

فهرست

۱ مجموعه‌ها ۷

۲ عددهای حقیقی ۳۴

۳ استدلال و اثبات در هندسه ۵۵

آزمون میان‌نوبت اول ۷۷

۴ توان و ریشه ۸۰

آزمون نوبت اول ۱۰۴

۵ عبارتهای جبری ۱۰۷

۶ خط و معادله‌های خطی ۱۲۹

آزمون میان‌نوبت دوم ۱۵۸

۷ عبارتهای گویا ۱۶۱

۸ حجم و مساحت ۱۷۸

آزمون خردادماه ۹۸ شهر تهران ۱۹۶

آزمون خردادماه ۹۷ شهر یزد ۱۹۹

آزمون خردادماه ۹۷ شهر خراسان رضوی ۲۰۲

فصل ۱

مجموعه‌ها



درستامه

درس اول: معرفی مجموعه

مجموعه چیست؟ هر دسته کاملاً مشخص و غیر تکراری از اشیا را یک مجموعه می‌گویند و هر یک از آن اشیا را عضو مجموعه می‌نامند. منظور از عبارت «کاملاً مشخص» چیست؟ به مثال زیر توجه کنید.

مثال | کدام یک از تعریف‌های زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

(الف) چهار عدد زوج متوالی

(ب) عددهای اول یک‌رقمی

پاسخ | تعریف «الف» دارای بی‌شمار جواب است، چون جواب‌ها می‌تواند سلیقه‌ای باشد.

۲، ۴، ۶، ۸ یا ۴، ۶، ۸، ۱۰ یا ۳۰، ۳۲، ۳۴، ۳۶ یا ۱۰۰۲، ۱۰۰۴، ۱۰۰۶، ۱۰۰۸، ...

بنابراین چهار عدد زوج متوالی نمی‌توانند یک مجموعه را در ریاضی مشخص کنند.

۲، ۳، ۵، ۷

اما تعریف «ب» فقط یک جواب دارد (این‌جا دیگر جواب سلیقه‌ای نداریم).

بنابراین تعریف «ب» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنند. عضوهای یک مجموعه را داخل علامت { } قرار می‌دهند که به آن‌ها «آکلاد» می‌گویند.

مثال | مجموعه عددهای طبیعی یک‌رقمی را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

پاسخ |

هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ... و ۹ را عضو مجموعه A می‌گوییم. علامت عضویت یا عضو بودن در یک مجموعه را با نماد \in و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد \notin نشان می‌دهیم.

برای مثال در مجموعه A:

$2 \in A$

عدد ۲ عضو مجموعه A است که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

$10 \notin A$

عدد ۱۰ عضو مجموعه A نیست که به صورت ریاضی می‌نویسیم:

نکته | در مجموعه، ترتیب نوشتن اعضا مهم نیست، یعنی با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی حاصل نمی‌شود.

برای مثال مجموعه $A = \{3, 5, 7\}$ را می‌توان به صورت‌های مقابل نشان داد: $A = \{7, 5, 3\}$ یا $A = \{5, 3, 7\}$ یا $A = \{3, 5, 7\}$

نکته | همان‌طور که در معرفی مجموعه گفتیم عضوهای یک مجموعه باید غیر تکراری باشند، پس در مجموعه، عضوهای تکراری فقط

یک عضو حساب می‌شوند (یک بار نوشته می‌شوند).

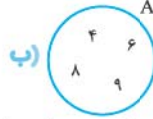
$A = \{2, 3, 5, 2, 5, 7\} = \{2, 3, 5, 7\}$

مثال | مجموعه $A = \{2, 3, 5, 2, 5, 7\}$ دارای چهار عضو است، یعنی:

یکی از روش‌های نشان دادن مجموعه‌ها، نمایش هندسی یا «نمودار ون» است. در این روش عضوهای مجموعه را داخل یک منحنی بسته قرار می‌دهیم.

مثال اگر A مجموعه عددهای مرکب یک‌رقمی باشد، آن را به دو صورت نمایش دهید.

(الف) $A = \{4, 6, 8, 9\}$



پاسخ

در قسمت «ب» مجموعه A را به صورت نمایش هندسی یا نمودار ون نشان داده‌ایم.

