روی محور xها) یا $y < ۰$ (نمودار سهمی، پایین محور xها) است؛ بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ داده‌شده، به‌صورت $-۲ \le x \le ۲$ است.

ب) $۳x^۲ - x - ۲ \ge ۰$

روش هندسی:

$y = ۳x^۲ - x - ۲ \ge ۰$

چون $y \ge ۰$، بنابراین باید xهایی را پیدا کنیم که به‌ازای آنها، نمودار سهمی روی محور xها یا بالای آن قرار گیرد.



$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۱)}{۲ \times ۳} = \frac{۱}{۶}$$

$$y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴(۳)(-۲) - (-۱)^۲}{۴(۳)} = \frac{-۲۴ - ۱}{۱۲} = \frac{-۲۵}{۱۲} = -۲\frac{۱}{۱۲}$$

$\Rightarrow$ رأس $(\frac{۱}{۶}, -۲\frac{۱}{۱۲})$

x	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
y	-۲	$-۲\frac{۱}{۱۲}$	-۲

محل برخورد با محور xها: $y = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۳, b = -۱, c = -۲$

معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد. $\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۳)(-۲) = ۱ + ۲۴ = ۲۵ \xrightarrow{\Delta > ۰}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۳)}=\frac{۱\pm۵}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱+۵}{۶}=\frac{۶}{۶}=۱\Rightarrow x_۱=۱\\ x_۲=\frac{۱-۵}{۶}=\frac{-۴}{۶}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow x_۲=-\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow(۱,۰),(-\frac{۲}{۳},۰)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، نمودار سهمی به‌ازای $x\geq۱$ یا $x\leq-\frac{۲}{۳}$ روی محور xها یا بالای آن قرار دارد. بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $۳x^۲-x-۲\geq۰$ به‌صورت $x\geq۱$ یا $x\leq-\frac{۲}{۳}$ است.

روش جدول تعیین علامت:

$$۳x^۲-x-۲\geq۰\Rightarrow y=۳x^۲-x-۲\Rightarrow۳x^۲-x-۲=۰\Rightarrow a=۳\,,\,b=-۱\,,\,c=-۲\Rightarrow\Delta=۲۵\Rightarrow x_۱=۱\,,\,x_۲=-\frac{۲}{۳}$$

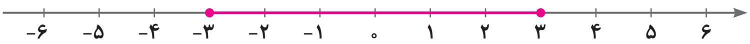
x		$-\frac{۲}{۳}$		۱	
$y\geq۰$	+	○	−	○	+
	جواب	جواب		جواب	جواب

با توجه به جدول، به‌ازای $x\geq۱$ یا $x\leq-\frac{۲}{۳}$ ، $y=۰$ (نمودار سهمی روی محور xها) یا $y>۰$ (نمودار سهمی بالای محور xها) است؛ بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ داده‌شده، به‌صورت $x\geq۱$ یا $x\leq-\frac{۲}{۳}$ است.

فعالیت

صفحهٔ ۹۱ و ۹۲ کتاب درسی

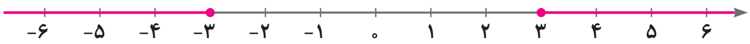
① نامعادلهٔ $|x|\leq۳$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

$-۳\leq x\leq۳\Rightarrow[-۳\,,\,۳]$

② نامعادلهٔ $|x|\geq۳$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعهٔ این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

$x\leq-۳$ یا $x\geq۳\Rightarrow(-\infty\,,\,-۳]\cup[۳\,,\,+\infty)$

③ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{cases}|x|\leq۳\Rightarrow-۳\leq x\leq۳\Rightarrow\text{مجموعه‌جواب (به شکل بازه)}=[-۳\,,\,۳]\\ |x|\geq۳\Rightarrow x\geq۳\text{ یا }x\leq-۳\Rightarrow\text{مجموعه‌جواب (به شکل بازه)}=(-\infty\,,\,-۳]\cup[۳\,,\,+\infty)\end{cases}$$

نکته

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد، در این‌صورت:

۱- اگر $|u| \le a$ آنگاه $-a \le u \le a$.

۲- اگر $|u| \ge a$ آنگاه $u \ge a$ یا $u \le -a$.

اگر در هریک از نامعادله‌ها علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ‌کدام از جواب‌ها نیز، علامت مساوی ندارند.

کار در کلاس

صفحهٔ ۹۳ کتاب‌درسی

① در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه‌جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $|\frac{x}{۳}+۱| < \frac{۲}{۳}$

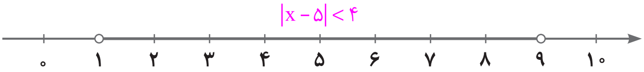
$$-\frac{۲}{۳} < \frac{x}{۳}+۱ < \frac{۲}{۳} \xrightarrow{-۱} -\frac{۲}{۳}-۱ < \frac{x}{۳} < \frac{۲}{۳}-۱ \Rightarrow -\frac{۵}{۳} < \frac{x}{۳} < -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۳} -۵ < x < -۱ \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-۵,-۱)$$

ب) $|۵-۲x| \ge ۱$

$$\begin{cases} ۵-۲x \ge ۱ \Rightarrow -۲x \ge ۱-۵ \Rightarrow -۲x \ge -۴ \Rightarrow x \le ۲ \Rightarrow (-\infty , ۲] \\ \text{یا} \\ ۵-۲x \le -۱ \Rightarrow -۲x \le -۱-۵ \Rightarrow -۲x \le -۶ \Rightarrow x \ge ۳ \Rightarrow [۳ , +\infty) \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty , ۲] \cup [۳ , +\infty)$$

توجه: در حل نامعادله، اگر طرفین نامعادله را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

② یک نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که مجموعه‌جواب آن بازهٔ (۹ , ۱) باشد.



برای به‌دست آوردن نامعادله، باید میانگین ۹ و ۱ را به‌دست آوریم و سپس x را منهای میانگین کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{۱+۹}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$۱ < x < ۹ \Rightarrow ۱-۵ < x-۵ < ۹-۵ \Rightarrow -۴ < x-۵ < ۴ \Rightarrow |x-۵| < ۴$$

برای به دست آوردن نامعادلهٔ قدر مطلقی که مجموعه جواب آن بازهٔ (a,b) باشد، به این صورت عمل می‌کنیم:

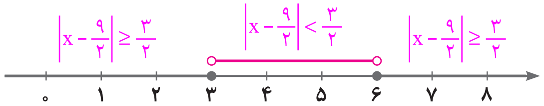
$$c = \frac{a+b}{۲}$$

$$x \in (a,b) \Rightarrow a < x < b \xrightarrow{-c} a-c < x-c < b-c \xrightarrow{|a-c|=|b-c|=d} |x-c| < d$$

نکته

در صورتی که مجموعه جواب به صورت $[a,b]$ باشد، علامت‌های $<$ یا $>$ را به صورت $\le$ یا $\ge$ استفاده می‌کنیم.

③ **یک نامعادلهٔ قدرمطلق بنویسید که مجموعه‌جواب آن $(-\infty\,,\,۳]\cup[۶\,,\,+\infty)$ باشد.**



می‌توانیم یک نامعادله برای مجموعه‌جواب $(۳\,,\,۶)$ مانند سؤال قبل بسازیم و در نهایت جهت نامساوی‌ها را برعکس کنیم.

$$\text{میانگین}=\frac{۳+۶}{۲}=\frac{۹}{۲}\Rightarrow ۳<x<۶\Rightarrow ۳-\frac{۹}{۲}<x-\frac{۹}{۲}<۶-\frac{۹}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x-\frac{۹}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow |x-\frac{۹}{۲}|<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین نامعادلهٔ مربوط به مجموعه‌جواب $(-\infty\,,\,۳]\cup[۶\,,\,+\infty)$ به‌صورت $|x-\frac{۹}{۲}|\ge\frac{۳}{۲}$ خواهد شد.

تمرین ---------- صفحهٔ ۹۳ کتاب‌درسی

① **در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه‌جواب را به شکل بازه بنویسید.**

الف) $۱<۲x-۳\le ۳ \xrightarrow{+۳} ۴<۲x\le ۶ \xrightarrow{\div ۲} ۲<x\le ۳\Rightarrow$ مجموعه جواب: $۲<x\le ۳\Rightarrow x\in(۲,۳]$

ب) $x+۱\le ۵-x<۲x+۳$

برای حل، دستگاه نامعادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x+۱\le ۵-x\Rightarrow x+۱+x\le ۵-x+x\Rightarrow ۲x+۱\le ۵\Rightarrow ۲x\le ۴\Rightarrow x\le ۲\Rightarrow x\in(-\infty\,,\,۲] \\ ۵-x<۲x+۳\Rightarrow ۵-x+x<۲x+۳+x\Rightarrow ۵<۳x+۳\Rightarrow ۲<۳x\Rightarrow x>\frac{۲}{۳}\Rightarrow x\in(\frac{۲}{۳}\,,\,+\infty) \end{cases}$$

اشتراک دو جواب را به‌دست می‌آوریم: مجموعه جواب: $\frac{۲}{۳}<x\le ۲\Rightarrow x\in(\frac{۲}{۳}\,,\,۲]$

پ) $-۲<\frac{۵-x}{۲}<۰ \xrightarrow{\times ۲} -۴<۵-x<۰ \xrightarrow{-۵} -۹<-x<-۵ \xrightarrow{\times(-۱)} ۹>x>۵$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب: $۵<x<۹\Rightarrow x\in(۵\,,\,۹)$

ت) $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\ge ۰\Rightarrow A=\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\ge ۰$

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{صورت}: ۴-۲x=۰\Rightarrow -۲x=-۴\Rightarrow x=۲ \\ \text{مخرج}: ۳x+۱=۰\Rightarrow ۳x=-۱\Rightarrow x=\frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب: $-\frac{۱}{۳}<x\le ۲\Rightarrow x\in(-\frac{۱}{۳}\,,\,۲]$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴-۲x$	+		+	∘	−
$۳x+۱$	−	∘	+		+
$A\ge ۰$	−		+	∘	−
		تعریف نشده	جواب	جواب	

ث) $x(x^۲+۴)<۰\Rightarrow A=x(x^۲+۴)<۰$ $\begin{cases} x^۲+۴=۰\Rightarrow\Delta=(۰)^۲-۴(۱)(۴)=۰-۱۶=-۱۶<۰\Rightarrow \\ x=۰ \end{cases}$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

x		۰	
x	−	∘	+
$x^۲+۴$	+		+
$A<۰$	−	∘	+
	جواب		

$\Rightarrow$ مجموعه جواب: $x<۰\Rightarrow x\in(-\infty\,,\,۰)$

ج) $\frac{x^۳-x}{x^۲-۲x+۲}\le ۰ \Rightarrow A=\frac{x^۳-x}{x^۲-۲x+۲}\le ۰$

صورت : $x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱\end{cases}$

مخرج : $x^۲-۲x+۲=۰\Rightarrow \Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(۲)=۴-۸=-۴<۰\Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

x		−۱		۰		۱	
x	−		−	۰	+		+
$x^۲-۱$	+	۰	−		−	۰	+
$x^۲-۲x+۲$	+		+		+		+
$A\le ۰$	−	۰	+	۰	−	۰	+
	جواب	جواب		جواب	جواب	جواب	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $x\le -۱$ یا $۰\le x\le ۱ \Rightarrow x\in(-\infty,-۱]\cup[۰,۱]$

چ) $|۷-۲x|<۱$

$$-۱<۷-۲x<۱\xrightarrow{-۷}-۱-۷<-۲x<۱-۷\Rightarrow -۸<-۲x<-۶\xrightarrow{\div(-۲)}۴>x>۳$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $۳<x<۴\Rightarrow x\in(۳,۴)$

ح) $|\frac{x-۱}{۲}-۱|\ge ۳$

$$\begin{cases} \frac{x-۱}{۲}-۱\ge ۳\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}\ge ۳+۱\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}\ge ۴\xrightarrow{\times ۲}x-۱\ge ۸\Rightarrow x\ge ۸+۱\Rightarrow x\ge ۹\Rightarrow x\in[۹,+\infty) \\ \text{یا} \\ \frac{x-۱}{۲}-۱\le -۳\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}\le -۳+۱\Rightarrow \frac{x-۱}{۲}\le -۲\xrightarrow{\times ۲}x-۱\le -۴\Rightarrow x\le -۴+۱\Rightarrow x\le -۳\Rightarrow x\in(-\infty,-۳] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $x\le -۳$ یا $x\ge ۹\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[۹,+\infty)$

② **به‌ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A=x^۲+۳x+k$ همواره مثبت است؟** باید ۲ شرط به‌صورت هم‌زمان برقرار باشد:

۱- ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد که در اینجا برقرار است: $۱>۰$.

۲- باید $\Delta<۰$ باشد، پس: $\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow \Delta=۳^۲-۴(۱)(k)<۰\Rightarrow ۹-۴k<۰\Rightarrow -۴k<-۹\Rightarrow k>\frac{۹}{۴}$

③ **به‌ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y=mx^۲-mx-۱$ همواره پایین محور xهاست؟**

دو شرط باید به‌صورت هم‌زمان برقرار باشد:

۱- ضریب $x^۲$ باید منفی باشد که در این‌صورت، داریم: $m<۰\,(۱)$

۲- باید $\Delta<۰$ باشد، پس: $\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow \Delta=(-m)^۲-۴(m)(-۱)<۰\Rightarrow m^۲+۴m<۰\Rightarrow m(m+۴)<۰$

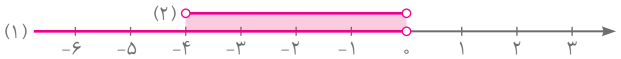
به روش تعیین علامت، مجموعه‌جواب این نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

m		-۴		۰	
m	−		−		+
m+۴	−		+		+
$m(m+۴)<۰$	+		− جواب		+

$$m(m+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ m+۴=۰ \Rightarrow m=-۴ \end{cases}$$

⇒ مجموعه‌جواب: $-۴<m<۰$ (۲)

حالا اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) را به‌دست می‌آوریم:



⇒ مجموعه‌جواب: $(۱)\cap(۲) \Rightarrow -۴<m<۰$

④ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-۵t^۲+۱۸t+۱۳$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$$h>۱۳ \Rightarrow -۵t^۲+۱۸t+۱۳>۱۳ \Rightarrow -۵t^۲+۱۸t>۰ \Rightarrow A=t(-۵t+۱۸)>۰$$

t		۰		$\frac{۱۸}{۵}$	
t	−		+		+
$-۵t+۱۸$	+		+		−
$A>۰$	−		+ جواب		−

$$t(-۵t+۱۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ -۵t+۱۸=۰ \Rightarrow t=\frac{۱۸}{۵} \end{cases}$$

⇒ مجموعه‌جواب: $۰<t<\frac{۱۸}{۵}$

پس در فاصلهٔ زمانی $۰<t<\frac{۱۸}{۵}$ یا $t\in\left(۰,\frac{۱۸}{۵}\right)$ ارتفاع جسم از سطح زمین، بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود.

⑤ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

$$\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰>۱۱۰ \Rightarrow \frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۹۰>۰ \xrightarrow{\times ۸} ۱۵x^۲-۲۴۰x+۷۲۰>۰$$

x		۴		۱۲	
x−۴	−		+		+
x−۱۲	−		−		+
$A>۰$	+ جواب		−		+ جواب

$$\Rightarrow ۱۵(x^۲-۱۶x+۴۸)>۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} A=۱۵(x-۴)(x-۱۲)>۰$$

$$\Rightarrow ۱۵(x-۴)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x-۱۲=۰ \Rightarrow x=۱۲ \end{cases}$$

⇒ مجموعه‌جواب: $x\in(-\infty,۴)\cup(۱۲,+\infty)$

آیا تمام جواب‌های به‌دست‌آمده قابل قبول‌اند؟ خیر، زیرا x بیانگر دقیقه است و زمان همواره مثبت است، یعنی تنها xهای مثبتی که در مجموعه‌جواب هستند، قابل قبول هستند. پس مجموعه‌جواب قابل قبول در این تمرین، به این صورت است:

$x\in[۰,۴)\cup(۱۲,+\infty)$

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

فعالیت (۱) صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقهٔ خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	۱۹

به هر کالا فقط یک قیمت می‌توان نسبت داد، یعنی یک کالای معین، دو قیمت متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش	پاک‌کن
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۸۰۰

به هر درس فقط یک نمره می‌توان نسبت داد، یعنی یک درس معین دو نمرهٔ متفاوت ندارد.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	زبان
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

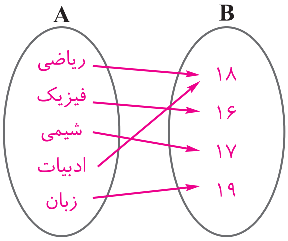
فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	زینالی
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنج‌شنبه	سه‌شنبه

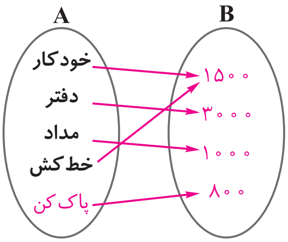
به هر شخص فقط یک سن را می‌توان نسبت داد، یعنی یک فرد مشخص در یک زمان معین دو سن متفاوت ندارد.

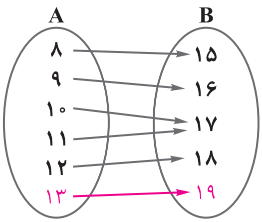
فرد	رضا	محمد	علی	احسان	آرش	ایمان
سن (سال)	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹	۱۶	۱۹

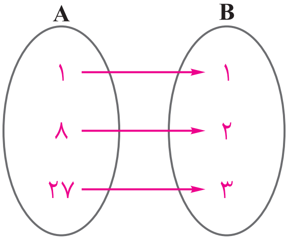
فعالیت (۲) صفحهٔ ۹۶ کتاب درسی

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به‌هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوهٔ نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.

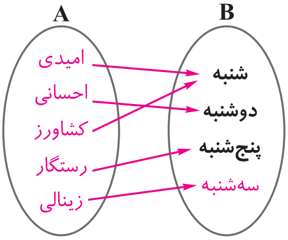


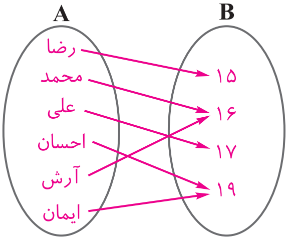






برای تکمیل این مورد از مثال‌های
مطرح‌شده در کلاس کمک بگیرید.





توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این‌گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

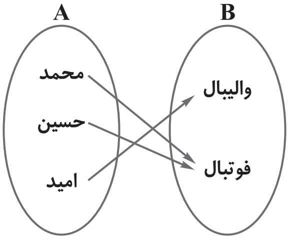
نکته

یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

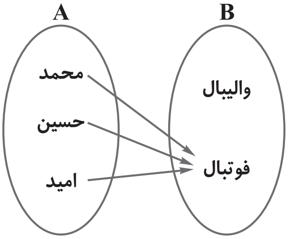
کار در کلاس

صفحهٔ ۹۶ و ۹۷ کتاب درسی

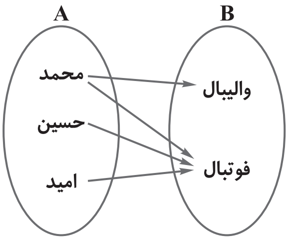
① مجموعهٔ A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعهٔ B شامل دو رشتهٔ ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام‌یک از نمودارهای پیکانی داده‌شده تابع است و کدام‌یک تابع نیست؟



نمودار (۳)



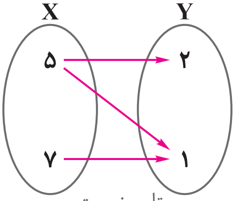
نمودار (۲)



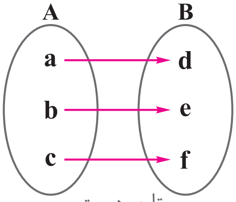
نمودار (۱)

نمودار (۱) تابع نیست، زیرا به یکی از اعضای مجموعهٔ A (محمد) بیش از یک عضو از مجموعهٔ B نسبت داده شده است.
یعنی از یکی از عضوهای مجموعهٔ A (محمد)، بیش از یک پیکان(۲ پیکان) خارج شده است.
نمودارهای (۲) و (۳) تابع هستند، زیرا از هر عضو مجموعهٔ A فقط یک پیکان خارج شده است.

② از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y این کار را به‌گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.



تابع نیست.



تابع هست.

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

پاسخ‌های متفاوتی به‌دست می‌آید ولی در همهٔ پاسخ‌ها از هر عضو مجموعهٔ A فقط یک پیکان خارج شده است و از هر عضو مجموعهٔ X یا حداقل یکی از آنها، پیکانی خارج نشده است یا حداقل ۲ پیکان خارج شده است.

③ **الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟**

بله، زیرا هر فرد، در یک زمان معین، فقط یک سن دارد.

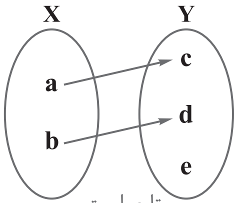
رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟

بله، زیرا هر فرد در یک زمان معین، فقط یک وزن دارد.

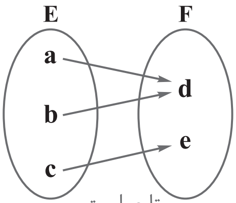
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای موردعلاقهٔ آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ خیر

توضیح دهید. ممکن است یک فرد، در یک زمان معین به چندین غذا علاقه داشته باشد.

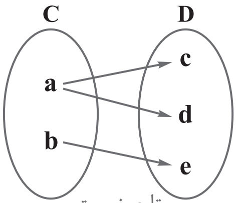
④ **کدام‌یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟**



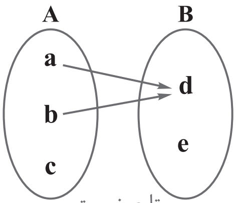
تابع است.



تابع است.



تابع نیست.



تابع نیست.

توجه داشته باشید که نمودار پیکانی، زمانی یک تابع است که هر دو شرط زیر، همزمان برقرار باشند:

۱) از هر عضو مجموعهٔ اول، حتماً پیکان خارج شده باشد.

۲) از هر عضو مجموعهٔ اول، فقط یک پیکان خارج شده باشد.

فعالیت

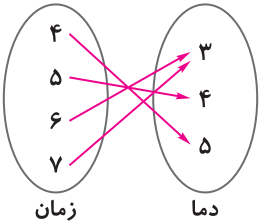
صفحهٔ ۹۷ و ۹۸ کتاب درسی

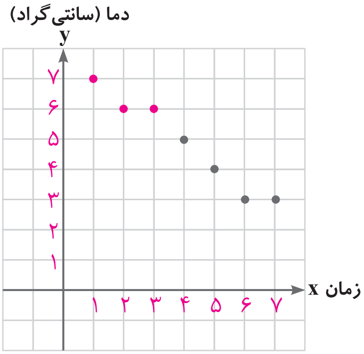
نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.

رابطهٔ بین زمان و دما را به‌صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ بله، زیرا به هر عضو از مجموعهٔ اول، فقط یک عضو از مجموعهٔ دوم نسبت داده شده است.

جدول را هم کامل کنید.

ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳





برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار، دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

g = {(۱,۷),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳),(۷,۳)}

کار در کلاس

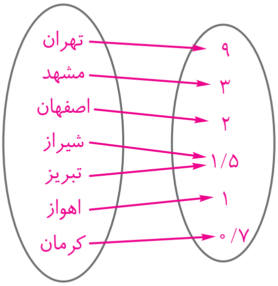
صفحهٔ ۹۸ و ۹۹ کتاب‌درسی

① نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

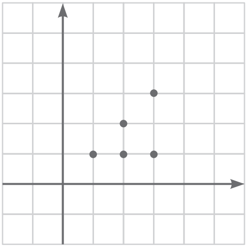
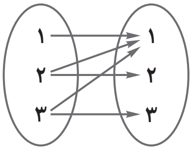
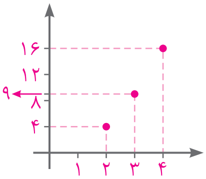
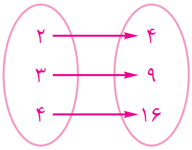
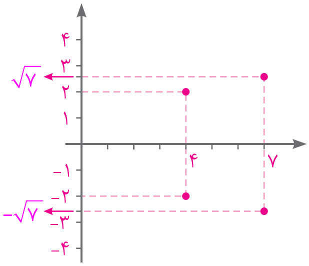
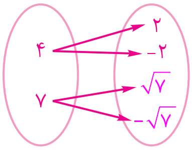
شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت (میلیون)	۹	۳	۲	۱/۵	۱/۵	۱	۰/۷

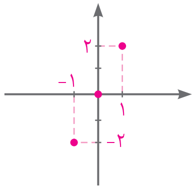
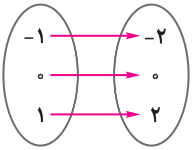
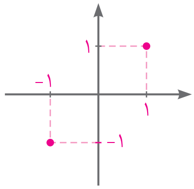
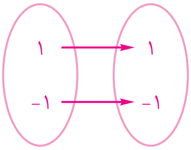
رابطهٔ بالا را به‌صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟ بله

{(کرمان,۰/۷),(اهواز,۱),(تبریز,۱/۵),(شیراز,۱/۵),(اصفهان,۲),(مشهد,۳),(تهران,۹)}



② در هر سطر جدول زیر، نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

تابع	جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
نیست			{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳)}	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
است			{(۲,۴),(۳,۹),(۴,۱۶)}	به هر عدد طبیعی بین ۱ و ۵، مربع آن را نسبت می‌دهد.
نیست			{(۴,۲),(۴,−۲),(۷,√۷), (۷,−√۷)}	به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.

است			{(−۱,−۲),(۰,۰),(۱,۲)}	به اعداد صحیح بین −۲ و ۲ دو برابر آنها را نسبت می‌دهد.
است			{(۱,۱),(−۱,−۱)}	به عددهای ۱ و −۱ ریشهٔ سوم آنها را نسبت می‌دهد.

③ **الف) کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟چرا؟**

g = {(۱ , ۵),(۲ , ۹),(۲ , ۵),(۳ , ۱۰)}

f = {(۱ , ۵),(۲ , ۹),(۳ , ۱۰)}

f تابع است، زیرا هیچ‌یک از مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب باهم برابر نیستند، به عبارت دیگر، به هر مؤلفهٔ اول، فقط یک مؤلفهٔ دوم نسبت داده شده است. g تابع نیست، زیرا در دو زوج مرتب (۲,۵) و (۲,۹) مؤلفه‌های اول برابرند، به عبارت دیگر، به عدد ۲ دو عدد متفاوت ۵ و ۹ نسبت داده شده است.

ب) با تکمیل جملهٔ زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی‌که رابطه به‌صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به‌دست آورید:

اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند

تمرین

صفحهٔ ۱۰۰ کتاب‌درسی

① **کدام‌یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.**

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا برای یک مربع با طول ضلع مشخص فقط یک عدد برای محیط می‌توان پیدا کرد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا در یک زمان معین بدن هر فرد، نمی‌تواند دو دمای متفاوت داشته باشد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

تابع است، زیرا هر فرد فقط یک گروه خونی دارد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

تابع نیست، زیرا یک دانش‌آموز ممکن است چندین دوست داشته باشد.

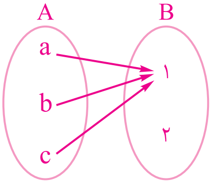
هـ) رابطه‌ای که به‌هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد. تابع نیست، زیرا هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ دوم است؛ بنابراین به هر عدد مثبت، بیش از یک عدد، نسبت داده می‌شود.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

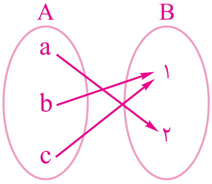
② مجموعه‌های $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲\}$ داده شده‌اند.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

۱)

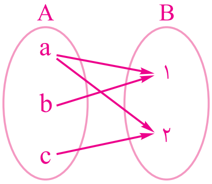


۲)

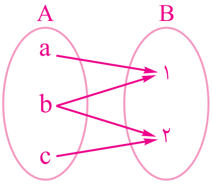


ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

۳)

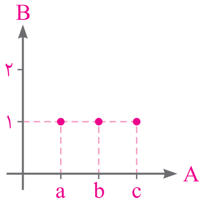


۴)



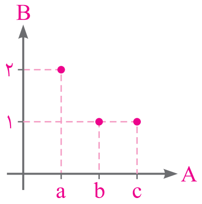
ج) چهار رابطهٔ به‌دست‌آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

۱)



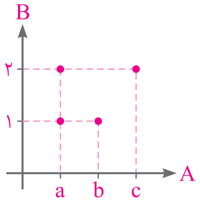
$\{(a,۱),(b,۱),(c,۱)\}$

۲)



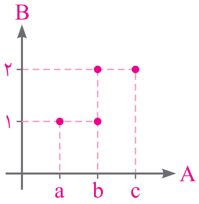
$\{(a,۲),(b,۱),(c,۱)\}$

۳)



$\{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(c,۲)\}$

۴)



$\{(a,۱),(b,۱),(b,۲),(c,۲)\}$

③ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f=\{(۲,۱),(۳,-۵),(۳,۷)\}$ f تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب متمایز با مؤلفهٔ اول برابر یعنی: (۳,۷) و (۳,−۵) وجود دارد.

$g=\{(۰,۱),(-\frac{۳}{۵},۱),(-۵,۱),(۸,۱)\}$ g تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبی، با هم برابر نیست.

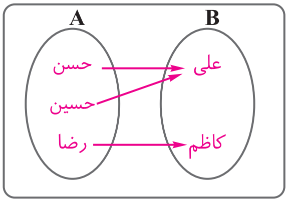
$h=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۱)\}$ h تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبی، با هم برابر نیست.

$k=\{(۲,۵)\}$ k تابع است، زیرا فقط یک زوج مرتب دارد.

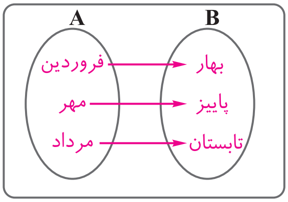
$r=\{(۲,۰),(-۷,۰)\}$ r تابع است.

$l=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),\dots\}$ l تابع است.

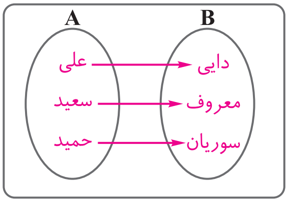
④ A و B مجموعه‌هایی غیرعددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



هر فرد را به پدرش نسبت می‌دهد.



هر ماه را به فصل مربوط به آن نسبت می‌دهد.



نام سه نفر را به نام خانوادگی‌شان نسبت می‌دهد.

درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت
صفحهٔ ۱۰۱ کتاب‌درسی

در جدول زیر رابطهٔ بین تعدادی چندضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

پنج‌ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
۵۴۰°	۳۶۰°	۳۶۰°	۱۸۰°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به‌صورت زوج مرتبی نمایش دهید. f = {(مثلث, ۱۸۰), (مربع, ۳۶۰), (لوزی, ۳۶۰), (پنج‌ضلعی, ۵۴۰)}

چرا f یک تابع است؟ زیرا مؤلفه‌های اول تمام زوج‌های مرتب، با هم متفاوت هستند. به‌عبارت دیگر، مجموع زوایای داخلی هر چندضلعی، نمی‌تواند دو مقدار متفاوت داشته باشد.

نکته

مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را «دامنه» و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا: **دامنه f = {مثلث, مربع, لوزی, پنج‌ضلعی}**

برد f = {۱۸۰, ۳۶۰, ۵۴۰}

کار در کلاس
صفحهٔ ۱۰۱ کتاب‌درسی

① **در جدول زیر رابطهٔ بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.**

۵	$\frac{۵}{۲}$	۲	$\frac{۳}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	طول ضلع
۲۰	۱۰	۸	۶	۴	۲	محیط

نمایش رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. $f=\{(\frac{۱}{۲},۲),(۱,۴),(\frac{۳}{۲},۶),(۲,۸),(\frac{۵}{۲},۱۰),(۵,۲۰)\}$

چرا این رابطه تابع است؟ زیرا تمام مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب آن، متفاوت هستند.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. برد f = {۲,۴,۶,۸,۱۰,۲۰} دامنهٔ f = $\{\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},۵\}$

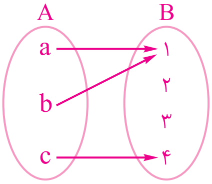
② **الف) تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.**

f = {(۱,۵),(۲,۶),(۳,۵)} ⇒ { دامنهٔ f = {۱,۲,۳} ، برد f = {۵,۶} }

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنهٔ آن دوعضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر، زیرا اگر دامنه تعداد عضوهای کمتری نسبت به برد داشته باشد، در دو تا از زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول برابر خواهند شد.

③ **اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، می‌دانیم که دامنهٔ f همان مجموعهٔ A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعهٔ B برابر است؟** خیر **مثال بزنید.**

برد تابع f ، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ B است. مانند:



⇒ f = {(a,۱) , (b,۱) , (c,۴)} ⇒ دامنهٔ f = {a,b,c} , برد f = {۱ , ۴} ⊆ B

فعالیت

صفحهٔ ۱۰۲ کتاب‌درسی

دنبالهٔ شکل‌های زیر را درنظر بگیرید:

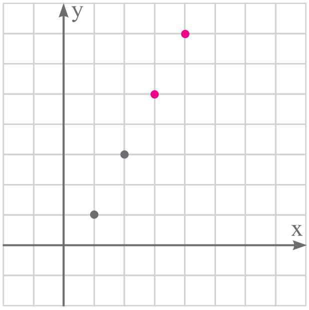
جدول را کامل کنید.

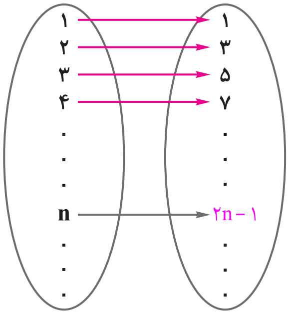
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	۲n − ۱	...

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ زیرا تمام اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول) با هم متفاوت هستند.

نمایش زوج مرتبی این تابع: $f = \{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵), \cdots ,(۱۰۰,۱۹۹), \cdots ,(n ,۲n-۱),\cdots\}$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.





دامنه و برد این تابع را بنویسید.

دامنهٔ f = {۱,۲,۳,۴,...}

برد f = {۱,۳,۵,۷,...}

دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

دامنهٔ f = مجموعهٔ اعداد طبیعی

برد f = مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰۲ کتاب‌درسی

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^۲ + ۱$ داده شده باشد و دامنهٔ آن $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ باشد، برد تابع f را به‌دست آورید.

$f(۱) = ۱^۲ + ۱ = ۲ \ , \ f(۲) = ۲^۲ + ۱ = ۵ , f(۳) = ۳^۲ + ۱ = ۱۰ \ , \ f(۴) = ۴^۲ + ۱ = ۱۷ \Rightarrow$ برد f $= \{۲ , ۵ , ۱۰ , ۱۷\}$

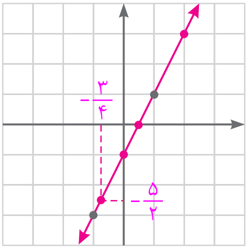
توجه داشته باشید که $f(n) = n^۲ + ۱$ بیانگر این است که زوج‌های‌مرتب این تابع، به‌صورت $(n , n^۲ + ۱)$ هستند.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰۳ کتاب‌درسی

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = ۲x - ۱$ استفاده کنید.

−۲	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۳	۲	۱	x
−۵	$-\frac{۵}{۲}$	۰	−۱	−۳	۵	۳	۱	y



آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ شباهت این جدول با جدول قبل، این است که در هر دو جدول رابطهٔ بین سطر اول (x) و سطر دوم (y) به‌صورت $y = ۲x - ۱$ است. در هر دو با کاهش x، y نیز کاهش می‌یابد. تفاوت دو جدول، در این است که در جدول فعالیت قبل n (شمارهٔ شکل) متعلق به اعداد طبیعی بود ولی در این جدول x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید. این جدول هم یک تابع است، زیرا به هر عضو از سطر اول (x)، فقط یک عضو از سطر دوم (y) نسبت داده می‌شود.

نمودار این تابع و تابع داده‌شده در فعالیت قبل، چه تفاوتی باهم دارند؟ در نمودار تابع فعالیت قبل، نقاط به‌هم وصل نبودند (نقاط جدا از هم) ولی در این نمودار، نقاط به هم وصل هستند و تشکیل یک خط داده‌اند.

دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = ۲n - ۱$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید.

چون تمام اعداد حقیقی می‌توانند به‌جای x قرار گیرند، پس دامنهٔ تابع g، برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی است. همچنین چون $y = ۲x - ۱$ است؛ بنابراین y نیز می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند. پس: $\text{دامنهٔ } g = \mathbb{R}, \text{برد } g = \mathbb{R}$

بنابراین: $\text{دامنهٔ } f \subseteq \text{دامنهٔ } g \quad , \quad \text{برد } f \subseteq \text{برد } g$

جاهای خالی را کامل کنید.

نکته

برای کامل کردن جاهای خالی، می‌توانیم خط $y = ۲x - ۱$ را به‌صورت $g(x) = ۲x - ۱$ نشان دهیم و مقادیر داده‌شده را به‌جای x قرار دهیم.

$$g(۰) = ۲(۰) - ۱ = ۰ - ۱ = -۱$$

$$g(-\frac{۱}{۵}) = ۲(-\frac{۱}{۵}) - ۱ = -\frac{۲}{۵} - ۱ = -\frac{۷}{۵}$$

$$g(\sqrt{۵}) = ۲\sqrt{۵} - ۱$$

$$g(\frac{۲}{۷}) = ۲(\frac{۲}{۷}) - ۱ = \frac{۴}{۷} - ۱ = -\frac{۳}{۷}$$

$$g(۱۰) = ۲(۱۰) - ۱ = ۲۰ - ۱ = ۱۹$$

نمایش جبری تابع داده‌شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = ۲x - ۱$

که در اینجا x یک عدد جقیقی **است.**

نکته

هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

فعالیت ---------- صفحهٔ ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب‌درسی

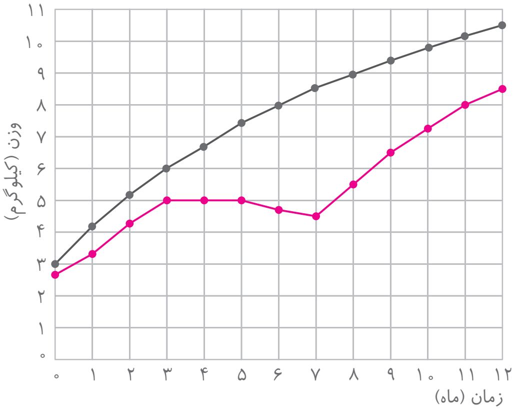
جدول زیر نشان‌دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک‌سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به‌نظر شما در فاصلهٔ زمانی تولد تا سه‌ماهگی، رشد کودک با کدام‌یک از چهار وضعیت نشان‌داده‌شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

وزن این کودک در فاصلهٔ زمانی تولد تا سه ماهگی، به ۵ کیلوگرم رسیده است. در حالی که نمودار وزن یک کودک طبیعی (شکل (۱)) نشان می‌دهد که وزن طبیعی یک کودک در این مدت، باید تقریباً ۶ کیلوگرم باشد، پس در اینجا کندی رشد وجود دارد که با نمودار (ب) در شکل (۲) نشان داده می‌شود.

ب) در چه فاصلهٔ زمانی‌ای وزن او ثابت مانده است؟ در فاصلهٔ زمانی ۳ تا ۵ ماهگی، وزن کودک در ۵ کیلوگرم ثابت مانده است.



پ) اعداد داده‌شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست‌آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسهٔ این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

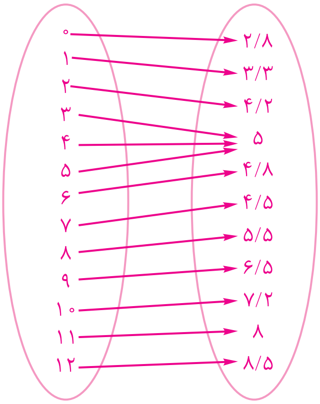
در زمان تولد، وزن کودک ۲/۸ کیلوگرم بوده است که نسبت به وزن طبیعی یعنی ۳ کیلوگرم، مقدار ۰/۲ کیلوگرم کمتر است. در فاصلهٔ تولد تا سه ماهگی، وزن کودک با کندی رشد مواجه بوده است، به‌طوری‌که در ماه سوم به‌جای ۶ کیلوگرم وزن دارای ۵ کیلوگرم وزن است. از سه ماهگی تا پنج ماهگی، وزن کودک ثابت مانده (توقف رشد) و از پنج ماهگی تا هفت ماهگی وزن کودک کاهش یافته (اُفت رشد)، به‌طوری‌که وزن کودک در ماه هفتم به ۴/۵ کیلوگرم رسیده که نسبت به وزن طبیعی ۸/۵ کیلوگرمی، مقدار ۴ کیلوگرم کمتر است. پس از هفت ماهگی افزایش وزن کودک آغاز شده و این افزایش تا آخر سال (دوازده ماهگی) ادامه می‌یابد که در ماه دوازدهم وزن کودک به ۸/۵ کیلوگرم می‌رسد که نسبت به وزن طبیعی ۱۰/۵ کیلوگرمی، باز هم ۲ کیلوگرم کمتر است.

وزن کودک در فاصلهٔ بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصلهٔ بین ماه‌ها نیز به‌صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

دامنه= {۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲}

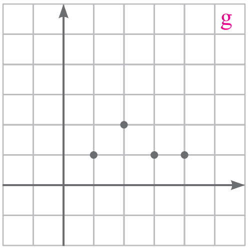
برد= {۲/۸,۳/۳,۴/۲,۵,۴/۸,۴/۵,۵/۵,۶/۵,۷/۲,۸,۸/۵}

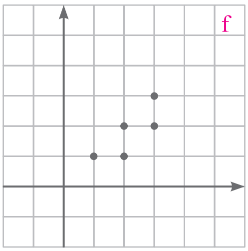


کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰۴ کتاب درسی

کدام‌یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.





می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

تابع نیست، زیرا دو زوج‌مرتب (۴,۲) و (۴,۳) دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند. $f = \{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۲),(۴,۳)\}$

تابع است، زیرا مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب، متفاوت هستند. $g = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۱)\}$

دامنهٔ $g = \{۱,۲,۳,۴\}$ برد $g = \{۱,۲\}$

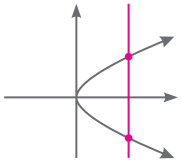
با تکمیل جملهٔ زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به‌صورت نمودار ارائه می‌شود، به‌دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه **قطع کند.**

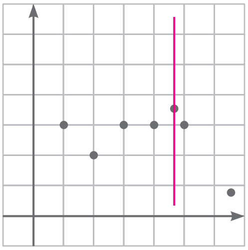
کار در کلاس

صفحهٔ ۱۰۵ کتاب‌درسی

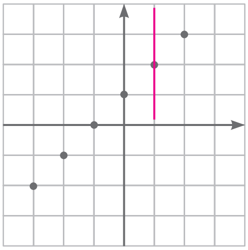
کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



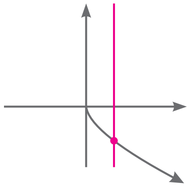
تابع نیست.



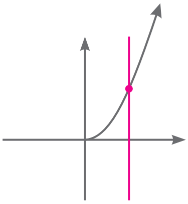
تابع است.



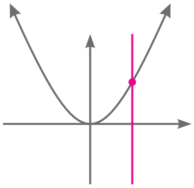
تابع است.



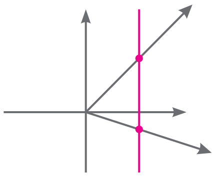
تابع است.



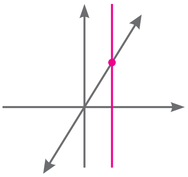
تابع است.



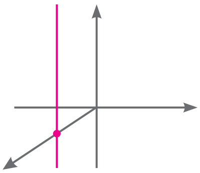
تابع است.



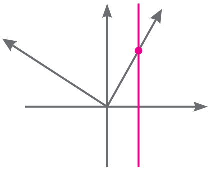
تابع نیست.



تابع است.



تابع است.

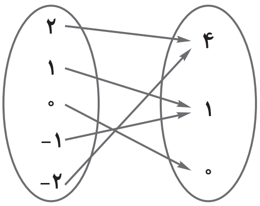


تابع است.

تمرین

صفحهٔ ۱۰۵ تا ۱۰۸ کتاب‌درسی

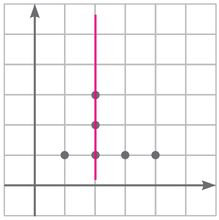
① کدام‌یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



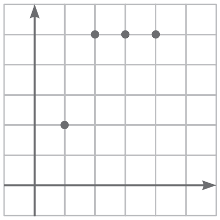
تابع است.

دامنه = {۲,۱,۰,-۱,-۲}

برد = {۴,۱,۰}



تابع نیست، زیرا خط عمودی رسم شده، نمودار را در ۳ نقطه (بیش از یک نقطه) قطع می‌کند.



تابع است.

دامنه = {۱,۲,۳,۴}

برد = {۲,۵}

② تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن تنها شامل دو عضو باشد. f = {(۱,۳),(۲,۶)} ⇒ دامنه = {۱,۲}

ب) برد آن تنها از یک‌عضو تشکیل شده باشد. g = {(۵,۱۰),(۶,۱۰)} ⇒ برد = {۱۰}

پ) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد. h = {(۱,۲)} ⇒ دامنه = {۱}

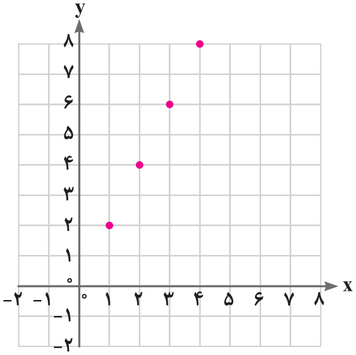
ت) دامنهٔ آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. k = {(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),...} → {دامنه = ℕ (نامتناهی)
برد = {۰}

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. l = {(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),...} → {دامنه = ℕ (نامتناهی)
برد = ℕ (نامتناهی)

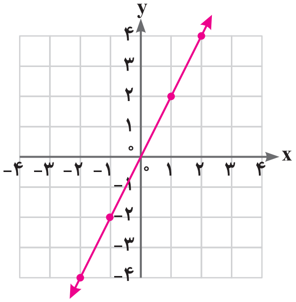
③ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)	
y = ۲x	**h(x) = ۲x**	**g(x) = ۲x**	**f(x) = ۲x**	تابع
مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی	**[۲ , ۳]**	**مجموعهٔ اعداد حقیقی**	**{۱,۲,۳,۴}**	دامنه
مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی	[۴ , ۶]	**مجموعهٔ اعداد حقیقی**	{۲,۴,۶,۸}	برد

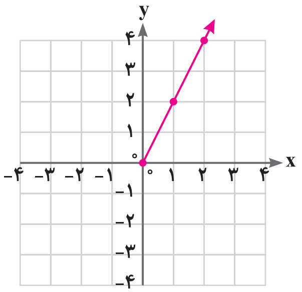
(الف)



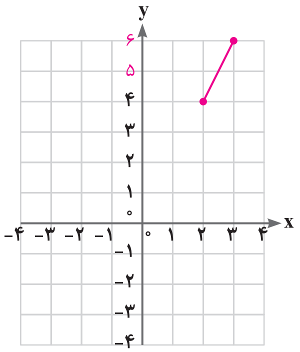
(ب)



(ت)



(پ)



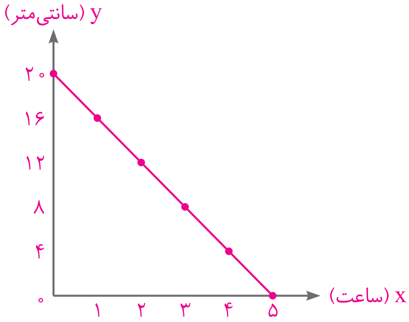
④ یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟

پس از ۵ ساعت، شمع خاموش خواهد شد.

جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.



چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

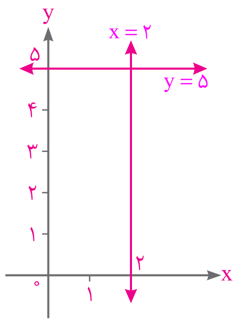
زیرا نمودار آن، به‌صورت یک خط راست است.

⑤ آیا خط x = ۲ را می‌توان به‌عنوان یک تابع درنظر گرفت؟ خیر **چرا؟** زیرا همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، اگر یک خط عمودی را روی خط x = ۲ رسم کنیم، آن را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

خط y = ۵ را چطور؟ بله، زیرا هر خط عمودی آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

همهٔ خط‌ها تابع هستند به‌جز خط‌های عمودی که معادلهٔ آنها به‌صورت x = a است، مانند خط x = ۲.

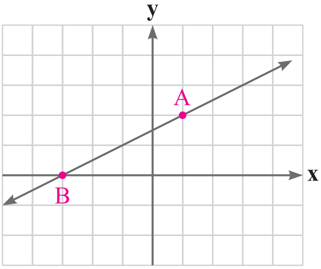


⑥ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنهٔ آن بازه [۵ , ۳−] باشد.

دامنهٔ این توابع را می‌توانیم [۵ , ۳−] درنظر بگیریم. $f(x)=۲x\ ,\ g(x)=۵x-۳\ ,\ h(x)=۷-۳x\ ,\ k(x)=۴\ ,\ \cdots$

چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟ بی‌شمار

⑦ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به‌دست آورید.



معادلهٔ هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ است، بنابراین: $B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

شیب خط: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰-۲}{-۳-۱} = \frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + b$

با جای‌گذاری $B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ در این معادله، خواهیم داشت:

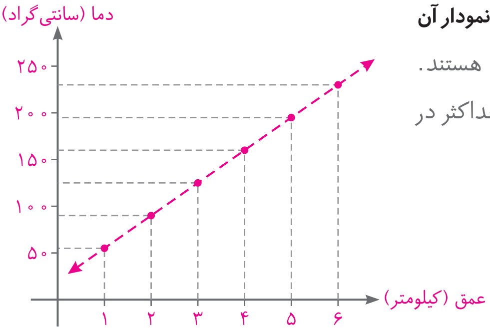
$۰ = \frac{۱}{۲} \times (-۳) + b \Rightarrow ۰ = -\frac{۳}{۲} + b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \Rightarrow$ نمایش جبری تابع: $y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری برای این تابع مناسب‌تر است.

⑧ جدول زیر، دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا، تمام اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول) متفاوت هستند. همچنین می‌توانیم بگوییم که هر خط عمودی، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس تابع است.



ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.

این تابع، یک تابع خطی است. بنابراین دو نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۹۰ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

شیب خط: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۹۰-۵۵}{۲-۱} = ۳۵ \xrightarrow{y=ax+b} y = ۳۵x + b \xrightarrow{A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵۵ \end{bmatrix}} ۵۵ = ۳۵(۱) + b \Rightarrow b = ۲۰$

$\Rightarrow y = ۳۵x + ۲۰$

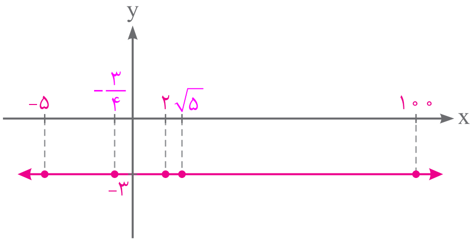
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

$x = ۱۰ \Rightarrow y = ۳۵(۱۰) + ۲۰ = ۳۵۰ + ۲۰ = ۳۷۰$

بنابراین دمای یک سنگ که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، تقریباً ۳۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

⑨ الف) تابع $f(x) = -۳$ را رسم کنید و مقادیر $f(۲)$ و $f(۱۰۰)$ و $f(-۵)$ و $f(\sqrt{۵})$ و $f(-\frac{۳}{۴})$ را به‌دست آورید.

به توابعی مانند $f(x) = -۳$ که $f(x)$ برابر با یک عدد ثابت است، تابع ثابت گفته می‌شود. در این توابع، اگر به‌جای x هر عددی حقیقی قرار گیرد، حاصل، برابر همان عدد ثابت خواهد شد. بنابراین:

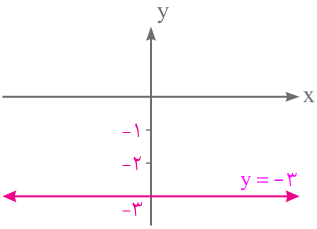


$f(x) = -۳ \Rightarrow f(۲) = -۳ \ , \ f(۱۰۰) = -۳ \ , \ f(-۵) = -۳ \ , \ f(\sqrt{۵}) = -۳ \ , \ f(-\frac{۳}{۴}) = -۳$

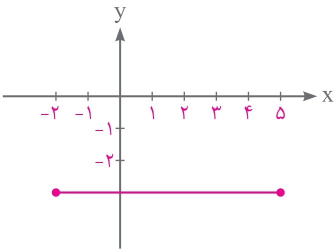
ب) اگر دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

همیشه می‌توانیم به‌جای $f(x)$، از y استفاده کنیم، زیرا همواره $y = f(x)$ است.

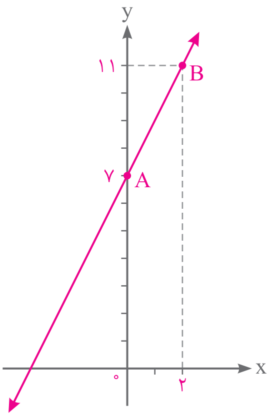
پس باید نمودار خط $y = -۳$ را رسم کنیم.



پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازهٔ $[-۲ , ۵]$ باشد، نیز رسم کنید.



⑩ **برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(۲) = ۱۱$ و $f(۰) = ۷$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.**



با توجه به اینکه $y = f(x)$ است، خواهیم داشت:

$f(۰) = ۷ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۷ \end{bmatrix}$, $f(۲) = ۱۱ \Rightarrow B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ دو نقطه روی خط A و B

شیب خط: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۱۱ - ۷}{۲ - ۰} = \frac{۴}{۲} = ۲$

$$y = ax + b \Rightarrow y = ۲x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۷ \end{bmatrix}} ۷ = ۲ \times ۰ + b \Rightarrow b = ۷$$

بنابراین معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B یا نمایش جبری تابع f، به این صورت خواهد بود: $y = ۲x + ۷$

⑪ **آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟**

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

بله، زیرا اعداد سطر اول (مؤلفه‌های اول)، با هم برابر نیستند.

⑫ **علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۱ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟**

الف) $f(t) = t - ۰/۱$
ب) $f(t) = ۰/۱t$
پ) $f(t) = t + ۰/۱$
ت) $f(t) = ۰/۱ - t$

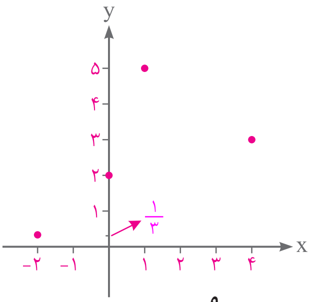
می‌توانیم این جدول را تشکیل دهیم:

t (دقیقه)	۱	۲	۳	...	t
f(t) (کیلومتر)	۰/۱	۰/۲	۰/۳	...	$۰/۱ \times t$

پس $f(t) = ۰/۱t$، یعنی گزینهٔ (ب) درست است.

⑬ **اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم: $g(۰)=۲, g(۱)=۵, g(-۲)=\frac{۱}{۳}, g(۴)=۳$؛ g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.**

$$g=\{(۰,۲),(۱,۵),(-۲,\frac{۱}{۳}),(۴,۳)\}$$



⑭ **برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ به یکدیگر وابسته‌اند.**

الف) ۲۰− درجهٔ سانتی‌گراد، چند درجهٔ فارنهایت است؟

$$F=\frac{۹}{۵}C+۳۲\xrightarrow{C=-۲۰}F=\frac{۹}{۵}(-۲۰)+۳۲=-\frac{۱۸۰}{۵}+۳۲=-۳۶+۳۲=-۴\Rightarrow F=-۴$$

پس ۲۰− درجهٔ سانتی‌گراد برابر ۴− درجهٔ فارنهایت است.

ب) ۱۰۴ درجهٔ فارنهایت چند درجهٔ سانتی‌گراد است؟

$$F=\frac{۹}{۵}C+۳۲\xrightarrow{F=۱۰۴}۱۰۴=\frac{۹}{۵}C+۳۲\xrightarrow{\times ۵}۵\times ۱۰۴=۹C+۵\times ۳۲\Rightarrow ۵۲۰=۹C+۱۶۰$$

$$\Rightarrow -۹C=-۳۶۰\Rightarrow C=۴۰$$

پس ۱۰۴ درجهٔ فارنهایت برابر ۴۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

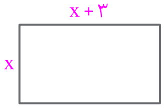
پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست آورد.

$$F=\frac{۹}{۵}C+۳۲\xrightarrow{\times ۵}۵F=۹C+۱۶۰\Rightarrow -۹C=-۵F+۱۶۰\xrightarrow{\div(-۹)}C=\frac{-۵F}{-۹}+\frac{۱۶۰}{-۹}\Rightarrow C=\frac{۵}{۹}F-\frac{۱۶۰}{۹}$$

ت) آیا رابطهٔ بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

بله، زیرا اگر $a=\frac{۵}{۹}$ و $b=-\frac{۱۶۰}{۹}$، آنگاه $C=aF+b$ است که بیانگر یک تابع خطی بین F و C است.

⑮ **طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.** اگر عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، طول آن برابر $x+۳$ خواهد بود. بنابراین اگر محیط مستطیل را P با نمایش دهیم، خواهیم داشت:



$$P=۲(\text{عرض}+\text{طول})\Rightarrow P=۲(x+x+۳)\Rightarrow P=۲(۲x+۳)\Rightarrow P=۴x+۶$$

همان‌طور که دیده می‌شود، این رابطه بیانگر یک تابع خطی بین محیط و عرض مستطیل است.

⑯ **دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.**

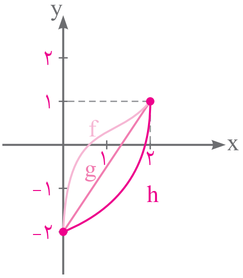
$g=\{(۱,۶),(۲,۴),(۳,۵)\}$

$f=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶)\}$

برد هر دو تابع $=\{۴,۵,۶\}$

دامنه هر دو تابع $=\{۱,۲,۳\}$

⑰ **نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن $[۰,۲]$ و برد آن $[-۲,۱]$ باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟** بی‌شمار تابع به این‌صورت می‌توان رسم کرد. به‌عنوان نمونه، در نمودار روبه‌رو، ۳ تابع را با این ویژگی رسم کرده‌ایم.



درس سوم: انواع تابع

فعالیت صفحهٔ ۱۰۹ و ۱۱۰ کتاب‌درسی

① جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	۳	۴	۲/۵	۶	۱۲	x
مساحت آن	۰/۰۱	$\frac{۱}{۴}$	۱	۹	۱۶	۶/۲۵	۳۶	۱۴۴	$x^۲$

شعاع دایره	$\frac{۱}{۲}$	۲	۳	۵	۶	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{۴}$	۴π	۹π	۲۵π	۳۶π	$\pi r^۲$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به‌صورت $f(x)=x^۲$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به‌صورت $g(r)=\pi r^۲$ قابل نمایش است.

چون f و g به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم به‌ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم.

حجم یک کره را بر حسب یک تابع درجهٔ سوم از r (شعاع کره) بنویسید: $V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر، همگی توابع چندجمله‌ای‌اند:

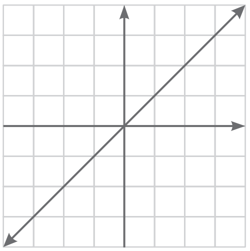
$g(x)=۴x^۲-۳$ $\qquad$ $f(x)=۲x^۲+۵x+۱$

$r(t)=-\frac{۳}{۵}t^۴+t+\sqrt{۲}$ $\qquad$ $h(a)=a^۳+۲a^۲-۴a-۹$

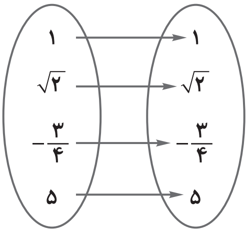
تابع f را به‌صورت $y=۲x^۲+۵x+۱$ نیز نمایش می‌دهند. بقیهٔ توابع را نیز به این‌صورت نمایش دهید.

$r(t):y=-\frac{۳}{۵}t^۴+t+\sqrt{۲}$ $\qquad$ $h(a):y=a^۳+۲a^۲-۴a-۹$ $\qquad$ $g(x):y=۴x^۲-۳$

② دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید.



دامنه $=\mathbb{R}$
برد $=\mathbb{R}$



دامنه $=\{۱,\sqrt{۲},-\frac{۳}{۴},۵\}$
برد $=\{۱,\sqrt{۲},-\frac{۳}{۴},۵\}$

$f=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

دامنهٔ $f=\{a,b,c\}$
برد $f=\{a,b,c\}$

این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی باهم دارند؟ شباهت این سه تابع، در این است که در هر تابع، دامنه و برد با هم مساوی هستند. همچنین در هر سه این توابع، هر عضو در دامنه به خودش در برد، نظیر شده است. تفاوت این سه تابع، در این است که تعداد اعضای دامنه و برد آنها با هم مساوی نیست. همچنین نوع نمایش این سه تابع نیز با یکدیگر متفاوت است.

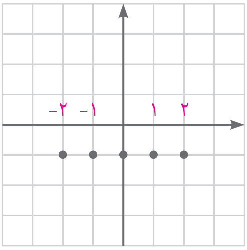
نکته

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنهٔ تابع همانی را ℝ درنظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادلهٔ $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

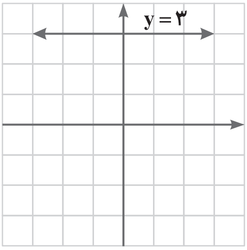
③ **سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.**

۱۰	۹	۸	ساعت
۱۹	۱۹	۱۹	دمای هوا

⇒ دامنه = {۸,۹,۱۰}
برد = {۱۹}



⇒ دامنه = {−۲,−۱,۰,۱,۲}
برد = {−۱}



⇒ دامنه = ℝ
برد = {۳}

این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟

ویژگی مشترک این سه تابع در این است که برد هر سه تابع تنها شامل یک عضو است. پس هر سه تابع، تابعی ثابت هستند، یعنی هر عضو در دامنه را به یک مقدار ثابت در برد نظیر می‌کنند.

نکته

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱۰ و ۱۱۱ کتاب‌درسی

① **برای هر مورد، مثالی به دلخواه ارائه کنید.**

مثالی از یک تابع چندجمله‌ای ارائه کنید. $f(x) = ۳x^{۴} + ۲x^{۳} - ۴x^{۲} + ۵$

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنهٔ آن {α , β , ۲ , ۵} باشد. $g = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(۲,۲),(۵,۵)\}$

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد. h = {(۱,۲) , (۲,۱)} ⇒ دامنهٔ h = {۱,۲} و برد h = {۱,۲}

همان‌طور که دیده می‌شود، هر عضو از دامنه، به خودش در برد نظیر نشده است؛ بنابراین این تابع، همانی نیست.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنهٔ آن ۵ عضوی باشد. {(۱,۱۰),(۲,۱۰),(۳,۱۰),(۴,۱۰),(۵,۱۰)}

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

به‌عنوان مثال، سرعت یک اتومبیل در حال حرکت، تابعی از زمان است. حال اگر این اتومبیل با سرعت ثابت مثلاً ۲۰ m / s حرکت کند، در هر زمان دلخواه نیز، سرعت آن برابر با مقدار ثابت ۲۰ m / s خواهد بود، یعنی: V(t) = ۲۰

② نمودارهای توابع داده‌شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

تابع	$f(x)=x^۲$	$g(x)=x^۲$	$h(x)=x^۲$	$t(x)=x^۲$
دامنه	{−۲,۰,۱,۲}	[−۲ , ۳]	مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی	مجموعهٔ اعداد حقیقی
برد	{۰,۱,۴}	[۰,۹]	(۰,+∞)	[۰,+∞)

دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.

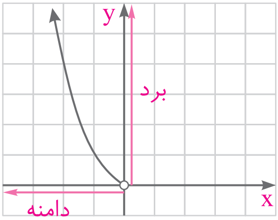
در تابع h(x) نمودار روی محور xها در بخش منفی اعداد حقیقی وجود دارد، پس:

دامنهٔ h = (−∞و۰)

همچنین نمودار، فقط در بالای محور xها وجود دارد، پس برد این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

برد h = (۰ , +∞)

h



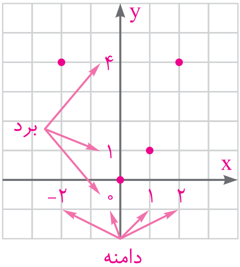
در تابع f(x) نمودار روی محور xها فقط در نقاط ۲− ، ۰ ، ۱ و ۲ دیده می‌شود، پس:

دامنهٔ f = {−۲ , ۰ , ۱ , ۲}

و روی محور yها نمودار فقط در نقاط ۰ ، ۱ و ۴ دیده می‌شود، پس:

برد f = {۰ , ۱ , ۴}

f



در تابع g(x) نمودار روی محور xها از (۲−) تا ۳ ادامه می‌یابد، پس:

دامنهٔ g = [−۲ , ۳]

و روی محور yها از صفر تا ۹ ادامه دارد، پس:

برد g = [۰ , ۹]

g

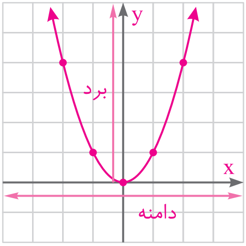
در تابع t(x) همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، نمودار در تمام محور xها دیده می‌شود، پس دامنهٔ آن، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

دامنهٔ t = ℝ

همچنین نمودار، تنها در قسمت نامنفی محور yها دیده می‌شود، پس:

برد t = [۰ , +∞)

t

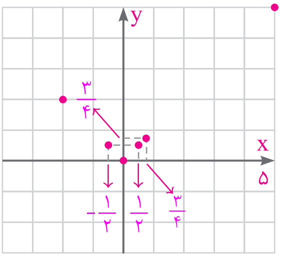


فعالیت

صفحهٔ ۱۱۱ و ۱۱۲ کتاب‌درسی

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده‌شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.

x	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۵
f(x)	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۵



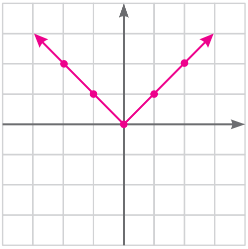
دامنهٔ $f = \{-۲, -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۵\}$

برد $f = \{۲, \frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۳}{۴}, ۵\}$

نکته

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنهٔ یک تابع قدرمطلق مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.



دامنه $= \mathbb{R}$, برد $= [۰, +\infty)$

نکته

۱- تابع قدرمطلق را به‌صورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

۲- با توجه به اینکه برای $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

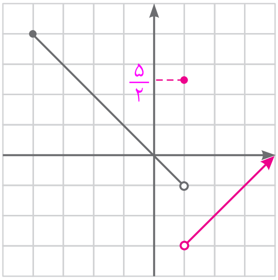
فعالیت

صفحهٔ ۱۱۲ کتاب‌درسی

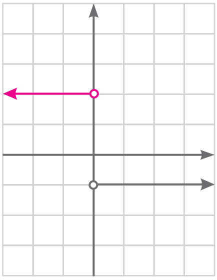
توابع f، g و h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x > ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-۴ & x > ۱ \\ \frac{۵}{۲} & x = ۱ \\ -x & -۴ \leq x < ۱ \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} ۲x & ۲ \leq x \leq ۳ \\ ۵ & x < -۱ \end{cases}$$

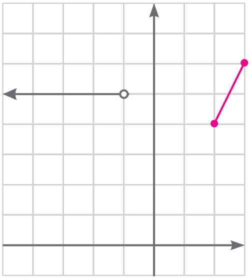
توجه داشته باشید که نمودارها را با نقطه‌یابی، در بازه‌های مربوط به آنها رسم کرده‌ایم.



g(x)



f(x)



h(x)

$$\begin{cases} \text{دامنهٔ } g = [-۴,+\infty) \\ \text{برد } g = (-۳,+\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{دامنهٔ } f = \mathbb{R}-\{۰\} \\ \text{برد } f = \{-۱,۲\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{دامنهٔ } h = (-\infty,-۱)\cup[۲,۳] \\ \text{برد } h = [۴,۶] \end{cases}$$

مقادیر $f(۳)$ ، $g(-۲)$ ، $f(-\frac{۱}{۵})$ ، $h(\sqrt{۵})$ و $g(۰)$ را بیابید.

با توجه به نمودارها و ضابطهٔ توابع، داریم:

$$f(۳)=-۱\ ,\ g(-۲)=-(-۲)=۲\ ,\ f(-\frac{۱}{۵})=۲\ ,\ h(\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}\ ,\ g(۰)=۰$$

کار در کلاس

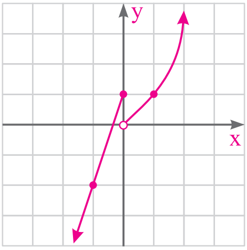
صفحهٔ ۱۱۳ کتاب‌درسی

① **نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.**

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ ۳x+۱ & x\leq ۰ \end{cases}$$

x	۰	۱	۲
y	۰	۱	۴

x	−۱	۰
y	−۲	۱

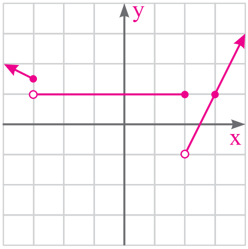


$$\begin{cases} \text{دامنهٔ } f = \mathbb{R} \\ \text{برد } f = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} ۲x-۵ & x>۲ \\ ۱ & -۳<x\leq ۲ \\ -\frac{۱}{۲}x & x\leq -۳ \end{cases}$$

x	۲	۳
y	−۱	۱

x	−۴	−۳
y	۲	$\frac{۳}{۲}$



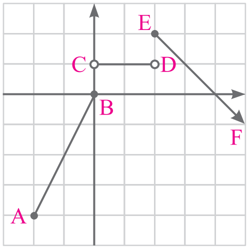
$$\begin{cases} \text{دامنهٔ } g = \mathbb{R} \\ \text{برد } g = [-۱,+\infty) \end{cases}$$

مقادیر $f(۰)$ ، $g(۰)$ ، $f(۵)$ ، $g(۲)$ ، $f(-۲)$ و $g(-\frac{۱}{۵})$ را به‌دست آورید.

