پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقات ریاضی نهم

۹

از مجموعه مرشد

- بیش از ۳۰۰۰ سؤال چندگزینه‌ای (شامل: آزمون‌های ورودی مدارسِ تیزهوشان و ممتاز تهران و مراکز استان‌های کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی، سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد و...)
- بیش از ۶۰۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی سوم دبیرستان (کلاس نهم) که دانش‌آموزان علاقه‌مند باید فراگیرند.
- پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

وحید اسدی کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «مسابقات ریاضی نهم» یا «۳۰۰۰ تست مرشد» را از مجموعه‌ی «مرشد» منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی‌کیا تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس نهم (پایه سوم دوره اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس استعدادهای درخشان و خاص آماده می‌کند.

در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز استان تهران و مرکز استان‌های کشور

۲- آزمون‌های پیشرفت تحصیلی تیزهوشان

۳- مسائل کنکورهای سراسری و آزاد

۴- مسابقات علمی کشوری و بین مدرسه‌ای

۵- المپیادهای ریاضی داخلی و خارجی

۶- مسائل مسابقات جهانی کانگورو و آزمون‌های جهانی ریاضی IMC، TIMSS، ABC و آزمون‌های GMAT و GRE

۷- مسائل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)

۸- مسائل المپیادهای کشوری مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران

۹- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان استان تهران و مراکز استان‌های کشور

۱۰- آزمون‌های ورودی روبوکاپ

و منابع دیگر

مسائل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی ریاضی نهم (سوم دبیرستان دوره اول متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت ⌧ مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد)

لازم به ذکر است کتاب ریاضی مرشد نهم در دو جلد تألیف شده است:

- جلد اوّل: شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها
- جلد دوم: شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها

امیدواریم این کتاب، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان یدالله باقری، اباصلت نورالهی، فتح‌اله پرباز (دبیر تیزهوشان استان اردبیل) و مهدی قدیری (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و محمدرضا گلزار (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و دارا نیکبخت (استان اصفهان) و اباصلت نورالهی و مهندس امیرمسعود طهماسبی، علی بدخشان و علیرضا دولتیاری و خانم‌ها: مهندس لیلا عباس‌زاد و فاطمه ستاری مرجانی و مریم مقصودی که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم لیلا (که زحمت حروف‌چینی، ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند) و بهاره خدامی (گرافیست) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

انتشارات مبتکران

فهرست

پاسخ‌نامه

فصل ۱ مجموعه‌ها

قسمت اول: مجموعه‌ها

معرفی مجموعه‌ها و عضوها

۱. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۱: هر دسته یا گروه از اشیاء، شکل‌ها، اعداد، حروف و... که عضوهای آن قابل تشخیص باشند یا هیچ عضوی نداشته باشند را مجموعه می‌نامیم. در ریاضیات، هر مجموعه را با یکی از حروفِ بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند و عضوهای آن را داخل آکولاد قرار داده و بین عضوهای آن «و» و یا «ویرگول (کاما)» می‌گذارند مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد دو رقمی: $A = \{۱۱, ۱۳, ۱۵, ..., ۹۹\}$

از علامت سه نقطه «...» به معنای «به همین ترتیب» در مجموعه‌هایی که تعداد عضوهای آن زیاد و نوشتن عضوها جاگیر یا زمان‌بر است استفاده می‌کنیم.

در گزینه‌ی (د)، عضوها به طور کامل مشخص نیستند پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه نمی‌دهند. توجه داشته باشید که در گزینه‌ی (ب) کاملاً مشخص است که هیچ عضوی وجود ندارد پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه می‌دهد.

۲. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۲: یادآوری برخی از مجموعه‌های مهم ریاضی:

ـ مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

ـ مجموعه‌ی اعداد حسابی: $\mathbf{I}$ یا $\mathbf{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

ـ مجموعه‌ی اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{..., -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$

ـ مجموعه‌ی اعداد گویا: $\mathbb{Q} =$ {اعداد کسری با صورت و مخرج صحیح که مخرج صفر نیست}

در تقسیم مخرج نباید صفر باشد، پس فقط مجموعه‌ی اعداد طبیعی قابل قبول است.

۳. گزینه‌ی (الف) $۱\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$ است در نتیجه این مجموعه فقط یک عضو دارد یعنی $\{۱\}$ است.

۴. گزینه‌ی (ب) حاصلِ $\sqrt{۱۳} - ۱۳$، نُه و خورده‌ای و حاصل $\sqrt{۱۷} + ۱۷-$، $۱۲-$ و خورده‌ای می‌شود که شامل اعدادِ صحیح از ۹ تا ۱۲- است.

۵. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۳: در مجموعه‌ها، نمادِ $\in$ به معنای «عضو بودن» و نمادِ $\notin$ به معنای «عضو نبودن» است. به طور مثال

می‌نویسیم $5 \in \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد پنج عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی است و یا می‌نویسیم $-6 \notin \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد ۶- عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیست.

مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ اعداد منفی را شامل نمی‌شود.

۶. گزینه‌ی (ج)

نکته‌ی ۴: در هر مجموعه، عضوهای تکراری فقط یک بار شمارش می‌شوند: $A = \{1,1,1,1,1,2,2,2\} = \{1,2\}$
هم‌چنین در هر مجموعه جابه‌جایی عضوها تأثیری در مجموعه ندارد و با جابه‌جا کردن عضوها، مجموعه‌ی جدیدی به وجود نمی‌آید. به طور مثال: $A = \{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,3,1\}$

۷. گزینه‌ی (الف) مجموعه‌ی A فقط شامل یک عضو است: $\{1,2,3,4,...\} \in A$

۸. گزینه‌ی (ب) طبق نکته‌ی (۴) مجموعه‌ی A شامل ۲ عضو است: $A = \{a, \{a\}\}$

۹. گزینه‌ی (د) مجموعه‌ی S را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $S = \{\{x\},\{\{x\}\},\{\{\{x\}\}\},x\}$

۱۰. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۵: هر عددِ صحیح که در ۲ یا مضرب‌های ۲ ضرب شود، حاصل همواره عددی زوج است. هم‌چنین داریم:
زوج = زوج ± زوج   فرد = فرد ± زوج   فرد = زوج ± فرد   زوج = فرد ± فرد

