

## ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی نهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند.

**ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمون‌های شما باشد که معلمان از شما خواهد گرفت.

۲- **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۱ از کل کتاب است. این آزمون‌ها از آزمون‌های **هماهنگ استانی** انتخاب شده است. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل، تعدادی سؤال مرتبط با آن فصل را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل هماهنگ استانی را می‌بینید. ما فقط آن‌ها را طبقه‌بندی کرده‌ایم.

**ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۱ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش ۳ آزمون هماهنگ استانی را بدون هیچ تغییری می‌بینید.

۳- **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴- **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت، همه آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی نهم نیاز دارید، تنها در ۲۳ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! **یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل ۱ تا ۴ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید!

## فهرست

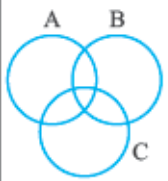
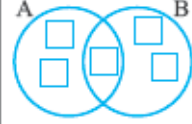
شماره صفحات	نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
آزمون شماره ۱ (طبقه‌بندی شده)	اول	۳	۳۳
آزمون شماره ۲ (طبقه‌بندی شده)	اول	۶	۳۴
آزمون شماره ۳ (طبقه‌بندی نشده)	اول	۹	۳۵
آزمون شماره ۴ (طبقه‌بندی نشده)	اول	۱۱	۳۷
آزمون شماره ۵ (خراسان رضوی خرداد ۹۵)	دوم	۱۳	۳۸
آزمون شماره ۶ (البرز خرداد ۹۵)	دوم	۱۶	۴۰
آزمون شماره ۷ (گیلان خرداد ۹۵)	دوم	۱۹	۴۲
آزمون شماره ۸ (یزد خرداد ۹۵)	دوم	۲۲	۴۳
آزمون شماره ۹ (شهر تهران خرداد ۹۶)	دوم	۲۵	۴۵
آزمون شماره ۱۰ (اصفهان خرداد ۹۶)	دوم	۲۷	۴۶
آزمون شماره ۱۱ (فارس خرداد ۹۶)	دوم	۳۰	۴۷

۴۹

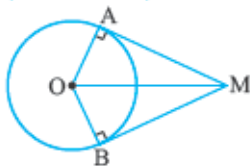
درس‌نامه توب برای شب امتحان

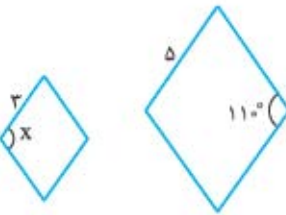
## بازمبندی درس ریاضی نهم

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۵ نمره	۲ نمره
دوم	۴ نمره	۱/۵ نمره
سوم	۵/۵ نمره	۱/۵ نمره
چهارم	۵/۵ نمره	۲ نمره
پنجم	-	۳ نمره
ششم	-	۳/۵ نمره
هفتم	-	۳/۵ نمره
هشتم	-	۳ نمره
جمع	۳۰ نمره	۲۰ نمره

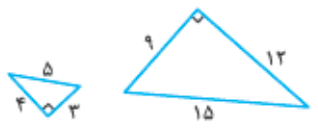
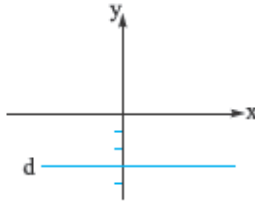
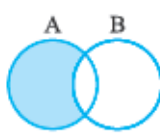
ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	http://kheilisabz.com	ریاضی
نمره	پایه نهم متوسطه اول				
۰/۷۵	فصل اول	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) مجموعه $\{0\}$ یک مجموعه تهی است. ب) اجتماع دو مجموعه $A$ و $B$ همواره زیرمجموعه هر یک از آنها است. پ) عبارت «عددهای صحیح بزرگتر از $-۳$ و کوچکتر از $-۲$ » یک مجموعه را مشخص می‌کند.	(فارس- خرداد ۹۵) درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> (خراسان رضوی- خرداد ۹۵ نوبت عصر) درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/>	
۰/۷۵		۲	جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید. الف) $\{4, -5, \dots\} = \{5, -\frac{12}{3}, -\sqrt{25}\}$ ب) یک مجموعه ۳ عضوی ..... زیرمجموعه دارد. پ) اگر تاسی را یک بار بیندازیم، احتمال این که عدد روشده فرد باشد ..... است.	(اصفهان- خرداد ۹۵) (فارس- خرداد ۹۵)	
۰/۵		۳	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد همه حالت‌های ممکن چقدر است؟ ب) اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، چه قدر احتمال دارد این خانواده دقیقاً دو پسر داشته باشد؟	(فارس- خرداد ۹۵) (اصفهان- خرداد ۹۵)	۱۲ (۱) <input type="checkbox"/> ۳۶ (۲) <input type="checkbox"/> ۶ (۳) <input type="checkbox"/> ۶۴ (۴) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{8}$ (۱) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ (۲) <input type="checkbox"/> $\frac{5}{8}$ (۳) <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ (۴) <input type="checkbox"/>
۱		۴	الف) مجموعه زیر را با اعضایش مشخص کنید. ب) اگر $B = \{-8, 7, 4, -3\}$ و $C = \{4, 9, -8, 1\}$ مجموعه $B - C$ را بنویسید.	(اصفهان- خرداد ۹۵) $A = \{x-1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$	
۰/۷۵		۵	با توجه به شکل، قسمت مربوط به مجموعه $(A \cap B) \cup C$ را هاشور بزنید.	(اصفهان- خرداد ۹۵) 	
۱/۲۵		۶	با توجه به معلومات زیر، داخل <input type="checkbox"/> ها را با عددهای مناسب کامل کنید. $A - B = \{3, 4\}$ $B - A = \{7, 5\}$ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$		
۰/۲۵	فصل دوم	۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. همواره مقدار $\sqrt{a^y}$ برابر است با $a$ .	(لرستان- خرداد ۹۵) درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/>	