با توجه به ضابطه‌های تابع و نمودارهای رسم‌شده، خواهیم داشت:

$$f(۰)=۱\ ,\ g(۰)=۱\ ,\ f(۵)=۵^{۲}=۲۵\ ,\ g(۲)=۱\ ,\ f(-۲)=۳(-۲)+۱=-۵\ ,\ g(-\frac{۱}{۵})=۱$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطهٔ آن را به‌دست آورید. دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید.



$A=\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$

$E=\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$ $F=\begin{bmatrix}۵\\-۱\end{bmatrix}$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f ، ابتدا باید معادلهٔ خط‌های AB ، CD و EF را به‌دست آوریم:

معادلهٔ خط AB :

$$\text{AB شیب خط}: a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-(-۴)}{۰-(-۲)}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow y=۲x+b\xrightarrow{B=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}}۰=۲\times۰+b\Rightarrow b=۰\Rightarrow y=۲x$$

معادلهٔ خط CD : خطی افقی است که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس معادلهٔ خط CD برابر $y=۱$ است.

معادلهٔ خط EF :

$$\text{EF شیب خط}: a=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{-۱-۲}{۵-۲}=\frac{-۳}{۳}=-۱\Rightarrow y=-۱x+b\xrightarrow{E=\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}}۲=-۲+b\Rightarrow b=۴\Rightarrow y=-x+۴$$

با توجه به نمودار، خط AB در دامنهٔ $[-۲,۰]$ ، خط CD در دامنهٔ $(۰,۲)$ و خط EF در دامنهٔ $[۲,+\infty)$ رسم شده است.

بنابراین:

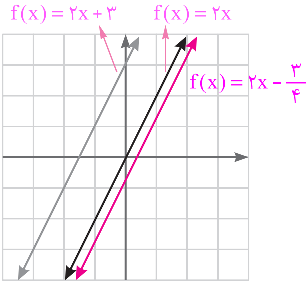
$$f(x)=\begin{cases}۲x & -۲\le x\le ۰\\ ۱ & ۰<x<۲\\ -x+۴ & x\ge ۲\end{cases}$$

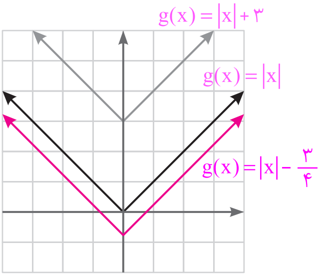
$$\begin{cases}\text{f دامنهٔ}=[-۲,+\infty)\\ \text{f برد}=(-\infty,۲]\end{cases}$$

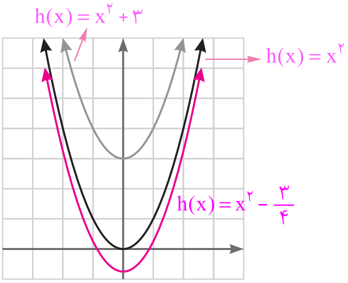
فعالیت صفحهٔ ۱۱۳ کتاب‌درسی

نمودارهای توابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=|x|$ و $h(x)=x^۲$ وتوابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=|x|+۳$ و $h(x)=x^۲+۳$ داده شده‌اند.

توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x)=۲x-\frac{۳}{۴}$ و $g(x)=|x|-\frac{۳}{۴}$ و $h(x)=x^۲-\frac{۳}{۴}$ را به همین روش رسم کنید.







اگر هر کدام از سه تابع اول را ۳ واحد در امتداد محور yها به بالا منتقل کنیم، سه تابع دوم به‌وجود می‌آیند. یعنی اگر نمودار $f(x)=۲x$ را ۳ واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=۲x+۳$ به‌وجود می‌آید و همچنین برای توابع g(x) و h(x) نیز این موضوع برقرار است. برای رسم توابع $f(x)=۲x-\frac{۳}{۴}$ ، $g(x)=|x|-\frac{۳}{۴}$ و $h(x)=x^۲-\frac{۳}{۴}$ باید نمودارهای اول را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ واحد به پایین منتقل کنیم.

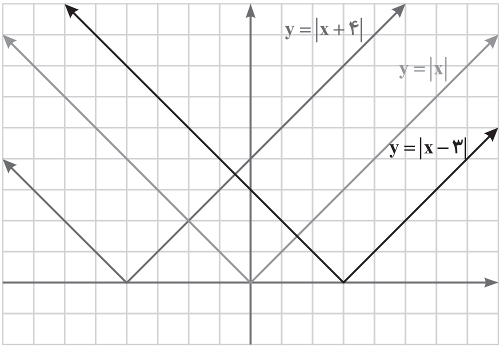
نکته

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k>۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<۰$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱۴ کتاب‌درسی

① **در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع $f(x)=|x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟**



دامنهٔ هر سه تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است، همچنین برد هر سه تابع، برابراست با اعداد حقیقی نامنفی،

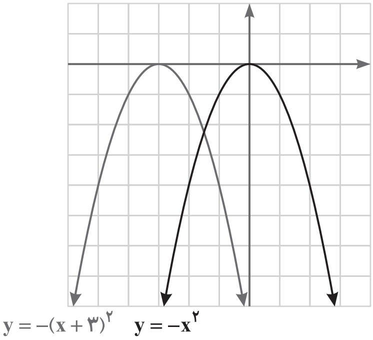
بنابراین: دامنه $=\mathbb{R}$, برد $=[۰,+\infty)$

برای رسم نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$، کافی است نمودار تابع $f(x)=|x|$ را ۳ واحد در امتداد محور xها به‌سمت راست منتقل کنیم. همچنین برای رسم نمودارتابع $f(x)=|x+۴|$، کافی است نمودارتابع $f(x)=|x|$ را ۴ واحد درامتداد محور xها به‌سمت چپ منتقل کنیم.

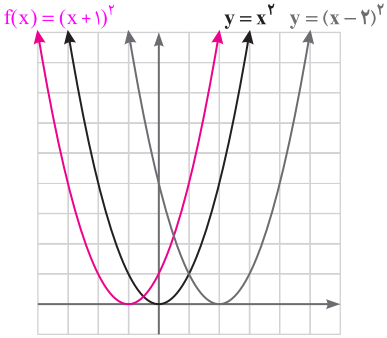
نکته

برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>۰$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

② **در شکل‌های زیر، به کمک نمودار تابع $f(x)=x^۲$ و $f(x)=-x^۲$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x)=(x+۱)^۲$ را نیز رسم کنید.**



دامنهٔ هر دو نمودار $=\mathbb{R}$
برد هر دو نمودار $=(-\infty,۰]$



دامنهٔ هر سه نمودار $=\mathbb{R}$
برد هر سه نمودار $=[۰,+\infty)$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۱۵ کتاب‌درسی

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجهٔ دوم f ، g ، h و t رسم شده‌اند.

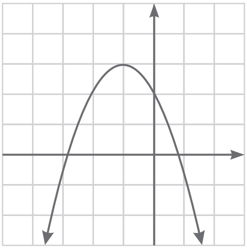
$\mathbf{t(x) = -(x+۱)^{۲} + ۳}$ $\mathbf{h(x) = (x-۳)^{۲} + ۱}$ $\mathbf{g(x) = (x+۱)^{۲} - ۱}$ $\mathbf{f(x) = (x-۵)^{۲} - ۲}$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید:

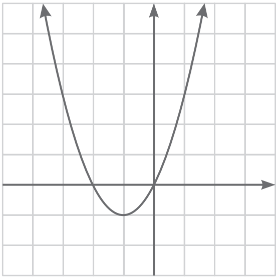
$t(x) = -(x+۱)^{۲} + ۳$

$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty , ۳] \end{cases}$



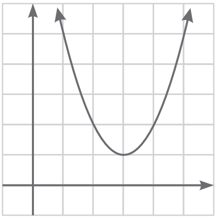
$g(x) = (x+۱)^{۲} - ۱$

$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-۱ , +\infty) \end{cases}$



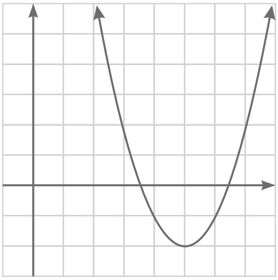
$h(x) = (x-۳)^{۲} + ۱$

$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۱ , +\infty) \end{cases}$



$f(x) = (x-۵)^{۲} - ۲$

$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-۲ , +\infty) \end{cases}$



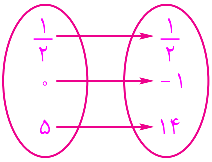
تمرین

صفحهٔ ۱۱۵ تا ۱۱۷ کتاب‌درسی

① تابع $f(x) = ۳x - ۱$ را که دامنهٔ آن مجموعه $\{\frac{۱}{۲} , ۰ , ۵\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به‌دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید.

$$f(x) = ۳x - ۱ \ , \ \text{دامنهٔ}\ f = \{\frac{۱}{۲}, ۰, ۵\} \rightarrow \begin{cases} f(\frac{۱}{۲}) = ۳(\frac{۱}{۲}) - ۱ = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲} \\ f(۰) = ۳(۰) - ۱ = ۰ - ۱ = -۱ \\ f(۵) = ۳(۵) - ۱ = ۱۵ - ۱ = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \text{برد}\ f = \{\frac{۱}{۲}, -۱, ۱۴\}$$

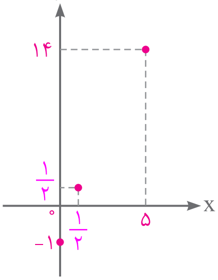
نمودار پیکانی



نمایش زوج مرتبی

$$f = \{(\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}), (۰ , -۱), (۵ , ۱۴)\}$$

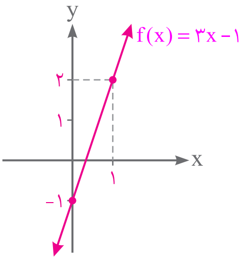
نمودار تابع



اگر دامنهٔ این تابع ℝ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

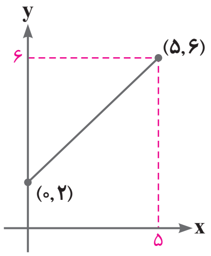
حال اگر دامنهٔ این تابع ℝ باشد، برد تابع نیز ℝ خواهد بود. زیرا هرعدد حقیقی که به‌جای x قرار گیرد، حاصل هم عددی حقیقی خواهد بود و چون در این حالت، هم دامنه و هم برد تابع نامتناهی هستند، بهتر است نمودار آن را در صفحهٔ مختصات رسم کنیم.

x	۰	۱
y	−۱	۲



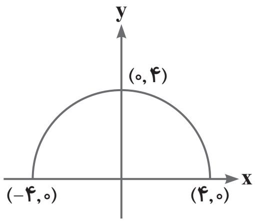
② **در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.**

(الف)



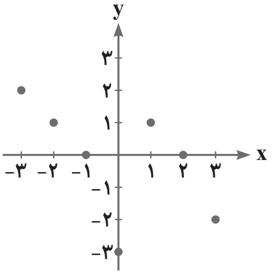
$$\begin{cases} \text{دامنه} = [۰\,,۵] \\ \text{برد} = [۲\,,۶] \end{cases}$$

(ب)



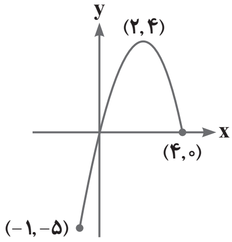
$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-۴\,,۴] \\ \text{برد} = [۰\,,۴] \end{cases}$$

(پ)



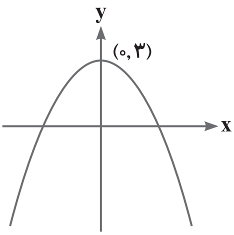
$$\begin{cases} \text{دامنه} = \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\} \\ \text{برد} = \{-۳,-۲,۰,۱,۲\} \end{cases}$$

(ت)



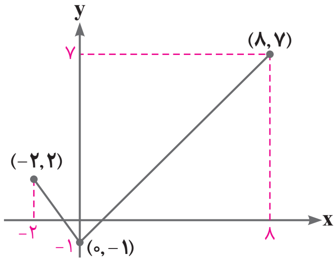
$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-۱\,,۴] \\ \text{برد} = [-۵\,,۴] \end{cases}$$

(ث)



$$\begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} = (-\infty\,,+\infty) \\ \text{برد} = (-\infty\,,۳] \end{cases}$$

(ج)



$$\begin{cases} \text{دامنه} = [-۲\,,۸] \\ \text{برد} = [-۱\,,۷] \end{cases}$$

نمایش جبری تابع (الف) را به‌دست می‌آوریم. دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\۶\end{bmatrix}$ روی خط هستند، بنابراین:

$$\text{شیب خط } AB: a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۶-۲}{۵-۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow y=\frac{۴}{۵}x+b \xrightarrow{A=\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}} ۲=\frac{۴}{۵}\times ۰+b\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow y=\frac{۴}{۵}x+۲\Rightarrow f(x)=\frac{۴}{۵}x+۲$$

نمایش جبری تابع (ج) را به‌دست می‌آوریم: تابع (ج) دو قطعه دارد که معادلهٔ هر قطعه را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۲\\۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}۸\\۷\end{bmatrix}$$

برای معادلهٔ خط AB داریم:

$$AB\text{شیب خط}: a=\frac{-۱-۲}{۰-(-۲)}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+b\xrightarrow{B=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}}-۱=-\frac{۳}{۲}\times(۰)+b\Rightarrow b=-۱\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x-۱$$

برای معادلهٔ خط BC داریم:

$$BC\ \text{شیب خط}: a=\frac{۷-(-۱)}{۸-۰}=۱\Rightarrow y=۱x+b\xrightarrow{B=\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}}-۱=۰+b\Rightarrow b=-۱\Rightarrow y=x-۱$$

پس نمایش جبری تابع (ج) به‌صورت مقابل است:

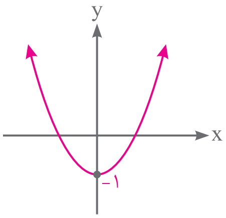
$$g(x)=\begin{cases}-\frac{۳}{۲}x-۱ & -۲\le x\le ۰\\ x-۱ & ۰<x\le ۸\end{cases}$$

③ **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.**

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۱$ برابر $(۰,+\infty)$ و بُرد آن نیز $(۰,+\infty)$ است.

نادرست است، زیرا همان‌طور که در نمودار نیز مشخص است:

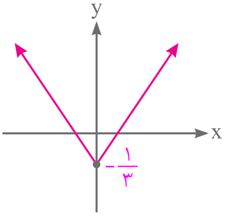
$$\begin{cases}f\ \text{دامنهٔ}=\mathbb{R}\\ f\ \text{برد}=[-۱,+\infty)\end{cases}$$



ب) دامنهٔ تابع $f(x)=|x|-\frac{۱}{۳}$ همهٔ اعداد حقیقی و بُرد آن $(۲,+\infty)$ است.

نادرست است، زیرا همان‌طور که در شکل نیز مشخص است:

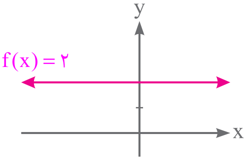
$$\begin{cases}f\ \text{دامنهٔ}=\mathbb{R}\\ f\ \text{برد}=[-\frac{۱}{۳},+\infty)\end{cases}$$



پ) دامنهٔ تابع ثابت $f(x)=۲$ برابر $(-\infty,+\infty)$ است.

درست است.

$$\begin{cases}f\ \text{دامنهٔ}=\mathbb{R}\\ f\ \text{برد}=\{۲\}\end{cases}$$



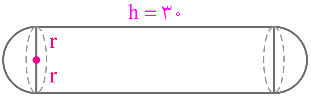
ت) اگر $f(x)=۲x+۱$ آنگاه، $f(۱)=\frac{f(۲)}{۲}$.

نادرست است، زیرا:

$$\begin{aligned}&f(۱)=۲(۱)+۱=۳\\ &f(۲)=۲(۲)+۱=۵\Rightarrow\frac{f(۲)}{۲}=\frac{۵}{۲}\end{aligned}\Rightarrow ۳\ne\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(۱)\ne\frac{f(۲)}{۲}$$

④ **یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.**

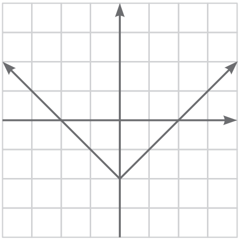
دو نیم‌کره روی‌هم، یک کره را تشکیل می‌دهند. پس حجم تانکر برابر است با مجموع حجم‌های یک کره و یک استوانه:

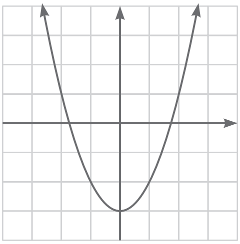


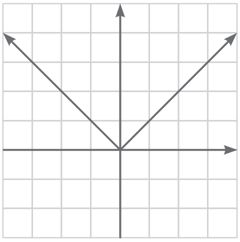
$$V(r)=V_{\text{کره}}+V_{\text{استوانه}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳+\pi r^۲h=\frac{۴}{۳}\pi r^۳+\pi r^۲\times ۳۰$$

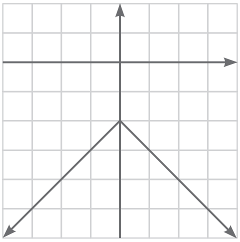
$$\Rightarrow V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^۳+۳۰\pi r^۲=۲\pi r^۲(\frac{۲}{۳}r+۱۵)$$

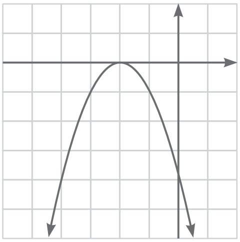
۵ هر یک از نمودارهای زیر کدام‌یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟

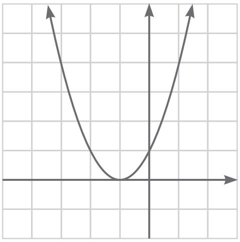

(ذ)

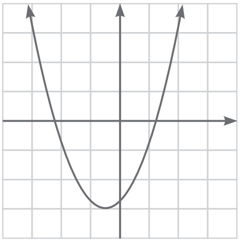

(الف)

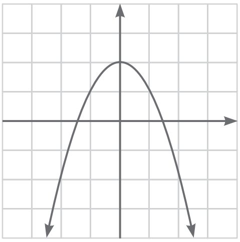

(پ)

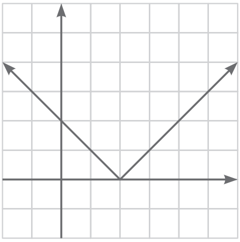

(خ)

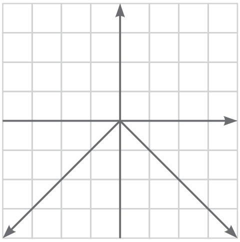

(ح)

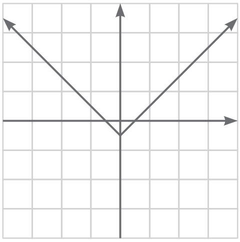

(ث)

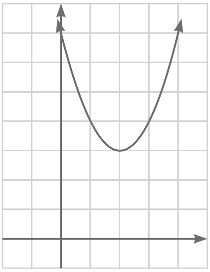

(ر)


(ب)


(چ)


(ت)


(ج)


(د)

الف) $y = x^۲ - ۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-۳, +\infty) \end{cases}$

ب) $y = -x^۲ + ۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, ۲] \end{cases}$

پ) $y = |x| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۰, +\infty) \end{cases}$

ت) $y = -|x| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, ۰] \end{cases}$

ث) $y = (x+۱)^۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۰, +\infty) \end{cases}$

ج) $y = |x| - \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-\frac{۱}{۲}, +\infty) \end{cases}$

چ) $y = |x-۲| \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۰, +\infty) \end{cases}$

ح) $y = -(x+۲)^۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, ۰] \end{cases}$

خ) $y = -|x| - ۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = (-\infty, -۲] \end{cases}$

د) $y = (x-۲)^۲ + ۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۳, +\infty) \end{cases}$

ذ) $y = |x| - ۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-۲, +\infty) \end{cases}$

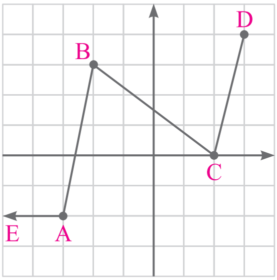
ر) $y = (x+\frac{۱}{۲})^۲ - ۳ \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [-۳, +\infty) \end{cases}$

⑥ فرض کنیم دامنهٔ هر یک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ $[-۲,۳]$ محدود شده باشد. در این‌صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

(الف) برد $= [-۳,۶]$
(ب) برد $= [-۷,۲]$
(پ) برد $= [۰,۳]$
(ت) برد $= [-۳,۰]$
(ث) برد $= [۰,۱۶]$
(ج) برد $= [-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]$
(چ) برد $= [۰,۴]$
(ح) برد $= [-۲۵,۰]$
(خ) برد $= [-۵,-۲]$
(د) برد $= [۳,۱۹]$
(ذ) برد $= [-۲,۱]$
(ر) برد $= [-۳,\frac{۳۷}{۴}]$

⑦ نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته‌شده را حساب کنید.

