

فهرست



- فصل اول: مجموعه‌ها ۷
- فصل دوم: عددهای حقیقی ۴۷
- فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ۸۱
- فصل چهارم: توان و ریشه ۱۲۶
- فصل پنجم: عبارتهای جبری ۱۶۹
- فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ۲۰۶
- فصل هفتم: عبارتهای گویا ۲۴۳
- فصل هشتم: حجم و مساحت ۲۶۱



مجموعه‌ها

فصل ۱



۱- گزینه ۲ یک مجموعه باید برای همه معلوم و معین و یکسان باشد.

گزینه (۱): هر کسی می‌تواند ۱۰ عدد گویای دلخواه، کوچک‌تر از ۱۰ انتخاب کند، چون اعداد گویا بین دو عدد دلخواه بی‌شمار است.

گزینه (۲): ضرب‌های صحیح و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ عدد ۷، یک مجموعه است و بی‌شمار عضو دارد. $\{994, 987, 980, 973, 966, \dots\}$

گزینه (۳): برای چهار عدد فرد طبیعی، می‌توان بی‌شمار مثال آورد و این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

گزینه (۴): عدد ۸ چهار شمارنده دارد: ۱، ۲، ۴، ۸، بیان سه شمارنده آن می‌تواند ۴ حالت مختلف داشته باشد و یک مجموعه نیست.

۲- گزینه ۴ گزینه (۱) مجموعه است.

گزینه (۲) مجموعه است و بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از صفر عدد (-۱) است.

گزینه (۳) یک مجموعه است. عدد ۱۲۳ مقسوم‌علیه زوج ندارد، چون ۱۲۳ فرد است. پس مجموعه $\{\}$ را مشخص می‌کند.

گزینه (۴) مجموعه نیست. چون عدد ۱۲۰ سه شمارنده اول متمایز دارد. $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

۳- گزینه ۲ گزینه (۲) مجموعه‌ای را معلوم نمی‌کند. چون موفقیت و انسان موفق، یک موضوع نسبی است و ممکن است برای همگان یکسان نباشد.

در صورتی که هر مجموعه باید برای همه یکسان باشد.

۴- گزینه ۲ برای شمارش اعضا باید عضو تکراری را حذف کرده و به تعداد کاماهای اصلی (،) در مجموعه دقت کرد.

یک عضو $\Rightarrow \{\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100\}\}$: گزینه (۱)
تنها عضو مجموعه

یک عضو $\Rightarrow \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 100^\circ\} = \{1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda\} = \{\}$: گزینه (۲)

۲ عضو $\Rightarrow \{1, \{1\}\} \Rightarrow 1 \in \{1, \{1\}\}, \{1\} \in \{1, \{1\}\}$: گزینه (۳)

یک عضو $\Rightarrow \{\{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}\} = \{\{\{\}\}, \{\{\}\}\} = \{\{\{\}\}\}$: گزینه (۴)
عضو

۵- گزینه ۲ عضوهای مساوی را پس از ساده کردن اعضا حذف می‌کنیم:

$$A = \{2^{23}, 8^{11}, 32^7, \sqrt{64^{11}}\} = \{2^{23}, (2^3)^{11}, (2^5)^7, \sqrt{(2^6)^{11}}\} = \{2^{23}, 2^{33}, 2^{35}, \sqrt{2^{66}}\} = \{2^{23}, 2^{33}, 2^{35}, 2^{33}\} = \{2^{23}, 2^{33}\}$$

دو عضو دارد.

۶- گزینه ۴

$$A = \{2, \{2\}, \{2, \lambda\}, \{2, \lambda, \lambda\}\} = \{2, \{2\}, \{\lambda\}, \{\lambda, \lambda\}\} = \{2, \{2\}\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ عضو دارد.} \\ 6 \notin A \\ \{\{2\}\} \notin A \end{cases}$$

۷- گزینه ۱ اگر $A = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_5\}$ پنج عضو داشته باشد، حاصل $(n-5)+1$ مساوی ۵ خواهد شد.

$$(n-5)+1=5 \Rightarrow n-4=5 \Rightarrow n=9$$

$$\{a^{1^\circ}, b^{2^\circ}, b^{2^\circ}, c^{3^\circ}, c^{3^\circ}, c^{3^\circ}, \dots, j^{100^\circ}\}$$

۸- گزینه ۱ عضوهای تکراری را حذف کنیم:

با توجه به الگوی بین اعضا، یکی a^{1° ، دوتا b^{2° ، سه تا c^{3° ، ... و 10° تا j^{100° داریم که از هر کدام فقط یکی باقی می‌ماند.