طبق نکته‌ی (۵)، $2K$ عددی زوج است. پس داریم:

$$\underbrace{2K}_{\text{زوج}} - \underbrace{5}_{\text{فرد}} = \text{فرد}$$

۱۱. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۶: به دنباله‌ای از اعداد که هر عدد با اضافه شدن عددی ثابت (یا کم شدن عددی ثابت) به عدد قبلی خود به دست می‌آید، «تصاعد عددی» یا «دنباله‌ی عددی» می‌گویند. به عبارت دیگر می‌توان گفت اختلاف هر دو عددِ متوالی، مقداری ثابت است که به این مقدار ثابت، «قدر نسبت» می‌گویند و آن را با حرف d نمایش می‌دهند. اگر a_1 به معنای اولین عددِ تصاعد و a_n $(n \in \mathbb{N})$ به معنای عددِ nاُم در این سری باشد، همواره داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d$$

و هم‌چنین اگر آخرین عددِ دنباله را a_m در نظر بگیریم، برای به دست آوردن تعداد اعداد دنباله داریم:

$$m = \frac{a_m - a_1}{d} + 1$$

عضوهای این مجموعه یکی در میان مثبت و منفی هستند. با در نظر نگرفتن علامت‌ها و با استفاده از نکته‌ی (۶) می‌توان نوشت:

$$a_{31} = 2 + (31-1) \times 5 \Rightarrow a_{31} = 2 + 150 \Rightarrow a_{31} = 152$$

و چون جملات با شماره‌ی فرد مثبت هستند، پس سی و یکمین عضو، عدد ۱۵۲ است.

۱۲. گزینه‌ی (ب) اعداد یکی در میان با یک‌دیگر دنباله‌ی عددی می‌سازند:

$$A = \{1,3,8,10,15,17,22,\ldots\}$$

$$+7 \quad +7 \quad +7$$

اگر اعداد با شماره‌ی زوج را در نظر بگیریم (زیرا ۱۲۰ عددی زوج است) کافی است شصتمین عضو $(120 \div 2 = 60)$ را به دست آوریم. طبق نکته‌ی (۶) داریم:

$$\{3,10,17,\ldots\} \rightarrow a'_{60} = 3 + (60-1) \times 7 \Rightarrow a'_{60} = 416$$

در نتیجه یکصد و بیستمین عضو یعنی $a_{120} = 416$ است.

۱۳. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۷: در هر دنباله‌ی عددی با n جمله، مجموعِ عضوهای دنباله (تصاعد) برابر است با: $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n$

با توجه به نکته‌های (۶) و (۷) می‌توان نوشت:

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A $\quad \frac{59-2}{3} + 1 = 20$

$$S_{20} = \frac{2+59}{2} \times 20 \Rightarrow S_{20} = 610$$

۱۴. گزینه‌ی (ب) مجموعه‌ی A_1، تا ۱ و مجموعه‌ی A_2 تا $3 = 2 + 1$ و مجموعه‌ی A_3 تا $1+2+3 = 6$ و مجموعه‌ی A_4 تا $1+2+3+4 = 10$ نوشته شده است. پس مجموعه‌ی A_9 تا $1+2+3+\cdots+9 = 45$ نوشته می‌شود. در نتیجه اولین عضوِ مجموعه‌ی A_{10}، $45 + 1 = 46$ است.

۱۵. گزینه‌ی (ب) مانند سؤال قبل، ابتدا عضوهای A_{21} را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن اولین عضو، مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم. داریم:

آخرین عضوِ A_{20} $\quad 1+2+3+\cdots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

در نتیجه اولین عضو A_{21}، ۲۱۱ است و آخرین عضو A_{21}، برابر است با:

$$1+2+3+\cdots+21 = \frac{21 \times 22}{2} = 231$$

$$\Rightarrow A_{21} = \{211,212,213,\ldots,231\} \xRightarrow{\text{با توجه به نکته (۷)}} S_{21} = \frac{211+231}{2} \times 21 = 4641$$

مجموعه‌ی تهی

۱۶. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۸: مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد، مجموعه‌ی تهی می‌نامند و آن را با نمادهای ϕ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند.

◄ تذکر: $\{\{\}\}$ یا $\{\phi\}$، **مجموعه‌ی تهی نیستند بلکه شاملِ یک عضو می‌باشند.**

بین ۲۴ و ۲۸، عددِ اولی وجود ندارد پس گزینه‌ی (د)، مجموعه‌ی تهی است.

۱۷. گزینه‌ی (د) معادله‌ی $x^2 + 8 = 0$ جوابِ «صحیح» ندارد پس مجموعه‌ی جواب آن در اعداد صحیح، $\{\}$ است.

باز یا بسته بودن یک مجموعه

۱۸. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۹: می‌گوییم مجموعه‌ی A نسبت به عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A، حاصل نیز عضوی از مجموعه‌ی A باشد. هم‌چنین مجموعه‌ی A نسبت به عملی باز است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A، حاصل عضوی از مجموعه‌ی A نباشد. به طور مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است زیرا مجموع هر دو عدد طبیعی همواره عددی طبیعی است و نسبت به عمل تفریق، باز است زیرا به طور مثال $۳,۵ \in \mathbb{N} \Rightarrow (۳-۵) \notin \mathbb{N}$

مثالِ نقض: $-۴,۰ \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-۴}{۰} \notin \mathbb{Z}$

۱۹. گزینه‌ی (د) مثالِ نقض: $۱,۲ \in \mathbb{N} \Rightarrow ۱-۲=-۱ \notin \mathbb{N}$

۲۰. گزینه‌ی (!) پاسخ درست در میان گزینه‌ها نیست! برای هر کدام مثالِ نقض نوشته شده است:

(الف) : $۳,۵ \in \mathbb{N} \Rightarrow ۳-۵=-۲ \notin \mathbb{N}$

(ب) : $۶,۰ \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{۶}{۰} \notin \mathbb{Z}$

(ج) : $\frac{۴}{۵},-\frac{۴}{۵} \in \mathbb{Q}-\{۰\} \Rightarrow \frac{۴}{۵}+(-\frac{۴}{۵})=۰ \notin \mathbb{Q}-\{۰\}$

(د) : $۲,۳ \in W \Rightarrow ۲-۳=-۱ \notin W$

۲۱. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۱۰: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با E و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد را با O نمایش می‌دهند:

$E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

$O=\{۱,۳,۵,۷,۹,...\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته نیست. زیرا:

روش اول:

حالت کلی؛ $n \in \mathbb{N}, ۲n+۱ \in O, ۲n'+۱ \in O$

$$\Rightarrow (۲n+۱)+(۲n'+۱)=۲n+۲n'+۲=۲(n+n'+۱) \in E$$

روش دوم:

مثال نقض؛ $۵,۷ \in O \Rightarrow ۵+۷=۱۲ \in E$

۲۲. گزینه‌ی (ج) مثال نقض برای عبارت (الف): $۱,۱ \in \{-۱,۰,۱\} \Rightarrow ۱+۱=۲ \notin \{-۱,۰,۱\}$

مثال نقض برای عبارت (ب): $۵,۷ \in \{۲x+۱ \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow ۵+۷=۱۲ \notin \{۲x+۱ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

عبارت (ج) درست است زیرا در حالت کلی می‌توان نوشت: $۲^n,۲^{n'} \in \{۲^x \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow ۲^n \times ۲^{n'}=۲^{n+n'}=۲^{n''} \in \{۲^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

عبارت (د) نادرست است زیرا مجموعه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

۲۳. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۱: به اعدادی که پس از تجزیه به عوامل اول، دارای توان زوج هستند، مربع کامل می‌گویند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به عمل ضرب بسته هستند:

اگر a و b و m و n اعداد طبیعی باشند، داریم: $a^{۲m} \times b^{۲n} = (a^m \times b^n)^۲$

مشخص است که $(a^m \times b^n)^۲$ مربع کامل است.

