مفهوم‌وکاربردها (آزمون اول)

حسابان ۱

۱- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n

مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n
$$(۱)\quad ۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی از ۱ تا $۲n-۱$
$$(۲)\quad ۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$$

مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا ۲n
$$(۳)\quad ۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$$

۲- مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در یک دنباله‌ی حسابی، با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت d و جمله‌ی عمومی a_n ، مجموع n جمله‌ی اول با S_n نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:
$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+...+a_{n-۱}+a_n$$

مجموع این جملات از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\qquad (۱)$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\qquad (۲)$$

یادآوری: در دنباله‌ی حسابی، با در اختیار بودن جمله‌ی عمومی یا خود دنباله، قدر نسبت برابر $d=a_۲-a_۱$ است و به‌طور کلی:
$$a_{n+۱}-a_n=d\quad ,\quad a_n-a_m=(n-m)d$$

۳- مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت q، مجموع n جمله‌ی اول با S_n نمایش داده می‌شود:
$$S_n=a_۱+a_۱q+a_۱q^۲+...+a_۱q^{n-۱}$$

این مجموع از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:
$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\ ,\ q\neq ۱$$

رابطه‌ی بین $S_{۲n}$ و S_n ◄ در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت q، رابطه‌ی بین $S_{۲n}$ (مجموع ۲n جمله‌ی اول) و S_n (مجموع n جمله‌ی اول) دنباله به‌صورت مقابل است:
$$\frac{S_{۲n}}{S_n}=۱+q^n$$

۴- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه:

$$S=x'+x''=\frac{-b}{a}\ \text{(مجموع ریشه‌ها)}\qquad P=x'.x''=\frac{c}{a}\ \text{(حاصل‌ضرب ریشه‌ها)}$$

تذکر ۱: در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، ریشه‌های معادله $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند، با شرط $x'>x''$،

تفاضل دو ریشه برابر است با:
$$x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\quad ,x'>x''$$

تذکر ۲: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

الف- اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد $(a+b+c=۰)$، آنگاه یک ریشه‌ی معادله ۱ و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

ب- اگر $a+c=b$، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (-۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

تذکر ۳: معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

الف- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم باشد، آنگاه $\Delta>۰$ و $b=۰$. زیرا $x'=-x''$، پس $x'+x''=\frac{-b}{a}=۰$، در نتیجه $b=۰$.

ب- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و عکس هم باشد، آنگاه $\Delta>۰$ و $a=c$. زیرا $x'=\frac{۱}{x''}$، پس $x'.x''=\frac{c}{a}=۱$ در نتیجه $a=c$.

تذکر ۴: در معادله‌ای با یک ضریب مجهول، در مواردی که رابطه‌ای جبری بین دو ریشه داده شده، معمولاً با استفاده از S یا P ، یک ریشه‌ی معادله را یافته و با صدق دادن ریشه در خود معادله، مجهول خواسته شده را می یابیم.

(۱) $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. $\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 & \text{دو ریشه‌ی متحدالعلامت} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 & \text{هر دو ریشه مثبت} \\ \frac{-b}{a} < 0 & \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases} \\ \frac{c}{a} < 0 & \text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت} \end{cases}$

(۲) $\Delta = 0 \Rightarrow$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد. $\Rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف مثبت است.} \\ \frac{-b}{a} < 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف منفی است.} \end{cases}$

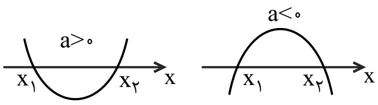
(۳) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

معادله‌ی درجه‌ی‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های حقیقی x' و x'' را می‌توان بر حسب S و P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت.

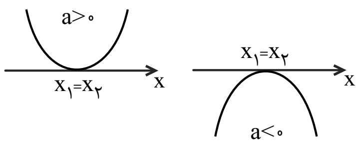
که در آن $S = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P = \frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) است.

۵- تعیین وضعیت تابع درجه دوم با محور x ها

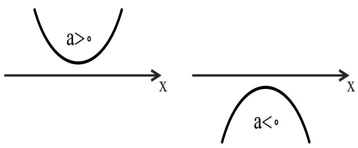
۱) نمودار محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. (۱) $\Delta > 0$



۲) نمودار بر محور x ها مماس است. (۲) $\Delta = 0$



۳) نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند. (۳) $\Delta < 0$



تعیین علامت صفرهای تابع با استفاده از Δ، S و P: در تابع درجه دو با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با استفاده از Δ، S و P می‌توان علامت ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را یافت.

رابطه‌ی بین نمودار تابع و ضرایب معادله: اگر نمودار تابع در اختیار باشد، می‌توانیم علامت ضرایب معادله را بیابیم، همچنین با تعیین ضرایب معادله و علامت آنها، می‌توانیم تعیین کنیم که تابع درجه‌ی دوم از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می‌کند. در این حالت برای تعیین علامت ضرایب معمولاً به خواص زیر توجه می‌کنیم:

الف) دهانه سهمی: علامت a را مشخص می‌کند.

ب) عرض از مبدأ تابع: علامت $(f(0) =)c$ را می‌دهد.

پ) طول رأس: $x = -\frac{b}{2a}$ ، به تعیین علامت a و b کمک می‌کند.

ت) Δ ی معادله: وضعیت تقاطع تابع با محور x ها را مشخص می‌کند.