در الگوی $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots$ تا 100° ، ۱۰ عدد وجود دارد و در نتیجه مجموعه ۱۰ عضو دارد.

۹- گزینه ۲ الگویی بین اعضوها وجود دارد، هر عضو نسبت به عضو قبلی ۲ تا بیشتر است و تعداد آنها برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد الگوی منظم ساده} &= \frac{\text{عدد کوچکتر} - \text{عدد بزرگتر}}{\text{فاصله اعداد}} + 1 = \frac{2^{12} - (2^1 + 2)}{2} + 1 = \frac{2^{12} - 2^{11} - 2}{2} + 1 = \frac{2^{12}}{2} - \frac{2^{11}}{2} - \frac{2}{2} + 1 \\ &= 2^{11} - 2^{10} - 1 + 1 = 2^{11} - 2^{10} = 2 \times 2^{10} - 2^{10} = 2^{10} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۲ می‌توانیم مجموعه‌ها را بنویسیم:

$$\{7, 8\} \text{ و } \{4, 5, 6\} \text{ و } \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۱۱- گزینه ۴ عضوهای مجموعه M عبارت هستند از: a و {a} و {a, {}}، در نتیجه $\{ \} \notin M$ و گزینه (۴) نادرست است.

۱۲- گزینه ۴ چون $a \in \mathbb{Z}$ است، a می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه $a < 0$ و $-a \notin \mathbb{N}$ و $-a = 0 \in \mathbb{Z}$ و $-a = 0 \notin \mathbb{N}$ اما $-a = 0 \in \mathbb{Z}$.

۱۳- گزینه ۲ مجموعه‌های $\{m-n, n^3\}$ و $\{-1\}$ مساوی‌اند. پس حتماً باید $m-n = -1$ باشد.

$$m-n = -1 \Rightarrow m - (-1) = -1 \Rightarrow m+1 = -1 \Rightarrow m = -2, \quad mn = (-2)(-1) = 2$$

۱۴- گزینه ۱ $A = B$ است و اعضوها مساوی هستند:

$$A = B \Rightarrow \{\{x-1\}, \{3\}\} = \{\{5\}, \{x-y\}\} \Rightarrow \{x-1\} = \{5\} \Rightarrow x-1 = 5 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \{3\} = \{x-y\} \Rightarrow 3 = x-y \Rightarrow 3 = 6-y \Rightarrow y = 3$$

۱۵- گزینه ۲ هر دو مجموعه، سه عضو دارند. پس اعضوها می‌توانند دوه‌دو مساوی باشند. چند حالت مساوی بودن می‌توان در نظر گرفت که بعضی

$$\begin{aligned} A = \{1, a, b\} &\Rightarrow \begin{cases} 1 = a-1, a = b+2, b = 0 \Rightarrow a = 2, b = 0, b = 0 \Rightarrow \checkmark \\ 1 = b+2, b = a-1, a = 0 \Rightarrow b = -1, a = 0, a = 0 \Rightarrow \checkmark \end{cases} \\ B = \{0, a-1, b+2\} &\end{aligned}$$

(a-1, a) و همچنین (b, b+2) را با هم مساوی قرار نمی‌دهیم، چون a و b از معادله حذف می‌شوند. حالا دو حالت درست داریم:

$$(a = 2, b = 0) \text{ و } (a = 0, b = -1)$$

گزینه (۴) در هیچ‌کدام صدق نمی‌کند. گزینه (۳) در $(a = 2, b = 0)$ صدق می‌کند، اما در دیگری خیر. گزینه (۱) در $(a = 0, b = -1)$ صدق می‌کند، اما در دیگری خیر.

گزینه (۲) در $(a = 0, b = -1)$ و $(a = 2, b = 0)$ صدق می‌کند و با این مقادیر، $a - 2b = 2$ همیشه درست است.

$$\{x, y, z, t\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۱۶- گزینه ۱

x, y, z و t هر کدام می‌توانند یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ باشند. چون $x^2 + y^2 = 5$ و $z^2 + t^2 = 25$ و این حالت درست است. کوچک‌تر یا مساوی $(z^2 + t^2)$ خواهد بود. می‌توانیم از حدس و آزمایش استفاده کنیم، اگر $z = 4$ و $t = 3$ باشد و $x = 2$ و $y = 1$ ، آن‌گاه $x^2 + y^2 = 5$ و $z^2 + t^2 = 25$ و $x^2 + y^2 = 5$ و $z^2 + t^2 = 25$ است و این حالت درست است.