در مورد اعمالِ جمع، تقسیم و جذر می‌توان مثال نقض نوشت. به طور مثال $\sqrt{۲۵} = ۵$ می‌شود که مربع کامل نیست.

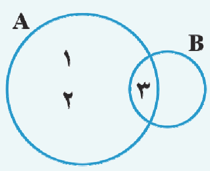
۲۴. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۲: در ریاضیات، مجموعه‌ها را می‌توان به ۳ صورت مختلف نمایش داد که عبارت‌اند از:

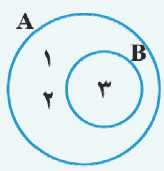
۱) نمایش هندسی (نمودار ون) ـ ۲) نمایش تفصیلی (نوشتن عضوها) ـ ۳) نمایش توصیفی (علایم ریاضی)

نمایش عضوهای مجموعه در یک منحنیِ بسته یا خط شکسته‌ی بسته را نمایش هندسی یا نمودار ون می‌گویند و از شکل‌های هندسی برای نمایش آن استفاده می‌کنند. این نمودار منسوب به دانشمند انگلیسی، آقای «جان وِن» است.

◄ تذکر: اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۳\}$ باشد، نمایش به صورت شکل (۱) نادرست و نمایش به صورت شکل (۲) درست است:



شکل (۱)



شکل (۲)

۲۵. گزینه‌ی (د) طبق نمودار داده شده، در میان گزینه‌ها فقط عدد ۱۶۸ مضربِ ۷ و مضرب ۱۲ است ولی مضرب ۹ نیست.

۲۶. گزینه‌ی (هـ)

توجه: اگر عددی ۳ رقمی را ۲ بار پشت سر هم بنویسیم، همواره بر اعداد ۷ و ۱۳ بخش‌پذیر است. عدد ۱۲۷۱۲۷ مضرب ۷ و ۱۳ است ولی مضرب ۵ نیست. بنابراین عدد ۱۲۷۱۲۷ در جای نقطه‌ی «هـ» قرار دارد.

۲۷. گزینه‌ی (د) رابطه‌ی (۱) $x + w + z + ۴ + ۹ = x + y + ۷ + ۸ \Rightarrow w + z = y + ۲$

$$x + ۹ + ۴ + z + w + y + ۷ + ۸ + ۶ = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۹ = ۴۵$$

$$\Rightarrow x + y + z + w = ۱۱ \xRightarrow{\text{رابطه (۱)}} x + ۲y = ۹ \Rightarrow x = ۵ \, , \, y = ۲$$

نمایش مجموعه‌ها با عضوها و علایم ریاضی: (مقدماتی)

۲۸. گزینه‌ی (د) با توجه به این که اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند، $A = \{۱,۲,۳,...\}$ است.

۲۹. گزینه‌ی (ب)

۳۰. گزینه‌ی (د)

۳۱. گزینه‌ی (ج) ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم و سپس عضوهای B را به دست می‌آوریم:

$$A = \{-(-۲)^۲+۱, -(-۱)^۲+۱, -(۰)^۲+۱, -(۱)^۲+۱, -(۲)^۲+۱\} = \{-۳, ۰, ۱\}$$

$$B = \{-(-۳)^۳, -(۰)^۳, -(۱)^۳\} \Rightarrow B = \{۲۷, ۰, -۱\}$$

۳۲. گزینه‌ی (د) ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را نوشته و سپس عضوهای مجموعه‌ی B را به دست می‌آوریم:

$$A = \{۲\times(-۷), ۲\times(-۶), ۲\times(-۵)\} = \{-۱۴, -۱۲, -۱۰\}$$

$$\Rightarrow B = \{\frac{۳}{۲}\times(-۱۴), \frac{۳}{۲}\times(-۱۲), \frac{۳}{۲}\times(-۱۰)\} \Rightarrow B = \{-۲۱, -۱۸, -۱۵\}$$

۳۳. گزینه‌ی (ب)

$$B = \{-۴۹۵, -۴۹۰, ..., ۰, ۵, ۱۰, ..., ۵۰۰\}$$

$$n(B) = \frac{۵۰۰-(-۴۹۵)}{۵} + ۱ = ۲۰۰$$

$$A = \{۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ..., ۳۰۲\} \Rightarrow A \cap B = \{۵, ۲۰, ۳۵, ..., ۲۹۰\} \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{۲۹۰-۵}{۱۵} + ۱ = ۲۰ \Rightarrow \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{۲۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

۳۴. گزینه‌ی (د)

۳۵. گزینه‌ی (ب)

یادآوری: $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$ و $۲^۰ = ۱$ است.

۳۶. گزینه‌ی (الف)

۳۷. گزینه‌ی (د)

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^۲ < ۲۵\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \sqrt{۲۵}\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

۳۸. گزینه‌ی (ب) حاصل جذر اعداد ۱، ۴، ۹ و ۱۶ و... ، اعداد طبیعی هستند.