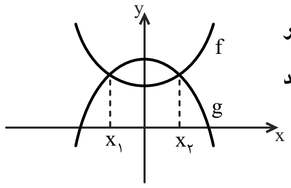
۶- معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه دوم

روش تجزیه و تقسیم: برای حل یک معادله‌ی چندجمله‌ای $P(x) = 0$ ، می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری، معادله را به حاصلضرب عامل‌ها تجزیه کرده، هر کدام از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌های معادله را بیابیم.

تذکر (۱): اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد، آنگاه $x = 1$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x) = 0$ خواهد بود. با تقسیم معادله بر $x - 1$ و یافتن خارج قسمت، می‌توانیم ریشه‌های دیگر را بیابیم.

تذکر (۲): به طور کلی اگر $x = a$ ، یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x) = 0$ باشد، آنگاه $x - a$ یک عامل ضربی معادله است و با تقسیم $P(x)$ بر $x - a$ می‌توان سایر ریشه‌ها را (در صورت وجود) یافت.

۷- روش هندسی حل معادلات



برای حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به روش هندسی، کافی است نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. طول نقاط تلاقی دو نمودار، جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس. هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است.

در شکل رسم شده، طول‌های نقاط تلاقی یعنی x_1 و x_2، ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ هستند.

تذکر: توجه کنید که محل‌های تلاقی دو تابع f و g، ریشه‌های ساده و محل‌های تماس آنها، ریشه‌های مضاعف معادله‌ی $f(x)=g(x)$ هستند.

روش کلی حل معادلات گویا: برای حل یک معادله‌ی گویا، طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب کرده و با ساده کردن عبارت جبری حاصل، معادله‌ی به دست آمده را حل کرده و جواب‌های آن را می‌یابیم. جواب‌هایی قابل قبول‌اند که مخرج هیچ‌کدام از کسر(ها) را صفر نکنند.

روش کلی حل معادلات گنگ : برای حل یک معادله‌ی گنگ، باید آن را از حالت گنگ خارج کنیم. این عمل معمولاً به وسیله‌ی توان‌رسانی طرفین معادله امکان‌پذیر است و عمل توان‌رسانی را تا جایی ادامه می‌دهیم که معادله‌ای بدون عبارت گنگ به‌دست آید. معادله‌ی به‌دست آمده را حل کرده و جواب‌هایی از آن را قبول می‌کنیم که هر یک از عبارت‌های گنگ قابل تعریف باشند و همچنین این جواب‌ها در خود معادله‌ی اولیه صدق کنند.

تذکر: در بعضی از معادلات گنگ، به کمک یافتن حوزه‌ی تعریف معادله و تعیین حدود تغییرات عبارت، می‌توان درباره‌ی وجود یا عدم وجود ریشه‌ها نظر داد.

تذکر: استفاده از دو خاصیت جبری زیر در حل تعدادی از معادلات گنگ کمک می‌کند.

الف) اگر $A\times B=0$، آنگاه $A=0$ یا $B=0$.

ب) اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد، آنگاه همه‌ی آنها باید مقدار صفر داشته باشند.

۸- تساوی‌های قدر مطلق

(۱) $|a|\geq 0$

(۲) $|a|=|-a|$

(۳) $\sqrt{a^2}=|a|$

(۴) $|a|^2=a^2$

(۵) $\sqrt[2m]{a^{2n}}=\sqrt[m]{|a|^n}$ ، m و $n\in N$ $(m>1)$

(۶) اگر $|a|=a \Rightarrow a\geq 0$

(۷) اگر $|a|=-a \Rightarrow a\leq 0$

(۸) اگر $|a|>0 \Rightarrow a\neq 0$

(۹) اگر $|x|=a \Rightarrow x=\pm a$ ،$a\geq 0$

(۱۰) اگر $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$

(۱۱) $|ab|=|a||b|$

(۱۲) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

نامساوی‌های قدر مطلق: خواص زیر در نامساوی‌های قدرمطلقی برقرار است:

نامساوی‌های قدر مطلق		
نامساوی معادل	حدود تغییرات	نامساوی قدر مطلق $(a>0)$
• $x^2<a^2$	$-a<x<a$	(۱) $|x|<a$
• $x^2\leq a^2$	$-a\leq x\leq a$	(۲) $|x|\leq a$
• $x^2>a^2$	$x<-a$ یا $x>a$	(۳) $|x|>a$
• $x^2\geq a^2$	$x\geq a$ یا $x\leq -a$	(۴) $|x|\geq a$

نامساوی مثلثی: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه: $|a+b|\leq|a|+|b|$

تساوی زمانی امکان‌پذیر است که a و b هم‌علامت باشند یا a یا b صفر باشد، به عبارت دیگر $ab\geq 0$.

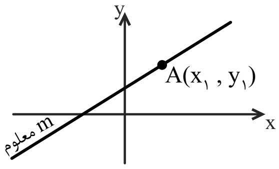
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$: برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه کرده و قسمت پایین محور x ها را حذف می‌کنیم.

تذکر: در حل بعضی از معادلات قدر مطلقی می‌توانیم از نامساوی مثلثی استفاده کرده و دو طرف تساوی را با هم مقایسه کنیم.

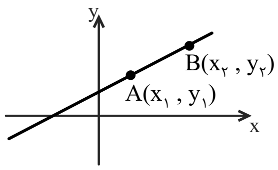
۹- آشنایی با هندسه تحلیلی

در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله‌ی خط را نوشت.