$\mathbf{f(-\frac{۵}{۲})}$ $\qquad$ $\mathbf{f(۰)}$ $\qquad$ $\mathbf{f(\frac{۱}{۲})}$ $\qquad$ $\mathbf{f(۳)}$ $\qquad$ $\mathbf{f(۶)}$ $\qquad$ $\mathbf{f(\sqrt{۵})}$



با توجه به نمودار، مختصات نقاط به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}-۳\\-۲\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$$

معادلهٔ خط EA:

این خط یک خط افقی است: $y=-۲$

معادلهٔ خط AB:

$$\text{شیب خط AB}: a=\frac{۳-(-۲)}{-۲-(-۳)}=۵ \Rightarrow y=۵x+b \xrightarrow{A=\begin{bmatrix}-۳\\-۲\end{bmatrix}} -۲=۵(-۳)+b \Rightarrow -۲=-۱۵+b \Rightarrow b=۱۳$$

$$\Rightarrow y=۵x+۱۳$$

معادلهٔ خط BC:

$$\text{شیب خط BC}: a=\frac{۰-۳}{۲-(-۲)}=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+b \xrightarrow{B=\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}} ۳=-\frac{۳}{۴}\times(-۲)+b \Rightarrow b=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خط CD:

$$\text{شیب خط CD}: a=\frac{۴-۰}{۳-۲}=۴ \Rightarrow y=۴x+b \xrightarrow{C=\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}} ۰=۴\times۲+b \Rightarrow b=-۸ \Rightarrow y=۴x-۸$$

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<-۳\\ ۵x+۱۳ & -۳\leq x<-۲\\ -\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲} & -۲\leq x<۲\\ ۴x-۸ & ۲\leq x\leq ۳\end{cases}$$

۶ در دامنه وجود ندارد. ← قابل محاسبه نیست: $f(۶)$

$f(\sqrt{۵})=۴\sqrt{۵}-۸$

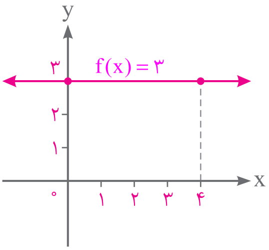
$f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۲})+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۸}$

$f(۳)=۴(۳)-۸=۴$

$f(-\frac{۵}{۲})=۵(-\frac{۵}{۲})+۱۳=\frac{۱}{۲}$

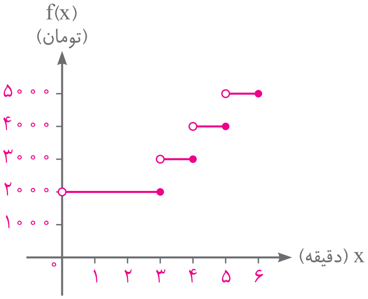
$f(۰)=-\frac{۳}{۴}\times۰+\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$

⑧ **نمودار یک تابع خطی از نقاط (۴ , ۳) و (۰ , ۳) می‌گذرد. f(−۴) و f(−۱) را به‌دست آورید.**



همان‌طور که در نمودار رسم‌شده مشاهده می‌شود، معادلهٔ این خط برابر است با $f(x)=۳$ که یک تابع ثابت است؛ بنابراین: $f(-۱)=۳\ ,\ f(-۴)=۳$

⑨ **هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.**

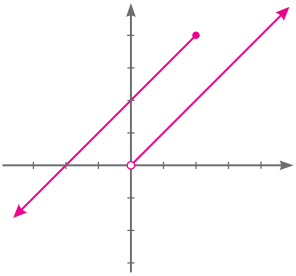


اگر x مدت زمان برقراری تماس و f(x) هزینهٔ آن باشد، داریم:

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲۰۰۰ & ۰<x\leq ۳ \\ ۳۰۰۰ & ۳<x\leq ۴ \\ ۴۰۰۰ & ۴<x\leq ۵ \\ ۵۰۰۰ & ۵<x\leq ۶ \end{cases}$$

⑩ **کدام‌یک از رابطه‌های زیر، یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟**

نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

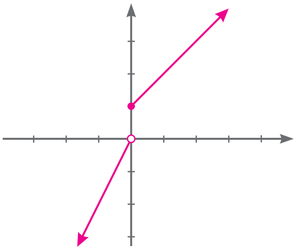


$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ x+۲ & x\leq ۲ \end{cases}$$

x	۰	۱
y	۰	۱

x	۰	۲
y	۲	۴

هر خط عمودی بین ۰ و ۲، نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس f تابع نیست.



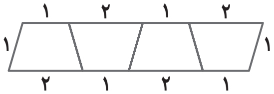
$$g(x)=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ x+۱ & x\geq ۰ \end{cases}$$

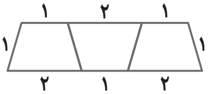
x	−۱	۰
y	−۲	۰

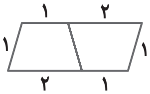
x	۰	۱
y	۱	۲

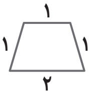
هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس g تابع است.

⑪ **الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.**









الف) جدول زیر را کامل کنید.

n	۵	۴	۳	۲	۱	**تعداد ذوزنقه‌ها**
۳n + ۲	۱۷	۱۴	۱۱	۸	۵	**محیط شکل**

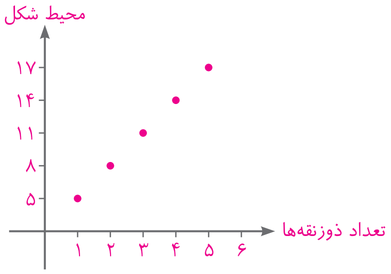
+۳ +۳ +۳ +۳

ب) چرا رابطهٔ بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟

زیرا هر شکل، فقط یک مقدار را برای محیط خود، اختیار می‌کند.

دامنه و برد این تابع چیست؟ برد $=\{۳n+۲ \mid n\in \mathbb{N}\}$, دامنه $=\mathbb{N}$

نمودار آن را رسم کنید.



⑫ **نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱,-۲)$ و $(۲,-۳)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.**

معادلهٔ سهمی به‌صورت: $y=ax^۲+bx+c$ است و نقاط $(۱,-۲)$ و $(۲,-۳)$ روی آن قرار دارند. بنابراین:

$$(۱,-۲)\Rightarrow -۲=a(۱)^۲+b(۱)+c\Rightarrow a+b+c=-۲\quad(۱)$$

$$(۲,-۳)\Rightarrow -۳=a(۲)^۲+b(۲)+c\Rightarrow ۴a+۲b+c=-۳\quad(۲)$$

چون سهمی محور yها را در نقطه‌ای به‌عرض ۱ قطع می‌کند. پس نقطهٔ $(۰,۱)$ نیز روی سهمی قرار دارد.بنابراین:

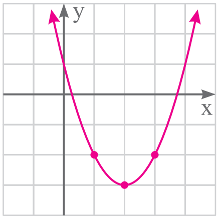
$$۱=a\times(۰)^۲+b\times۰+c\Rightarrow ۱=۰+۰+c\Rightarrow c=۱\Rightarrow\begin{cases}(۱):a+b+۱=-۲\Rightarrow a+b=-۳\\(۲):۴a+۲b+۱=-۳\Rightarrow ۴a+۲b=-۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow(-۲)\times\begin{cases}a+b=-۳\\۴a+۲b=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲a-\cancel{۲b}=۶\\۴a+\cancel{۲b}=-۴\end{cases}$$

$$۲a=۲\Rightarrow a=۱\Rightarrow a+b=-۳\Rightarrow ۱+b=-۳\Rightarrow b=-۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^۲-۴x+۱$ است. حال این سهمی را رسم می‌کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲\times۱}=۲ \quad\text{و}\quad y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(۱)(۱)-(-۴)^۲}{۴(۱)}=\frac{۴-۱۶}{۴}=-۳\Rightarrow \text{رأس}(۲,-۳)$$



x	۱	۲	۳
y	−۲	−۳	−۲

$$\begin{cases}\text{دامنه}=\mathbb{R}\\ \text{برد}=[-۳,+\infty)\end{cases}$$

درس اول: شمارش

پرسش متن
صفحهٔ ۱۱۹ کتاب درسی

می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

در پلاک خودروها از عدد صفر نمی‌توان استفاده کرد، پس فقط از رقم‌های ۱ تا ۹ و ۳۲ حرف الفبا استفاده می‌شود:

حالت $۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۳۲ \times ۹^{۷}$

دقت داشته باشید که در پلاک‌های جدید خودروهای شهر تهران، در دو رقم سمت راست، از رقم صفر (به صورت ایران ۱۰) استفاده می‌شود. در این صورت پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

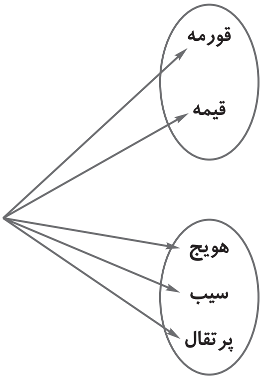
$$۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۳۲ \times ۹^{۷}$$

$$۹ \times ۹ \times ۳۲ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times \overset{\text{عدد ۱۰}}{۱} = ۳۲ \times ۹^{۵}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= ۳۲ \times ۹^{۷} + ۳۲ \times ۹^{۵} = ۳۲ \times ۹^{۵}(۹^{۲} + ۱) = ۳۲ \times ۸۲ \times ۹^{۵} = ۴۱ \times ۲^{۶} \times ۹^{۵}$ حالت

فعالیت
صفحهٔ ۱۱۹ و ۱۲۰ کتاب درسی

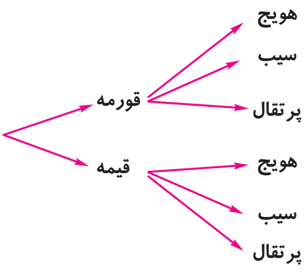
① امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه‌سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند.



چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟ ۵ انتخاب.

$\{$پرتقال، سیب، هویج، قورمه، قیمه$\}$: $۲ + ۳ = ۵$

② هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟



۶ انتخاب. $۲ \times ۳ = ۶$

{(هویج، قیمه)، (پرتقال، قورمه)، (سیب، قورمه)، (هویج، قورمه)

(پرتقال، قیمه)، (سیب، قیمه)}

③ **چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟** در سؤال اول، چون باید فقط یک مورد از یکی از گروه‌ها انتخاب می‌شد (غذا یا آب‌میوه)، پس تعداد انتخاب‌های گروه‌ها را با هم جمع کردیم و در کل ۵ انتخاب وجود داشت. ولی در سؤال دوم، باید از هر گروه یک مورد انتخاب می‌شد و باید در کل، ۲ انتخاب پشت سر هم انجام می‌دادیم (یک غذا و یک آب‌میوه)، پس تعداد انتخاب‌های گروه‌ها را در هم ضرب کردیم.

④ **در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟** با توضیحات داده‌شده، در سؤال اول از عمل جمع (۵ = ۳ + ۲) و در سؤال دوم، از عمل ضرب (۶ = ۳ × ۲) استفاده می‌کنیم.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۲۱ کتاب درسی

① **پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخهٔ گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟**

شیرینی گل
↑ ↑
۴ + ۳ = ۷

چون فقط باید یک مورد از یکی از گروه‌ها را انتخاب کند، طبق اصل جمع پژمان ۷ انتخاب دارد.

② **هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.**

چون از هر گروه می‌خواهد یک انتخاب داشته باشد (در واقع ۲ انتخاب پشت سرهم)، طبق اصل ضرب ۱۲ حالت برای خرید او وجود دارد:

شیرینی گل
↑ ↑
۴ × ۳ = ۱۲

{(گردویی، زنبق)، (کشمش، گلایل)، (نارگیلی، گلایل)، (گردویی، گلایل)، (کشمش، مریم)، (نارگیلی، مریم)، (گردویی، مریم)
(کشمش، رُز)، (نارگیلی، رُز)، (گردویی، رُز)، (کشمش، زنبق)، (نارگیلی، زنبق)}

③ **در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟**

در قسمت اول، فقط یک انتخاب از یکی از گروه‌ها داریم، پس ۳ و ۴ را با هم جمع می‌کنیم یعنی از اصل جمع و در قسمت دوم، باید از هر گروه یک انتخاب داشته باشیم، پس ۳ و ۴ را درهم ضرب می‌کنیم یعنی از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

④ **دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.**

۱- دانش‌آموزی می‌خواهد به مناسبت روز پدر، هدیه‌ای بخرد. او می‌خواهد یک عطر یا یک پیراهن بخرد. اگر دو نوع عطر مختلف و سه نوع پیراهن مختلف موردنظر او باشد، این دانش‌آموز چند انتخاب برای خریدن هدیه دارد؟

اصل جمع: ۵ = ۳ + ۲

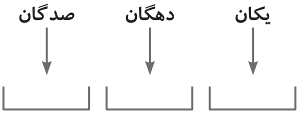
۲- دانش‌آموز دیگری برای روز پدر، تصمیم گرفته هم عطر بخرد و هم پیراهن. او از بین دو نوع عطر مختلف و سه نوع پیراهن مختلف، به چند حالت می‌تواند خرید کند؟

اصل ضرب: ۶ = ۳ × ۲

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۲۲ و ۱۲۳ کتاب درسی

الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه‌رقمی را به‌صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت. پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحلهٔ آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پر کردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

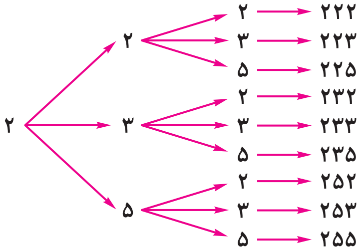


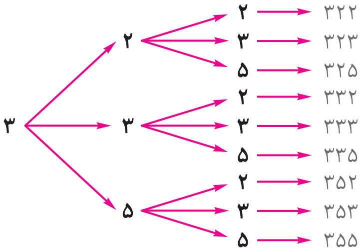
هر جایگاه را به ۳ حالت می‌توان پُر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

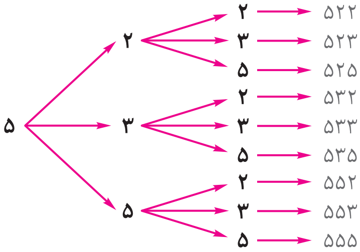
۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲   ۵ یا ۳ یا ۲

تعداد حالت‌ها = ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷

با نمودار درختی، در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده‌شده در حاشیهٔ صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.







ب) با همان سه رقم چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟ ۳ حالت وجود دارد. یعنی یکی از ارقام ۲، ۳ یا ۵.

تعداد حالت‌ها ⟵ ۳

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

به‌عنوان مثال، اگر رقم ۵ را در جایگاه اول قرار داده باشیم، دو رقم ۳ و ۲ باقی می‌مانند؛ بنابراین ۲ حالت وجود دارد.

۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟ ۱ حالت

لذا ۳×۲×۱=۶ عدد سه‌رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

این اعداد، عبارت‌اند از: ۵۳۲ , ۵۲۳ , ۳۵۲ , ۳۲۵ , ۲۵۳ , ۲۳۵

پ) با همان سه عدد چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟

به ۱ روش، زیرا فقط یک رقم زوج داریم و آن هم باید در سمت راست عدد قرار گیرد.

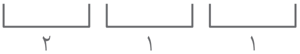
۲- دو جایگاه دیگر، هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟ هرکدام به ۳ روش

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ۳×۳×۱=۹

ت) با همان سه عدد چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟

به ۱ روش، زیرا تنها یک رقم زوج داریم و آن هم باید در سمت راست عدد قرار گیرد.



۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟ به ۲ طریق، زیرا پس از نوشتن رقم زوج در جایگاه سمت راست، تنها دو رقم باقی‌مانده است.

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟ به ۱ طریق، زیرا از سه‌رقم موجود، دو رقم در جایگاه‌های قبلی نوشته شده‌اند و تنها یک رقم باقی‌مانده است.

۴- لذا تعداد اعداد موردنظر در این حالت، برابر است با ۲×۱×۱=۲

تمرین

صفحهٔ ۱۲۴ تا ۱۲۶ کتاب درسی

① **تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.**

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

اصل جمع:

۱۰ = تعداد رقم‌ها
۳۲ = تعداد حروف الفبای فارسی
⇒ ۱۰+۳۲=۴۲ حالت

دقت داشته باشید که با انتخاب یک‌رقم یا یک حرف، رمز موردنظر ایجاد می‌شود.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.

اصل ضرب: $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{رقم}}}{۱۰} \times \underset{\substack{\downarrow\\ \text{حرف}}}{۳۲} = ۳۲۰$ حالت

توجه داشته باشید که با انتخاب یک‌رقم و یک حرف، رمز موردنظر ایجاد می‌شود.

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

هم اصل ضرب و هم اصل جمع:

برای انجام این کار، دو حالت وجود دارد: (گزینهٔ اول حرف و گزینهٔ دوم رقم) یا (گزینهٔ اول رقم و گزینهٔ دوم حرف)

$\underset{\text{رقم}}{\underset{\downarrow}{۱۰}} \times \underset{\text{حرف}}{\underset{\downarrow}{۳۲}} + \underset{\text{حرف}}{\underset{\downarrow}{۳۲}} \times \underset{\text{رقم}}{\underset{\downarrow}{۱۰}} = ۳۲۰ + ۳۲۰ = ۶۴۰$ حالت

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

هم اصل ضرب و هم اصل جمع: (گزینهٔ اول رقم و گزینهٔ دوم رقم) یا (گزینهٔ اول حرف و گزینهٔ دوم حرف)

$۲۶ \times ۲۶ + ۱۰ \times ۱۰ = ۶۷۶ + ۱۰۰ = ۷۷۶$ حالت

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

اصل ضرب: $\underbrace{۱۰ \times ۹}_{\text{اعداد}} \times \underbrace{۲۶ \times ۲۵}_{\text{حروف}} = ۵۸۵۰۰$ حالت

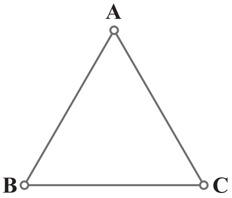
② در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

کوچک‌ترین اعداد را برای به‌دست آوردن حداقل و بزرگ‌ترین اعداد را برای به‌دست آوردن حداکثر انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{حداقل} = ۵ \times ۸ \times ۱۰ \times ۲۰ = ۸۰۰۰ \\ \text{حداکثر} = ۵ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۳۰ = ۱۸۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow$$

حداقل ۸۰۰۰ و حداکثر ۱۸۰۰۰ کارخانه در این شهرک صنعتی وجود دارد.

③ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برای هر رأس ۲ انتخاب وجود دارد، پس:

A B C
$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ حالت

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.

به هیچ طریقی نمی‌توان این کار را انجام داد، زیرا ۳ رأس وجود دارد و ما فقط ۲ رنگ داریم. مثلاً اگر رأس A را با آبی و رأس B را با قرمز رنگ کنیم، آنگاه رأس C را با هر رنگی که بزنیم، با یکی از رأس‌های A یا B هم‌رنگ می‌شود. پس این کار غیرممکن است و تعداد راه‌های انجام این کار، صفر است.

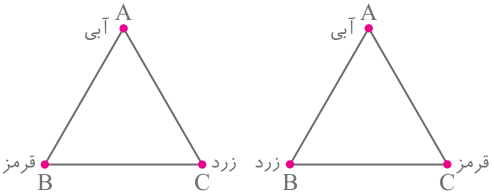
پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی‌که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

الف) اگر از ۳ رنگ استفاده کنیم، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

A B C
$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$ حالت

ب) روش اول: اگر رأس A آبی باشد، مانند شکل‌های روبه‌رو، به ۲ صورت می‌توان رأس‌ها را رنگ‌آمیزی کرد.

به همین ترتیب، اگر رأس A قرمز باشد، ۲ حالت و اگر رأس A زرد باشد، نیز ۲ حالت وجود دارد. پس در کل $۶ = ۲ + ۲ + ۲$ حالت وجود دارد.



روش دوم: از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

A B C
$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

④ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده‌شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

$A = \{۱۱, ۲۲, \dots, ۹۹\} \rightarrow$ ۹ عدد

$B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\} \rightarrow$ ۹ عدد

C = { ب , ج , د , س , ص , ط , ق , ل , م , ن , و , ه , ی } → ۱۳ حرف

از A	از B				از C	از B

$\underbrace{۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹}_{}\times ۱۳ \times ۹ \times ۹ = ۹^۶ \times ۱۳ =$ ۶۹۰۸۷۳۳ حالت

توجه داشته باشید که ارقام می‌توانند به‌صورت تکراری انتخاب شوند.

⑤ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

دنده	حجم موتور	رنگ	مدل

۲ × ۳ × ۱۰ × ۵ = ۳۰۰ نوع

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولیدشده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

دنده	حجم موتور	رنگ	مدل
		مشکی	

۲ × ۳ × ۱ × ۵ = ۳۰ نوع

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

دنده	حجم موتور	رنگ	مدل
اتوماتیک		مشکی	

۱ × ۳ × ۱ × ۵ = ۱۵ نوع

⑥ یک آزمون چندگزینه‌ای، شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

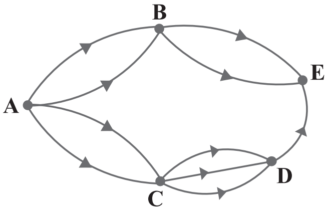
الف) مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟ برای پاسخ دادن به هر سؤال ۴ گزینه‌ای، ۴ حالت و برای پاسخ دادن به هر سؤال ۲ گزینه‌ای، ۲ حالت وجود دارد. بنابراین:

$$\overbrace{(۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴)}^{\text{۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای}} \times \overbrace{(۲\times۲\times۲\times۲\times۲)}^{\text{۵ سؤال ۲ گزینه‌ای}} = ۴^{۱۰} \times ۲^۵ = ۲^{۲۰} \times ۲^۵ \Rightarrow \text{تعداد کل روش‌ها} = ۲^{۲۵}$$

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟ در این صورت، برای پاسخ دادن به هر سؤال ۴ گزینه‌ای، ۵ حالت و برای پاسخ دادن به هر سؤال ۲ گزینه‌ای، ۳ حالت وجود دارد. بنابراین:

$$\overbrace{(۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵)}^{\text{۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای}} \times \overbrace{(۳\times۳\times۳\times۳\times۳)}^{\text{۵ سؤال ۲ گزینه‌ای}} = ۵^{۱۰} \times ۳^۵ = (۵^۲)^۵ \times ۳^۵ \Rightarrow \text{تعداد کل روش‌ها} = ۷۵^۵$$

⑦ اگر شکل مقابل نشان‌دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



برای این کار دو حالت وجود دارد: A → B → E یا A → C → D → E

تعداد کل حالت‌ها: ۲ × ۳ × ۱ + ۲ × ۲ = ۶ + ۴ = ۱۰ حالت

⑧ **مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه‌شده، درست باشد.**

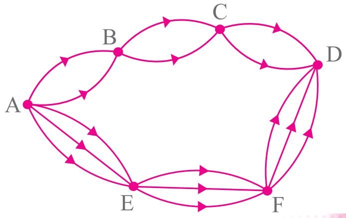
مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به‌طوری‌که همهٔ ارقامشان فرد باشد **؟**

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

⑨ **مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به‌صورت زیر باشد.**

۲×۲×۲+۳×۳×۳ = ۳۵

اگر شکل مقابل، نشان‌دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A، B، C، D، E و F باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟



درس دوم: جایگشت

پرسش متن

صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی

سه فیش و سه درگاه مانند شکل صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟

درگاه۳ درگاه۲ درگاه۱
حالت ۶ = ۱ × ۲ × ۳

بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟ هر فیش و درگاه آن را با یک رنگ مشخص می‌کنند.

فعالیت

صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی

① **فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.**

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

② **آیا در سه مربع به‌هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟** خیر، زیرا باید از هر فیش یکی داشته باشیم و وجود حرف تکراری، به معنی این است که از یک فیش، بیش از یکی داشته باشیم که امکان‌پذیر نیست.

③ **با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟** درگاه ۱ را می‌توان با ۳ فیش پر کرد، سپس برای درگاه ۲ فقط ۲ فیش باقی مانده است، زیرا یکی از فیش‌ها را قبلاً وصل کرده‌ایم. در آخر، برای درگاه ۳، فقط یک فیش باقی می‌ماند.

درگاه۳ درگاه۲ درگاه۱
۶ = ۱ × ۲ × ۳

فعالیت

صفحهٔ ۱۲۷ و ۱۲۸ کتاب درسی

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به‌صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

① **اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟** به ۴ روش، زیرا هر کدام از ۴ عدد را می‌توان در آن قرار داد.

- **پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده‌نشده باقی مانده است؟** ۳ عدد

- **حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟** دومین مربع را به ۳ روش می‌توان پر کرد.

سومین و چهارمین مربع را چطور؟ سومین مربع را به ۲ روش و چهارمین مربع را به ۱ روش می‌توان پر کرد.

- **حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با** $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل‌ضرب $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

نکته

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.