۳۹. گزینه‌ی (ب)

$$۲x - ۱ > -۷ \Rightarrow ۲x > -۷ + ۱ \Rightarrow ۲x > -۶ \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$$

۴۰. گزینه‌ی (الف)

$$-۳ < x + ۲ < ۴ \Rightarrow -۳ - ۲ < x + ۲ - ۲ < ۴ - ۲ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow B = \{-۴, -۳, -۲, ..., ۱\}$$

۴۱. گزینه‌ی (الف) اعدادی که زوج بوده و بین ۱ و ۸ می‌باشند را به دست آورده و به توان ۳ می‌رسانیم:

$$A = \{۲^۳, ۴^۳, ۶^۳\} \Rightarrow A = \{۸, ۶۴, ۲۱۶\}$$

۴۲. گزینه‌ی (الف) اعداد زوج از ۱ تا ۴ را به جای m در رابطه‌ی $\frac{۲m+۱}{۳}$ قرار می‌دهیم:

$$\left\{\frac{۲\times۲+۱}{۳}, \frac{۲\times۴+۱}{۳}\right\} = \left\{\frac{۵}{۳}, \frac{۹}{۳}\right\} = \left\{\frac{۵}{۳}, ۳\right\}$$

۴۳. گزینه‌ی (ب)

$$A = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ...\}, B = \{-۱, -۲, -۳, ...\} \Rightarrow -۱ \in A, B$$

۴۴. گزینه‌ی (الف)

$$A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ...\}, B = \{۲, ۱, ۰, -۱, ...\} \Rightarrow -۲ \in B$$

۴۵. گزینه‌ی (د)

۴۶. گزینه‌ی (د) با توجه به تعداد عضوهایی که در A داده شده است، هر سه توصیف می‌تواند درست باشد و عضوهای پنجم و ششم می‌توانست توصیف دقیق را مشخص کند.

۴۷. گزینه‌ی (ب)

$$A = \{۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴, ۲^۵, ۲^۶, ۲^۷\} = \{۲^x \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ < x \le ۷\}$$

۴۸. گزینه‌ی (ج) مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹، اعداد ۱۲، ۱۵، ۱۸ هستند و اعدادی که اگر آن‌ها را در ۳- ضرب کنیم، اعداد ۱۲، ۱۵ و ۱۸ به دست می‌آید عبارت‌اند از: ۴- ، ۵- و ۶- پس $B=\{-۶,-۵,-۴\}$ است.

۴۹. گزینه‌ی (د) مجموعه‌های A، B و C به صورت زیر هستند:

$$A=\{۰,\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴},...\}\quad,\quad B=\{۰\}\quad,\quad C=\{-۱,-۲,-۳,-۴,...\}$$

نمایش مجموعه‌ها با عضوها و علایم ریاضی: (پیشرفته)

۵۰. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۳: $a^۲-۲ab+b^۲=(a-b)^۲$

$$A=\{x\mid x=(-۱)^n\times((n-۱)^۲)^۲,n\in\mathbb{N}\}=\{x\mid x=(-۱)^n\times(n-۱)^۴,n\in\mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow A=\{(-۱)^۱\times(۱-۱)^۴,(-۱)^۲\times(۲-۱)^۴,(-۱)^۳\times(۳-۱)^۴,...\}=\{۰,۱,-۱۶,...\}$$

۵۱. گزینه‌ی (ب) این مجموعه را می‌توان به صورت $\{۱۰^x+۱\mid x\in W\}$ نیز نمایش داد.

۵۲. گزینه‌ی (د)

$$A=\{۷\times۱,۷\times۱۱,۷\times۱۱۱,۷\times۱۱۱۱,...\}=\{۷\times\frac{۱۰-۱}{۹},۷\times\frac{۱۰^۲-۱}{۹},۷\times\frac{۱۰^۳-۱}{۹},...\}=\{۷\times\frac{۱۰^x-۱}{۹}\mid x\in\mathbb{N}\}$$

۵۳. گزینه‌ی (ب) مجموعه‌های a و c به درستی نمایش داده شده‌اند اما مجموعه‌های b و d نادرست‌اند. در مجموعه‌ی d باید شرط $x\geq ۲$ یا $x\neq ۱$ به کار برده می‌شد.

۵۴. گزینه‌ی (ج) عضوهای مجموعه‌ی A، شمارنده‌های صحیح عدد ۲۶ هستند. بنابراین اگر عدد ۲۶ را بر این اعداد تقسیم کنیم، حاصل عددی صحیح می‌شود پس $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid\frac{۲۶}{x}\in\mathbb{Z}\}$ است.

۵۵. گزینه‌ی (ب) اگر عضوها بر ۷ بخش‌پذیر باشند (یعنی باقی مانده صفر باشد)، عضوها به صورت $۷x$ می‌باشند و چون هر عضو ۵ واحد باقی مانده دارد پس عضوها به صورت $۷x+۵$ هستند که در آن $x\in W$ (اعداد حسابی) و $۷x+۵<۱۰۰\Rightarrow x<\frac{۹۵}{۷}$ است.

۵۶. گزینه‌ی (د) x می‌تواند اعداد منفی نیز باشد:

$$\{x\mid\frac{۱۲}{x-۱}\in\mathbb{Z}\}=\{-۱۱,-۵,-۳,-۲,-۱,۰,۲,۳,۴,۵,۷,۱۳\}$$

۵۷. گزینه‌ی (ج) اگر عددی منفی به توان زوج برسد، مثبت می‌شود پس عضوها در گزینه‌ی (ج) باید مثبت باشند.

۵۸. گزینه‌ی (ب) ابتدا x و yهای طبیعی را که مجموع آن‌ها ۵ می‌باشد را مشخص می‌کنیم و سپس آن‌ها را در توان جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}x=۱,y=۴\rightarrow ۲^۴=۱۶\\ x=۲,y=۳\rightarrow ۲^۶=۶۴\end{array}\right\}\Rightarrow A=\{۱۶,۶۴\}$$

توجه کنید که در این سؤال $x=۱$ و $y=۴$ فرقی با $x=۴$ و $y=۱$ ندارد زیرا ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد.

۵۹. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۱۴: اگر عضوهای مجموعه‌ای یکی در میان مثبت و منفی باشند، در توصیف مجموعه با علایم ریاضی، باید از ضریب $(-1)^n$ یا $-(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ که $n \in \mathbb{N}$ یا $n \in W$ است، استفاده کرد.

۶۰. گزینه‌ی (ج)

$$\{(-۲)^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(-۱)^x \times ۲^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{-۲, ۴, -۸, ۱۶, \ldots\}$$

۶۱. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۱۵: در مجموعه‌هایی که عضوهایش دو تا در میان مثبت و منفی هستند، ضریب $(-1)^{\frac{n(n+1)}{۲}}$ یا $-(-1)^{\frac{n(n+1)}{۲}}$ و اگر سه تا در میان باشند، از $(-1)^{[\frac{n+۲}{۳}]}$ که در آن [ ] علامت جزء صحیح است، استفاده می‌شود.

۶۲. گزینه‌ی (ج) با توجه به نکته‌ی (۱۵) و با امتحان گزینه‌ها، جواب درست مشخص می‌شود.