حالا انتخابی دیگر: $x = 3, t = 2, z = 4, y = 1$ و $x^2 + y^2 = 10$ و $z^2 + t^2 = 20$ است. پس این حالت هم درست است. و یک انتخاب دیگر: $x = 2, t = 1, z = 4, y = 3$ و $x^2 + y^2 = 13$ و $z^2 + t^2 = 17$ است. پس این حالت نادرست است. حالت درست دیگر نداریم، چون با انتخاب‌های دیگر $x^2 + y^2 < z^2 + t^2$ می‌شود.

حالت‌های $t = 2, z = 4, t = 3, z = 4$ درست بودند. پس $4 \in \{z, t\}$.

۱۷- گزینه ۴ دو عضو باید با هم مساوی باشند: بی‌شمار حالت برای x و y وجود دارد. $9 + x = y - 4 \Rightarrow x - y = -13 \Rightarrow$

پس $x^2 + y^2$ نیز دارای بی‌شمار مقدار مختلف است و پاسخ درست گزینه (۴) است.

$$x - 2 = 4 - x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۱۸- گزینه ۲ ابتدا دو عضو مجموعه A را مساوی قرار می‌دهیم:

حالا عضوهای مجموعه A و B باید مساوی باشند.

$$x - 2 = y^2 - 3 \Rightarrow 3 - 2 = y^2 - 3 \Rightarrow y^2 - 3 = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = +2 \text{ یا } -2$$

$$x + y \Rightarrow \begin{cases} 3 + (2) = 5 \\ 3 + (-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

۱۹- گزینه ۲ مقدار عضوها در هر مجموعه را محاسبه کرده و به ساده ترین شکل می نویسیم:

$$(۱) \text{ گزینه } ۱: \left\{ (1^0 + 2^1 - 3^2), \sqrt{169}, \frac{3}{4} \div \frac{6}{7}, (-19) \right\} = \left\{ (-6), 13, \frac{1}{4}, -19 \right\}$$

$$(۲) \text{ گزینه } ۲: \left\{ 12 + 1, \frac{1}{3} \div 2, \left(-\frac{1}{19}\right)^{-1}, -\frac{12}{3} \right\} = \left\{ 13, \frac{1}{4}, -19, -6 \right\}$$

$$(۳) \text{ گزینه } ۳: \left\{ -6, \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^4, \sqrt{\frac{144}{12}} - 1, -\frac{57}{3} \right\} = \left\{ -6, \frac{1}{4}, 11, -19 \right\}$$

$$(۴) \text{ گزینه } ۴: \left\{ \sqrt{\left(\frac{38}{3}\right)^2} \times (-1), \sqrt{16} + \sqrt{81}, 2(-3), 4^{-1} \right\} = \left\{ -19, 13, -6, \frac{1}{4} \right\}$$

مجموعه گزینه (۳) با بقیه مساوی نیست، چون به جای عضو ۱۳، عضو ۱۱ را دارد.

۲۰- گزینه ۴ مجموع اعضای هر سه مجموعه را می نویسیم:

$$A: w + 4 + z + 9 + x = 13 + w + z + x, \quad B: 7 + 8 + x + y = 15 + x + y, \quad C: 6 + 9 + x + y = 15 + x + y$$

$$13 + w + z + x = 15 + x + y \Rightarrow 13 + w + z = 15 + y \Rightarrow w + z = 2 + y$$

این عبارت‌ها با هم مساوی هستند:
عدهای باقی مانده از بین ۱، ۲، ۳، ...، ۹، عددهای ۱، ۲، ۳، ۵ هستند. با حدس و آزمایش، مسئله را حل می کنیم. اگر $w = 3$ و $z = 10$ و $y = 2$ در نظر بگیریم، رابطه $w + z = 2 + y$ درست می شود و تنها عدد باقی مانده، یعنی ۵ برابر x می شود.

۲۱- گزینه ۲ نقطه در ناحیه‌ای قرار گرفته است که عددهای مضرب ۱۸ و مضرب ۳ هستند اما مضرب ۴ نیستند. یعنی در تجزیه آن‌ها حداقل 3^2 و دقیقاً 2^1 وجود دارد.

$$\text{گزینه } (۱): 64 = 2^6 \Leftarrow \text{نادرست} \quad \text{گزینه } (۲): 102 = 2 \times 3 \times 17 \Leftarrow \text{نادرست} \quad \text{گزینه } (۳): 3 \times 2^9 = 1536 \Leftarrow \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه } (۴): 342 = 2 \times 3^2 \times 19 \Leftarrow \text{درست} \quad \text{گزینه } (۵): 153 = 3^2 \times 17 \Leftarrow \text{نادرست}$$

۲۲- گزینه ۲ یک الگویابی انجام دهیم.