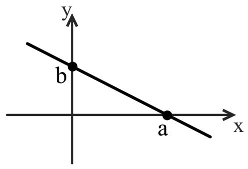
۱- معلوم بودن شیب و یک نقطه معادله: $y-y_1=m(x-x_1)$



۲- معلوم بودن دو نقطه معادله: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$



۳- معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ معادله: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a,b\neq 0)$



فاصله‌ی بین دو نقطه (اندازه‌ی یک پاره‌خط): فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

اگر m و m' به ترتیب ضریب زاویه‌های شیب‌های دو خط Δ و Δ' باشند، آنگاه:

الف) شرط موازی بودن دو خط آن است که $m=m'$.

ب) شرط عمود بودن دو خط آن است که $m.m'=-1$.

پ) شرط متقاطع بودن دو خط آن است که $m\neq m'$.

۱۰- مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

هرگاه $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، آنگاه مختصات نقطه‌ی M وسط این پاره‌خط برابر است با:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2} , \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط: برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0 , y_0)$ از خط $ax+by+c=0$، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

برای یافتن فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ریاضی ۱

۱۱- مجموعه‌های اعداد

(۱) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ (۲) $W - N = \{0\}$

(۳) $R - Q = Q'$ (۴) $Q \cap Q' = \varnothing$

تذکر: هر عدد اعشاری که تعداد ارقام اعشار آن بی‌شمار باشد و متناوب نباشد، گنگ است. اگر نمایش اعشاری عدد، مختوم یا متناوب باشد، آنگاه گویاست. $0/333...$ (گویا) $0/2202200220002...$ (گنگ)

۱۲- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌ی متناهی می‌نامند، اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامند. در مجموعه‌های نامتناهی، تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

تذکر: مجموعه‌های N، W، Z، Q، Q' و R همگی نامتناهی هستند.

تذکر: مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای متناهی در نظر گرفته می‌شود.

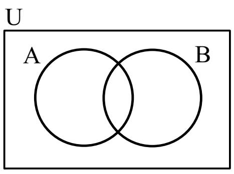
تذکر: اگر مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای نامتناهی است.

اگر مجموعه‌ی A، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.

۱۳- متمم یک مجموعه

اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، آنگاه:

(۱) $U - A = A'$ (۲) $A \cap A' = \varnothing$ (۳) $A - A' = A$ (۴) $A \cup A' = U$

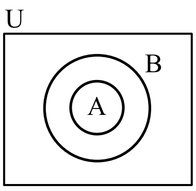


قوانین متمم مجموعه: اگر A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه قوانین زیر برقرارند:

(۱) $(A')' = A$ (۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (۳) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(۴) $A - B = A \cap B'$ (۵) $A \subset (A \cup B)$ (۶) $(A \cap B) \subset A$

(۷) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$



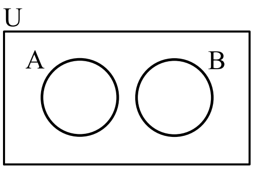
تذکر: اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه:

(۱) $B' \subset A'$ (۲) $A - B = \varnothing$

(۳) $A \cap B = A$ (۴) $A \cup B = B$

۱۴- تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱- دو مجموعه‌ی جدا از هم: اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامند. بنابراین در دو مجموعه‌ی جدا از هم خواهیم داشت:



(۱) $(A \cap B) = \varnothing$ (۲) $A - B = A$

(۳) $B - A = B$ (۴) $A \subset B'$

(۵) $B \subset A'$

تذکر: دو مجموعه‌ی $A - B$ و $B - A$ همواره جدا از هم‌اند.

۲- تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه: فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U هستند.

اگر $n(A)$ و $n(B)$ به‌ترتیب تعداد اعضای مجموعه‌های A و B باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را با $n(A \cup B)$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت: A

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در این فرمول، $n(A \cap B)$ تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

۱۵- الگو

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده و یا ترکیبی از این دو باشد.

۱۶- الگوی خطی

اگر جمله‌ی عمومی یک الگو به‌صورت $t_n = an + b$ باشد (a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت)، آن الگو را خطی می‌نامیم. در الگوی خطی، میزان تغییر جملات متوالی برابر ضریب n، یعنی عدد a است. به عبارت دیگر یک الگوی خطی، نقاطی به مختصات (n, t_n) بر روی خط $y = ax + b$ هستند. در این حالت، میزان تغییر جملات به ازای تغییرات n، شیب خط، یعنی عدد a است.

۱۷- الگوهای غیرخطی

الگوهایی وجود دارند که خطی نیستند، یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آنها، مقدار ثابتی نیست. معروف‌ترین این الگوها، الگوهای مربعی، مثلثی و الگوهای درجه‌ی دوم هستند.

تذکر: هر الگویی که هر جمله‌ی آن، مساوی مجموع شماره‌ی همان جمله و اعداد طبیعی قبل از آن باشد را یک الگوی مثلثی می‌نامیم و جمله‌ی عمومی آن را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $a_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

تعریف دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ها را به شکل مقابل نمایش می‌دهند: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

تذکر: با در اختیار داشتن جملات یک دنباله، در اغلب موارد می‌توانیم با یافتن رابطه‌ای بین هر دو جمله‌ی متوالی، جمله‌ی عمومی دنباله و جملات دیگر دنباله را بیابیم.