نکته اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشد، آن مجموعه را «متناهی» یا «باپایان» می‌گوییم و اگر تعداد عضوهای یک مجموعه غیرقابل شمارش باشد، آن مجموعه را «نامتناهی» یا «بی‌پایان» می‌گوییم.

مثال مجموعه‌های زیر «متناهی» یا «باپایان» هستند.

$A = \{0, 11, 12, \dots, 99\}$

(الف) مجموعه عددهای طبیعی دورقمی

$B = \{ا, ب, پ, ت, \dots, ی\}$

(ب) مجموعه حروف الفبای فارسی

مثال مجموعه‌های زیر «نامتناهی» یا «بی‌پایان» هستند.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(الف) مجموعه عددهای طبیعی

$C = \{\dots, -13, -12, -11, -10\}$

(ب) مجموعه عددهای صحیح منفی کوچک‌تر از -9

تذکره نماد \dots یعنی عضوهای مجموعه به همین صورت ادامه پیدا می‌کنند.

مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد، مجموعه تهی نامیده می‌شود. مجموعه تهی را با نماد $\{\}$ یا \emptyset نمایش می‌دهیم.

تذکره هیچ‌گاه مجموعه تهی را با این نماد $\{\emptyset\}$ نشان ندهید (غلط است).

هر یک از مثال‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کنند.

(الف) مجموعه انسان‌هایی که در کره ماه زندگی می‌کنند.

(ب) مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از 1

(پ) مجموعه عددهای اول زوج دورقمی

مجموعه‌ای که فقط دارای یک عضو باشد، مجموعه یک‌عضوی نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌های زیر:

$A = \{2\}$

(الف) مجموعه عددهای اول زوج

$B = \{0\}$

(ب) مجموعه عددهای صحیح که نه مثبت هستند و نه منفی

پرسش‌های پزینه‌ای



۱ کدام مجموعه تهی است؟

(۲) عددهای صحیح منفی بزرگ‌تر از -1

(۱) عددهای منفی بزرگ‌تر از -1

$A = \{(-2)^2, 4, \sqrt{16}\}$

۲ مجموعه مقابل چند عضو دارد؟

(۲) یک عضو

(۱) سه عضو

۳ کدام مجموعه یک‌عضوی است؟

(۲) عددهای اول زوج سه‌رقمی

(۱) عددهای صحیح بین -1 و 1

۴ مجموعه مضرب‌های اول عدد 5 :

(۲) مجموعه نامتناهی یا بی‌شمارعضوی است.

(۱) مجموعه یک‌عضوی است.



پرسش‌های تشریحی

۱ کدام یک از تعریف‌های زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟

- الف) فوتبالیست‌های حرفه‌ای ایران
- ب) عددهای فرد طبیعی
- پ) عددهای طبیعی بین ۱ و ۲
- ت) عددهای صحیح کوچک‌تر از ۱۰۰۰
- ث) شاعران معروف ایران
- ج) دانش‌آموزان تیزهوش دبیرستان
- چ) عددهای بسیار بزرگ
- ح) چهار عدد اول متوالی
- د) عددهایی که با معکوس خود برابرند.

۲ معین کنید که هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

الف) مجموعه عددهایی که با مربع خود برابرند.

ب) مجموعه عددهای صحیح یک‌رقمی

پ) مجموعه عددهای نامنفی یک‌رقمی

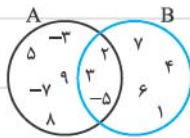
ت) مجموعه ماه‌های سال شمسی

ث) مجموعه عددهای مرکب کوچک‌تر از ۲۰

ج) $A = \{6, 9, -3^2, \sqrt{81}, (-3)^2\}$

چ) $B = \{a, 1, 2, b, 3, b, \sqrt{9}, a, 2\}$

۳ الف) با توجه به نمودار، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



$A = \{ \quad \}$

$B = \{ \quad \}$

ب) درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $9 \in A$

ب) $-5 \notin B$

پ) $6 \notin A$

ت) $8 \in A$

ث) $-5 \in A$

ج) $1 \notin A$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام یک مجموعه یک‌عضوی است؟

الف) مجموعه عددهایی که معکوس ندارند.

ب) مجموعه عددهای اول زوج

پ) مجموعه عددهای صحیح بین -۱ و -۲

ت) مجموعه عددهای زوج بین ۶ و ۸

ث) مجموعه عددهایی که مجذور آن‌ها عددی منفی باشد.