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2, 3\}, \quad A_3 = \{4, 5, 6\}, \quad A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$$

عدد آخر هر مجموعه برابر حاصل جمع عددهای طبیعی از ۱ تا شماره مجموعه است. از طرفی اولین عضو هر مجموعه، یکی بیشتر از آخرین عضو مجموعه قبل است. پس آخرین عضو مجموعه A_{11} را محاسبه کرده و با ۱ جمع می کنیم تا اولین عضو مجموعه A_{12} به دست بیاید:

$$A_{12} \text{ اولین عضو } = 66 + 1 = 67 \quad A_{11} \text{ آخرین عضو } = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 10 + 11 = 66$$

۲۳- گزینه ۱ عدد ۱ عضو A است، پس می توان گفت $(1 \times 2) \in A$ و $(1 - 2) \in A$ و می توانیم بنویسیم:

$$1 \in A \Rightarrow (1 \times 2) = 2 \in A \Rightarrow (2 \times 2) = 4 \in A \Rightarrow 2^2 \in A \Rightarrow 2^4 \in A \Rightarrow 2^8 \in A$$

$$1 \in A \Rightarrow (1 - 2) = -1 \in A \Rightarrow (-1 - 2) = -3 \in A \Rightarrow -5 \in A \Rightarrow -7 \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow -1387 \in A$$

$$2 \in A \Rightarrow (2 - 2) = 0 \in A \Rightarrow (0 - 2) = -2 \in A \Rightarrow -4 \in A \Rightarrow -6 \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow -2008 \in A$$

$$2^{11} \in A \Rightarrow 2^{11} = 2048 \in A \Rightarrow (2048 - 2) = 2046 \in A \Rightarrow 2044 \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow 2008 \in A$$

۱۳۸۷ عضو A نیست، چون هیچ عدد فرد طبیعی نمی تواند عضو A باشد؛ چون با شروع از عدد ۱ نمی توانیم عدد فرد مثبت بسازیم. عددهای زوج مثبت ساخته ایم، اما نمی توانیم آن‌ها را به عدد فرد تبدیل کنیم، چون تنها عملیات ضرب در ۲ و تفریق با ۲ وجود دارد که دوباره عدد زوج تولید می کند.

۲۴- گزینه ۲ در یک الگوی عددهای منظم، میانگین، همیشه برابر میانگین عدد اول و آخر الگو است.

$$4 \text{ عدد } \Rightarrow \text{مجموعه مضربهای عدد } 4 \Rightarrow \text{کوچکترین عدد} = 4 \text{ و } \text{بزرگترین عدد} = 100 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{100 + 4}{2} = 52$$

$$10 \text{ عدد } \Rightarrow \text{مجموعه مضربهای عدد } 10 \Rightarrow \text{کوچکترین عدد} = 10 \text{ و } \text{بزرگترین عدد} = 100 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{100 + 10}{2} = 55 \quad \checkmark$$

$$8 \text{ عدد } \Rightarrow \text{مجموعه مضربهای عدد } 8 \Rightarrow \text{کوچکترین عدد} = 8 \text{ و } \text{بزرگترین عدد} = 96 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{96 + 8}{2} = \frac{104}{2} = 52$$

$$12 \text{ عدد } \Rightarrow \text{مجموعه مضربهای عدد } 12 \Rightarrow \text{کوچکترین عدد} = 12 \text{ و } \text{بزرگترین عدد} = 96 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{96 + 12}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

۲۵- گزینه ۱ فرض کنیم، مجموعه ۲ عضوی باشد: $\{x, x+1\} \Rightarrow x+(x+1)=1387 \Rightarrow 2x+1=1387 \Rightarrow 2x=1386 \Rightarrow x=693$
 یک مجموعه پیدا کردیم: $\{693, 694\}$

فرض کنیم، مجموعه ۳ عضو دارد: $\{x, x+1, x+2\} \Rightarrow x+(x+1)+(x+2)=1387 \Rightarrow 3x+3=1387 \Rightarrow 3x=1384$

$\Rightarrow x = \frac{1384}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ مجموعه ۳ عضوی نداریم.