② **به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟** $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

③ **تعداد کلمات هفت‌حرفی (بامعنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟(بدون تکرار حروف)** $۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰$

④ **با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟**

$۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۳۶۲۸۸۰$

⑤ **تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟** $۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۳۶۲۸۸۰۰$

⑥ **اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید.**

$n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$

که در ریاضی این حاصل‌ضرب را با $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نشان می‌دهند، بنابراین:

$n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱=n!$

پرسش متن

صفحهٔ ۱۲۸ کتاب درسی

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال $۱!=۱$ $\quad$ $۲!=۲\times۱$ $\quad$ $۳!=۳\times۲\times۱$ **و الی آخر.**

قرار دارد: $۰!=۱$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۲۸ و ۱۲۹ کتاب درسی

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $۶! = ۶\times\overbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۵!} = ۶\times۵!$

ب) $۸! = ۸\times\overbrace{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۷!} = ۸\times۷!$

پ) $۱۰! = ۱۰\times\overbrace{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}^{۹!} = ۱۰\times۹!$

ت) $n! = n\times\overbrace{(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}^{(n-۱)!} = n\times(n-۱)!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۵!}{۴!} = \frac{۵\times\overbrace{۴\times۳\times۲\times۱}^{۴!}}{\underbrace{۴\times۳\times۲\times۱}_{۴!}} = ۵$

ب) $\frac{۱۰!}{۹!} = \frac{۱۰\times۹!}{۹!} = ۱۰$

پ) $\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

ت) $\frac{۸!}{۶!} = \frac{۸\times۷\times۶!}{۶!} = ۸\times۷ = ۵۶$

ث) $\frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!} = ۱۰\times۹ = ۹۰$

ج) $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$

چ) $\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۸\times۷\times۶ = ۳۳۶$

ح) $\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!} = ۱۰\times۹\times۸ = ۷۲۰$

خ) $\frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = n(n-۱)(n-۲)$

د) $\frac{n!}{(n-۴)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$

ذ) $\frac{n!}{(n-۵)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)!}{(n-۵)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times(n-k+۱)(n-k)!}{(n-k)!} = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times(n-k+۱)$

۳ حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹\times۸ = \frac{۹\times۸\times\overbrace{۷\times۶\times\ldots\times۱}^{۷!}}{\underbrace{۷\times۶\times\ldots\times۱}_{۷!}} = \frac{۹!}{۷!}$

ب) $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!} = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱\times۱۰\times۹ = \frac{۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!} = \frac{۱۱!}{۸!}$

ت) $۸ = \frac{۸\times۷!}{۷!} = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = \frac{n!}{(n-۲)!}$

ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = \frac{n!}{(n-۴)!}$

فعالیت
صفحهٔ ۱۲۹ کتاب درسی

① **تعداد کلمات هفت‌حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a , b , e , f , s , t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با** $۷! = ۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۵۰۴۰$.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با n! .

② **حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه‌حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم.**

برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه‌حرفی، چند انتخاب داریم؟ ۷ انتخاب

برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟ برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین حرف ۵ انتخاب باقی می‌ماند.

بنابراین تعداد کلمات سه‌حرفیِ مورد نظر برابر است با: ۲۱۰ . $۷\times۶\times۵ = ۲۱۰$

در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

③ **تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید.** $۹\times۸\times۷\times۶ = ۳۰۲۴$

④ **اعداد به‌دست‌آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

$$\text{مرحلهٔ ۲} \Rightarrow ۷\times۶\times۵ = \frac{۷!}{۴!} \quad , \quad \text{مرحلهٔ ۳} \Rightarrow ۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$$

⑤ **تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

$$n\times(n-۱)\times(n-۲) = \frac{n!}{(n-۳)!}$$

⑥ **تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز($۰ \le r \le n$) را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\ldots\times(n-r+۱) = \frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)\times(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نتیجه

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $P(n\,,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(n\,,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

کار در کلاس
صفحهٔ ۱۳۱ کتاب درسی

① **یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟** باید تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را به‌دست آوریم.

$$P(۶,۴) = \frac{۶!}{(۶-۴)!} = \frac{۶!}{۲!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱} = ۳۶۰ \ \text{حالت}$$

② **با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه‌رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟** باید تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از چهار شیء متمایز را به‌دست آوریم:

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۴!}{۱!}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱}=۲۴ \text{ حالت}$$

تمرین

صفحهٔ ۱۳۱ و ۱۳۲ کتاب درسی

① **در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟**

باید تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از ۱۸ شیء متمایز را به‌دست آوریم:

$$P(۱۸,۳)=\frac{۱۸!}{(۱۸-۳)!}=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times۱۵!}{۱۵!}=۱۸\times۱۷\times۱۶=۴۸۹۶ \text{ حالت}$$

② **از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰تا باشد، تعداد کتاب‌ها چندتاست؟**

اگر تعداد کتاب‌ها nتا باشد، در این‌صورت تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز برابر ۲۱۰ تاست. بنابراین:

$$P(n,۳)=۲۱۰\Rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!}=۲۱۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)=۲۱۰$$

یعنی حاصل‌ضرب سه عدد متوالی ۲۱۰ شده است، با راهبرد حدس و آزمایش، مشخص می‌شود که $n=۷$ است.

$$\begin{array}{ccc} n & \underbrace{(n-۱)} & \underbrace{(n-۲)}=۲۱۰ \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ۷\times & ۶\quad\times & ۵ \end{array}$$

بنابراین تعداد کتاب‌ها ۷تا است.

③ **کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟**

$۶!=۳!+۳!$

نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰ \\ ۳!+۳!=(۳\times۲\times۱)+(۳\times۲\times۱)=۶+۶=۱۲ \end{cases}\Rightarrow۷۲۰\neq۱۲\Rightarrow۶!\neq۳!+۳!$$

$۶!=۶\times۵!$

درست است، زیرا:

$$۶!=۶\times\underbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}_{۵!}=۶\times۵!$$

$۸!=۴!\times۲!$

نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۸!=۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۴۰۳۲۰ \\ ۴!\times۲!=(۴\times۳\times۲\times۱)\times(۲\times۱)=۲۴\times۲=۴۸ \end{cases}\Rightarrow۴۰۳۲۰\neq۴۸\Rightarrow۸!\neq۴!\times۲!$$

$۲\times۳!=۶!$

نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۲\times۳!=۲\times۳\times۲\times۱=۱۲ \\ ۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰ \end{cases}\Rightarrow۱۲\neq۷۲۰\Rightarrow۲\times۳!\neq۶!$$

$(۳!)^۲=۹!$

نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} (۳!)^۲=(۳\times۲\times۱)^۲=۶^۲=۳۶ \\ ۹!=۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۳۶۲۸۸۰ \end{cases}\Rightarrow۳۶\neq۳۶۲۸۸۰\Rightarrow(۳!)^۲\neq۹!$$

$۴!=\frac{۸!}{۲!}$

نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} ۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴ \\ \frac{۸!}{۲!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱}=۲۰۱۶۰ \end{cases}\Rightarrow۲۴\neq۲۰۱۶۰\Rightarrow۴!\neq\frac{۸!}{۲!}$$

④ در یک نوع ماشین‌حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص، باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید موردنظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور موردنظر را اجرا کند؟

ابتدا تعداد حالت‌های انتخاب ۳ دکمه از ۲۰ دکمه بااهمیت ترتیب قرار گرفتن آنها (جایگشت‌های سه‌تایی از بیست شیء متمایز) را به‌دست می‌آوریم:

$$P(۲۰,۳)=\frac{۲۰!}{(۲۰-۳)!}=\frac{۲۰!}{۱۷!}=\frac{۲۰\times۱۹\times۱۸\times۱۷!}{۱۷!}=۲۰\times۱۹\times۱۸=۶۸۴۰$$ حالت

چون برای فشردن سه کلید در هر حالت به ۲ ثانیه زمان نیاز داریم، پس در بدترین حالت، حداکثر زمان برابر است با:

$۶۸۴۰\times۲=۱۳۶۸۰$ ثانیه $=۲۲۸$ دقیقه $=۳:۴۸'$

⑤ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ برای نوشتن تمام کلمات ۶حرفی بدون حروف تکراری، باید تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز را به‌دست آوریم، یعنی: $۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$

چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟ برای به‌دست آوردن تعداد کلمات ۶حرفی که با «گل» شروع می‌شوند، باید تعداد جایگشت‌های ۴ حرف بعدی را به‌دست آوریم، زیرا «گل» در ابتدای کلمات ثابت است و به تعداد حالت‌هایی که ۴ حرف بعدی می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند، کلمهٔ جدید ساخته می‌شود. بنابراین: $۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

یعنی از تعداد ۷۲۰ کلمهٔ ۶حرفی، فقط تعداد ۲۴تا از آنها با «گل» شروع می‌شود.

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ باید تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را به‌دست آوریم.

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱}=۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$$

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند.

اگر دو حرف «پ» و «ر» کنار هم باشند، شبیه حالتی است که می‌خواهیم یک کلمهٔ ۵حرفی بنویسیم (جایگاه «پ» و «ر» را با هم یک جایگاه می‌گیریم که این جایگاه نیز ممکن است در جاهای مختلف کلمه قرار گیرد.): $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

از طرفی دو حرف «پ» و «ر» نیز به ۲ حالت $(۲!=۲\times۱)$ ممکن است با هم جابه‌جا شوند، در نتیجه:

تعداد کل حالت‌ها: $۲\times۱۲۰=۲۴۰$ حالت

ت) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

اگر دو حرف «پ» و «ر» کنار هم باشند، برای نوشتن کلمهٔ چهارحرفی نیاز به انتخاب دو حرف دیگر داریم:

$$P(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱}=۱۲$$

از طرفی با انتخاب دو حرف «پ» و «ر» و ۱۲حالت برای دو حرف دیگر، به ۳ حالت می‌توان آنها را کنار هم قرار داد:

پ ر ـــــ ـــــ یا ـــــ پ ر ـــــ یا ـــــ ـــــ پ ر

همچنین این دو حرف نیز به ۲ حالت $(۲!=۲\times۱)$ در کنار هم قرار می‌گیرند، پس:

تعداد کل حالت‌ها: $۲\times۳\times۱۲=۷۲$ حالت

ث) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟
تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمهٔ «پیرا» در کنار هم، برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی !۴. سپس برای نوشتن کلمه‌های ۵ حرفی، تنها باید یک حرف دیگر را از بین «گ» و «ل» انتخاب کنیم که ۲ حالت دارد. همچنین حرف پنجم اضافه شده، ممکن است اول کلمه بیاید یا آخر کلمه، پس ۲ حالت هم در اینجا ایجاد می‌شود. بنابراین خواهیم داشت: $۴!\times۲\times۲=(۴\times۳\times۲\times۱)\times۴=۲۴\times۴=۹۶$ حالت

درس سوم: ترکیب

فعالیت صفحهٔ ۱۳۳ کتاب درسی

① **همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $۶۰=\frac{۵!}{(۵-۳)!}$ عدد سه‌رقمی با رقم‌های غیر تکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:**

۳۴۵	۲۴۵	۲۳۵	۲۳۴	۱۴۵	۱۳۵	۱۳۴	۱۲۵	۱۲۴	۱۲۳
۳۵۴	۲۵۴	۲۵۳	۲۴۳	۱۵۴	۱۵۳	۱۴۳	۱۵۲	۱۴۲	۱۳۲
۴۳۵	۴۲۵	۳۲۵	۳۲۴	۴۱۵	۳۱۵	۳۱۴	۲۱۵	۲۱۴	۲۱۳
۴۵۳	۴۵۲	۳۵۲	۳۴۲	۴۵۱	۳۵۱	۳۴۱	۲۵۱	۲۴۱	۲۳۱
۵۳۴	۵۲۴	۵۲۳	۴۲۳	۵۱۴	۵۱۳	۴۱۳	۵۱۲	۴۱۲	۳۱۲
۵۴۳	۵۴۲	۵۳۲	۴۳۲	۵۴۱	۵۳۱	۴۳۱	۵۲۱	۴۲۱	۳۲۱

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟ همهٔ آنها از سه رقم خاص ساخته شده‌اند و فقط جای این ارقام در آنها تغییر کرده است.

② **با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضویِ مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را بنویسیم؟** کافی است از هر ستون، رقم‌های اولین عدد را انتخاب کنیم. زیرا در نمایش مجموعه، اگر عضوها، جایشان عوض شود مجموعهٔ جدیدی به‌وجود نمی‌آید.

این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید. ۱۰ تا هستند.

{۱ , ۲ , ۳} و {۱,۲,۴}و{۱,۲,۵}و{۱,۳,۴}و{۱,۳,۵}و{۱,۴,۵}و{۲,۳,۴}و{۲,۳,۵}و{۲,۴,۵}و{۳,۴,۵}

③ **چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟** در فعالیت ۱، ترتیب کنار هم قرار گرفتن رقم‌ها مهم است، ولی در فعالیت ۲ ترتیب کنار هم قرار گرفتن رقم‌ها مهم نیست.

④ **هر ستون در فعالیت ۱، چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟** هر ستون در فعالیت ۱، معادل یک زیرمجموعهٔ سه‌عضوی در فعالیت ۲ است، زیرا با جابه‌جا کردن رقم‌ها، زیرمجموعهٔ جدیدی ایجاد نمی‌شود.

⑤ **با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟** تقسیم بر ۶

این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟ عدد ۶ برابر است با تعداد جایگشت‌های ۳ شیء متمایز، یعنی: $۶=۱\times۲\times۳=۳!$

نکته

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به‌عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم: $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ $(0\le r\le n)$

پرسش متن

صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی

تعداد افراد دسته دوم برابر ۱ = $\binom{۵}{۵}$ است. چرا؟

$$\binom{۵}{۵}=\frac{۵!}{(۵-۵)!۵!}=\frac{۱}{۰!}=\frac{۱}{۱}=۱$$

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی

① در کدام‌یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام‌یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه‌حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی).

ترتیب مهم است. پس باید از جایگشت استفاده شود.

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱}=۶۰ \text{ حالت}$$

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود.

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{(۵-۳)!۳!}=\frac{۵!}{۲!\times۳!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱}=۱۰ \text{ حالت}$$

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.

ترتیب مهم است. پس باید از جایگشت استفاده شود.

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰ \text{ حالت}$$

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود.

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!۳!}=\frac{۷!}{۴!\times۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۳\times۲\times۱}=۷\times۵=۳۵ \text{ حالت}$$

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.

ترتیب مهم نیست. پس باید از ترکیب استفاده شود.

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!۳!}=\frac{۱۰!}{۷!\times۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times۳\times۲\times۱}=۱۲۰ \text{ حالت}$$

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به‌ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

چون نوع مدال‌ها متفاوت است، پس ترتیب مهم است. بنابراین باید از جایگشت استفاده شود.

$$P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۱۰\times۹\times۸=۷۲۰ \text{ حالت}$$

② در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

در کار در کلاس (۱) پاسخ داده شده است.

③ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیتهٔ ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

۲ نفر از ۸ ریاضی‌دان: $\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۶!\times۲!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!\times۲}=۲۸$

و

۲ نفر از ۶ فیزیک‌دان: $\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۴!\times۲!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!\times۲}=۱۵$

و

۲ نفر از ۵ شیمی‌دان: $\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲}=۱۰$

$$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۲۸\times۱۵\times۱۰=۴۲۰۰ \text{ حالت}$$

ب) کمیتهٔ ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ کمیتهٔ سه نفره که حداقل ۱ نفر از هر رشته در آن عضو باشند، به این معنی است که از ۸ ریاضی‌دان ۱ نفر، از ۶ فیزیک‌دان ۱ نفر و از ۵ شیمی‌دان نیز ۱ نفر باید انتخاب شوند. بنابراین:

$$\binom{۸}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۱}=\frac{۸!}{۷!\times ۱!}\times\frac{۶!}{۵!\times ۱!}\times\frac{۵!}{۴!\times ۱!}=\frac{۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}\times\frac{۶\times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}}\times\frac{۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۸\times ۶\times ۵=۲۴۰ \text{ حالت}$$

پ) کمیتهٔ ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟ حداقل یک ریاضی‌دان یعنی یا ۱ ریاضی‌دان انتخاب شود یا ۲ ریاضی‌دان انتخاب شود که هر دو حالت، بررسی می‌شوند.

حالت اول:

$$\begin{cases} \text{۱ نفر ریاضی‌دان}: \binom{۸}{۱}=\frac{۸!}{۷!\times ۱!}=\frac{۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۸ \\ \text{و} \\ \text{۱ نفر فیزیک‌دان یا ۱ نفر شیمی‌دان}: \binom{۶}{۱}+\binom{۵}{۱}=\frac{۶!}{۵!\times ۱!}+\frac{۵!}{۴!\times ۱!}=۶+۵=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۸\times ۱۱=۸۸ \text{ حالت}$$

حالت دوم:

$$\text{۲ نفر ریاضی‌دان}: \binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۶!\times ۲!}=\frac{۸\times ۷\times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times ۲!}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸ \text{ حالت}$$

از آنجا که حالت اول یا حالت دوم رخ می‌دهند، پس طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$۸۸+۲۸=۱۱۶ \text{ حالت}$$

فعالیت

صفحهٔ ۱۳۶ و ۱۳۷ کتاب درسی

دو نفر مدرس ریاضی را $M_۱$ و $M_۲$، دو نفر مدرس فیزیک را $P_۱$ و $P_۲$، و دو نفر مدرس شیمی را $C_۱$ و $C_۲$ درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

تمام حالت‌های ممکن برابر است با:

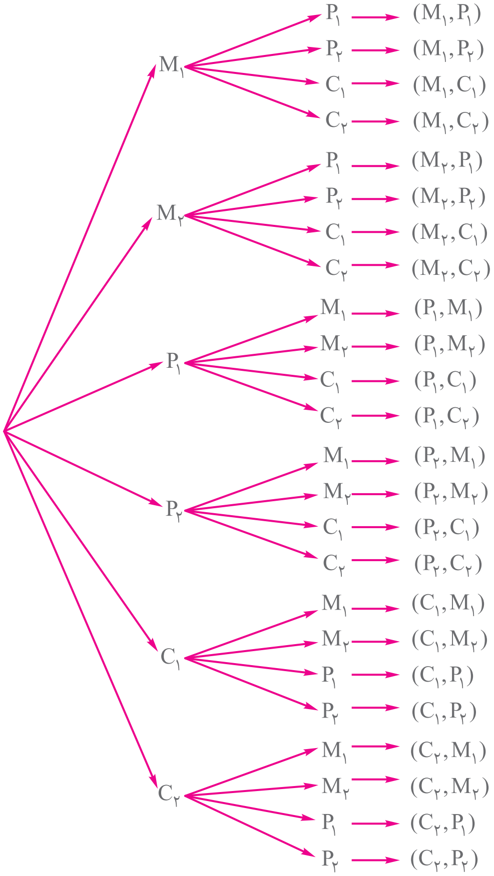
$(M_۱,P_۱),(M_۱,P_۲),(M_۲,P_۱),(M_۲,P_۲),(M_۱,C_۱),(M_۱,C_۲),$

$(M_۲,C_۱),(M_۲,C_۲),(P_۱,C_۱),(P_۱,C_۲),(P_۲,C_۱),(P_۲,C_۲)$

پس ۱۲ حالت وجود دارد، بنابراین جواب حمید غلط است.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص نمایید.

نمودار درختی روش حمید، به‌صورت روبه‌رو است:



۲۴ حالت به‌وجود آمده است و علت این است که از هر حالت ۲تا وجود دارد. مثلاً $(M_۱,P_۱)$ و $(P_۱,M_۱)$ فرقی با هم ندارند؛ بنابراین به‌جای ۱۲ حالت به ۲۴ حالت رسیده‌ایم که نادرست است.

فعالیت

صفحهٔ ۱۳۷ و ۱۳۸ کتاب درسی

① **می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیرمجموعه‌های rتایی از یک مجموعهٔ nعضوی است. حال $\binom{n}{۰}$ و $\binom{n}{۱}$ را یک‌بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$، و یک‌بار با فرمول، به‌دست آورید.** با توجه به اینکه ۱ = !۰ , ۱ = !۱ خواهیم داشت:

تعبیر زیرمجموعه:

۱ = تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی = $\binom{n}{۰}$

n = تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی = $\binom{n}{۱}$

فرمول:

$$\binom{n}{۰}=\frac{n!}{(n-۰)!\times ۰!}=\frac{n!}{n!\times ۱}=۱$$

$$\binom{n}{۱}=\frac{n!}{(n-۱)!۱!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!\times ۱}=n$$

نکته

توجه داشته باشید که همواره داریم: $\binom{n}{۱}=n \ ,\ \binom{n}{۰}=۱$

② **الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ ، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟**

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۴,۵	**۱,۲,۳**
۳,۵	**۱,۲,۴**
۳,۴	۱,۲,۵
۲,۵	۱,۳,۴
۲,۴	۱,۳,۵
۲,۳	۱,۴,۵
۱,۵	۲,۳,۴
۱,۴	۲,۳,۵
۱,۳	۲,۴,۵
۱,۲	۳,۴,۵

با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید. با توجه به ستون اول جدول، مشاهده می‌شود که ۱۰ حالت برای این کار امکان دارد.

ب) این‌بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

با توجه به ستون دوم جدول، مشخص است که برای انتخاب دو بازیکن نیمکت‌نشین هم ۱۰ حالت وجود دارد.

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟ همان‌طور که در قسمت‌های (الف) و (ب) مشخص شد، با هم برابرند، یعنی: $۱۰=\binom{۵}{۲}=\binom{۵}{۳}$ ، زیرا تعداد راه‌های انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر در حقیقت، همان تعداد راه‌های انتخاب نکردن ۲ نفر از ۵ نفر است.

ت) درستی تساوی $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

روش اول: تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء درصورتی‌که ترتیب مهم نباشد ($\binom{n}{r}$)، برابر است با تعداد حالت‌های انتخاب نکردن اشیای باقی‌مانده (n − r) از n شیء ($\binom{n}{n-r}$). بنابراین: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

روش دوم:

$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}=\frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=\binom{n}{r}$$

③ **جاهای خالی را پر کنید.**

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{۲۶}{۵}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با: $\binom{۲۵}{۴}$

در زیرمجموعه‌های ۵ عضوی که a در آنها باشد، در حقیقت تکلیف یکی از عضوها مشخص شده و ما باید ۴ عضو دیگر را از بین ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم که برابر $\binom{۲۵}{۴}$ است.

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{۲۵}{۵}$

اگر نخواهیم از a استفاده کنیم، با کنار گذاشتن آن، ۵ حرف را باید از ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم.

ت) بنابراین: $\binom{۲۶}{۵}=\binom{۲۵}{۴}+\binom{۲۵}{۵}$، زیرا جمع حالت‌های (ب) و (پ) برابر حالت (الف) است.

④ **فرض کنیم A یک مجموعهٔ nعضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)**

الف) تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی مجموعهٔ A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r-۱}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r}$

ت) بنابراین $\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}$

تمرین

صفحهٔ ۱۳۹ و ۱۴۰ کتاب درسی

① **یک فروشندهٔ تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟**

پاسخ برابر است با انتخاب حداقل ۵ شیء از ۷ شیء به‌طوری‌که ترتیب انتخاب در آنها مهم نیست.

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=\frac{۷!}{۲!\times ۵!}+\frac{۷!}{۱!\times ۶!}+\frac{۷!}{۰!\times ۷!}=۲۱+۷+۱=۲۹$$ حالت

② **یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:**

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟ حضور رئیس، یعنی انتخاب ۱ نفر از ۱ نفر، یعنی: $\binom{۱}{۱}$.

حضور یک کارشناس امور حقوقی، یعنی انتخاب ۱ نفر از ۳ نفر، یعنی: $\binom{۳}{۱}$.