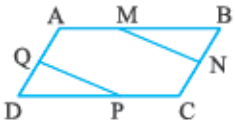

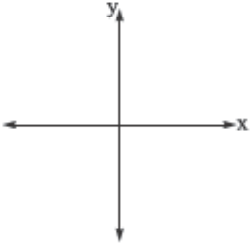
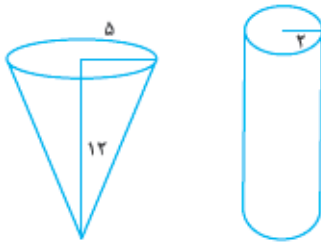

نمبره	ریاضی	نوبت اول	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	<a href="http://kheilisabz.com">http://kheilisabz.com</a>	
ردیف	آزمون شماره ۱			پایه نهم متوسطه اول	
۸	جای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید. بین هر دو عدد گویا می توان تعداد ..... عدد گویای دیگر پیدا کرد.			۰/۵ (آذربایجان غربی- خرداد ۹۵)	
۹	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) حاصل $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$ در کدام گزینه آمده است؟ ب) حاصل عبارت مقابل کدام است؟	$1-\sqrt{5}$ (۱) <input type="checkbox"/> $26$ (۲) <input type="checkbox"/> $21$ (۳) <input type="checkbox"/> $-11$ (۴) <input type="checkbox"/>	$-1+\sqrt{5}$ (۳) <input type="checkbox"/> $-21$ (۳) <input type="checkbox"/>	$6$ (۴) <input type="checkbox"/> $11$ (۴) <input type="checkbox"/>	۰/۵
۱۰	الف) بین دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{8}$ دو عدد گنگ بنویسید. ب) بین $\frac{5}{6}$ و $\frac{2}{3}$ دو کسر بنویسید.			۰/۵ (خراسان جنوبی- خرداد ۹۵)	
۱۱	مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$ را روی محور زیر نشان دهید.			۰/۵ (کردستان- خرداد ۹۵)	
۱۲	اگر $a = -2$ , $b = 3$ , $c = 7$ باشد، حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $ 2a - b  +  c - a $			۰/۷۵ (خراسان جنوبی- خرداد ۹۵)	
۱۳	رادیکال داده شده را ساده کنید. $\sqrt{(-3 + \sqrt{11})^2}$			۰/۵ (خراسان جنوبی- خرداد ۹۵)	
..... فصل سوم .....					
۱۴	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) هر دو مستطیل دلخواه متشابه اند. ب) در هر مربع ضلع ها با هم برابرند. ج) در هر مثلث، محل برخورد سه ارتفاع همیشه بیرون مثلث است.	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست	۰/۷۵ (کرمانشاه- خرداد ۹۵)
۱۵	جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید. الف) در هر دایره کمان های نظیر وترهای مساوی، ..... هستند. ب) در هر مستطیل قطر ها با هم ..... هستند. ج) وقتی مقیاس نقشه ای ۱ به ۱۰۰۰۰۰ (صدهزار) باشد، هر سانتی متر روی نقشه با ..... سانتی متر واقعی برابر است.				۰/۷۵
۱۶	آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. مسئله: مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی، ۳۶۰ درجه می باشد. اثبات: یک مربع را در نظر می گیریم، چون چهار زاویه دارد و هر زاویه آن ۹۰ درجه است، مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه می باشد.				۰/۵ (خراسان رضوی- خرداد ۹۵ نوبت عصر)
۱۷	از نقطه M خارج از دایره دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده ایم. ثابت کنید دو مماس MA و MB با هم برابرند.				۱ (فارس- خرداد ۹۵)



نمره	پایه نهم متوسطه اول	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	نوبت اول	ریاضی
۱۸	<p>الف) در شکل زیر پاره‌خطی دلخواه رسم و روی عمودمنصف آن نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم آن نقطه دارای فاصله برابر از دو سر پاره‌خط است. کامل کنید.</p>  <p>فرض: <math>\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = HB \end{cases}</math> حکم: <math>AP = PB</math></p> $\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \longrightarrow \triangle AHP = \triangle BHP \Rightarrow AP = PB$	آزمون شماره ۱	ردیف	
۱/۵	<p>ب) علت این که نتیجه برای همه نقاط روی عمودمنصف درست است (به جز خود H که آن نیز طبق فرض بدیهی است) را بیان کنید. (آذربایجان غربی- خرداد ۹۵)</p>	۱۹	<p>دو لوزی مقابل متشابه هستند. الف) نسبت تشابه آنها را بنویسید. ب) مقدار x را بنویسید.</p> 	
۰/۵	<p>الف) حاصل <math>\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16}</math> برابر است با ۸. ب) ضخامت یک برگه کاغذ حدود ۰/۰۰۱۶ (شانزده ده‌هزارم) سانتی‌متر است که با نماد علمی، آن را به صورت <math>1/6 \times 10^{-3}</math> سانتی‌متر نمایش می‌دهند.</p> <p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۲۰	فصل چهارم	
۱	<p>عبارت قسمت الف) را با توان منفی و عبارت قسمت ب) را با توان مثبت بنویسید و ساده کنید. (مرکزی- خرداد ۹۵)</p> <p>الف) <math>0/25</math> ب) <math>(0/2)^{-4}</math></p>	۲۱	۲۲	عدد ۱۲۷۶ را به صورت نماد علمی بنویسید.
۰/۵	<p>حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (مرکزی- خرداد ۹۵)</p> $5\sqrt{12} - 6\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$	۲۳	۲۴	حاصل عبارت روبه‌رو را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید. (لرستان- خرداد ۹۵) $\frac{3^5 \times 6^5 \times 12}{4^6} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$
۰/۵	<p>مخرج کسر مقابل را گویا کنید.</p> $\frac{12}{\sqrt[3]{2}}$	۲۵	۲۶	حاصل هر عبارت سطر اول در سطر دوم نوشته شده است. جواب را در مقابلش بنویسید. $\sqrt[3]{125} - \sqrt{36} = -2 \quad \sqrt{-1} + \sqrt{81} = 8 \quad \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = -1 \quad \sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{2} = 3$
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید		