با ادامه افزایش مقدار عضوها به نتیجه نمی‌رسیم. یک مجموعه n عضوی از اعداد صحیح و مثبت متوالی در نظر بگیریم:

n عضوی $\Rightarrow \{x, x+1, x+2, x+3, \dots, x+(n-1)\}$

$\Rightarrow x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+(n-1))=1387 \Rightarrow nx + \underbrace{(1+2+3+\dots+(n-1))}_{\text{حاصل جمع } (n-1) \text{ عدد طبیعی از } 1 \text{ تا } (n-1)}} = 1387$

$\Rightarrow nx + \frac{(n-1)(n)}{2} = 1387 \xrightarrow{\text{از } n \text{ فاکتور بگیریم}} n(x + \frac{n-1}{2}) = 1387 \Rightarrow$

عدد ۱۳۸۷ باید بر n بخش پذیر باشد و ۱۳۸۷ را تجزیه می‌کنیم.

$n(x + \frac{n-1}{2}) = 19 \times 73 \Rightarrow n = 19, x + \frac{n-1}{2} = 73 \text{ یا } n = 73, x + \frac{n-1}{2} = 19$

$\xrightarrow{\text{اگر}} n = 19, x + \frac{n-1}{2} = 73 \Rightarrow x + \frac{19-1}{2} = 73 \Rightarrow x + 9 = 73 \Rightarrow x = 64 \Rightarrow \{64, 65, 66, 67, \dots, 82\} \Rightarrow$ ۱۹ عضو دارد.

$\xrightarrow{\text{اگر}} n = 73, x + \frac{n-1}{2} = 19 \Rightarrow x + \frac{73-1}{2} = 19 \Rightarrow x + 36 = 19 \Rightarrow x = -17 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ مجموعه درستی نمی‌دهد.

بنابراین دو مجموعه (یک مجموعه ۲ عضوی و یک مجموعه ۱۹ عضوی) با شرایط مسئله وجود دارد.

۲۶- گزینه ۲ مجموعه $A \cap B$ ، عضوهای $\frac{a}{b}$ را می‌سازد که $a \in A$ و $b \in B$ و $b \neq 0$ باشد. حالا مجموعه $A \cap A$ عضوهای $\frac{a}{b}$ را می‌سازد که $a \in A$ و $b \in A$ و $b \neq 0$ باشد. مجموعه A در سؤال، مجموعه اعداد سه‌رقمی طبیعی است.

$A = \{100, 101, 102, 103, 104, 105, \dots, 998, 999\}$

ما به دنبال عضوهایی از $A \cap A$ هستیم که a بر b بخش پذیر باشد، چون باید $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ شود و در نتیجه a مضرب b است. پس $b < a$ و حتماً $b < 500$ خواهد بود. بیایید این‌طور فکر کنیم $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ چه عددهایی می‌تواند باشد؟ مساوی ۱ می‌تواند باشد وقتی که $a = b$ باشد، پس $1 \in A \cap A$. در حالت کلی عدد سه‌رقمی a می‌تواند برابر b ، $2b$ ، $3b$ ، $4b$ ، $5b$ ، $6b$ ، $7b$ ، $8b$ و $9b$ باشد، اما برابر $10b$ و بالاتر نیست، چون مضرب دهم کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی، عددی چهاررقمی است: $1000 = 100 \times 10$. پس عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ عضو مجموعه $A \cap A$ بوده و تنها عضوهای طبیعی آن هستند.

۲۷- گزینه ۲ بزرگ‌ترین عددی که از حاصل جمع چهار عدد مجموعه به دست می‌آید، $132 = 39 + 35 + 31 + 27$ است. کوچک‌ترین عدد این حاصل جمع چهارتایی نیز $84 = 27 + 23 + 19 + 15$ است. عددهای مجموعه A ، دارای فاصله ۴ تایی هستند. حاصل مجموع چهار عدد از این مجموعه نیز همیشه دارای فاصله ۴ تایی خواهند بود، مثلاً عدد بعد از ۸۴ که از حاصل جمع به دست می‌آید، ۸۸ است. باید به جای ۲۷، ۳۱ قرار دهیم: $15 + 19 + 23 + 31 = 88$

پس الگوی حاصل جمع‌ها به شکل روبه‌رو است: $84, 88, 92, \dots, 132 \Rightarrow$ تعداد حاصل جمع‌ها $= \frac{132-84}{4} + 1 = \frac{48}{4} + 1 = 13$

۲۸- گزینه ۲ حاصل جمع، تقسیم و جذر عددهای مربع کامل، ممکن است مربع کامل نباشند. مانند:

$3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow$ مربع کامل نیست.
 $3^2 \div 2^2 = (\frac{3}{2})^2 \Rightarrow$ مربع کامل طبیعی نیست.
 $\sqrt{5^2} = 5 \Rightarrow$ مربع کامل نیست.