۶۳. گزینه‌ی (ب) با امتحان گزینه‌ها و به دست آوردن K از طریق معادله برای هر گزینه داریم: گزینه‌ی (الف) می‌تواند عضو مجموعه‌ی داده شده باشد. زیرا:

$$\frac{۲K-۱}{۳K+۱} = \frac{۲۳}{۳۷} \Rightarrow ۷۴K - ۳۷ = ۶۹K + ۲۳ \Rightarrow ۵K = ۶۰ \Rightarrow K = ۱۲ \in \mathbb{Z}$$

ولی گزینه‌ی (ب) نمی‌تواند عضو مجموعه‌ی داده شده باشد. زیرا برای K مقدار صحیح حاصل نمی‌شود:

$$\frac{۲K-۱}{۳K+۱} = \frac{۲۰}{۳۱} \Rightarrow ۶۲K - ۳۱ = ۶۰K + ۲۰ \Rightarrow ۲K = ۵۱ \Rightarrow K \notin \mathbb{Z}$$

۶۴. گزینه‌ی (ب) عدد گویا، عددی است که اولاً بتوان آن را به صورت کسر نوشت. ثانیاً صورت و مخرج عضو اعداد صحیح بوده و مخرج صفر نباشد.

۶۵. گزینه‌ی (ب)

یادآوری: مجموعه‌ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهند.

$\sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳$ و $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$ است. در میان اعداد داده شده $\frac{۸}{۵} = ۱/۶$ است که بین ۱/۴ و ۱/۷ قرار دارد.

۶۶. گزینه‌ی (د) مشخص است که عددِ مخرج، یکی بیش‌تر از صورتِ کسر است.

۶۷. گزینه‌ی (ج) طبق توصیفِ مجموعه‌ی B، $a = ۳b$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b} = \frac{۳b}{b} = ۳$$

۶۸. گزینه‌ی (ج)

$$x - ۱ = ۳y \Rightarrow x - ۳y = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۳y} = ۲^۱ = ۲ \Rightarrow A = \{۲\}$$

۶۹. گزینه‌ی (ب) با توجه به شرطِ توصیفی مجموعه داریم:

$$۴y - x = ۲ \Rightarrow ۴y = x + ۲$$

از طرفی با توجه به توصیف مجموعه می‌توان نوشت:

$$\frac{۳^{x+۱}}{۹^{۲y}} = \frac{۳^{x+۱}}{۳^{۴y}} = \frac{۳^{x+۱}}{۳^{x+۲}} = ۳^{x+۱-(x+۲)} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow A = \{\frac{۱}{۳}\}$$

۷۰. گزینه‌ی (د) $-۲ < x^۲ - ۱ < ۱۵ \Rightarrow -۱ < x^۲ < ۱۶ \xRightarrow{x \in \mathbb{N}} B = \{۱, ۲, ۳\}$ و $A = \{۲, ۳, ۵, \ldots, ۴۳\}$ است. بنابراین مجموعه‌های A و B فقط دارای ۲ عضو مشترک هستند که عبارت‌اند از: ۲ و ۳.

۷۱. گزینه‌ی (الف) ابتدا x و y های صحیحی به دست می‌آوریم که حاصل‌ضربشان ۲- است و سپس عضوهای A را به دست می‌آوریم:

$$x=۱, y=-۲ \Rightarrow ۳\times(۱)^{-(-۲)} - ۲\times(-(-۲))^{-۱} = ۳ - ۲\times\frac{۱}{۲} = ۳-۱ = ۲$$

$$x=-۱, y=۲ \Rightarrow ۳\times(-۱)^{-۲} - ۲\times(-۲)^{-(-۱)} = ۳+۴ = ۷$$

$$x=۲, y=-۱ \Rightarrow ۳\times ۲^{-(-۱)} - ۲\times(-(-۱))^{-۲} = ۶-۲ = ۴$$

$$x=-۲, y=۱ \Rightarrow ۳\times(-۲)^{-۱} - ۲\times(-۱)^{-(-۲)} = \frac{-۳}{۲} - ۲ = -\frac{۷}{۲} \Rightarrow A = \{۲, ۴, ۷, -\frac{۷}{۲}\}$$

تعداد عضوهای مجموعه

۷۲. گزینه‌ی (ج) طبق نکته‌ی (۶) می‌توان نوشت:

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A $\quad \frac{۱۳۷-۵}{۲}+۱ = ۶۷$

تعداد عضوهای مجموعه‌ی B $\quad \frac{۱۲۳-۳}{۴}+۱ = ۳۱$

در نتیجه تعداد عضوهای مجموعه‌ی A، $۶۷-۳۱=۳۶$ عضو بیش‌تر از تعداد عضوهای مجموعه‌ی B است.

۷۳. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۱۶: تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را با نمادهای $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین به تعداد عضوهای هر مجموعه، «عدد اصلی» آن مجموعه می‌گویند.

طبق نکته‌های (۶) و (۱۶) تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$n(A) = \frac{۱۰۵-۳}{۳}+۱ \Rightarrow n(A) = ۳۵$$

$$n(B) = \frac{+۱۷-(-۳۵)}{۲}+۱ \Rightarrow n(B) = ۲۷$$

در مجموعه‌ی C، ابتدا علامت‌ها را حذف کرده و سپس تعداد را به دست می‌آوریم:

$$n(C) = \frac{۱۰۰۰-(۱۱۰)}{۵} \Rightarrow n(C) = ۱۷۹$$

$$n(D) = \frac{۹-(-۹/۲۵)}{۰/۲۵}+۱ \Rightarrow n(D) = ۷۴$$

بنابراین در سؤال، $n(B)$ نادرست نوشته شده است.

۷۴. گزینه‌ی (ب)

مجموعه‌ی M، ۱۱ عضو دارد $\rightarrow M = \{۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ..., ۲^{۱۰}\}$

مجموعه‌ی E، ۹ عضو دارد $\rightarrow E = \{۳^۰, ۳^۱, ۳^۲, ۳^۳, ..., ۳^۸\}$

در نتیجه اختلاف عضوهای دو مجموعه‌ی M و E، $۱۱-۹=۲$ عضو است.

۷۵. گزینه‌ی (ج)

۷۶. گزینه‌ی (ج)

$$-۶\frac{۱}{۴} < x < ۵\frac{۲}{۳} \rightarrow \{-۶, -۵, -۴, ..., ۵\} \rightarrow \text{۱۲ عضو دارد}$$

۷۷. گزینه‌ی (الف)

$$-۶ \le ۳x < ۶ \xRightarrow{\div ۳} -۲ \le x < ۲ \rightarrow A = \{-۲, -۱, ۰, ۱\}$$

۷۸. گزینه‌ی (د)

$$x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow A = \{\frac{۱+۱}{۱}, \frac{۲+۱}{۲}, \frac{۳+۱}{۳}, \frac{۴+۱}{۴}\} \Rightarrow A = \{۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}\} \rightarrow n(A) = ۴$$

۷۹. گزینه‌ی (د) با بررسی گزینه‌ها می‌توان دریافت که مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ی (الف) و (ب) به ترتیب برابر با $\{-۲,۲\}$ و $\{۲,۰\}$ هستند. همچنین مجموعه‌ی داده شده در گزینه‌ی (ج) دارای بی‌شمار عضو است. اما مجموعه‌ی داده شده در گزینه‌ی (د) برابر است با $\{۱\}$ که فقط یک عضو دارد.