ج) مجموعه شمارنده‌های اول عدد ۸۱

ج) مجموعه شمارنده‌های فرد عدد ۳۲

۵) هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) مجموعه عددهای فرد طبیعی

ب) مجموعه عددهای اول دورقمی کوچک‌تر از ۳۱

پ) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۷

ت) مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۵

ث) مجموعه عددهای صحیح زوج

۶) هر یک از مجموعه‌های زیر را با یک عبارت کلامی بیان کنید. (مانند نمونه)

$$A = \{\dots, -9, -7, -5, -3, -1\}$$

مجموعه عددهای صحیح فرد منفی

$$B = \{21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32\}$$

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$D = \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$$

۷) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را معین کنید.

الف) $68 \in \{6, 12, 18, \dots, 96\}$

ب) $1394 \in \{11, 13, 15, 17, \dots, 2015\}$

پ) $282 \notin \{4, 8, 12, 16, \dots, 400\}$

ت) $71 \in \{11, 13, 17, 19, 23, \dots, 97\}$

درست و نادرست



الف) مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱، تهی است.

ب) مجموعه $\{2/a, b, 1/5, 7, a\}$ دارای شش عضو است.

پ) عدد ۶۱ به مجموعه $\{3, 10, 13, \dots, 103\}$ تعلق ندارد.

ت) مجموعه تهی را با علامت $\{\emptyset\}$ نمایش می‌دهیم.

کامل کنید



الف) مجموعه عددهای منفی بین ۷ و ۹ یک مجموعه است.

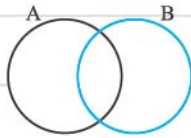
ب) مجموعه عددهای صحیح منفی بزرگ‌تر از -۲، مجموعه است.

پ) مجموعه $\{2, 4, 6, 8, \dots, 86\}$ دارای عضو است.

ت) مجموعه $\{(-1)^n, 1, \sqrt{1}, 4^\circ, \frac{3}{3}\}$ یک مجموعه عضوی است.



تمرین‌های مروری



$$A = \{3, 7, -2, 4, 11\}$$

$$B = \{5, 4, 9, -11, 7, 6\}$$

۱ با توجه به مجموعه‌های A و B، نمودار را کامل کنید.

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

$$A = \{-19, -18, -17, \dots, 14, 15\}$$

$$B = \{0, 3, 6, 9, \dots, 78\}$$

۳ اگر A مجموعه ضرب‌های طبیعی دورقمی ۴ و B مجموعه شماره‌های ۳۶ باشد، درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) $84 \in A$

ب) $6 \notin B$

پ) $1 \in A$

ت) $1 \in B$

ث) $36 \in A$

ج) $4 \in B$

چ) $18 \notin A$

ح) $72 \in B$

خ) $92 \notin A$

درستنامه

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه برابر دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوییم، در صورتی که هر عضو A، عضو B باشد و هر عضو B نیز عضو A باشد.

$$B = \{7, 5, \sqrt{9}\}$$

مثال | مجموعه‌های A و B با هم برابرند.

$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{y-1, 7, 5\}$$

مثال | x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه A و B برابر باشند.

$$A = \{7, x+1, 2\}$$

پاسخ | عدد 7 عضو هر دو مجموعه است. باید عدد 2 عضو B و عدد 5 عضو A باشد تا دو مجموعه برابر شوند.

$$x+1=5 \Rightarrow x=5-1=4 \Rightarrow x=4$$

$$y-1=2 \Rightarrow y=2+1 \Rightarrow y=3$$

مثال | کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه A برابر است؟

$$A = \{a, 2, b, c\}$$

$$B = \{a, 2, b, d\}$$

$$C = \{a, c, b, 2, a, b\}$$

$$D = \{2a, b, c\}$$

پاسخ | مجموعه A با B مساوی نیست، چون در مجموعه B عضو d هست و در مجموعه A نیست و در مجموعه A عضو

$$A \neq B$$

C هست که در مجموعه B نیست. پس:

$$C = \{a, c, b, 2, \cancel{a}, \cancel{b}\} = \{a, c, b, 2\}$$

مجموعه‌های A و C برابرند، زیرا:

$$A = C$$

یعنی هر عضو A در C هست و برعکس. پس:

$$A \neq D$$

مجموعه D با مجموعه A برابر نیست، چون D دارای 3 عضو و A دارای 4 عضو است. پس:

$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

زیرمجموعه دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید.