اما حاصل ضرب هر دو عدد مربع کامل، حتماً مربع کامل است و مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است. $a^2 \times b^2 = (a \times b)^2 \Rightarrow$ مربع کامل است.

۲۹- گزینه ۲ حاصل جمع، ضرب و تفریق هر دو عدد صحیح، همیشه عددی صحیح است، اما حاصل تقسیم آن‌ها ممکن است صحیح نباشد. مانند:

$$a = 5, b = 2 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{2} = 2/5 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{گزینه (۴) نادرست است.}$$

۳۰- گزینه ۲ $\{n^2 + 1 | n \in \mathbb{W}\} \xrightarrow{n=0,1,2,3,\dots} \{0^2 + 1, 1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, \dots\} = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$

گزینه (۲) $\{n(n+2) | n \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{n=1,2,3,4,\dots} \{1(1+2), 2(2+2), 3(3+2), 4(4+2), \dots\} = \{3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$

گزینه (۳) $\{(-n)^2 | n \in \mathbb{N}, 9 < n < 15\} = \{n^2 | n = 10, 11, 12, 13, 14\} = \{10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2\} = \{100, 121, 144, 169, 196\}$

گزینه (۳) هم خوانی ندارد.

گزینه (۴) $\{\frac{n}{n^2+1} | n \in \mathbb{Z}, -4 < n < 4\} = \{\frac{n}{n^2+1} | n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$= \{-\frac{3}{(-3)^2+1}, -\frac{2}{(-2)^2+1}, -\frac{1}{(-1)^2+1}, \frac{0}{0^2+1}, \frac{1}{1^2+1}, \frac{2}{2^2+1}, \frac{3}{3^2+1}\} = \{-\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\}$$

۳۱- گزینه ۲ $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$ پس xهای بین ۲ تا ۱۰ باید زوج باشند. $A \leftarrow x = 4, 6, 8$ سه عضو دارد. $\lambda^2 = 64$ بزرگ‌ترین عضو A

الف) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \neq \{\emptyset\} \times$

ب) $\{x | x^2 \leq 0\} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \{0\} \neq \{\emptyset\} \times$

پ) مجموعه (پ) تهی است. $\{x | x \in \mathbb{N}, \frac{1}{x} > 1\}, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$

۳۳- گزینه ۱ ابتدا شرط را بررسی کنیم:

$$a \in \mathbb{N}, a < 4 \Rightarrow a = 1, 2, 3 \Rightarrow \{\frac{1}{\lambda^2 - a^2} | a = 1, 2, 3\} = \{\frac{1}{\lambda^2 - 1}, \frac{1}{\lambda^2 - 4}, \frac{1}{\lambda^2 - 9}\} = \{\frac{1}{\lambda^2 - 1}, \frac{1}{\lambda^2 - 4}, \frac{1}{\lambda^2 - 9}\}$$

۳۴- گزینه ۲ در مجموعه B، xها عضو A و $\frac{x^2}{y} \in \mathbb{N}$ هستند. در صورتی $\frac{x^2}{y}$ عددی طبیعی است که x^2 عددی زوج و بزرگ‌تر از صفر باشد.

همهٔ عضوهای مجموعه A را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = \{-1, -\frac{2}{5}, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\} \Rightarrow ((-1)^2 = 1), ((-\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}), (0^2 = 0), (1^2 = 1), (\sqrt{2}^2 = 2), (\sqrt{3}^2 = 3), (2^2 = 4)$$

$$B = \{2, \sqrt{2}\}$$

که فقط ۲ و $x = \sqrt{2}$ قابل قبول است، پس:

۳۵- گزینه ۲ اگر به همهٔ عضوهای مجموعه A، یک واحد اضافه کنیم، همگی عضوها برابر، توانی از ۲ خواهند بود.

$$\{0, 1, 3, 7, \dots\} \xrightarrow{+1} \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$$

$$\{2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots\}$$

و در نتیجه مجموعه A برابر است با:

$$A = \{2^x - 1 | x \in \mathbb{W}\}$$

$x \in \mathbb{W}$ ، چون توان‌ها از صفر شروع شده‌اند:

۳۶- گزینه ۲ در همهٔ عضوهای مجموعه داده‌شده، مخرج یک واحد بیشتر از صورت است و همهٔ کسرها به شکل $\frac{a}{a+1}$ هستند.

$$\Rightarrow \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}, a+1 = b\}$$

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{صفر و مضرب‌های صحیح عدد } x = 3$$

۳۷- گزینه ۴ ابتدا عددهای خروجی از شرط را به دست آوریم:

$$x^2 < 20 \Rightarrow x^2 = 0, 1, 4, 9, 16 \Rightarrow x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow A = \{-3, 0, 3\}$$

اما xهای مضرب ۳ و عدد صفر برابر ۳، ۰ و -۳ هستند.