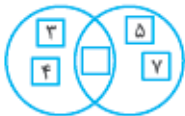


ردیف	آزمون شماره ۹	ریاضی	نوبت دوم: شهر تهران خرداد ۹۶	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه
نمره	پایه نهم متوسطه اول	http://kheilisabz.com		
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>a^2b &lt; 0</math> باشد، آن گاه <math>b</math> منفی است.</p> <p>ب) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.</p> <p>پ) عدد <math>(-\frac{1}{3})^{-2}</math> از عدد <math>9^{-1}</math> کوچکتر است.</p> <p>ت) عبارت «عددهای اول بین ۱۴ و ۱۶» مجموعه تهی را مشخص می کند.</p>	<p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>		
۱	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) نسبت تشابه در دو مثلث مقابل، برابر ..... است.</p> <p>ب) تعداد وجههای جانبی هرمی با قاعده مستطیل، برابر ..... است.</p> <p>پ) حاصل عبارت <math>(\frac{1}{5})^6 \times 5^{-2}</math> به صورت عددی توان دار برابر ..... است.</p> <p>ت) به دلیل آوردن و استفاده از دانستههای قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است، ..... گوئیم.</p>			
۱	<p>گزینه درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) معادله خط <math>d</math> کدام گزینه است؟</p>	 <p><input type="checkbox"/> <math>y = 3x</math> (۱)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>x = -3</math> (۲)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>y = -3</math> (۳)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>x + y = -3</math> (۴)</p>	<p>ب) نماد علمی عدد <math>0.00029</math> کدام است؟</p> <p><input type="checkbox"/> <math>2/9 \times 10^{-4}</math> (۱)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>29 \times 10^{-4}</math> (۲)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>2/9 \times 10^4</math> (۳)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>29 \times 10^4</math> (۴)</p> <p>پ) کدام یک از اعداد زیر، نمایش اعشاری مختوم دارد؟</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{7}{30}</math> (۱)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{55}</math> (۲)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{1}{8}</math> (۳)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>\frac{3}{17}</math> (۴)</p> <p>ت) کدام گزینه، قسمت رنگی را نشان می دهد؟</p>  <p><input type="checkbox"/> <math>B - A</math> (۱)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>A - B</math> (۲)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>(A \cup B) - A</math> (۳)</p> <p><input type="checkbox"/> <math>(A - B) \cup (B - A)</math> (۴)</p>	
۰/۵	۴	اگر خانوادهای دو فرزند داشته باشد، چه قدر احتمال دارد که این خانواده یک فرزند دختر و یک فرزند پسر داشته باشد؟		
۱	۵	اگر $A = \{x^2 + 2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ باشد:		
۰/۷۵	۶	الف) حاصل عبارت مقابل را به صورت ساده شده بنویسید.		
۰/۵	۷	ب) داخل <input type="checkbox"/> علامت $(\in, \notin, \subseteq, \supseteq)$ قرار دهید.		
۰/۵	۷	<p>آیا استدلال مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.</p> <p>مسئله: نشان دهید مجموع زوایای خارجی هر مثلث، <math>360^\circ</math> درجه است.</p> <p>اثبات: یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم. چون زاویه خارجی هر رأس آن <math>120^\circ</math> درجه است، پس مجموع زوایای خارجی در سه رأس <math>360^\circ</math> درجه می باشد؛ بنابراین نتیجه می گیریم مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر <math>360^\circ</math> درجه است.</p>		

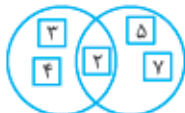
نمبره	ریاضی	نوبت دوم: شهر تهران خرداد ۹۶	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	http://kheilisabz.com
ردیف	آزمون شماره ۹			پایه نهم متوسطه اول
۸	در شکل زیر ABCD متوازی الاضلاع است و P، N، M و Q وسط‌های اضلاع متوازی الاضلاع می‌باشند. ثابت کنید $MN = PQ$ .			
۹	الف) حاصل عبارت روبه‌رو را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.	$\frac{\sqrt{20} + 2\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$		
۱۰	ب) مخرج کسر مقابل را گویا کنید.	$\frac{2}{2\sqrt{3}}$		
۱۱	الف) حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد به دست آورید.	$(2x + 3)(2x - 4)$		
۱۲	ب) با استفاده از اتحاد، جای خالی را کامل کنید.	$(\dots + \sqrt{7})(\dots - \sqrt{7}) = \frac{1}{4}x^2 - \dots$		
۱۳	پ) مجموعه جواب نامعادله روبه‌رو را روی محور نشان دهید.	$\frac{7x}{6} \leq \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2}$ 		
۱۴	دستگاه معادلات خطی مقابل را حل کنید.	$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$		
۱۵	الف) خط $y = -\frac{3}{4}x + 1$ را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.			
۱۶	ب) مختصات نقطه‌ای از خط $y = -4x + 1$ را به دست آورید که طول آن ۲ باشد.			
۱۷	پ) معادله خطی را بنویسید که موازی خط $y = -5x$ بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد.			
۱۸	الف) عبارت مقابل به ازای چه مقداری از $x$ تعریف نشده است؟	$\frac{8x-9}{x-7}$		
۱۹	ب) دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن‌ها $\frac{a+7}{a-5}$ باشد.			
۲۰	پ) اگر مساحت مستطیلی $x^2 - 25$ و عرض آن $\frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ باشد، طول مستطیل را بر حسب $x$ به دست آورید.			
۲۱	تقسیم مقابل را انجام دهید و خارج قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.	$8x^2 - 10x + 9 \div 4x + 3$		
۲۲	در سؤالات زیر نوشتن دستور محاسبه (فرمول)، حجم و مساحت الزامی است.			
۲۳	الف) ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۵ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می‌کنیم و در ظرف استوانه‌ای شکل که شعاع قاعده آن ۲ cm است، خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در استوانه بالا می‌آید؟ ( $\pi = 3$ )			
۲۴	ب) مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویه نیم‌کره به شعاع ۱۲ cm را پیدا کنید. ( $\pi = 3$ )			
جمع نمرات	موفق باشید			۲۰