همان‌طور که می‌بینید هر عضو A در مجموعه B هست، بنابراین می‌گوییم، مجموعه A زیرمجموعه B است و به زبان ریاضی می‌نویسیم: $A \subseteq B$

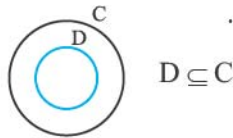
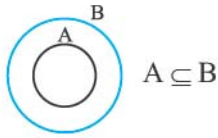
نماد \subseteq نشانه زیرمجموعه بودن و نماد $\not\subseteq$ نشانه زیرمجموعه نبودن است. در دو مجموعه بالا، عدد ۲ عضو مجموعه B است اما عضو A نیست، بنابراین مجموعه B زیرمجموعه A نیست. این مطلب را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$A \subseteq A, B \subseteq B, \emptyset \subseteq \emptyset$$

$$\emptyset \subseteq A, \emptyset \subseteq B, \emptyset \subseteq \emptyset$$

نکته: هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است.

نکته: مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.



مثال: رابطه‌های $A \subseteq B$ و $D \subseteq C$ را با نمودار ون نمایش دهید.

پاسخ |

مثال: با توجه به سه مجموعه A، B و C، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$$A = \{-4, 2, 7\}$$

$$B = \{7, -4, 2, 3\}$$

$$C = \{3, 7, 2, -4\}$$

- | | | |
|--|--|--|
| $A \subseteq C$ <input type="checkbox"/> (پ) | $B \subseteq A$ <input type="checkbox"/> (ب) | $A \subseteq B$ <input type="checkbox"/> (الف) |
| $B = C$ <input type="checkbox"/> (ج) | $C \subseteq B$ <input type="checkbox"/> (ث) | $B \subseteq C$ <input type="checkbox"/> (ت) |
| $A = C$ <input type="checkbox"/> (خ) | $A \not\subseteq C$ <input type="checkbox"/> (ج) | $C \not\subseteq A$ <input type="checkbox"/> (ج) |
| <input checked="" type="checkbox"/> (پ) | <input checked="" type="checkbox"/> (ب) | <input checked="" type="checkbox"/> پاسخ (الف) |
| <input checked="" type="checkbox"/> (ج) | <input checked="" type="checkbox"/> (ث) | <input checked="" type="checkbox"/> (ت) |
| <input checked="" type="checkbox"/> (خ) | <input checked="" type="checkbox"/> (ج) | <input checked="" type="checkbox"/> (ج) |

$$\left. \begin{matrix} B \subseteq C \\ C \subseteq B \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow B = C$$

نکته: با توجه به مثال بالا درمی‌یابیم که اگر:

این علامت \Leftrightarrow نتیجه‌گیری دوطرفه است؛ یعنی اگر دو مجموعه B و C زیرمجموعه یکدیگر باشند، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که دو مجموعه برابرند و برعکس، اگر دو مجموعه B و C برابر باشند، آن‌گاه این دو مجموعه زیرمجموعه یکدیگرند.

نکته: اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که $A \subseteq C$ است.

مثال: اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{5, 2, 3\}$ باشد، داریم $A \subseteq B$ و اگر $C = \{7, 3, 2, 5\}$ باشد، آن‌گاه $B \subseteq C$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

مثال: تمامی زیرمجموعه‌های $A = \{2, 3\}$ را بنویسید.

پاسخ: می‌خواهیم مجموعه‌هایی را بنویسیم که عضوهای آن‌ها در مجموعه A باشند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{زیرمجموعه‌های } A \left\{ \begin{array}{l} \text{عدد ۳ عضو مجموعه باشد} \\ \text{عدد ۲ عضو مجموعه باشد} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \{2, 3\} \Rightarrow \text{عدد ۳ عضو مجموعه باشد} \\ \{2\} \Rightarrow \text{عدد ۳ عضو مجموعه نباشد} \\ \{3\} \Rightarrow \text{عدد ۲ عضو مجموعه باشد} \\ \{\} \Rightarrow \text{عدد ۲ عضو مجموعه نباشد} \end{array} \right.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای این که عدد ۲ عضو مجموعه باشد، ۲ حالت وجود دارد (یا ۲، عضو مجموعه هست و یا عضو مجموعه نیست) و همین‌طور برای این که ۳ عضو مجموعه باشد یا نباشد، ۲ حالت وجود دارد، پس: $2 \times 2 = 2^2 = 4$ = تعداد زیرمجموعه‌های A

نکته: به طور کلی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، برابر است با 2^n . (تعداد عضوهای مجموعه است).