۳ نفر بعدی فرقی نمی‌کند که معاون یا حسابدار یا کارشناس اداری یا کارمند کارگزینی باشند. پس انتخاب ۳ نفر از ۱۴ نفر را خواهیم داشت، یعنی: $\binom{۱۴}{۳}$. بنابراین طبق اصل ضرب می‌توان نوشت:

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۴}{۳}=۱\times۳\times\frac{۱۴!}{۱۱!\times۳!}=۳\times\frac{۱۴\times۱۳\times۱۲\times\cancel{۱۱!}}{\cancel{۱۱!}\times۳\times۲\times۱}=۳\times۳۶۴=۱۰۹۲$$ حالت

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\binom{۱}{۱}=\text{رئیس و }\quad \binom{۳}{۱}=\text{یک معاون و }\quad \binom{۳}{۱}=\text{یک کارشناس امور حقوقی}$$

۲ نفر باقی‌مانده باید از بین ۲ حسابدار و ۶ کارشناس اداری و ۳ کارمند کارگزینی انتخاب شوند، یعنی ۲ نفر از بین ۱۱نفر، یعنی: $\binom{۱۱}{۲}$. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۱}{۲}=۱\times۳\times۳\times\frac{۱۱!}{۹!\times۲!}=۹\times\frac{۱۱\times۱۰\times\cancel{۹!}}{\cancel{۹!}\times۲}=۹\times۱۱\times۵=۴۹۵\ \text{حالت}$$

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟ با انتخاب رئیس و یک معاون و یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی، چهار نفر انتخاب شده‌اند. ۱ نفر دیگر هم باید از بین ۹ نفر باقی‌مانده (۶ کارشناس اداری و ۳ کارمند کارگزینی) انتخاب شود. در نتیجه طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۹}{۱}=۱\times۳\times۲\times۳\times۹=۱۶۲\ \text{حالت}$$

③ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به‌تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

اگر تعداد دانش‌آموزانِ داوطلب n باشد، با استفاده از ترکیب، خواهیم داشت:

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶$$

$$\Rightarrow n^{۲}-n-۵۶=۰\Rightarrow(n-۸)(n+۷)=۰\begin{cases}n=۸\\ n=-۷\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

دقت داشته باشید که تعداد دانش‌آموزان، نمی‌تواند منفی باشد.

④ گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\left.\begin{array}{l}\text{دسته‌گل با ۳ شاخه}:\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!\times۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times۳\times۲}=۱۲۰\\ \text{یا}\\ \text{دسته‌گل با ۴ شاخه}:\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۶!\times۴!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۴\times۳\times۲}=۲۱۰\\ \text{یا}\\ \text{دسته‌گل با ۵ شاخه}:\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰!}{۵!\times۵!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times\cancel{۵!}}=۲۵۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اصل جمع}}۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲\ \text{حالت}$$

⑤ **یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟**

تعداد حالت‌های ترکیب ۲ رنگ: $\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!\times ۲!}=\frac{۴\times ۳\times \cancel{۲!}}{۲\times \cancel{۲!}}=۶$

یا

تعداد حالت‌های ترکیب ۳ رنگ: $\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۱!\times ۳!}=\frac{۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۴$

یا

تعداد حالت‌های ترکیب ۴ رنگ: $\binom{۴}{۴}=۱$

تعداد کل رنگ‌هایی که می‌تواند داشته باشد $=\overset{\text{رنگ‌های اصلی}}{\overset{\uparrow}{۴}}+\overbrace{۶+۴+۱}^{\text{رنگ‌های جدید}}=۱۵$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل، بیشتر از جواب شماست؟

در کارهای هنری وقتی رنگ‌ها را با نسبت‌های مختلف باهم ترکیب می‌کنند، تعداد رنگ‌های بیشتری به‌وجود می‌آورند. در حالی‌که ما، در این سؤال، رنگ‌ها را با نسبت‌های مساوی ترکیب کردیم.

⑥ **هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟** توجه کنید که نقاطی که روی دایره رسم می‌شوند، طوری هستند که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط راست واقع نمی‌شوند، پس با انتخاب هر ۳ نقطه روی دایره، می‌توان یک مثلث تشکیل داد. بنابراین باید تعداد راه‌های انتخاب ۳ نقطه از ۷ نقطه را به‌دست آوریم که ترتیب انتخاب در آنها مهم نیست:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times ۳\times ۲}=۳۵ \text{ مثلث}$$

⑦ **یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه**

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!\times ۳!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times ۳\times ۲}=۱۲۰ \text{ طعم}$$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟ اگر این دو نوع ادویه کنار هم باشند، ادویهٔ سوم به ۸ حالت انتخاب می‌شود. پس تعداد کل حالت‌هایی که این دو ادویه با هم استفاده می‌شوند، برابر است با: $۱\times ۸=۸$

حال برای اینکه این دو نوع ادویه با هم استفاده نشوند، باید این ۸ حالت را از کل حالت‌ها کم کنیم: $۱۲۰-۸=۱۱۲$ طعم

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟ از ۱۲۰ حالت کل، تنها یک حالت است که سه ادویهٔ مورد نظر با هم می‌توانند استفاده شوند. پس اگر نخواهیم آن سه ادویه باهم استفاده شوند، خواهیم داشت: $۱۲۰-۱=۱۱۹$ طعم

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

اگر هر سه نوع ادویه را از دستهٔ ۵تایی اول انتخاب کنیم، $\binom{۵}{۳}$ حالت خواهیم داشت و اگر هر سه نوع ادویه را از دستهٔ ۵تایی دوم انتخاب کنیم، باز هم $\binom{۵}{۳}$ حالت خواهیم داشت. بنابراین:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{۲\times \cancel{۳!}}=۱۰ \Rightarrow \binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}=۱۰+۱۰=۲۰ \text{ طعم}$$

⑧ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}$

مادر علی می‌خواهد برای او کلاه و کفش بخرد. مادر او از بین ۵ نوع کلاه مختلف ۳ نوع و از بین ۶ نوع کفش مختلف ۲ نوع را انتخاب می‌کند. علی به چند طریق می‌تواند کلاه و کفش خود را انتخاب کند؟

طبق اصل ضرب $\Rightarrow \binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}=۱۰\times۱۵=۱۵۰$ حالت

ب) $\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۲}$

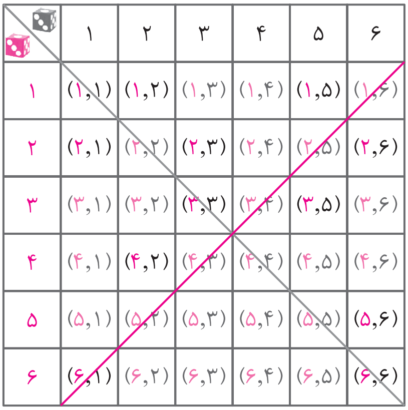
مادر علی می‌خواهد برای او کلاه یا کفش بخرد. اگر او کلاه بخرد، از بین ۵ نوع مختلف ۳ نوع و اگر کفش بخرد، از بین ۶ نوع مختلف ۲ نوع را می‌تواند انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند خرید را انجام دهد؟

طبق اصل جمع $\Rightarrow \binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۲}=۱۰+۱۵=۲۵$ حالت

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

فعالیت صفحهٔ **۱۴۲** و **۱۴۳** کتاب درسی

① **اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید:**



۶	۵	۴	۳	۲	۱	
(۱,۶)	(۱,۵)	(۱,۴)	(۱,۳)	(۱,۲)	(۱,۱)	۱
(۲,۶)	(۲,۵)	(۲,۴)	(۲,۳)	(۲,۲)	(۲,۱)	۲
(۳,۶)	(۳,۵)	(۳,۴)	(۳,۳)	(۳,۲)	(۳,۱)	۳
(۴,۶)	(۴,۵)	(۴,۴)	(۴,۳)	(۴,۲)	(۴,۱)	۴
(۵,۶)	(۵,۵)	(۵,۴)	(۵,۳)	(۵,۲)	(۵,۱)	۵
(۶,۶)	(۶,۵)	(۶,۴)	(۶,۳)	(۶,۲)	(۶,۱)	۶

تاس قرمز　　تاس آبی
↑　　↑
تعداد کل حالت‌ها: ۶ × ۶ = ۳۶ حالت

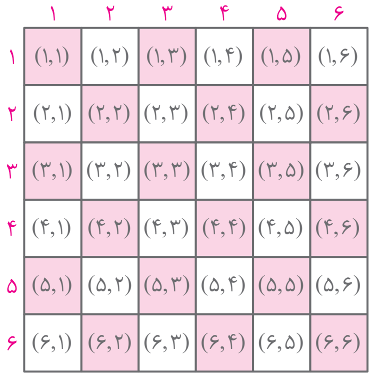
② **قطر آبی‌رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟**

پیشامد اینکه مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس، برابر ۷ باشند. یعنی:

{(۱ , ۶) , (۲ , ۵) , (۳ , ۴) , (۴ , ۳) , (۵ , ۲) , (۶ , ۱)}

③ **خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد روشده فرد‌ند هاشور بزنید؛ چه الگویی به‌دست می‌آید؟**

یک صفحهٔ شطرنجی به‌وجود می‌آید، زیرا خانه‌ها یکی در میان هاشور خورده‌اند (رنگی شده‌اند). (در واقع نصف خانه‌ها هاشور خورده‌اند.)



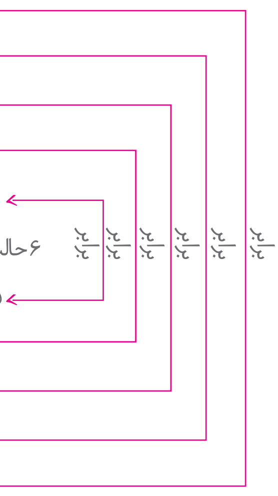
۶	۵	۴	۳	۲	۱	
(۱,۶)	(۱,۵)	(۱,۴)	(۱,۳)	(۱,۲)	(۱,۱)	۱
(۲,۶)	(۲,۵)	(۲,۴)	(۲,۳)	(۲,۲)	(۲,۱)	۲
(۳,۶)	(۳,۵)	(۳,۴)	(۳,۳)	(۳,۲)	(۳,۱)	۳
(۴,۶)	(۴,۵)	(۴,۴)	(۴,۳)	(۴,۲)	(۴,۱)	۴
(۵,۶)	(۵,۵)	(۵,۴)	(۵,۳)	(۵,۲)	(۵,۱)	۵
(۶,۶)	(۶,۵)	(۶,۴)	(۶,۳)	(۶,۲)	(۶,۱)	۶

④ **با توجّه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.**

سؤال: اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم، در چند حالت یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است؟

پاسخ: با توجه به جدول رسم‌شده، در نصف حالت‌ها یعنی ۱۸ حالت (۱۸ = ۲ ÷ ۳۶) یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است.

⑤ **با توجّه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به‌عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است)**



مجموع دو تاس = ۲ ⇒ {(۱ , ۱)} → ۱ حالت

مجموع دو تاس = ۳ ⇒ {(۱ , ۲) , (۲ , ۱)} → ۲ حالت

مجموع دو تاس = ۴ ⇒ {(۱ , ۳) , (۳ , ۱) , (۲ , ۲)} → ۳ حالت

مجموع دو تاس = ۵ ⇒ {(۱ , ۴) , (۴ , ۱) , (۲ , ۳) , (۳ , ۲)} → ۴ حالت

مجموع دو تاس = ۶ ⇒ {(۱ , ۵) , (۵ , ۱) , (۲ , ۴) , (۴ , ۲) , (۳ , ۳)} → ۵ حالت

مجموع دو تاس = ۷ ⇒ {(۱ , ۶) , (۶ , ۱) , (۲ , ۵) , (۵ , ۲) , (۳ , ۴) , (۴ , ۳)} → ۶ حالت

مجموع دو تاس = ۸ ⇒ {(۲ , ۶) , (۶ , ۲) , (۳ , ۵) , (۵ , ۳) , (۴ , ۴)} → ۵ حالت

مجموع دو تاس = ۹ ⇒ {(۳ , ۶) , (۶ , ۳) , (۴ , ۵) , (۵ , ۴)} → ۴ حالت

مجموع دو تاس = ۱۰ ⇒ {(۴ , ۶) , (۶ , ۴) , (۵ , ۵)} → ۳ حالت

مجموع دو تاس = ۱۱ ⇒ {(۵ , ۶) , (۶ , ۵)} → ۲ حالت

مجموع دو تاس = ۱۲ ⇒ {(۶ , ۶)} → ۱ حالت

بنابراین تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس ۶ و ۸ با هم، برای مجموع دو تاس ۵ و ۹ با هم، برای مجموع دو تاس ۴ و ۱۰ با هم، برای مجموع دو تاس ۳ و ۱۱ با هم و برای مجموع دو تاس ۲ و ۱۲ با هم برابرند.

کار در کلاس .... صفحهٔ ۱۴۳ کتاب درسی

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

① **آیا می‌توانید نتیجهٔ حاصل را به‌صورت قطعی بیان کنید؟** خیر

② **آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟** بله **چرا؟** زیرا نتیجهٔ آن را نمی‌توان به‌طور دقیق مشخص کرد.

③ **همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).**

سکه دو حالت پشت «پ» و رو «ر» دارد و تاس هم، یکی از اعداد ۱ تا ۶ را نمایش می‌دهد. بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از:

S = {(پ , ۱) , (پ , ۲) , (پ , ۳) , (پ , ۴) , (پ , ۵) , (پ , ۶) , (ر , ۱) , (ر , ۲) , (ر , ۳) , (ر , ۴) , (ر , ۵) , (ر , ۶)}

④ **تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به‌دست آورید.**

$$\text{تمام حالت‌ها} = \overset{\overset{\text{سکه}}{\uparrow}}{۲} \times \overset{\overset{\text{عدد تاس}}{\uparrow}}{۶} = ۱۲ \ \text{حالت}$$

⑤ **جدول ۶×۲ یا ۲×۶ مربوط به این آزمایش را رسم کنید.**

۶	۵	۴	۳	۲	۱	تاس سکه
(پ،۶)	(پ،۵)	(پ،۴)	(پ،۳)	(پ،۲)	(پ،۱)	پ
(ر،۶)	(ر،۵)	(ر،۴)	(ر،۳)	(ر،۲)	(ر،۱)	ر

مثال(۱) صفحهٔ ۱۴۳ و ۱۴۴ کتاب درسی

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ امّا از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجّه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $2^4=2\times2\times2\times2$. حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید. حالت (د، پ، پ، پ) به معنای این است که سه فرزند اول پسر و فرزند چهارم دختر هستند.

پیشامدهای زیر را درنظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف) پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» = A

A = {(د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د)}

ب) پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» = B

B = {(پ، پ، پ، پ) و (د، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د)}

پ) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» = C

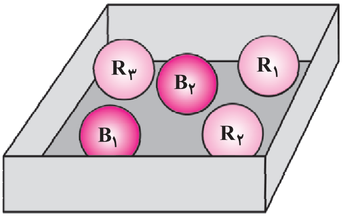
C = {(پ، پ، د، د) و (پ، د، د، پ) و (پ، د، پ، د) و (د، پ، پ، د) و (د، پ، د، پ) و (د، د، پ، پ)}

ت) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد» = D

D = {(پ، پ، پ، پ) و (پ، پ، پ، د) و (پ، پ، د، پ) و (پ، د، پ، پ) و (د، پ، پ، پ)}

مثال(۲) صفحهٔ ۱۴۴ کتاب درسی

در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهرهٔ آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به‌تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از $\binom{5}{3}=10$ زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



$$S=\{R_1R_2R_3 \text{ و } R_1R_2B_1 \text{ و } R_2R_3B_2 \text{ و } R_1R_3B_1 \text{ و } R_1R_3B_2 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_2R_3B_1 \text{ و } B_1B_2R_1 \text{ و } B_1B_2R_2 \text{ و } B_1B_2R_3\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به‌ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت:

$$A=\{B_1R_1R_2 \text{ و } B_1R_1R_3 \text{ و } B_1R_2R_3 \text{ و } B_2R_1R_2 \text{ و } B_2R_1R_3 \text{ و } B_2R_2R_3 \text{ و } B_1B_2R_1 \text{ و } B_1B_2R_2 \text{ و } B_1B_2R_3\}$$

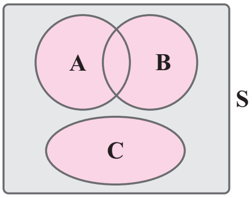
$$B=\{B_1R_1R_2 \text{ و } B_1R_1R_3 \text{ و } B_1R_2R_3 \text{ و } B_2R_1R_2 \text{ و } B_2R_1R_3 \text{ و } B_2R_2R_3 \text{ و } R_1R_2R_3\}$$

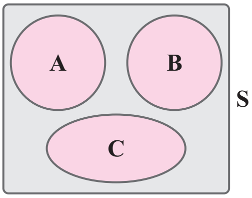
$$C=\{R_1R_2R_3\}$$

اگر S را مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام‌یک از مجموعه‌های B یا C برابر است؟ C

مثال(۴) صفحهٔ ۱۴۵ کتاب درسی

کدام‌یک از شکل‌های زیر سه پیشامد دوبه‌دو ناسازگار را نشان می‌دهد؟ شکل سمت چپ





کار در کلاس .... صفحهٔ ۱۴۵ و ۱۴۶ کتاب درسی

① **با توجّه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پر کنید.**

$A =$ **پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند** $= \{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۱,۵),(۵,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵)\}$

$B =$ **پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد** $= \{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}$

$C =$ **پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید**

$= \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

توجه داشته باشید که در قسمت C، فقط تاس آبی باید مضرب ۳ بیاید و در مورد عددی که تاس قرمز نشان می‌دهد، هیچ صحبتی نشده است.

الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$(A \cap B) = \{(۱,۵),(۵,۱),(۳,۳)\} \rightarrow n(A \cap B) = ۳$

ب) پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$A \cup B = \{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(A \cup B) = ۱۱$

پ) پیشامد آنکه $(A - C)$ رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی تاس آبی مضرب ۳ نیاید **» پس داریم:**

$A - C = \{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$

ت) پیشامد $(C - B)$ را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.

پیشامد $C - B$ یعنی پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.

$C - B = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

ث) اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ بله **چرا؟**

$D = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$E = \{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$D \cap E = \varnothing \Rightarrow$ D و E ناسازگارند

② **تاسی را می‌اندازیم، روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که:**

الف) A و B ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد زوج و B پیشامد رو شدن عدد فرد باشد، ناسازگار خواهند بود، زیرا:

$A = \{۲,۴,۶\}, B = \{۱,۳,۵\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

ب) A و B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد اول، B پیشامد رو شدن عدد مرکب و C پیشامد رو شدن عددی که نه اول و نه مرکب است باشد، آنگاه A ، B و C دوبه‌دو ناسازگار خواهند بود، زیرا:

$A = \{۲,۳,۵\}\ ,\ B = \{۴,۶\}\ ,\ C = \{۱\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing \quad , \quad A \cap C = \varnothing \quad , \quad B \cap C = \varnothing$

پ) $(A \cap B)$ و C ناسازگار باشند. اگر A پیشامد رو شدن عدد اول و B پیشامد رو شدن عدد فرد و C پیشامد رو شدن عدد زوج باشد، خواهیم داشت:

$A = \{۲,۳,۵\}\ ,\ B = \{۱,۳,۵\}\ ,\ C = \{۲,۴,۶\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{۳,۵\} \Rightarrow (A \cap B) \cap C = \varnothing \Rightarrow$ پس $(A \cap B)$ و C ناسازگارند.

مثال(۵) صفحهٔ ۱۴۶ کتاب درسی

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟ $n(S) = ۲ \times ۲ \times ۶ = ۲۴$

ب) پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

A = {(ر , ر , ۲),(ر , ر , ۴),(ر , ر , ۶)}

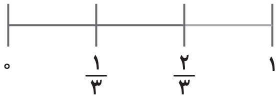
پ) پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

B = {(ر , ر , ۵),(ر , پ , ۵),(پ , ر , ۵),(پ , پ , ۵),(پ , پ , ۱),(پ , پ , ۲),(پ , پ , ۳),(پ , پ , ۴),(پ , پ , ۶)}

مثال(۱) صفحهٔ ۱۴۷ کتاب درسی

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به‌ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$S = \{۴۳, ۳۴, ۲۴, ۴۲, ۲۳, ۳۲\}$

$A = \{۳۴, ۲۴, ۴۲, ۳۲\}, B = \{۴۳, ۲۳\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

واضح است که $P(A) > P(B)$، پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال، تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد، بیشتر است)

فعالیت صفحهٔ ۱۴۷ و ۱۴۸ کتاب درسی

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این‌صورت:

I) $۰ \le P(A) \le ۱$

زیرا: $A \subseteq S \Rightarrow ۰ \le n(A) \le n(S) \Rightarrow \frac{۰}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow ۰ \le P(A) \le ۱$

II) $P(\varnothing) = ۰ \quad , \quad P(S) = ۱$

زیرا: $P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰ , P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)} \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساویِ زیر برقرار است:

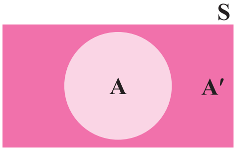
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

کار در کلاس .... صفحهٔ ۱۴۸ کتاب درسی

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ایِ S باشد، (A و A' ناسازگارند) نشان دهید.



$$P(A)=۱-P(A')$$

می‌دانیم $P(A\cup A')=P(S)=۱$

از طرف $P(A\cup A')=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A)+P(A')=۱\Rightarrow\begin{cases}P(A)=۱-P(A')\\P(A')=۱-P(A)\end{cases}$

مثال(۱) .... صفحهٔ ۱۴۸ و ۱۴۹ کتاب درسی

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس $n(S)=۶^۲=۳۶$)

پیشامد هر دو زوج $A=\{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند؟

مجموع دو تاس $B=۸ \rightarrow B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\}$

هر دو تاس فرد $C= \rightarrow A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۱,۵),(۵,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵)\}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$((B\cap C)=\{(۳,۵),(۵,۳)\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۲}{۳۶})$$

پ) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

مجموع دو تاس $D=۷ \rightarrow D=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

هر دو تاس زوج $A= \rightarrow n(A)=۹\,,\,(A\cap B)=\varnothing$

$$\Rightarrow P(D\cup A)=P(D)+P(A)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

ت) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبهٔ آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

پیشامد مجموع کمتر از ۱۱ $=A$

(پیشامد مجموع ،بزرگ تر یا مساوی ۱۱)$A'=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

ث) حاصل‌ضرب دو عدد روشده ۱۲ باشد؟

$A=\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

تمرین .... صفحهٔ ۱۵۰ و ۱۵۱ کتاب درسی

① هر یک از اعداد طبیعی و زوجِ کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

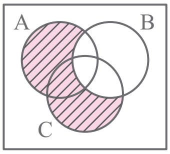
$S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ به تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، می‌توان پیشامد تصادفی تعریف کرد و می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی برابر است با: $۲^۵=۳۲$

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب‌شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید. A = {۴ , ۸}

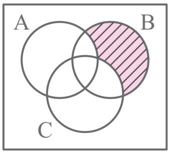
② فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.



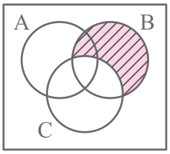
(A⋃C) − B

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.