# پاسخ نامه

وقتی  $B - A = \{7, 5\}$  است، یعنی اعدادی که در  $B$  هستند ولی در  $A$  نیستند، ۵ و ۷ هستند:



از  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$  فقط ۲ باقی مانده است که آن را هم در تنها جای خالی باقی مانده، قرار می‌دهیم:



۷- الف) نادرست - اگر  $a < 0$  باشد، مقدار  $\sqrt{a^2}$  برابر  $-a$  خواهد شد.  
۸- بی‌شمار

۹- الف) گزینه «۳»  
 $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}|$

مقدار داخل قدمطلق منفی است.  
ب) گزینه «۴»  
 $|-8 \times 2 + 5| = |-16 + 5| = |-11| = 11$

۱۰- الف)  $\sqrt{7}, \sqrt{6}$   
ب) ابتدا کسرها را هم‌مخرج می‌کنیم، در این صورت  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  و  $\frac{5}{6}$  کسرهای ما

خواهند بود. حالا چون دو کسر بین  $\frac{4}{6}$  و  $\frac{5}{6}$  می‌خواهیم، صورت و مخرج را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{6} = \frac{12}{18} \\ \frac{5}{6} = \frac{15}{18} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{12}{18} < \frac{13}{18} < \frac{14}{18} < \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

پس دو کسر موردنظر  $\frac{13}{18}$  و  $\frac{14}{18}$  است.

۱۱- حل کردن این سؤال اصلاً کاری ندارد. فقط حواستان باشد که  $-2$  را باید توخالی بکشید:

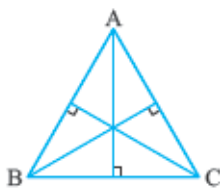


۱۲-  
 $|2a-b| + |c-a| \Big|_{\substack{a=-2, b=2 \\ c=7}} |2(-2)-3| + |7-(-2)|$   
 $= |-4-3| + |7+2| = |-7| + |9| = 7+9 = 16$

۱۳-  
 $\sqrt{(-3+\sqrt{11})^2} = |-3+\sqrt{11}| \stackrel{\sqrt{11} > 3}{=} \sqrt{11}-3$

۱۴- الف) نادرست - مثلاً به نظر شما دو مستطیل روبه‌رو متشابه‌اند؟!

ب) نادرست، زیرا در هر مربع حتماً اضلاع با هم برابرند.  
پ) نادرست - مثال نقض:



۱۵- الف) برابر

ب) برابر

پ) ۱۰۰۰۰۰

۱۶- خیر - چون مربع یک مثال خاص است و نتایج برای آن قابل گسترش به تمام چهارضلعی‌ها نیست.

## آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) نادرست - این مجموعه یک عضو دارد که آن عدد صفر است.

ب) نادرست - مجموعه‌های  $A, B$ ، زیرمجموعه اجتماعشان هستند.

پ) درست - این عبارت مجموعه تهی را مشخص می‌کند ( $\{\}$ ).

۲- الف) ۵، دو مجموعه مساوی هستند، پس باید اعضای متناظر با هم برابر باشند.

$$\{4, -5, 5\} = \{5, -\frac{12}{-3}, -\sqrt{25}\}$$

ب)  $A$ ، یک مجموعه  $n$  عضوی  $2^n$  زیرمجموعه دارد.

$n = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

پ)  $\frac{1}{3}$ ، با توجه به مجموعه‌های زیر، تعداد اعداد فرد یک تاس برابر ۳ است؛ پس:

$n(A) = \{1, 3, 5\}, n(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

۳- الف) گزینه «۲»

هر یک از تاس‌ها دارای ۶ حالت است؛ بنابراین تعداد کل حالات ممکن برابر است با:  $6 \times 6 = 36$

ب) گزینه «۱»

حالت‌های ممکن برای ۳ فرزند به صورت زیر است.



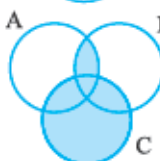
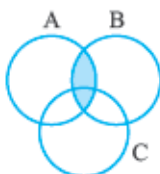
تعداد کل حالات ممکن برابر ۸ تا است و تعداد حالاتی که دقیقاً ۲ پسر باشند، برابر ۳ تا است؛ بنابراین:

$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

۴- الف)  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

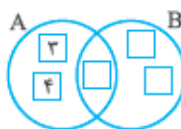
ب) باید تمام اعضای که در مجموعه  $B$  وجود دارد ولی در مجموعه  $C$  وجود ندارد را بنویسیم:  
 $B - C = \{7, -3\}$

۵- ابتدا  $A \cap B$  را مشخص می‌کنیم:



پس اجتماعش را با  $C$  مشخص می‌کنیم:

۶- وقتی  $A - B = \{3, 4\}$  است، یعنی اعدادی که در  $A$  هستند ولی در  $B$  نیستند، ۳ و ۴ هستند:



۱۷- ابتدا فرض و حکم را مشخص می‌کنیم:

فرض	$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ , مماس MA, MB و OA = OB (شعاع)
حکم	MA = MB

$$\left. \begin{array}{l} \text{(شعاع)} OA = OB \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{(مشترک)} OM = OM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAM \cong \triangle OBM$$

$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} MA = MB$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض)} AH = HB \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{(مشترک)} PH = PH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض زض}} \triangle AHP \cong \triangle BHP \Rightarrow AP = PB$$

ب) نقطه‌ای که در نظر گرفتیم، دلخواه بوده است؛ پس برای همه نقاط روی عمود منصف برقرار است.