مثال: یک مجموعه ۵ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ |

$$2^5 = 2^5 = 32$$

$$A = \{5, 7, 9\}$$

مثال: تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه A را بنویسید.

$$2^3 = 8$$

پاسخ: مجموعه A دارای ۸ زیرمجموعه است.

$$A_1 = \{\} , A_2 = \{5\} , A_3 = \{7\} , A_4 = \{9\} , A_5 = \{5, 7\} , A_6 = \{5, 9\} , A_7 = \{7, 9\} , A_8 = \{5, 7, 9\} = A$$

روش دیگر نمایش مجموعه: (نمایش ریاضی مجموعه)

قبل از این که روش نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی را توضیح دهیم، لازم است چند مجموعه را معرفی کنیم:

- مجموعه عددهای طبیعی که با حرف « \mathbb{N} » نمایش داده می‌شود: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه عددهای حسابی که با حرف « \mathbb{W} » نمایش داده می‌شود: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعه عددهای صحیح که با حرف « \mathbb{Z} » نمایش داده می‌شود: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

چون مجموعه عددهای طبیعی زیرمجموعه مجموعه عددهای حسابی است، پس می‌توان گفت که هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است و این مطلب به زبان ریاضی می‌شود: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$. چون همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو \mathbb{Z} هستند، بنابراین $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ است. یعنی هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح و هر عدد حسابی نیز، یک عدد صحیح است.

اکنون، با یک مثال روش نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی را بیان می‌کنیم:

مثال مجموعه $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ را به صورت ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8\}$$

پاسخ

شکل ریاضی مجموعه A را به این صورت می‌خوانیم: مجموعه A دارای عضوایی به شکل x است که این اعضا (عددها) متعلق به مجموعه عددهای طبیعی هستند، به طوری که این عددها از ۲ بزرگ‌تر و از ۸ کوچک‌تر هستند. علامت « \mid » در نمایش ریاضی مجموعه‌ها، یعنی «به طوری که» یا «به قسمی که».

- مجموعه عددهای زوج طبیعی را با حرف « E » نمایش می‌دهند که عضوهای آن به این صورت است: $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- این مجموعه به شکل ریاضی به این صورت نشان داده می‌شود: $E = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- مجموعه عددهای فرد طبیعی را با حرف « O » نمایش می‌دهند که اعضای آن به این صورت است: $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- شکل ریاضی این مجموعه به صورت مقابل است: $O = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

مثال مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۵ را با نوشتن اعضا و با نمادهای ریاضی نشان دهید.

$$A = \{5, 10, 15, 20, \dots\} \quad A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

پاسخ

مثال مجموعه‌های روبه‌رو را با نوشتن اعضا نمایش دهید. $A = \{6x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ $B = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}, n > 3\}$

$$A = \{6 \times 1 - 1, 6 \times 2 - 1, 6 \times 3 - 1, 6 \times 4 - 1, \dots\} \Rightarrow A = \{5, 11, 17, 23, \dots\}$$

پاسخ

$$B = \{4^3, 5^3, 6^3, 7^3, \dots\} \Rightarrow B = \{64, 125, 216, 343, \dots\}$$

در مجموعه B چون $n > 3$ است، بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی که به جای n می‌توان قرار داد، عدد ۴ است.

مثال مجموعه‌های روبه‌رو را با نمادهای ریاضی نمایش دهید. $A = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$ $B = \{16, 25, 36, 49, \dots\}$

$$A = \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

پاسخ اعضای مجموعه A ، مضرب‌های طبیعی عدد ۷ هستند. پس:

$$B = \{4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots\}$$

اعضای مجموعه B را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

همان‌طور که می‌بینید اعضای این مجموعه، مجذور عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۳ هستند، پس می‌توان نوشت:

$$B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x > 3\}$$

● مجموعه عددهای گویا را با حرف \mathbb{Q} نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل تمامی عددهای صحیح و تمامی کسره‌های متعارفی (معمولی) است.