۱۸- دنباله حسابی

یک دنباله‌ی حسابی، دنباله‌ای است به صورت: $t_1, t_1+d, t_1+2d, t_1+3d, \dots$

که در آن t_1 جمله‌ی اول و d قدر نسبت (تفاضل مشترک) دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی (جمله‌ی nام) از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $t_n = t_1 + (n-1)d$

به بیان دیگر، دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$ یک دنباله‌ی حسابی است اگر: $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{n+1} - t_n = d$

واسطه‌ی حسابی بین دو عدد: اگر a, b, c، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه: $b = \frac{a+c}{2}$

تذکر: اگر دو جمله‌ی t_m و t_n از یک دنباله‌ی حسابی موجود باشند، آنگاه قدر نسبت از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید: $d = \frac{t_m - t_n}{m-n}$

تذکر: اگر بین دو عدد a و b، n واسطه‌ی حسابی قرار دهیم که با آن‌ها دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند، آنگاه قدر نسبت دنباله‌ی حاصل از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $d = \frac{b-a}{n+1}$

۱۹- دنباله‌های هندسی

یک دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است به صورت: $t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, \dots$

که در آن $t_1 \neq 0$ جمله‌ی اول و r قدر نسبت دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی nام (جمله‌ی عمومی) دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید: $t_n = t_1 r^{n-1}$

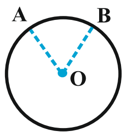
به بیان دیگر، دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی است، اگر: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_{n+1}}{t_n} = r$

واسطه‌ی هندسی بین دو عدد: اگر سه جمله‌ی a, b, c تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، آنگاه: $b^2 = ac$

تذکر: اگر دو جمله‌ی t_m و t_n، از یک دنباله‌ی هندسی در اختیار باشند، آنگاه: $\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$

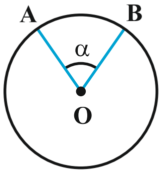
هندسه ۲

۲۰- کمان زاویهٔ مرکزی دایره:



زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌های دایره‌اند. بنا به قرارداد، اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی، مساوی اندازهٔ کمان مقابل آن است.

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

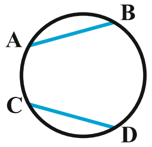


طول کمان و مساحت قطاع: زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ به اندازهٔ α درجه را در دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر بگیرید:

الف) طول کمان AB برابر است با $\frac{\alpha}{180}R\pi$.

ب) مساحت قطاع AOB برابر است با $\frac{\alpha}{360}\pi R^2$.

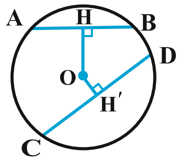
۲۱- تعریف وتر:



پاره خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود.

۱ـ در هر دایره، اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های متناظر آن‌ها مساوی‌اند و بر عکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



۲ـ در هر دایره، وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز دایره کم‌تر است و برعکس.

$$AB < CD \Leftrightarrow OH > OH'$$

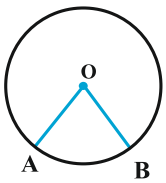
همچنین اگر فاصلهٔ دو وتر از مرکز دایره با هم برابر باشند، طول آن دو وتر با هم برابر است.

۳ـ در هر دایره، بین دو کمان، کمانی بزرگ‌تر است که وتر مقابل آن بزرگ‌تر است و برعکس.

$$AB < CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$$

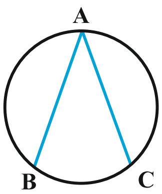
۴ـ در هر دایره، قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس.

۲۲- زاویه‌ها در دایره



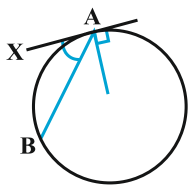
۱ـ زاویهٔ مرکزی: اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مساوی کمان مقابل آن است.

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$



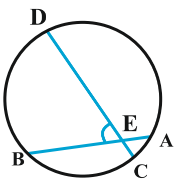
۲ـ زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع‌های آن وترهایی از دایره‌اند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی مساوی نصف کمان مقابل آن است.

$$B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$



۳ـ زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی مساوی با نصف کمان مقابل آن است.

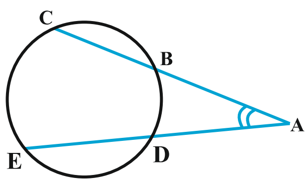
$$X\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



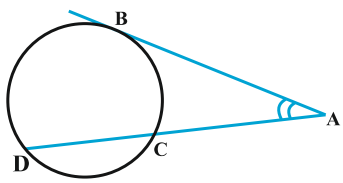
۴ـ زاویهٔ بین دو وتر دایره که در داخل دایره متقاطع‌اند: مساوی با نصف مجموع دو کمان مقابل آن است.

$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC})$$

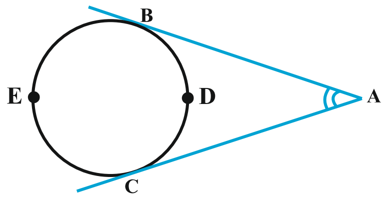
۵ـ زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره که در خارج دایره متقاطع‌اند: همچنین زاویهٔ بین امتداد یک وتر و یک مماس و نیز زاویهٔ بین دو مماس، مساوی با نصف قدرمطلق تفاضل دو کمان مقابل آن است.