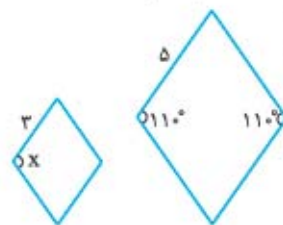
۱۹- الف) نسبت تشابه برابر با نسبت ضلع یکی از لوزی‌ها به ضلع لوزی دیگر است:

$$\frac{5}{3} \text{ یا } \frac{3}{5} = \text{نسبت تشابه}$$

ب) در لوزی زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی هستند.

از طرفی در شکل‌های متشابه، زاویه‌های متناظر با

هم مساوی‌اند؛ پس داریم:



$$x = 110^\circ$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

۲۰- الف) نادرست

ب) درست

۲۱-

$$0.25 = \frac{25}{100} = \left(\frac{100}{25}\right)^{-1} = (4)^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2}$$

الف)

$$(0.2)^{-4} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4$$

ب)

۲۲- برای این که عددی به صورت نماد علمی باشد، فقط باید یک رقم سمت چپ

اعشار باشد و عدد به صورت  $a \times 10^b$  نوشته شود که در آن  $1 \leq a < 10$  است:

$$1276 = 1.276 \times 10^3$$

چون اعشار سه رقم به سمت چپ حرکت کرده، توان ۱۰ باید مثبت ۳ باشد.

$$5\sqrt{12} - 6\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$$

۲۳-

$$\begin{aligned} &= 5\sqrt{4 \times 3} - 6\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{16 \times 3} \\ &= 5(2\sqrt{3}) - 6(3\sqrt{3}) + 2(4\sqrt{3}) \\ &= 10\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2^5 \times 6^5 \times 12}{4^6} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{12^5 \times 12}{4^6} \times (-3)^2$$

۲۴-

$$= \frac{12^6}{4^6} \times 3^2 = \left(\frac{12}{4}\right)^6 \times 3^2 = 3^6 \times 3^2 = 3^8$$

دقت کنید چون توان (-۳) عددی زوج بود، آن را به صورت  $3^2$  نوشتیم.

۲۵- باید توان مخرج را تبدیل به عددی صحیح کنیم:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{12\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{2} = 6\sqrt[3]{4}$$



۴- کل حالت‌های ممکن:

$$\leftarrow \begin{cases} \text{پسر دختر} \\ \text{دختر پسر} \\ \text{پسر پسر} \\ \text{دختر دختر} \end{cases}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد حالت مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (0/5)$$

۵- الف)  $A = \{x^2 + 2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$

$$= \{1^2 + 2, 2^2 + 2, 3^2 + 2\} = \{3, 6, 11\} \quad (0/5)$$

ب)  $A \cap B = \{3, 6, 11\} \cap \{4, 5, 6\} = \{6\} \quad (0/5)$

۶- الف)  $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{10} = |3 - \sqrt{10}| - \sqrt{10} \quad (0/2.5)$

$$= \sqrt{10} - 3 - \sqrt{10} \quad (0/2.5) = -3 \quad (0/2.5)$$

ا)  $3/\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \quad (0/2.5)$  ب)

ب)  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z} \quad (0/2.5)$

۷- معبر نیست (0/2.5)، چون فقط یک حالت خاص را در نظر گرفته‌ایم و این موضوع را برای هر مثلثی اثبات نکرده‌ایم. این استدلال مثل این است که ما یک فرد از خانواده‌ای را ببینیم که چشم آبی دارد و نتیجه بگیریم تمام اعضای آن خانواده چشم آبی دارند. (0/2.5)

-۸

فرض چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است و نقاط Q و M، P، N وسط اضلاع هستند. (0/2.5)

$$MN = PQ$$

$$\left. \begin{aligned} MB = AM = \frac{AB}{2} \\ DP = PC = \frac{DC}{2} \\ AB = DC \text{ اضلاع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع} \end{aligned} \right\} \quad (0/2.5)$$

$$\Rightarrow MB = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} = DP \Rightarrow MB = DP \quad (0/2.5)$$

به طور مشابه QD = BN است:

$$\left. \begin{aligned} MB = DP \\ QD = BN \\ \hat{B} = \hat{D} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ضریب}} \triangle QDP \cong \triangle MBN \quad (0/2.5)$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} MN = PQ \quad (0/2.5)$$

۹- الف)  $\frac{\sqrt{20} + 2\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{9 \times 5}}{\sqrt{5}} \quad (0/2.5)$

$$\frac{\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 2\sqrt{9} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad (0/2.5)$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad (0/2.5) = 8 \quad (0/2.5)$$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{72}} = \frac{2}{\sqrt{72}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (0/2.5) = \frac{2\sqrt{3}}{7 \times 2} = \frac{2\sqrt{3}}{21} \quad (0/2.5)$

### آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) درست (0/2.5)

ب) درست (0/2.5)

پ) نادرست (0/2.5)

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9 \\ 9^{-1} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \neq 9^{-1}$$

ت) درست (0/2.5)

۲- الف) ۳ یا  $\frac{1}{3}$  (0/2.5)

ب) ۴ (0/2.5)

پ)  $5^{-8}$  یا  $\left(\frac{1}{5}\right)^8$  یا  $2^8$  (0/2.5)

ت) استدلال (0/2.5)

۳- الف) گزینه «۳» (0/2.5)، عرض همه نقطه‌های این خط برابر -۳ است.

ب) گزینه «۱» (0/2.5)  $\frac{2}{9} = 2/9 \times 10^{-2}$  رقم

پ) گزینه «۳» (0/2.5)، چون فقط عامل ۲ در تجزیه مخرج دارد.