مجموعه \mathbb{Q} را نمی‌توان با نوشتن اعضا مشخص کرد و فقط می‌توان آن را با نمادهای ریاضی تعریف کرد: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

یعنی هر عددی را که بتوانیم به صورت یک کسر متعارفی (معمولی) بنویسیم به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج کسر مخالف صفر باشد، آن عدد گویا است.

● **نکته** همه عددهای طبیعی، حسابی و صحیح، گویا هستند. یعنی: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

پرسش‌های ۲ گزینهای



۱ کدام گزینه صحیح است؟

$\emptyset \in \emptyset$ (۲)

$\emptyset \subseteq \emptyset$ (۱)

۲ عبارت «هر عدد صحیح یک عدد گویا است» به زبان ریاضی کدام است؟

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (۲)

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ (۱)

۳ کدام گزینه صحیح است؟ (E مجموعه عددهای زوج طبیعی است).

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ (۲)

$\mathbb{N} \not\subseteq E$ (۱)

۴ یک مجموعه ۱۰ عضوی، چند زیرمجموعه دارد؟

۱۰۰ (۲)

۱۰۲۴ (۱)

۵ اگر مجموعه‌ای دارای ۱۶ زیرمجموعه باشد، این مجموعه چند عضو دارد؟

۸ (۲)

۴ (۱)

۶ کدام مجموعه، زیرمجموعه عددهای حسابی است؟

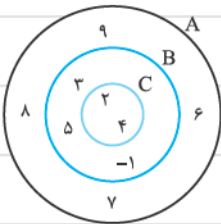
(۲) مجموعه عددهای طبیعی

(۱) مجموعه عددهای صحیح

پرسش‌های تشریحی



۱ با توجه به نمودار مقابل ابتدا سه مجموعه A، B و C را به صورت اعضا بنویسید و سپس، درستی یا



نادرستی رابطه‌های زیر را معین کنید.

الف) $-1 \notin A$

ب) $4 \in B$

پ) $2 \in A$

ت) $B \subseteq A$

ث) $B \not\subseteq C$

ج) $A \not\subseteq B$

ح) $C \not\subseteq A$

ز) $\{2, 3\} \subseteq A$

ذ) $\{4, 5\} \subseteq C$

د) $5 \subseteq B$

$B = \{\emptyset, 5, a\}$

۲ مجموعه B دارای چند زیرمجموعه است؟

تمامی زیرمجموعه‌های آن را بنویسید.

۳ اگر $A = \{-3, 0, 5, 2\}$ باشد، هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$B = \{x \in A \mid x < 1\}$

$C = \{x - 7 \mid x \in A\}$

$D = \{3x - 1 \mid x \in A\}$

$E = \{x^3 - 2 \mid x \in A\}$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 3\}$$

الف) مجموعه A را به صورت اعضا بنویسید.

ب) تمامی زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

د) مجموعه‌های زیر را به صورت اعضا بنویسید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 73\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -8 < x \leq 11\} \quad C = \{2x \mid x \in \mathbb{W}, x < 19\} \quad D = \{1 - x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$$

و) مجموعه‌های زیر را به صورت ریاضی (با نمادهای ریاضی) بنویسید.

$$A = \{4, 8, 12, 16, \dots, 96\} \quad B = \{-83, -82, -81, \dots, 43, 44\} \quad C = \{-12, -10, -8, \dots, 4, 6\} \quad D = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$$

ز) مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها و با نمادهای ریاضی مشخص کنید.

الف) مجموعه عددهای صحیح یک‌رقمی

ب) مجموعه عددهای صحیحی که دو واحد از مضرب‌های 5 بزرگ‌تر هستند.

ح) مجموعه‌های \mathbb{O} و \mathbb{E} ، \mathbb{Q} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{W} ، \mathbb{N} به ترتیب مجموعه‌های عددهای طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، زوج طبیعی و فرد طبیعی

هستند. درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را معین کنید.

الف) $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{Z}$

ب) $\mathbb{O} \in \mathbb{N}$

پ) $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

ت) $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

ث) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$

ج) $\mathbb{E} \not\subseteq \mathbb{Q}$

ح) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

خ) $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$

د) $\left\{ \frac{-8}{-4}, 3, 9, \sqrt{25} \right\} \subseteq \mathbb{N}$

۹ اگر $A = \{m, n, x, y\}$ باشد:

الف) مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

ب) تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی A را بنویسید.