توجه: Q' مجموعه‌ی اعداد غیرگویا است.

۸۰. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۱۷: بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

۸۱. گزینه‌ی (ج)

$$N = \{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(N) = ۴$$

۸۲. گزینه‌ی (د) مجموعه‌ی A، توصیفِ شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶ است که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\} \Rightarrow n(A) = ۹$$

۸۳. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۱۸: برای به دست آوردن شمارنده‌های صحیح هر عدد طبیعی، کافی است تعداد شمارنده‌های طبیعی آن را ۲ برابر کنیم. برای به دست آوردن شمارنده‌های طبیعی هر عدد طبیعی، ابتدا آن عدد را به شمارنده‌های اول تجزیه کرده، سپس به هر توان، یک واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم. به حل سؤال ۸۳ توجه کنید.

طبق نکته‌ی (۱۸)، ابتدا تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۶۸۰۰ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$۱۶۸۰۰ = ۲^۵ \times ۳^۱ \times ۵^۲ \times ۷^۱ \to (۵+۱)\times(۱+۱)\times(۲+۱)\times(۱+۱) = ۶\times۲\times۳\times۲ = ۷۲$$

طبق نکته‌ی (۱۸)، تعداد شمارنده‌های صحیح عدد ۱۶۸۰۰ برابر است با $۱۴۴ = ۲ \times ۷۲$. پس مجموعه‌ی B دارای ۱۴۴ عضو می‌باشد.

۸۴. گزینه‌ی (ب)

$$\{\frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < ۱ \,,\, b < ۱۳ \,,\, a,b \in \mathbb{N}\}$$

ـ اگر صورت ۱ باشد، ۱۱ کسر شامل: $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\dots,\frac{۱}{۱۲}$

ـ اگر صورت ۲ باشد، ۵ کسر شامل: $\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۲}{۷},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۱۱}$

ـ اگر صورت ۳ باشد، ۶ کسر شامل: $\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۵},\frac{۳}{۷},\frac{۳}{۸},\frac{۳}{۱۰},\frac{۳}{۱۱}$

هم‌چنین اگر صورت ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد به ترتیب ۴، ۶، ۲، ۵، ۲، ۲، ۱ و ۱ کسر می‌توان نوشت که تعداد آن‌ها ۴۵ کسر است.

۸۵. گزینه‌ی (ب) با توجه به این که اعداد منفی جذر ندارند، داریم:

$$E = \{\sqrt{x} \mid x \in \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}\} \Rightarrow E = \{\sqrt{۰},\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳}\} = \{۰,۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳}\} \Rightarrow n(E) = ۴$$

۸۶. گزینه‌ی (الف)

$$B = \{\frac{۱}{۲^۱},\frac{۲}{۲^۲},\frac{۳}{۲^۳},\frac{۴}{۲^۴}\} = \{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۸},\frac{۱}{۴}\} \Rightarrow n(B) = ۳$$

۸۷. گزینه‌ی (د) اگر x مثبت و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، حاصل کسر $\frac{۵x}{۳}$ عددی طبیعی می‌شود. در نتیجه عضوهای مجموعه‌ی A برابرند با:

$$A = \{\frac{۵\times۳}{۳},\frac{۵\times۶}{۳},\frac{۵\times۹}{۳}\} = \{۵,۱۰,۱۵\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

۸۸. گزینه‌ی (الف)

$$\left.\begin{aligned} &x=۱, y=۶ \Rightarrow \frac{۳\times۱+۶}{۳\times۱-۶}=\frac{۹}{-۳}=-۳\\ &x=۶, y=۱ \Rightarrow \frac{۳\times۶+۱}{۳\times۶-۱}=\frac{۱۹}{۱۷}\\ &x=۲, y=۳ \Rightarrow \frac{۳\times۲+۳}{۳\times۲-۳}=\frac{۹}{۳}=۳\\ &x=۳, y=۲ \Rightarrow \frac{۳\times۳+۲}{۳\times۳-۲}=\frac{۱۱}{۷} \end{aligned}\right\} \Rightarrow J=\{-۳,\frac{۱۹}{۱۷},\frac{۱۱}{۷},۳\} \Rightarrow n(J)=۴$$

۸۹. گزینه‌ی (ب)

$$x=\frac{K}{K^۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{K}, K\in\{-۲,-۱,۱,۲\} \Rightarrow \frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow A=\{-۱,۱\} \Rightarrow n(A)=۲$$

۹۰. گزینه‌ی (ب) می‌دانیم اعداد منفی جذر ندارند. پس x عددی نامنفی است. با توجه بـه شـرط $\sqrt{x}\le ۵$ نتیجه مـی‌گیـریم: $x\in\{۲۵,۲۴,۲۳,...,۰\}$. با توجه به توصیف مجموعه‌ی F، عضوهای مثبت آن برابر است با:

$۲\times۲-۳, ۲\times۳-۳, ۲\times۴-۳, ..., ۲\times۲۵-۳ \Rightarrow$ مجموعه‌ی F، ۲۴ عضو مثبت دارد

۹۱. گزینه‌ی (د)

$$A=\{۰,۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳},۲\} \Rightarrow ۰,۱,۲\in\mathbb{Z}$$

۹۲. گزینه‌ی (الف)

$$n\in\{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow A=\{۲^۱+۱^۲, ۲^۲+۲^۲, ۲^۳+۳^۲, ۲^۴+۴^۲\}=\{۳,۸,۱۷,۳۲\}$$

در نتیجه عضوهای اول مجموعه‌ی A، ۳ و ۱۷ یعنی ۲ عضو است.

۹۳. گزینه‌ی (ج) اعداد کم‌تر از ۲۰ که پس از کم کردن ۲ واحد از هر یک از آن‌ها، حاصلشان مربع کامل شود، مطلوب هستند. آن‌ها عبارت‌اند از: $\{۲,۳,۶,۱۱,۱۸\}$ که تعدادشان ۵ تا است.