ت) گزینه «۲» (0/2.5)،  $A - B$  یعنی قسمتی از A که در B نیست.

$$\begin{array}{r} 8x^2 - 10x + 9 \quad | \quad 4x + 3 \\ \hline -(8x^2 + 6x) \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline -16x + 9 \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline -(-16x - 12) \\ \hline 21 \end{array}$$

مرحله اول (۰/۲۵) ←  
مرحله دوم (۰/۲۵) ←  
مرحله اول دوم (۰/۲۵) ←

خارج قسمت  $2x - 4$ ، باقی مانده ۲۱

۱۵- الف) ابتدا حجم آب را مشخص می‌کنیم:

مخروط  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (۰/۲۵) = \frac{1}{3} \times 3 \times 5^2 \times 12 \quad (۰/۲۵) = 300 \quad (۰/۲۵)$

حالا این مقدار آب را در استوانه می‌ریزیم و می‌بینیم که ارتفاع آب چه قدر می‌شود:

استوانه  $V = \pi r_1^2 h_1 \quad (۰/۲۵) = 3 \times r_1^2 \times h_1 = 300 \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow 4h_1 = 100 \Rightarrow h_1 = 25 \quad (۰/۲۵)$

$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \times \frac{1}{4} = \pi R^2 \quad (۰/۲۵)$

$S_{\text{کره}} = 2 \times 3 \times 12 \text{ cm}^2 \quad (۰/۲۵)$

$= 6 \times 144 \text{ cm}^2 = 864 \text{ cm}^2 \quad (۰/۲۵)$



ب)

۱۰- الف)  $(2x + 3)(2x - 4) = (2x)^2 + 2x(3 + (-4)) + 3 \times (-4) \quad (۰/۵) \quad (۱۰-الف)$   
 $= 4x^2 - 2x - 12 \quad (۰/۲۵)$

$\left(\frac{x}{2} + \sqrt{y}\right)\left(\frac{x}{2} - \sqrt{y}\right) = \frac{1}{4}x^2 - y \quad (۰/۲۵) \quad (۱۰-ب)$

پ)  $\frac{y}{x} \leq \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین} \times 6} y \leq 2(x+1) + 2(x-1) \quad (۰/۲۵) \quad (۱۰-پ)$

$\Rightarrow y \leq 2x + 2 + 2x - 2 \Rightarrow y \leq 4x - 1$

$\Rightarrow y - 4x \leq -1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 2x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$



۱۱-  $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2) \times (2x + y) = -2 \quad (۰/۲۵) \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (۱۱-الف)$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = +6 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow -11x = 11 \Rightarrow x = -1 \quad (۰/۲۵)$

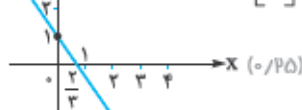
$2x + y = -2 \xrightarrow{x=-1} -2 + y = -2 \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow y = -2 + 2 \Rightarrow y = 0 \quad (۰/۲۵)$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(0) + 1 \Rightarrow y = 1 \quad (۰/۲۵) \quad (۱۲-الف)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad (۰/۲۵)$

باید یک خط رسم کنیم که از دو نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  عبور کند.



ب)  $y = -4x + 1 \xrightarrow{x=2} y = -4(2) + 1 = -7 \quad (۰/۲۵) \quad (۱۲-ب)$

$\Rightarrow$  مختصات نقطه  $= \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$

پ) شیب خط باید -۵ باشد، چون موازی خط  $y = -5x$  است (۰/۲۵):

$y = ax + b = \frac{a-5}{a-5} \rightarrow y = -5x + b \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$

$10 = -5(-1) + b \Rightarrow 10 = 5 + b \Rightarrow b = 5 \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow y = -5x + 5 \quad (۰/۲۵)$

۱۳- الف) اگر مخرج کسر  $\frac{8x-9}{x-7}$  صفر شود، کسر تعریف نشده است:

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \quad (۰/۲۵)$

ب) این مسئله جواب‌های زیادی دارد. دو نمونه از آن‌ها را بیان می‌کنیم:

نمونه ۱  $= \frac{a}{a-5}$  (۰/۲۵) و  $\frac{y}{a-5}$  (۰/۲۵)

نمونه ۲  $= \frac{a+4}{a-5}, \frac{3}{a-5}$

پ) عرض  $= \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \frac{(x + 4)(x - 5)}{x + 4} = x - 5 \quad (۰/۲۵) \quad (۱۳-پ)$

طول  $= \frac{\text{مساحت}}{\text{عرض}} \quad (۰/۲۵) \quad \frac{x^2 - 20}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = x + 5 \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow$  طول  $= x + 5 \quad (۰/۲۵)$



### فصل ۱

#### مجموعه‌ها

#### معرفی مجموعه

مجموعه، دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز (غیر تکراری) است که عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد.

#### مثال

کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.

الف) چهار شاعر ایرانی

ب) ورزشکاران یک کشور

پ) عددهای صحیح بزرگتر از ۳- و کوچکتر از ۲-

(خراسان رضوی - خرداد ۹۵)

#### پاسخ

الف) مجموعه نیست، زیرا برای معرفی شاعرها معیار مشخصی نداریم. (ب) مجموعه نیست، زیرا تعریف هر شخص از ورزشکار بودن با دیگری متفاوت است.

پ) مجموعه است، زیرا به صورت مشخص نشان دهنده دسته‌ای از اعداد است. البته در این جا این مجموعه عضوی ندارد.

$= \{ \}$  عددهای صحیح بزرگتر از ۳- و کوچکتر از ۲-

#### نکته

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه و یا تکرار عضوهای آن، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای  $\{۳, ۳, ۴\}$  می‌نویسیم  $\{۳, ۴\}$ . (عبارت کتاب درسی)

#### تذکر

برای نام‌گذاری مجموعه‌ها معمولاً از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنند: A, B, C و ...

#### عضویت در مجموعه‌ها

علامت عضو بودن (عضویت) در یک مجموعه را به صورت  $\in$  و علامت عضو نبودن (عدم عضویت) در یک مجموعه را به صورت  $\notin$  نشان می‌دهیم. به طور مثال اگر مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ را A نام‌گذاری کنیم، می‌توان گفت:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 2 \in A, 5 \notin A$$

#### مجموعه تهی

اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد  $\emptyset$  یا  $\{ \}$  نمایش می‌دهیم.