$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD})$$



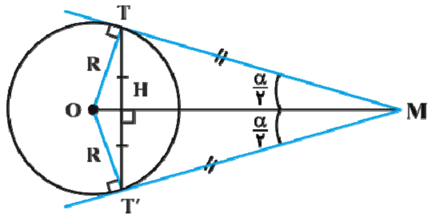
$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC})$$



$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC} - \overset{\frown}{BDC})$$

۲۳- روابط طولی و سایر ویژگی‌های مماس

از هر نقطه بیرون یک دایره، می‌توان دو مماس بر آن رسم کرد که طول این دو مماس با هم برابر است. در شکل زیر از نقطهٔ M ، مماس‌های MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده است، داریم:



۱ـ MO نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است.

۲ـ $MT = MT' = \sqrt{MO^{۲} - R^{۲}}$

۳ـ MO عمود منصف TT' است.

۴ـ $R^{۲} = OH \cdot OM$

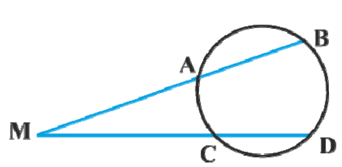
۵ـ $TH^{۲} = OH.HM \Rightarrow TT'^{۲} = ۴OH \cdot HM$

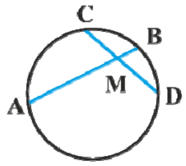
۶ـ $TT' \cdot OM = ۲R \cdot MT$

۷ـ اگر زاویهٔ بین دو مماس MT و MT' برابر α باشد، آن‌گاه: $\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{R}{MT}$ و $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R}{OM}$

۲۴- روابط طولی دو وتر متقاطع

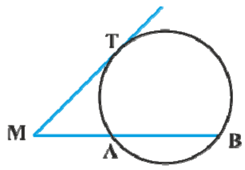
اگر از نقطهٔ M دو قاطع چنان رسم کنیم که یکی از آن‌ها دایره را در A و B و دیگری دایره را در C و D قطع کند، آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$





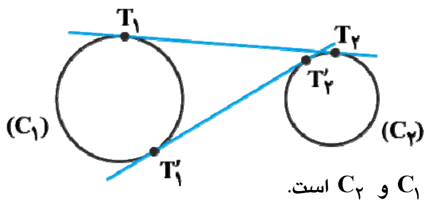
عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر دو پاره‌خط AB و CD (یا امتدادهای آن‌ها) در نقطهٔ M طوری یکدیگر را قطع کنند که $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ ، آن‌گاه چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره واقع‌اند.

۲۵- روابط طولی مماس و امتداد وتر



اگر از نقطهٔ M خارج یک دایره، قاطع MAB و مماس MT را بر آن دایره رسم کنیم، آن‌گاه $MT^{۲} = MA.MB$ ، عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر سه نقطهٔ M، A و B روی یک خط راست و T خارج این خط طوری واقع باشند که $MT^{۲} = MA \cdot MB$ ، آن‌گاه دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و T می‌گذرد، در نقطهٔ T بر MT مماس است.

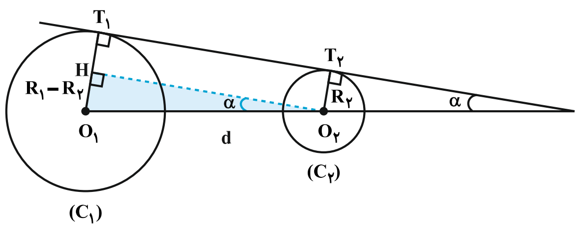
۲۶- تعریف مماس مشترک و بررسی وضع دو دایره نسبت به هم



مماس مشترک دو دایره: مماس مشترک دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ خطی است که هم بر $C_۱$ و هم بر $C_۲$ مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف این خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین این خط باشند، آن را مماس مشترک داخلی گویند.

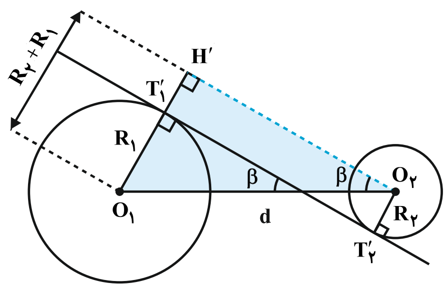
مثلاً در شکل مقابل $T_۱T_۲$ مماس مشترک خارجی و $T'_۱T'_۲$ مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ است.

۲۷- محاسبهٔ طول مماس‌های مشترک دو دایره



۱ـ برای محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، عمودی بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس در دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $HO_۱O_۲$ ، طول $O_۲H = T_۱T_۲$ به‌دست می‌آید. همچنین اگر α زاویهٔ مماس مشترک خارجی با خط‌المرکزین باشد، داریم:

$$T_۱T_۲ = \sqrt{d^{۲} - (R_۱ - R_۲)^{۲}} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{R_۱ - R_۲}{d}$$



۲ـ برای محاسبهٔ طول مماس مشترک داخلی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، عمودی بر امتداد شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس در دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $H'O_۱O_۲$ ، طول $O_۲H' = T'_۱T'_۲$ به‌دست می‌آید. همچنین اگر β زاویهٔ مماس مشترک داخلی با خط‌المرکزین باشد، داریم:

$$T'_۱T'_۲ = \sqrt{d^{۲} - (R_۱ + R_۲)^{۲}} \quad \text{و} \quad \sin\beta = \frac{R_۱ + R_۲}{d}$$

آمار و احتمال

۲۸- گزاره‌ها:

گزاره: یکی از اساسی‌ترین مفاهیم و ابزار شروع کار در منطق ریاضی، گزاره است. گزاره جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، به‌طور ثابت دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) می‌باشد. درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا « T » و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا « F » نمایش می‌دهیم.