۹۴. گزینه‌ی (ب)

نکته‌ی ۱۹: اگر n عدد طبیعی زوج و m عدد طبیعی فرد باشد، همواره داریم: $(-۱)^n=+۱, (-۱)^m=-۱$

نکته‌ی ۲۰: در ضربِ اعداد طبیعی زوج و فرد داریم:

زوج = زوج × فرد   زوج = زوج × زوج   فرد = فرد × فرد   زوج = فرد × زوج

با توجه به نکته‌ی (۲۰)، چون ۱۰۰۰ عددی زوج است، پس نمی‌تواند حاصل‌ضرب دو عدد فرد باشد. پس طبق نکتـه‌ی (۱۹) فقـط ۲ حالتِ متمایز به وجود می‌آید که عبارت‌اند از:

$$\left.\begin{aligned} &(-۱)^{\text{زوج}}+(-۱)^{\text{زوج}}=۱+۱=۲\\ &(-۱)^{\text{فرد}}+(-۱)^{\text{زوج}}=-۱+۱=۰\\ &(-۱)^{\text{زوج}}+(-۱)^{\text{فرد}}=۱-۱=۰ \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\{۰,۲\} \Rightarrow n(A)=۲$$

۹۵. گزینه‌ی (ب) با شرایط مسئله، مجموعه‌ی B فقط ۲ عضو می‌توانند داشته باشد. زیرا:

$$\frac{(-۱)^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{N}, \frac{(-\frac{۲}{۵})^۲}{۲}=\frac{\frac{۴}{۲۵}}{۲}=\frac{۲}{۲۵}\notin\mathbb{N}, \frac{۰^۲}{۲}=۰\notin\mathbb{N}, \frac{۱^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{N}$$

$$\frac{(\sqrt{۲})^۲}{۲}=\frac{۲}{۲}=\underline{۱\in\mathbb{N}}, \frac{(\sqrt{۳})^۲}{۲}=\frac{۳}{۲}\notin\mathbb{N}, \frac{۲^۲}{۲}=\underline{۲\in\mathbb{N}}$$

۹۶. گزینه‌ی (الف)

$$\left.\begin{array}{l} x=۱, y=۸ \to ۱^{۸}=۱ \\ x=۸, y=۱ \to ۸^{۱}=۸ \\ x=۲, y=۴ \to ۲^{۴}=۱۶ \\ x=۴, y=۲ \to ۴^{۲}=۱۶ \\ x=-۱, y=-۸ \to (-۱)^{-۸}=۱ \\ x=-۸, y=-۱ \to (-۸)^{-۱}=-\frac{۱}{۸} \\ x=-۲, y=-۴ \to (-۲)^{-۴}=\frac{۱}{۱۶} \\ x=-۴, y=-۲ \to (-۴)^{-۲}=\frac{۱}{۱۶} \end{array}\right\} \Rightarrow A=\{۱,۸,۱۶,-\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶}\} \Rightarrow n(A)=۵$$

۹۷. گزینه‌ی (ب)

$$x=۳K \to -۱۳۸۶ \le ۳K < ۲۰۰۷ \xRightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} -۴۶۲ \le x < ۶۶۹$$

$$\Rightarrow K \in \{-۴۶۲,-۴۶۱,-۴۶۰,...,۶۶۸\} \Rightarrow n(K)=۶۶۸-(-۴۶۲)+۱ \Rightarrow n(K)=۱۱۳۱$$

بنابراین برای x نیز ۱۱۳۱ عدد مختلف حاصل می‌شود پس $n(A)=۱۱۳۱$

۹۸. گزینه‌ی (ج)

نکته‌ی ۲: اگر a مثبت باشد، همواره داریم: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^{۲}b}$

توجه: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، همواره داریم: $۰<\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}<۱$

کسر $\frac{\sqrt{۲۸۸۰}-\sqrt{۲۸۷۹}}{۲}$، کسری کوچک‌تر از واحد است پس مقدار آن بین ۰ و ۱ است. هم‌چنین کسرِ $\frac{\sqrt{۲۲۵۱}-\sqrt{۲۲۵۰}}{۲}$ نیز کسری کوچک‌تر از واحد یعنی بین صفر و ۱ است.

پس می‌توان نوشت: $-۲+$ خورده‌ای $< x < ۷+$ خورده‌ای $\Rightarrow -۱/$ خورده‌ای $< x < ۷/$ خورده‌ای

در نتیجه عضوهای این مجموعه عبارت‌اند از: ۱-، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ .

پس این مجموعه ۹ عضو دارد.

۹۹. گزینه‌ی (ج) تعداد عضوهای هر مجموعه را به دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم:

$(\text{الف}): ۰ \le x^{۲} \le ۱۰ \Rightarrow x=۱,۲,۳ \to n(\text{الف})=۳$

$(\text{ب}): ۰ \le \sqrt{x} \le ۱۰ \Rightarrow x=۱,۲,۳,۴,...,۱۰۰ \to n(\text{ب})=۱۰۰$

$(\text{ج}): ۰ \le \sqrt{x} \le ۱۰ \Rightarrow x=۰,۱,۲,...,۱۰۰ \to n(\text{ج})=۱۰۱$ بیش‌ترین تعداد عضو را دارد.

$(\text{د}): ۰ \le x^{۲} \le ۱۰ \Rightarrow x=-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳ \to n(\text{د})=۷$

۱۰۰. گزینه‌ی (ج) با توجه به این که $۲^{۱۱}+۲^{۱۱}=۲\times۲^{۱۱}=۲^{۱۲}$، می‌توان نوشت:

$$A=\{۲^{۱۱}+۲\times۱, ۲^{۱۱}+۲\times۲, ۲^{۱۱}+۲\times۳, ۲^{۱۱}+۲\times۴, ..., ۲^{۱۱}+۲\times۲^{۱۰}\}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت مجموعه‌ی A دارای $۲^{۱۰}$ عضو است.

۱۰۱. گزینه‌ی (د)

نکته‌ی ۲۲: مجموعه‌ای که فقط یک عضو دارد، مجموعه‌ی یکانی نام دارد.