#### تذکر

مجموعه‌های  $\{0\}$  یا  $\{ \}$  تهی نیستند و هر کدام دارای یک عضو می‌باشند.

#### مثال

کدام یک از عبارتهای زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟

الف) عددهای طبیعی بین ۴ و ۵ (بوشهر - خرداد ۹۵)

ب) عددهای طبیعی یکره‌ای و مضرب ۳ که اول باشد. (کتاب درسی)

پ) مجموعه اعداد صحیح که نه مثبت هستند و نه منفی.

#### پاسخ

الف) تهی می‌باشد، زیرا بین ۴ و ۵، عدد طبیعی وجود ندارد.

ب) دارای یک عضو می‌باشد.  $\{3\}$

پ) دارای یک عضو است.  $\{0\}$

#### دو مجموعه برابر

دو مجموعه A و B با هم برابرند اگر هر عضو A، عضوی از مجموعه B و هر عضو B، عضوی از مجموعه A باشد و می‌نویسیم  $A = B$ .

#### مثال

مجموعه‌های  $A = \{5, y\}$  و  $B = \{4, x + y\}$  با هم برابرند. مقدار  $3x - y$  را به دست آورید. (ایران - خرداد ۹۵)

پاسخ باید تمامی عضوهای A در B و تمامی عضوهای B در A موجود باشد. بنابراین با توجه به A و B می‌توان گفت:

$$\begin{cases} y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{y=4} x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$$

حالا مقدار  $x = 1$  و  $y = 4$  را در  $3x - y$  جای گذاری می‌کنیم:

$$3x - y \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=4}} 3 \times 1 - 4 = 3 - 4 = -1$$

#### تعداد عضوهای یک مجموعه

تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم. به طور مثال اگر  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  باشد، آن‌گاه  $n(B) = 4$  است.

#### زیرمجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند و تمامی عضوهای مجموعه A در مجموعه B موجود باشد، آن‌گاه می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم  $A \subseteq B$ . علامت زیرمجموعه بودن را به صورت  $\subseteq$  و علامت زیرمجموعه نبودن را به صورت  $\not\subseteq$  نمایش می‌دهیم.

#### نکات زیرمجموعه

الف) هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه خودش است.

ب) مجموعه تهی، زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

پ) اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ ، یعنی تمام عضوهای A در B و تمامی عضوهای B در A موجود است، بنابراین می‌توان گفت  $A = B$ .

ت) اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که  $A \subseteq C$  است.



با توجه به مجموعه‌های  $A, B$  درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (مشابه‌کار در کلاس صفحه ۸)

$$A = \{1, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$$

الف)  $3 \subseteq B$

ب)  $A \subseteq B$

پ)  $\{1, 2\} \subseteq B$

ت)  $\{\} \subseteq A$

**پاسخ** الف) نادرست است، زیرا ۳ عضو مجموعه  $B$  است، نه زیرمجموعه آن. اما  $\{3\}$  زیرمجموعه  $B$  است.

ب) درست است، زیرا تمامی عضوهای  $A$  در  $B$  موجود است.

پ) درست است، زیرا عضوهای مجموعه  $\{1, 2\}$  در  $B$  موجود هستند.

ت) نادرست است، زیرا تهی زیرمجموعه تمامی مجموعه‌ها است.

**تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه**

در حالت کلی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی، برابر  $2^n$  است

تمام زیرمجموعه‌های مجموعه عددهای طبیعی بین ۵ و ۹ را بنویسید. (مشابه‌کار در کلاس صفحه ۸)

**پاسخ** ابتدا عضوهای مجموعه داده‌شده را مشخص می‌کنیم.

$$6, 7, 8, 9 = \text{عددهای طبیعی بین ۵ و ۹}$$

تعداد عضوهای این مجموعه، ۳ است، بنابراین دارای  $2^3 = 8$  زیرمجموعه است.

$$\{\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{6, 7, 8\}$$

**نمایش مجموعه‌ها**

به طور کلی برای نمایش مجموعه‌ها به چهار صورت زیر عمل می‌کنیم:

**الف)** به زبان فارسی

**ب)** با اعضا

**پ)** با نمودار ون

**ت)** به زبان ریاضی

**الف) به زبان فارسی**

ویژگی مشترک اعضای یک مجموعه به صورت عبارتهای فارسی بیان می‌شود. به طور مثال، اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵ که منظور مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  است.

**ب) با اعضا**

تک‌تک اعضا را بین دو آکولاد می‌نویسیم، به طور مثال  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

**پ) نمودار ون**



اعضای یک مجموعه را درون یک حلقه بسته، نمایش می‌دهیم.

**ت) به زبان ریاضی**

یک متغیر را به عنوان نماینده عضوهای مجموعه مشخص کرده، سپس ویژگی مشترک بین اعضا را به صورت یک رابطه ریاضی می‌نویسیم. به طور مثال اگر

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد، داریم:

شکل ریاضی مجموعه  $A$  به این صورت خوانده می‌شود: « $x$  نماینده عضوهای

$A$  است به طوری که عضوهای  $A$  متعلق به مجموعه اعداد طبیعی هستند و

این اعضا از ۵ کوچک‌تر می‌باشند.»