تذکر: ۱) گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است، اگر چه ممکن است درستی یا نادرستی گزاره برای ما واضح و مشخص نباشد.

۲) جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی، گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است. بنابراین هر گزاره مانند p ، فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول زیر می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزارهٔ p و q، طبق جدول روبه‌رو، دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نکته: ارزش‌های n گزاره، دارای 2^n حالت است. به‌طور مثال ارزش سه گزارهٔ p، q و r دارای $8 = 2^3$ حالت مختلف است.

گزاره‌نما: هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

دامنهٔ متغیر و مجموعهٔ جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.
در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم $S \subseteq D$.

نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش $\sim p$ همواره عکس ارزش p است.

ترکیب فصلی دو گزاره: هرگاه دو گزاره را با حرف «یا» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم. ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم.
جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

بنابراین ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشد.

ترکیب عطفی دو گزاره: هرگاه دو گزاره را با حرف «و» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم.
جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q $(p \wedge q)$ تنها زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد.

هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌ها: دو گزاره، هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند هرگاه ارزش آن‌ها به‌ازای تمامی حالت‌های گزاره‌های سازندهٔ آن‌ها یکسان باشد و با نماد $\equiv$ نشان داده می‌شود.

۲۹- قوانین گزاره‌ها:

الف) قوانین جابه‌جایی

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

پ) قوانین توزیع‌پذیری
$$\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\end{cases}$$

ت) قوانین دمورگان
$$\begin{cases} \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q\\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q\end{cases}$$

ث) قوانین جذب
$$\begin{cases} p\vee(p\wedge q)\equiv p\\ p\wedge(p\vee q)\equiv p\end{cases}$$

۳۰- **ترکیب شرطی دو گزاره:** هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « $p\Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، p شرط کافی برای q و q شرط لازم برای p می‌باشد. جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ به‌صورت زیر است:

با توجه به جدول، ارزش گزارهٔ $p\Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در حالتی که ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزارهٔ مرکب $p\Rightarrow q$ همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش $p\Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته: برای دو گزارهٔ دلخواه p و q داریم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

۳۱- **عکس نقیض ترکیب شرطی:** ارزش یک گزاره‌ی شرطی، معادل ارزش عکس نقیض آن است، یعنی داریم: $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$

۳۲- **ترکیب دو شرطی دو گزاره:** هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت $p\Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ را به‌صورت‌های زیر می‌خوانیم.

«اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است»، «p اگر و تنها اگر q»

با توجه به این‌که $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است:

یعنی ارزش ترکیب دو شرطی دو گزارهٔ p و q، زمانی درست است که ارزش دو گزارهٔ p و q یکسان باشد.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۳۳- **سورها:** در منطق ریاضی از عباراتی مانند «به ازای هر»، «به ازای بعضی مقادیر» و «به ازای هیچ مقدار» برای ساختن جملات ریاضی استفاده می‌شود و برای هر یک از جملات ذکر شده از علامت‌های خاصی استفاده می‌کنیم. به این علامت‌ها سور می‌گوییم که در جلوی گزاره‌نماها قرار می‌گیرند. از این سورها برای تبدیل گزاره‌نما به گزاره استفاده می‌شود و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌شود.

سور عمومی: جملهٔ «به ازای هر x، $p(x)$ برقرار است.» یک جمله با سور عمومی است که در آن $p(x)$ یک گزاره‌نما است. به این دلیل به آن سور عمومی می‌گوییم که هر عضو دارای خاصیت p است. برای سور عمومی از نماد $\forall$ استفاده می‌کنیم. این نماد از وارون حرف اول کلمه‌ی «All» به معنی «همه» گرفته شده و این‌طور خوانده می‌شود: «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» و به‌صورت « $\forall x\ ;\ p(x)$ » نوشته می‌شود. گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

سور وجودی: جملهٔ «به ازای بعضی مقادیر x، $p(x)$ برقرار است.» یک جمله با سور وجودی است که در آن $p(x)$ یک گزاره‌نما است. از نماد « $\exists$ » برای سور وجودی استفاده می‌کنیم. این نماد از وارون حرف اول کلمه‌ی «Exist» به معنی «وجود داشتن» گرفته شده و این‌طور خوانده می‌شود: «به ازای بعضی مقادیر» یا «وجود دارد» و به‌صورت « $\exists x;p(x)$ » نمایش داده می‌شود. گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.

سور صفر: جملهٔ «هیچ مقداری برای x وجود ندارد که $p(x)$ برقرار باشد.» یک جمله با سور صفر است که در آن $p(x)$ یک گزاره‌نما است. از نماد « $\nexists$ » برای سور صفر استفاده می‌کنیم و این‌طور خوانده می‌شود: «هیچ عضوی وجود ندارد» یا «به ازای هیچ مقدار» و به‌صورت $\nexists x\ ;\ p(x)$ نوشته می‌شود. گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور صفر همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی باشد.

نقیض گزاره‌های سوری:

۱) نقیض گزارهٔ « $\forall x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\exists x\ ;\ \sim p(x)$ » است.

۲) نقیض گزارهٔ « $\exists x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\forall x\ ;\ \sim p(x)$ » یا « $\nexists x\ ;\ p(x)$ » است.

۳) نقیض گزارهٔ « $\nexists x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\exists x\ ;\ p(x)$ » است.