در گزینه‌ی (الف)، عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ و عدد ۱۰۰۳ بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس بین ۱۰۰۰ و ۱۰۰۵ عدد اول وجود ندارد. در گزینه‌ی (ب)، $n(A)=2$ است. در گزینه‌ی (ج) $n(B)=2$ است. در گزینه‌ی (د) داریم:

$$x^7+x^5+x^3+x=0 \Rightarrow x(x^6+x^4+x^2+1)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow n(C)=1$$

۱۰۲. گزینه‌ی (د)

$$(x-2)^{x+3}=1 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0\ ,\ x-2\neq 0 \Rightarrow x=-3 \\ x-2=1\ ,\ (x+3)\in\mathbb{R} \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1\ ,\ (x+3)\ \text{زوج} \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۰۳. گزینه‌ی (د)

$$51=1\times 51=-1\times -51=3\times 17=-3\times -17$$

$$\begin{cases} x+y+5=1 \\ x-y+9=51 \end{cases} \to \begin{cases} x=19 \\ y=-23 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+5=51 \\ x-y+9=1 \end{cases} \to \begin{cases} x=19 \\ y=27 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+5=3 \\ x-y+9=17 \end{cases} \to \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5=17 \\ x-y+9=3 \end{cases} \to \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+5=-1 \\ x-y+9=-51 \end{cases} \to \begin{cases} x=-33 \\ y=27 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+5=-51 \\ x-y+9=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x=-33 \\ y=-23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5=-3 \\ x-y+9=-17 \end{cases} \to \begin{cases} x=-17 \\ y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+5=-17 \\ x-y+9=-3 \end{cases} \to \begin{cases} x=-17 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\{-\frac{19}{23},\frac{19}{27},-\frac{3}{5},\frac{3}{9},-\frac{33}{27},-\frac{33}{23},-\frac{17}{9},+\frac{17}{5}\} \to$$ مجموعه‌ی A دارای ۸ عضو متمایز است.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو

۱۰۴. گزینه‌ی (ب) در مجموعه‌ی $A=\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$ بزرگ‌ترین عضو، ۱- است.

۱۰۵. گزینه‌ی (ب) بزرگ‌ترین عضوِ مجموعه‌ی B، ۳ و کوچک‌ترین عضو، ۱+ است که جمع آن‌ها ۴ می‌شود.

۱۰۶. گزینه‌ی (د) عدد ۱۰ غیراول است و $80<10^2<135$ است.

۱۰۷. گزینه‌ی (الف) اگر $x=1$ باشد، بزرگ‌ترین عضوِ مجموعه‌ی A به دست می‌آید: $-(x-1)^2+1 \overset{x=1}{\Rightarrow} \underbrace{-(1-1)^2}_{0}+1=+1$

۱۰۸. گزینه‌ی (الف) با توجه به این که $\sqrt{11}\simeq 3/3$ و $2^1<3/3$ می‌توان نوشت:

$$\{3x-5 \mid x\in\mathbb{Z}, 2^x<\sqrt{11}\}=\{3x-5 \mid x\in\mathbb{Z}, x\leq 1\}=\{\dots,-11,-8,-5,-2\}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین عضو، عدد ۲- می‌باشد.

۱۰۹. گزینه‌ی (ب) با توجه به این که اگر y عددی منفی باشد، حاصلِ x^y کوچک می‌شود، در yهای مثبت داریم:

x	۱	۲	۳	۴	۶	۱۲
y	۱۲	۶	۴	۳	۲	۱
x^y	1^{12}	2^6	$\underline{\underline{3^4}}$	4^3	6^2	12^1

$\Rightarrow 3^4-1=81-1=80$ بزرگ‌ترین عضو

۱۱۰. گزینه‌ی (د) کم‌ترین مقدار برای x^{2y} زمانی حاصل می‌شود که x عددی کوچک و y نیز عددی کوچک باشد پس با انتخاب $x=8$ و $y=1$ کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی A حاصل می‌شود: $8^{2(1)}=8^2=64$

۱۱۱. گزینه‌ی (ب)

$$A=\{\frac{۱۲x}{x^{۲}} \mid x\in\mathbb{N}, -۷<\sqrt{x}\le ۴\}=\{\frac{۱۲}{x} \mid x\in\mathbb{N}, ۰<x\le ۱۶\}$$

اگر x شمارنده‌ی ۱۲ باشد، حاصل کسر $\frac{۱۲}{x}$ عددی صحیح می‌شود پس از بین اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۶ شمارنده‌های ۱۲ یعنی $\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ را کم می‌کنیم. در نتیجه $۱۶-۶=۱۰$ عضو از مجموعه‌ی A عدد صحیح نیستند.

۱۱۲. گزینه‌ی (د)

$$(۱۴۰,۲۲۴)=۲۸ \Rightarrow ۲۲۴x+۱۴۰y=۲۸k\,, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ۲۲۴x+۱۴۰y-۷۷=۲۸k-۷۷>۰$$

$$\Rightarrow k>\frac{۷۷}{۲۸}\Rightarrow k>۲ \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} k=۳$$

$\Rightarrow ۲۸\times ۳-۷۷=۸۴-۷۷=۷$ کوچک‌ترین عضو مثبت

زیرمجموعه

۱۱۳. گزینه‌ی (الف)

نکته‌ی ۲۳: هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی B، عضوی از مجموعه‌ی A باشد، یا این که همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی B، از عضوهای مجموعه‌ی A انتخاب شده باشند، می‌گوییم B زیرمجموعه‌ی A است و می‌نویسیم $B\subseteq A$ است. اگر عضوی در B باشد که از A انتخاب نشده باشد (یعنی این عضو در A نباشد) می‌گوییم مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A نیست و می‌نویسیم: $B\not\subseteq A$

نکته‌ی ۲۴: هر زیرمجموعه، خودش یک مجموعه است. بنابراین علامت $\subseteq$ همواره باید بین دو مجموعه قرار گیرد.

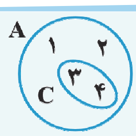
۱۱۴. گزینه‌ی (ب)

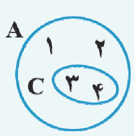
۱۱۵. گزینه‌ی (الف)

۱۱۶. گزینه‌ی (ج) در گزینه‌ی (ب)، مجموعه‌ی A عضوی ندارد.

اما در گزینه‌ی (ج)، تهی عضوی از مجموعه‌ی A است زیرا: $A=\{۱,۲,\phi\}=\{۱,۲,\{\}\}$

در گزینه‌ی (د)، $A=\{۱,۲,\{\phi\}\}$ است و ϕ عضو A محسوب نمی‌شود. بلکه $\{\phi\}$ عضوی از A است.

نکته‌ی ۲۵: اگر نمودار داده شده به صورت 

باشد، می‌نویسیم: $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ زیرا طبق نمودار $۳\in A$ و $۴\in A$ است. اگر اشتباهاً می‌نوشتیم $A=\{۱,۲,\{۳,۴\}\}$ در این صورت ۳ و ۴ دیگر نمی‌توانستند عضوی از مجموعه‌ی A باشند. حتی نوشتن به‌صورت $A=\{۱,۲,C\}$ نادرست است زیرا در این صورت نیز اعداد ۳ و ۴ فقط عضوی از C بودند نه A. پس اگر بخواهیم برای نمودار 

مجموعه بنویسیم، باید نوشت:

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}, C=\{۳,۴\}$$