۳۸- گزینه ۱ شکل عضو برابر $(x^2 + 2x + 1)$ است که آن را به صورت $(x+1)^2$ می‌نویسیم. یعنی عضوهای مجموعه، همگی مربع کامل هستند.

حالا $(x+1)$ ها را پیدا کنیم.

$$x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 100 \xrightarrow{+1} 0 \leq x+1 < 101 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 100 \Rightarrow A = \{(x+1)^2 | (x+1) = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$$

$$\Rightarrow A = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 100^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 10000\}$$

۳۹- گزینه ۲ $n \in \mathbb{N}$ ، به جای n عددگذاری می‌کنیم:

$$x = (-1)^n \times (n^2 - 2n + 1)^2 = (-1)^n \times ((n-1)^2)^2 = (-1)^n \times (n-1)^4$$

$$\Rightarrow \{(-1)^1 \times (1-1)^4, (-1)^2 \times (2-1)^4, (-1)^3 \times (3-1)^4, (-1)^4 \times (4-1)^4, \dots\} \Rightarrow \{0, 1, -2^4, 3^4, \dots\} = \{0, 1, -16, 81, \dots\}$$

۴۰- گزینه ۲ x ها را از بخش شرط پیدا می‌کنیم:

$$-(x+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x-1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$(x+2)^2 < 25 \Rightarrow (x+2)^2 < 5^2 \Rightarrow (x+2)^2 = 0, 1, 4, 9, 16 \Rightarrow x+2 = 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, -4, +4$$

برای به دست آوردن B باید از همه $(x+2)$ ها، 2 واحد کم کنیم:

$$B = \{0-2, -1-2, +1-2, -2-2, +2-2, -3-2, +3-2, -4-2, +4-2\} = \{-2, -3, -1, -4, 0, -5, 1, -6, 2\}$$

$$= \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

۴۱- گزینه ۴ هر دو عضو پشت سر هم مجموعه A ، 12 واحد اختلاف دارند.

$$A = \{21, 33, 45, 57, 69, \dots\}$$

$$\begin{array}{cccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ & +12 & +12 & +12 & +12 \end{array}$$

در نتیجه کوچک‌ترین عضو چهاررقمی مجموعه A و بزرگ‌ترین عضو سه‌رقمی مجموعه A نیز دو عضو پشت سر هم این مجموعه هستند و فاصله آن‌ها از یکدیگر 12 تا است. این دو عدد به ترتیب $(83 \times 12 + 9 = 1005)$ و $(82 \times 12 + 9 = 993)$ هستند.

۴۲- گزینه ۱ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < (x-3)^2 < 100\}$

$$10 < (x-3)^2 < 100 \Rightarrow \sqrt{10} < |x-3| < 10 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{10} < x-3 < 10 \Rightarrow \sqrt{10} + 3 < x < 13 \\ -10 < x-3 < -\sqrt{10} \Rightarrow -7 < x < -\sqrt{10} + 3 \end{cases}$$

از نامساوی بخش شرط جذر بگیریم:

$$\underbrace{\frac{6}{1}}_{\sqrt{10} \approx 3/1} < x < 13 \Rightarrow 7 \leq x < 13 \Rightarrow x = 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

$$-7 < x < -3/1 + 3 \Rightarrow -7 < x \leq -1 \Rightarrow x = -1, -2, -3, -4, -5, -6$$

$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ و حاصل جمع اعضا برابر 36 است.

۴۳- گزینه ۴ ابتدا عضوهای هر مجموعه را تعیین کنیم: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots, 43\}$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x^2 - 1 < 15\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x^2 < 16\} \Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{2, 3\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

۴۴- گزینه ۲ چون $B \subseteq A$ ، در نتیجه عضوهای B نمی‌توانند از 30 بزرگ‌تر باشند:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4n - 1 \\ x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow 4n - 1 \leq 30 \Rightarrow 4n \leq 31 \Rightarrow n \leq \frac{31}{4} \Rightarrow n \leq 7$$

به جای n ، 7 عدد می‌توان گذاشت که $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ هستند و 7 مقدار مختلف برای $x = 4n - 1$ به دست می‌آید، پس B دارای 7 عضو خواهد بود.