پ) تمامی زیرمجموعه‌های A را بنویسید که شامل m و فاقد x باشند.

۱۰ اگر مجموعه‌ای دارای ۹ عضو باشد:

الف) این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

ب) چند زیرمجموعه یک‌عضوی دارد؟

پ) چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

درست و نادرست



الف) هر عدد صحیح، یک عدد گویا است.

ب) هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح است.

پ) بعضی از عددهای صحیح، طبیعی هستند.

ت) هر عدد حسابی، یک عدد طبیعی است.

ث) یک مجموعه ۵ عضوی، دارای ۲۵ زیرمجموعه است.

ج) مجموعه عددهای زوج صحیح یک‌رقمی، دارای ۹ عضو است.

چ) مجموعه \mathbb{W} ، مجموعه عددهای صحیح نامنفی است.

کامل کنید



الف) مجموعه عددهای فرد طبیعی را با حرف نشان می‌دهند.

ب) هر عدد یک عدد حسابی است.

پ) مجموعه عددهای صحیح، مجموعه عددهای گویا است.

ت) مجموعه عددهای را نمی‌توان با نوشتن عضوها مشخص کرد.

ث) مجموعه زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

ج) یک مجموعه عضوی دارای ۶۴ زیرمجموعه است.

تمرین‌های مروری



۱ مجموعه‌ای دارای ۲۵۶ زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضو دارد؟

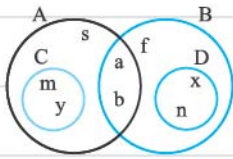
$A = \{8, 16, 24, \dots\}$

۲ مجموعه‌های روبه‌رو را با نمادهای ریاضی بنویسید. $B = \{0, -70, -71, -72, \dots\}$

$A = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$

۳ مجموعه‌های مقابل را با نوشتن عضوها مشخص کنید. $B = \{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۴ با توجه به نمودار مقابل:



الف) مجموعه‌های زیر را کامل کنید. (عضوهای آن‌ها را مشخص کنید).

$A = \{ \quad \quad \quad \}$ $C = \{ \quad \quad \quad \}$

$B = \{ \quad \quad \quad \}$ $D = \{ \quad \quad \quad \}$

ب) رابطه‌های زیر را با نمادها یا حروف مناسب کامل کنید. (مانند نمونه)

الف) $s \in A$

ب) $m \in C$

پ) $n \in A$

ت) $\emptyset \subseteq B$

ث) $\emptyset \not\subseteq A$

ج) $\{a, x\} \subseteq \emptyset$

ح) $\{s, m, f\} \subseteq A$

ز) $B \subseteq A$

ط) $\{x, \emptyset\} \subseteq D$

$E \subseteq N \subseteq W \subseteq Q$

۵ رابطه مقابل را به وسیله نمودار ون نمایش دهید.

۶ مجموعه‌های زیر را به سه صورت نمایش دهید. (با نوشتن عضوها - نمادهای ریاضی - نمودار ون)

الف) مجموعه عددهای صحیح بین ۳- و ۳

ب) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۹ که بین ۱۸ و ۷۲ هستند.

درستامه

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$A = \{۴, ۶, ۸, ۹\}$

$B = \{۳, ۸, ۵, ۶, ۹\}$

به دو مجموعه A و B دقت کنید.

اشتراک دو مجموعه

همان‌طور که مشاهده می‌کنید سه عدد ۶، ۸ و ۹ عضوهای مشترک دو مجموعه A و B هستند. این مطلب را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$A \cap B = \{۶, ۸, ۹\}$

↓
علامت اشتراک

اشتراک دو مجموعه A و B که آن را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A باشد و هم در B. یعنی:

$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$

اجتماع دو مجموعه

به دو مجموعه C و D دقت کنید.

$C = \{۱, ۴, ۹, ۷, ۸, ۳\}$

$D = \{۴, ۷, ۱, ۶, ۵, ۹\}$

اگر تمام عضوهای این دو مجموعه را در یک مجموعه قرار دهیم (بدون تکرار)، آن‌گاه مجموعه اجتماع دو مجموعه را نوشته‌ایم. یعنی:

$C \cup D = \{۱, ۴, ۹, ۶, ۵, ۷, ۸, ۳\}$