۳۴- **مجموعه:** مجموعه یک مفهوم اولیه است و به عنوان دسته‌ای از اشیاء کاملاً معین در نظر گرفته می‌شود که با نام بردن اعضای آن یا خاصیت اعضای آن مشخص می‌شود. معمولاً مجموعه را با یکی از حروف بزرگ (C,B,A و ...) نمایش می‌دهیم.

به هر شیء مجموعه یک عضو یا عنصر آن مجموعه می‌گوییم.

تعلق: اگر x عضو مجموعهٔ A باشد یا به عبارت دیگر x متعلق به A باشد، می‌نویسیم: $x \in A$

اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد یا به عبارت دیگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم: $x \notin A$

به‌عنوان مثال برای مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) داریم: $1 \in N \quad , \quad 0 \notin N$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول دو رقمی و زوج، یک مجموعهٔ تهی (بدون عضو) است.

مجموعهٔ مرجع: در هر بحث معین از اعضایی صحبت می‌کنیم که این اعضا متعلق به یک مجموعهٔ بزرگ‌تر به نام مجموعهٔ جهانی یا مجموعهٔ مرجع هستند. مجموعهٔ مرجع را معمولاً با نماد U نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر A مجموعهٔ اعداد اول باشد، آن‌گاه می‌توانیم مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان مجموعهٔ جهانی در نظر بگیریم.

متمم یک مجموعه: متمم مجموعهٔ A نسبت به مجموعهٔ مرجع که با A' نمایش داده می‌شود شامل اعضایی از U است که در A وجود ندارند.

۳۵- نمایش مجموعه با گزاره‌نما: خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $P(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم.

بنابراین برای نشان دادن مجموعهٔ A در حالت کلی می‌نویسیم: $A = \{x \in U \mid P(x)\}$

در رابطهٔ فوق، U مجموعهٔ مرجع و $P(x)$ شرطی است که با توجه به آن، اعضای مجموعه (یعنی xها) مشخص می‌شوند. این نوع نمایش مجموعه را، نمایش مجموعه با گزاره‌نما می‌گوییم.

۳۶- زیرمجموعه: با حذف برخی از اعضای مجموعهٔ غیرتهی A، مجموعه‌های دیگری به‌دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. به‌عبارت دیگر مجموعهٔ B یک زیرمجموعه از مجموعهٔ A است اگر هر عضو B، عضوی از A نیز باشد و می‌نویسیم: $B \subseteq A$. با استفاده از نمادهای ریاضی داریم: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$

نکته: با توجه به تعریف زیرمجموعه، اگر A یک مجموعهٔ دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه:

۱) $\varnothing \subseteq A$: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ تمامی مجموعه‌ها است.

۲) $A \subseteq A$: هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است.

۳) $A \subseteq U$: هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع است.

نکته: برای دو مجموعهٔ A و B، اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد، در این صورت B زیرمجموعهٔ A نیست $(B \not\subseteq A)$ و بالعکس اگر B زیرمجموعهٔ A نباشد آن‌گاه قطعاً عضوی در B وجود دارد که در A نیست. با استفاده از نمادهای ریاضی داریم: $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x \in B \wedge x \notin A$

۳۷- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

نکته:

۱) برای دو مجموعهٔ A و B، $A \subseteq A \cup B$، $B \subseteq A \cup B$، $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$.

۲) برای چهار مجموعهٔ A، B، C و D، اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$، آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$ و $A \cap C \subseteq B \cap D$.

۳) برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \cup B \subseteq C$.

۴) برای دو مجموعهٔ A و B، اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A - B = \varnothing$.

۵) برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup C$ و $A \cap C \subseteq B \cap C$.

۶) برای دو مجموعهٔ A و B، اگر $A \cap B = \varnothing$، آن‌گاه $A - B = A$ و $B - A = B$.

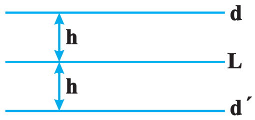
۳۸- افراز: فرض کنیم $A \neq \varnothing$ یک مجموعه و A_1، A_2، ... و A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعهٔ A به n زیرمجموعهٔ A_1، A_2، ... و A_n افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

I) $\forall i (1 \le i \le n) \quad : \quad A_i \neq \varnothing$ (A_i ها ناتهی باشند)

II) $\forall i \neq j \quad : \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ (اشتراک دو به دوی A_i ها تهی باشد)

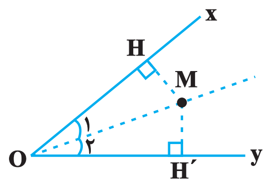
III) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ (اجتماع A_i ها برابر مجموعهٔ A شود)

۳۹- نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط:

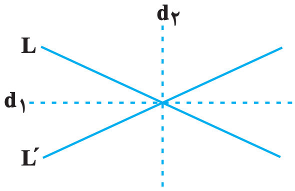


مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یکی از خطوط صفحه به فاصلهٔ معلومی باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط قرار دارند. به عنوان مثال در شکل مقابل، مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ معلوم h باشند، دو خط d و d' در طرفین خط L هستند.

۴۰- ویژگی نیمساز یک زاویه:



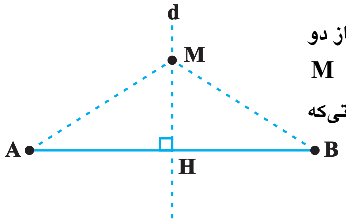
هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در شکل مقابل اگر $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ باشد، آن‌گاه $MH = MH'$ است و در صورتی که $MH = MH'$ باشد، آن‌گاه $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.