B − (A⋃C) یا (B − A)⋂(B − C)

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



B − C

③ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد». S = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸} , A = {۲ , ۴ , ۶ , ۸}

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد». B = {۲ , ۳ , ۵ , ۷}

پ) پیشامد C که در آن «عدد روشده بزرگ‌تر از ۲ باشد». C = {۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸}

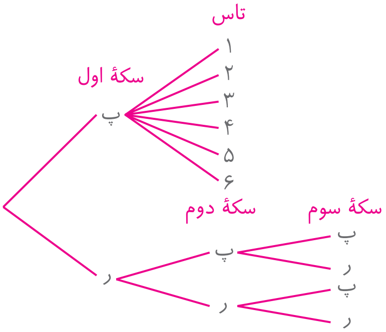
④ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

S = {(پ,پ,پ) , (پ,پ,د) , (پ,د,پ) , (د,پ,پ) , (پ,د,د) , (د,پ,د) , (د,د,پ) , (د,د,د)}

A = {(پ,پ,د) , (پ,د,پ) , (د,پ,پ) , (پ,د,د) , (د,پ,د) , (د,د,پ) , (د,د,د)}

⑤ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکهٔ دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.



S = {(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶),(ر,پ,پ),
(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(ر,ر,ر)}

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

A = {(پ , ۲) , (پ , ۴) , (پ , ۶)}

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

B = {(ر , پ , ر) , (ر , ر , پ) , (ر , ر , ر)}

⑥ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم رشتهٔ ریاضی باشند؟ تعداد کل حالت‌ها یعنی n(S) ، انتخاب ۲ نفر از بین ۵ نفر بدون اهمیت ترتیب در انتخاب است:

$$n(S)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times ۲}=۱۰$$

اگر A پیشامد این باشد که هر دو نفر از دانش‌آموزان کلاس دهم رشتهٔ ریاضی باشند، آنگاه:

$$n(A)=\binom{۳}{۲}=\frac{۳!}{۱!\times ۲!}=\frac{۳\times \cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۳ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۰}$$

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟ در قسمت (الف)، احتمال اینکه هر دو نفر، کلاس دهم رشتهٔ ریاضی باشند، به‌دست آمد. حال احتمال اینکه هر دو نفر، کلاس دهم رشتهٔ تجربی باشند را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم B پیشامد این باشد که هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم رشتهٔ تجربی باشند، آنگاه:

$$n(B)=\binom{۲}{۲}=۱ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۰}$$

برای به‌دست آوردن احتمال هم‌کلاسی بودن دو نفر، با توجه به ناسازگاری پیشامدهای A و B، احتمال‌های به‌دست‌آمده را با هم جمع می‌کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

پ) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟ اگر C پیشامد این باشد که ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد، آنگاه طبق اصل ضرب، داریم:

$$n(C)=\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۳\times ۲=۶ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

⑦ یک فروشگاه، دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A $(P(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰})$ و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

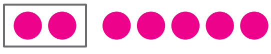
$$P(A)=۰/۳۴\ ,\ P(B)=۰/۶۲\ ,\ P(A\cap B)=۰/۱۵$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳۴+۰/۶۲-۰/۱۵=۰/۸۱$$

بنابراین ۰/۸۱ (۸۱ درصد) احتمال دارد که مشتریان، با داشتن حداقل یکی از دو کارت، از این فروشگاه خرید کنند.

⑧ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟ تعداد کل حالت‌هایی که ۷ نفر می‌توانند در یک ردیف درکنار هم قرار بگیرند، برابر است با: $n(S)=۷!$، اگر A پیشامد این باشد که دو برادر درکنار یکدیگر نباشند، برای سادگی می‌توانیم A' را محاسبه کنیم، یعنی پیشامد اینکه دو برادر درکنار یکدیگر باشند:



۲ برادر = ۱ نفر

با توجه به شکل، باید جایگشت ۶ نفر رابه‌دست آوریم یعنی !۶ ، زیرا دو برادر را می‌توانیم ۱ نفر به حساب بیاوریم و چون می‌خواهند در کنار یکدیگر باشند، خودِ دو برادر هم، می‌توانند جایشان را به ۲ طریق باهم عوض کنند. بنابراین:

$$n(A')=۲\times۶!\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲\times۶!}{۷!}=\frac{۲\times\cancel{۶!}}{۷\times\cancel{۶!}}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

این دو برادر، به ۲ حالت می‌توانند در ابتدا و انتهای ردیف، قرار بگیرند. همچنین ۵ نفر بقیه می‌توانند به !۵ حالت، درکنار هم قرار بگیرند. بنابراین، اگر B پیشامد این باشد که یکی از دو برادر در ابتدا و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند، داریم:

$$n(B)=۲\times۵!\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲\times۵!}{۷!}=\frac{۲\times\cancel{۵!}}{۷\times۶\times\cancel{۵!}}=\frac{۲}{۷\times۶}=\frac{۱}{۲۱}$$

⑨ **اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A)\leq P(B)$.**

اگر $B\subseteq A$ باشد، آنگاه: $n(A)\leq n(B)$. یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ A کمتر یا مساوی تعداد اعضای مجموعهٔ B خواهد بود و با توجه به تعریف احتمال، خواهیم داشت:

$$\frac{n(A)}{n(S)}\leq\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow P(A)\leq P(B)$$

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

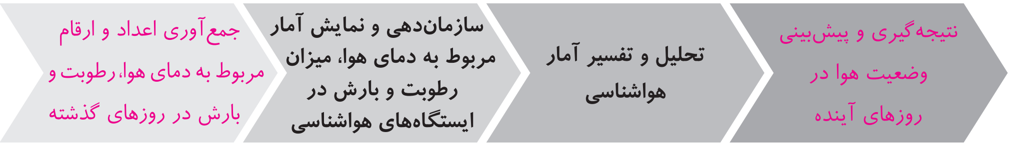
کار در کلاس

صفحهٔ ۱۵۳ و ۱۵۴ کتاب درسی

① **در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی براساس اعداد و ارقام بیاورید.** حرکت هواپیماها و کشتی‌ها بر اساس وضعیت آب و هوایی، ثبت‌نام در یک باشگاه ورزشی یا آموزشگاه علمی بر اساس عملکرد دوره‌های گذشتهٔ آنها.

② **مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.**

③ **با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.**



④ **تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟** آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. درحالی‌که علم آمار، مجموعهٔ روش‌هایی برای جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی را ارائه می‌دهد.

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور، تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به‌صورت زیر جمع‌آوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به‌دست‌آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان‌دهندهٔ چه چیزی است؟ وقتی تعداد لامپ‌های معیوب روزبه‌روز افزایش می‌یابد، نشان‌دهندهٔ وجود یک نقص اساسی در سیستم تولید است که مدیر کارخانه باید با انجام بررسی‌های لازم، مشکل را شناسایی و حل کند. (توجه داشته باشید که به نظر می‌رسد، در روزهای کاری بعدی نیز، تعداد لامپ‌های معیوب زیادتر از روزهای قبل شود.)

ب) در این تمرین چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟ در این تمرین، آمار یعنی جدول مربوط به تعداد لامپ‌های معیوب در هر یک از این ۵ روز کاری.

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه بر اساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☑ **ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها** ☐

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست. درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است. درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است. نادرست

۷ به شکل روبه‌رو توجه کنید: آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ بله

اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید.

این تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک به‌نام پیکسل تشکیل شده است. به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن پیکسل است. در واقع، هر تصویر از یک جدول عددی تشکیل می‌شود که هریک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهد.

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود.

اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

۲	۳	**۱**
۰	۲	۱
۳	۰	۳

جدول عددی

زرد	سبز	قرمز
مشکی	زرد	قرمز
سبز	مشکی	سبز

شکل

مثال (۱) صفحهٔ ۱۵۶ کتاب درسی

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۷۴ سانتی‌متر باشد. شاخص تودهٔ بدن شخص به‌صورت زیر است:

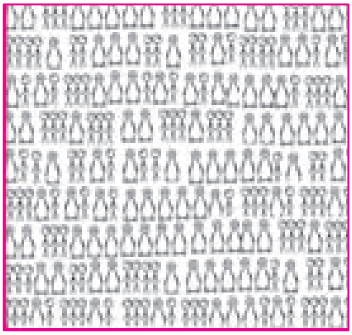
$$\text{شاخص تودهٔ بدن}=\frac{۱۰۰}{(۱/۷۴)^{۲}}=۳۳/۰۲$$

① با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، دربارهٔ چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

این شخص دچار چاقی درجه یک است.

فعالیت

صفحهٔ ۱۵۶ کتاب درسی

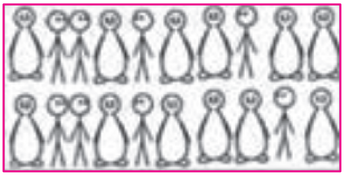


ب) شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می‌دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.

با هدف به‌دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به‌عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این‌کار به‌سادگی انجام می‌شود؟ خیر، زیرا جمع‌آوری این آمار در کل سطح شهر، کاری بسیار دشوار، زمان‌بر و پرهزینه است.

همان‌گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع‌آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان‌گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به‌جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.



به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند. همان‌طور که در شکل «ب» مشاهده می‌شود، از ۲۰ نفر، تعداد ۱۲ نفر چاق هستند. بنابراین:

$$\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=۶۰٪$$

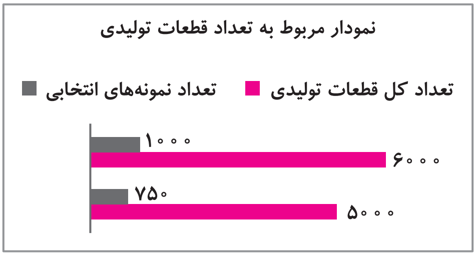
بنابراین می‌توان پیش‌بینی کرد که تقریباً ۶۰٪ از افراد این شهر، بر اساس افراد انتخاب‌شده، چاق هستند.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۵۷ و ۱۵۸ کتاب درسی

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانهٔ «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است.

با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید.



اندازهٔ نمونه	نمونه	اندازهٔ جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

تمرین

صفحهٔ ۱۵۸ کتاب درسی

① **می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولیدشده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:**

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	کل محصولات تولیدی کارخانهٔ موردنظر

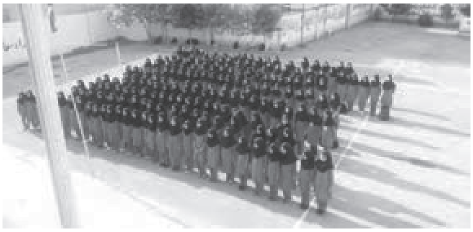
۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است. نادرست؛اندازهٔ جامعه، همواره بیشتر از اندازهٔ نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند. نادرست؛ اعضای نمونه، بخشی از اعضای جامعه هستند.

پ) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است. درست.

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند. هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



جامعه در اینجا مدرسه و اعضای جامعه، دانش‌آموزان این مدرسه هستند. دو نمونه از این جامعه، می‌توانند به‌صورت زیر باشند:

۱- انتخاب ۳ شاگرد برتر از هر کلاس

۲- انتخاب دانش‌آموزانی که حداقل در یک رشتهٔ ورزشی، مهارت دارند.

درس سوم: متغیر و انواع آن

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶۰ و ۱۶۱ کتاب درسی

۱ به نظر شما، چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟ نوع دنده (دستی- اتوماتیک)، حجم باک بنزین و ... .

در سطرهای خالی، مقدار هر یک از متغیرهای معرفی‌شدهٔ جدید را بیان کنید.

متغیرهای یک خودرو	مقدار متغیر
حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده	**۱۲۰**
میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر	**۸**
رنگ خودرو	**سفید**
حجم باک بنزین	۴۰
نوع دنده	دستی

۳ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو بنویسید.

متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	**۱/۲ متر**
وزن (جرم)	بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم
ارتفاع شانه	بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر
طول دُم	بین ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر

۴ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را براساس مهارت به‌صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه‌بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید.

متغیر: مهارت کارگردان

مقدار متغیر: بسیار ماهر، ماهر، متوسط، ضعیف

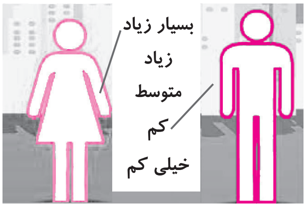
فعالیت

صفحهٔ ۱۶۲ کتاب درسی

در یک شهر، با افراد مختلفی روبه‌رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به‌صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به‌عنوان مثال:

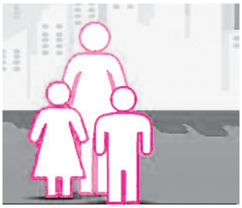
از یک آقا و خانم می‌پرسیم:

«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»



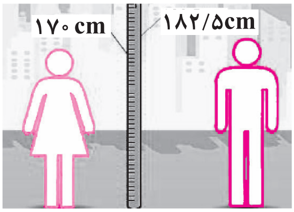
از مادر یک خانواده می‌پرسیم:

«چند فرزند دارید؟»



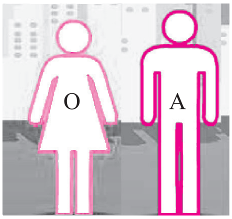
از همان خانم و آقا می‌پرسیم:

«قد شما چند سانتی‌متر است؟»



و سؤال آخر:

«گروه خونی خود را بگویید؟»

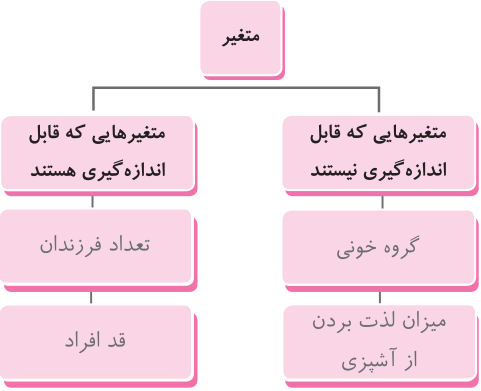


حال به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) با توجه به شکل‌های موردنظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	-	۲
قد افراد	۱۸۲/۵ cm	۱۷۰ cm
گروه خونی	A	O
میزان لذت بردن از آشپزی	کم	بسیار زیاد

ب) با توجه به متغیرهای بیان‌شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به‌جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.



متغیر

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند
- گروه خونی
- میزان لذت بردن از آشپزی

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند
- تعداد فرزندان
- قد افراد

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶۳ کتاب درسی

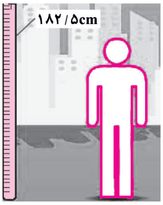
① با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید:

شکل الف

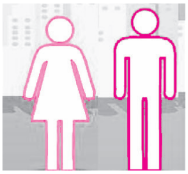
شکل ب

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر کمّی است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی، یک متغیر کیفی است.



شکل پ



شکل ت

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر کمّی است.

در شکل «ت» جنسیت افراد یک متغیر کیفی است.

② نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) کمّی ☐ کیفی ☑

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. کمّی ☑ کیفی ☐

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) کمّی ☐ کیفی ☑

③ جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	کمّی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	کیفی

فعالیت

صفحهٔ ۱۶۴ کتاب درسی

همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع متغیر کمّی‌اند.

① از مادر یک خانواده می‌پرسیم: چند فرزند دارید؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ...

پاسخ ، متغیر کمّی از نوع گسسته است زیرا قابل شمردن است.

② قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...

پاسخ ، متغیر کمّی از نوع پیوسته است زیرا قابل شمردن نیست.

③ **فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم کشور به‌ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازهٔ [۴۶ , ۷۵] قرار می‌گیرد.**

آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله، زیرا وزن، یک متغیر کمّی از نوع پیوسته است.

④ **فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به‌ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این‌صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازهٔ [۰ , ۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟**

خیر، زیرا تعداد فرزندان یک خانواده، یک متغیر کمّی از نوع گسسته است و تنها، اعداد صحیح متعلق به بازهٔ [۰ , ۲۰] می‌توانند تعداد فرزندان یک خانواده باشند.

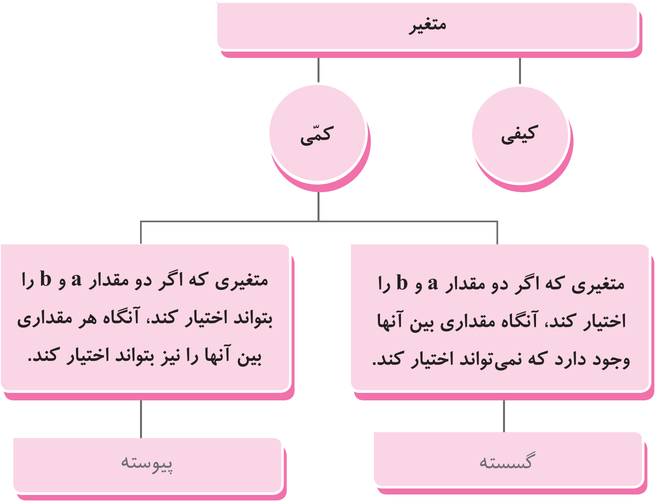
⑤ **متغیرهای مطرح‌شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمّی‌اند و یا کیفی؟**

هر دو متغیر کمّی هستند، زیرا قابل اندازه‌گیری هستند.

⑥ **چه تفاوتی در متغیرهای مطرح‌شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟**

در قسمت ۳ متغیر پیوسته است، یعنی هر عددی بین دو مقدار ۴۶ و ۷۵ را می‌تواند اختیار کند ولی در قسمت ۴ متغیر گسسته است، یعنی فقط بعضی از اعداد بین دو مقدار ۰ و ۲۰ را می‌تواند اختیار کند.

⑦ **با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر، به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.**



متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، آنگاه مقداری بین آنها وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند.

متغیری که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، آنگاه هر مقداری بین آنها را نیز بتواند اختیار کند.

کار در کلاس

صفحهٔ ۱۶۵ و ۱۶۶ کتاب درسی

① **با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمّی زیر را مشخص کنید.**

الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر پیوسته **و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر** ۸ لیتر **است.**

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر گسسته **است و این تعداد برابر با** ۵ نفر **است.**

② **انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:**

الف) تعداد ماهی‌های یک دریا ☑ گسسته ☐ پیوسته

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. ☐ گسسته ☑ پیوسته

پ) وزن افراد ☐ گسسته ☑ پیوسته

ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه ☑ گسسته ☐ پیوسته

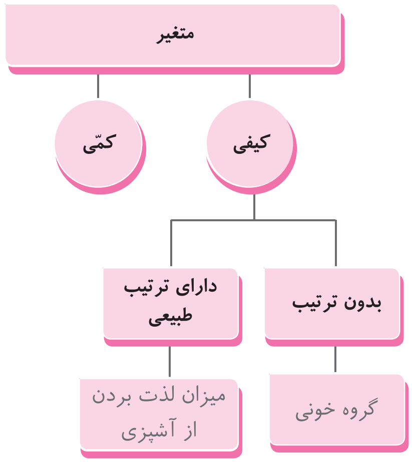
③ **در هر مورد نوع متغیر مطرح شده در سؤال را مشخص کنید.**

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	پیوسته
شاخص تودهٔ بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	پیوسته

فعالیت

صفحهٔ ۱۶۶ کتاب درسی

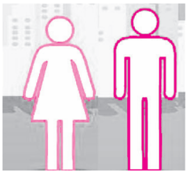
در شکل زیر به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



کار در کلاس

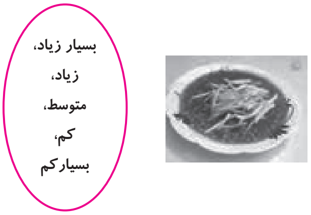
صفحهٔ ۱۶۷ کتاب درسی

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:



شکل الف

شکل ب



شکل پ

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به‌دست می‌آورد، یک متغیر ترتیبی است و مقادیرآن اول، دوم و سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقهٔ شما دربارهٔ خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم و بسیار کم است.

تمرین

صفحهٔ ۱۶۸ تا ۱۷۰ کتاب درسی

① با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، کهن‌سال) ☐ اسمی ☑ ترتیبی

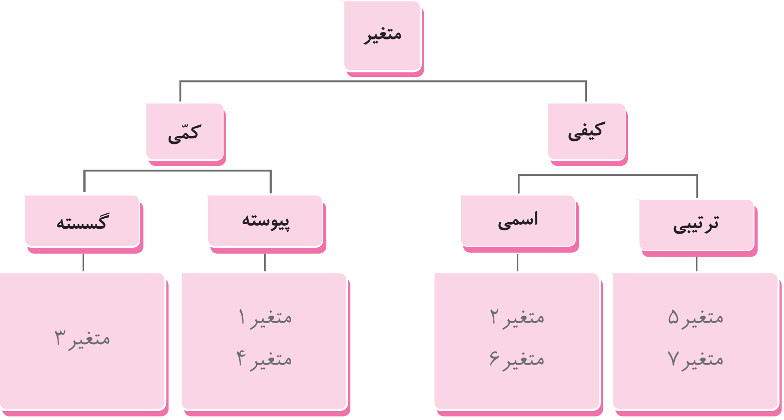
ب) نژاد افراد (سفیدپوست، زردپوست، سیاه‌پوست) ☑ اسمی ☐ ترتیبی

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای،طلایی) ☑ اسمی ☐ ترتیبی

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳) ☐ اسمی ☑ ترتیبی

② نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱- میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	کمّی (پیوسته)
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی (اسمی)
۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمّی (گسسته)
۴- میزان دمای هوا	کمّی (پیوسته)
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	کیفی (ترتیبی)
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی (اسمی)
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	کیفی (ترتیبی)



③ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمّی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم	×		×			
جنسیت (دختر و پسر)		×				×
قد	×			×		
وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شاخص تودهٔ بدن	×			×		

توجه داشته باشید که با توجه به تعریف متغیرها، نمرهٔ ریاضی نهم باید متغیری کمّی از نوع پیوسته باشد. اما از آنجایی‌که در مدارس برای این درس نمراتی با قسمت اعشاری ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ داده می‌شود، ما این متغیر را کمّی از نوع گسسته درنظر گرفتیم.

④ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{(\text{وزن برحسب } \mathrm{kg})}{(\text{قد برحسب } \mathrm{m})^{2}} = \frac{۹۵}{(۱/۶۰)^{۲}} \simeq ۳۷/۱$$

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمّی،کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کمّی از نوع پیوسته

⑤ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

شکل پرچم ایران است.

۳	**۳**	۳
۲	۲	**۲**
۱	**۱**	۱

جدول عددی

سبز	سبز	**سبز**
سفید	**سفید**	سفید
قرمز	قرمز	**قرمز**

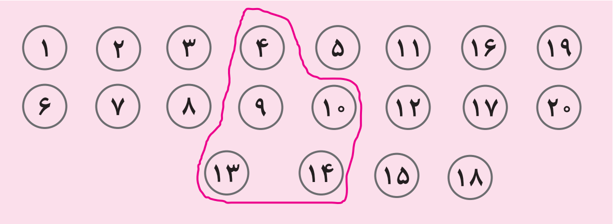
شکل

⑥ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک، مثال بزنید.

تعریف جامعه: مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند. مثلاً یک خانواده را می‌توان یک جامعه از تعدادی از افراد درنظر گرفت.

تعریف نمونه: بخشی (زیرمجموعه‌ای) از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده در نمونه را عضو نمونه گویند. مثلاً از یک خانواده چند نفر انتخاب شوند و یک ویژگی از آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

⑦ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط **سبز** رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟ ۲۰

ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟ ۵

پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید. {۴,۹,۱۰,۱۳,۱۴}

⑧ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمّی (پیوسته)
کیفیت یک هلو	کیفی (ترتیبی)
اندازهٔ طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمّی (پیوسته)
اقوام ایرانی	کیفی (اسمی)
وضعیت آب‌وهوا	کیفی (اسمی)
دمای هوا در قله	کمّی (پیوسته)
فشار هوا در قله کوه	کمّی (پیوسته)