**مثال**

مجموعه زیر را با اعضایش مشخص کنید. (اصفهان-خرداد ۹۵)

$$A = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$$

**پاسخ** ابتدا می‌بینیم به جای  $x$  چه اعدادی را می‌توان قرار داد. مشخص است که  $x$  عضو اعداد صحیح و از  $-2$  تا  $2$  است. پس:

$$x = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

اما خیلی مهم است که دقت کنید  $x - 1$  نماینده عضوهای  $A$  است، بنابراین به جای  $x$  در عبارت  $x - 1$  اعدادی را که به دست آوردیم قرار می‌دهیم، پس:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

**مجموعه‌های عددی مهم**

مجموعه‌های عددی زیر، مهم هستند و به صورت‌های مختلف در امتحانات مورد سؤال قرار می‌گیرند.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

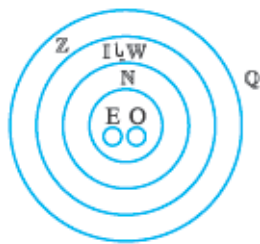
$$\mathbb{O} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{E} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

اگر به اعضای هر یک از مجموعه‌های بالا دقت کنید، می‌توان گفت:

$$\mathbb{E}, \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

رابطه زیرمجموعه‌بودن، مجموعه‌های عددی را می‌توان با نمودار ون به صورت زیر نمایش داد:



**مثال**

درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. (اصفهان-خرداد ۹۵)

ب) هر عدد گویا عددی حسابی است. (کار در کلاس صفحه ۱۰)

پ) بعضی از اعداد گویا، عدد صحیح‌اند. (کار در کلاس صفحه ۱۰)

**پاسخ** الف) درست است، تمامی اعداد صحیح عضو مجموعه اعداد گویا هستند.

ب) نادرست است، مثلاً  $\frac{2}{3}$  عددی گویا می‌باشد ولی حسابی نیست.

پ) درست است، مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه اعداد گویا می‌باشد، بنابراین بعضی از اعداد گویا صحیح هستند.



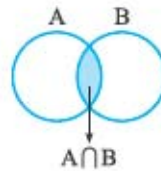
## اعمال روی مجموعه‌ها

### اشتراک دو مجموعه

مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهای است، که هم عضو مجموعه  $A$  و هم عضو مجموعه  $B$  باشند. این مجموعه را با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

اشتراک را به صورت زیر روی نمودار ون نمایش می‌دهیم.

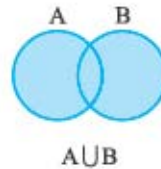


### اجتماع دو مجموعه

مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهای است، که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشند. این مجموعه را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اجتماع را به صورت زیر روی نمودار ون نمایش می‌دهیم.



### مثال

اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$  آن‌گاه  $A \cap B$  و  $A \cup B$  را به دست آورید. (پرستان-خرداد ۹۵)

**پاسخ** ابتدا هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با اعضا نمایش می‌دهیم.

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

برای به دست آوردن  $A \cap B$ ، عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  را مشخص می‌کنیم.

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

برای به دست آوردن  $A \cup B$  باید تمام عضوهای هر دو مجموعه را در نظر بگیریم:

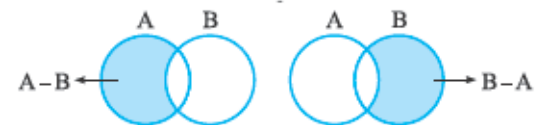
$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

### تفاضل دو مجموعه

مجموعه  $A - B$  مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که متعلق به مجموعه  $A$  هستند ولی عضو مجموعه  $B$  نیستند و به زبان ریاضی داریم:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

تفاضل مجموعه‌ها را به صورت زیر روی نمودار ون نمایش می‌دهیم:



### مثال

با توجه به دو مجموعه  $A = \{2, 4, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  عبارت زیر را با اعضا مشخص کنید. (زنجان-خرداد ۹۵)

$$(A \cup B) - (A \cap B) =$$

**پاسخ** در گام اول  $(A \cup B)$  و  $(A \cap B)$  را مشخص می‌کنیم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad , \quad A \cap B = \{2, 4\}$$

سپس برای مشخص کردن  $(A \cup B) - (A \cap B)$  اشتراک دو مجموعه را از  $A \cup B$  حذف می‌کنیم.

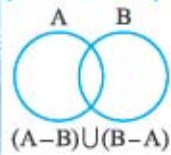
$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 6\}$$

دقت کنید این مثال از طریق نمودار ون نیز قابل حل بود.

**نکته** گاهی با ترکیب اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها در سؤالات باید عبارت موردنظر را روی نمودار ون با رنگ‌کردن مشخص کنیم. برای این کار ضمن رعایت اولویت‌ها، مرحله به مرحله تا جواب نهایی جلو می‌رویم.

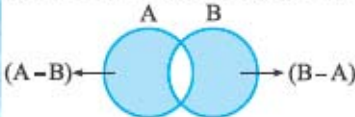
### مثال

در نمودار زیر مجموعهٔ موردنظر را رنگ کنید. (گلستان-خرداد ۹۵)



$$(A - B) \cup (B - A)$$

**پاسخ** ابتدا هر یک از پرانتزهای داده‌شده را روی شکل مشخص می‌کنیم:



$$(A - B) \quad (B - A)$$

حال با توجه به این‌که اجتماع دو مجموعه را می‌خواهیم، پس همان نواحی رنگی روی شکل نشان‌دهندهٔ  $(A - B) \cup (B - A)$  است.

## احتمال

احتمال وقوع یک پیشامد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

و با توجه به آشنایی با مجموعه‌ها اگر مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن را،  $S$  و مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های مطلوب را،  $A$  و احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد حالت‌های مطلوب  
↑  
تعداد حالت‌های ممکن

**مثال** در جعبه‌ای ۲ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر یک مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چه‌قدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟ (تهران-خرداد ۹۵)

**پاسخ** تعداد حالت‌های ممکن یا  $n(S)$  برابر مجموعهٔ تعداد تمامی مهره‌ها است.

$$n(S) = 2 + 4 + 5 = 11$$

تعداد حالت‌های مطلوب یا  $n(A)$  برابر تعداد مهره‌های آبی یعنی ۴ است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{11}$$

بنابراین داریم:

پس احتمال خارج کردن مهرهٔ آبی برابر  $\frac{4}{11}$  است.