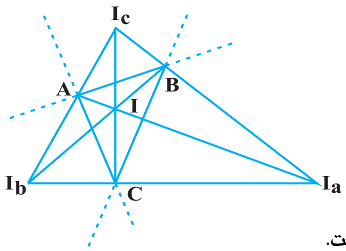
مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع L و L' به یک فاصله باشند، نیمساز هر یک از زاویه‌هایی است که بین دو خط تشکیل می‌شود. این دو نیمساز در نقطهٔ تقاطع دو خط، برهم عمود هستند.

۴۱- ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط:

هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. یعنی در شکل زیر، اگر نقطهٔ M روی خط d (عمودمنصف پاره‌خط AB) قرار داشته باشد، آن‌گاه $MA = MB$ است و درصورتی‌که $MA = MB$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ M روی خط d (عمودمنصف پاره‌خط AB) قرار دارد.



۴۲- همرسی نیمسازها:



سه نیمساز داخلی هر مثلث همرسند، نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی، از هر سه ضلع مثلث، به یک فاصله است و همواره داخل مثلث قرار دارد. همچنین هر دو نیمساز خارجی مثلث با نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم همرسند، این نقطه‌ی همرسی از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر، به یک فاصله است، یعنی در شکل مقابل داریم:

I : نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC که از هر سه ضلع AB، AC و BC به یک فاصله است.

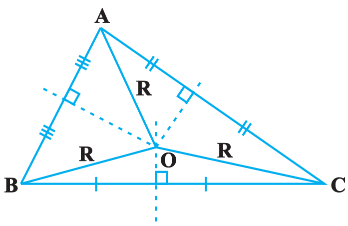
I_a : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\widehat{A}$ و نیمسازهای خارجی $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ که از ضلع BC و امتداد AB و AC به یک فاصله است.

I_b : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\widehat{B}$ و نیمسازهای خارجی $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ که از ضلع AC و امتداد AB و BC به یک فاصله است.

I_c : نقطه‌ی همرسی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\widehat{C}$ و نیمسازهای خارجی $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ که از ضلع AB و امتداد AC و BC به یک فاصله است.

یعنی چهار نقطه‌ی I، I_a، I_b و I_c از اضلاع مثلث ABC یا امتداد آن‌ها، به یک فاصله هستند.

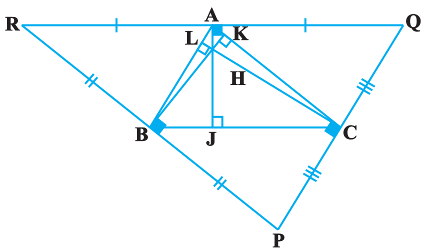
۴۳- همرسی عمودمنصف‌ها:



عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرسند. نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌ها بسته به این‌که مثلث حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، وسط وتر و خارج مثلث واقع است.

نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های هر مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.

۴۴- همرسی ارتفاع‌ها:

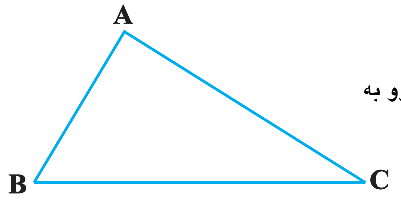


قضیه: اگر از رئوس مثلث ABC، خطوطی به موازات اضلاع آن رسم کنیم تا مثلث PQR به دست آید، آن‌گاه ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث PQR هستند. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.

نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث، بسته به این‌که آن مثلث حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، در رأس قائمه و خارج مثلث واقع است.

۴۵- نامساوی‌های هندسی:

الف) قضیهٔ ضلع برتر:



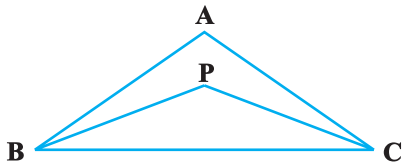
اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث ABC، اگر $AC > AB$، آنگاه $\hat{B} > \hat{C}$.

ب) قضیهٔ زاویهٔ برتر:

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث ABC، اگر $\hat{B} > \hat{C}$، آنگاه $AC > AB$.

ج) قضیهٔ نامساوی مثلث:

در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است، یعنی در مثلث ABC داریم: $AB + AC > BC$، $AB + BC > AC$ و $AC + BC > AB$



اگر a، b و c، طول اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه $|b - c| < a < b + c$. به بیان دیگر در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بیش‌تر است.

۴۶- استدلال:

قضیه:

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

عکس قضیه:

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

قضیهٔ دو شرطی:

اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی، خود یک قضیهٔ شرطی باشد، آنگاه این دو قضیهٔ شرطی را می‌توان به‌صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیهٔ دوشرطی نامیده می‌شود.

نکته: قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد.

گزاره:

گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد، گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره‌ی ساده باشد که به آن گزاره‌ی مرکب می‌گویند.

نقیض یک گزاره: همان‌طور که می‌دانیم، ارزش یک گزاره یا درست است یا نادرست. نقیض یک گزاره، ارزشی دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره دارد.

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. به‌عنوان مثال برای حکم کلی «همهٔ اعداد اول فرد هستند.» می‌توان عدد ۲ را به‌عنوان مثال نقض ارائه کرد که عدد اول است ولی فرد نیست.

برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین صورت که به‌جای آن‌که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به‌درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض با فرض یا یک امر غیرممکن می‌رسیم.