۴۵- گزینه ۱ $\sqrt{k} \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \mathbb{N}$ و k مربع کامل است $\Rightarrow k = 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

$$2^k < 70 \Rightarrow 2^k \leq 64 = 2^6 \Rightarrow k \leq 6 \Rightarrow k$$
 نمی‌تواند از 8 بزرگ‌تر باشد $\Rightarrow k = 1, 4$

$$A = \{2k \mid k = 1, 4\} \Rightarrow A = \{2, 8\}$$

۴۶- گزینه ۴ چون $\frac{\Delta x}{3} \in \mathbb{N}$ ، در نتیجه Δx مضرب 3 است و x باید مضرب 3 باشد. در بین x هایی که $-10 \leq x \leq 10$ ، $x = -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$ مضرب 3 هستند.

$$\Rightarrow A = \left\{ \frac{\Delta x}{3} \mid \frac{\Delta x}{3} \in \mathbb{N}, x = -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \right\} \Rightarrow A = \left\{ \frac{5 \times (9)}{3}, \frac{5 \times (6)}{3}, \frac{5 \times (3)}{3}, \frac{5 \times 0}{3} \right\} \xrightarrow{\frac{\Delta x}{3} \notin \mathbb{N}} A = \{15, 10, 5\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 3$$

۴۷- گزینه ۲ ابتدا معادله $x = x^2$ را طوری حل کنیم که $x \in \mathbb{Z}$ باشد.

$$x = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = +1, -1 \end{cases} \Rightarrow A = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^{n(A)} = 2^3 = 8$$

گزینه ۴۸

$$-3 < n \leq 5, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow A = \left\{ \frac{(-2)^2}{2^{-2}}, \frac{(-1)^2}{2^{-1}}, \frac{(0)^2}{2^0}, \frac{1^2}{2^1}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{4^2}{2^4}, \frac{5^2}{2^5} \right\}$$

$$A = \left\{ \frac{4}{\frac{1}{4}}, \frac{1}{\frac{1}{2}}, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32} \right\} = \left\{ 16, 2, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, \frac{25}{32} \right\} \Rightarrow n(A) = 7$$

$$\sqrt{x} \leq 5 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x \leq 25$$

$$2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$x \leq 25, x > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x \leq 25 \Rightarrow 2 \leq x \leq 25$$

$$25 - 2 + 1 = 24$$

تعداد X های قابل قبول برابر است با:

گزینه ۴۹

عضوها باید مثبت باشند، پس:

گزینه ۵۰ با توجه به این که شکل عضو x^{2y} است، توان زوج بوده و اگر X منفی هم باشد، جواب نهایی مثبت است. در نتیجه X باید کوچک ترین مقدار

ممکن باشد تا x^{2y} کوچک ترین مقدار باشد. $x^{2y} = 8^{2(1)} = 64$ \Rightarrow کوچک ترین $y = 1$ ، کوچک ترین $x = 8$

گزینه ۵۱ ابتدا عضوهای مجموعه A را پیدا می کنیم:

$$x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 < 5 \xrightarrow[\text{برای } x \text{ و } y]{\text{مقدارهای ممکن}}$$

$$\begin{cases} (x=1, y=1), (x=-1, y=-1) \\ (x=-1, y=1), (x=1, y=-1) \\ (x=0, y=1), (x=1, y=0) \\ (x=0, y=-1), (x=-1, y=0) \\ (x=0, y=2), (x=2, y=0) \\ (x=0, y=-2), (x=-2, y=0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left\{ 1^1, (-1)^{-1}, (0^{-1})^1, (1)^{-1}, (0)^1, (1)^0, \underbrace{(0)^{-1}}_{\text{تعریف نشده}}, (-1)^0, (0)^2, (2)^0, \underbrace{(0)^2}_{\text{تعریف نشده}}, (-2)^0 \right\}$$

$$\Rightarrow A = \{1, -1, -1, 1, 0, 1, 0, 1, 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{x \mid x = 2n, n \in A\} \Rightarrow B = \{x \mid x = 2n - 1, n = -1, 0, 1\} \Rightarrow B = \{2(-1) - 1, 2(0) - 1, 2(1) - 1\} = \{-3, -1, 1\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, -6 < n < 6\} \Rightarrow n = -5, -4, \dots, 4, 5$$

گزینه ۵۲

$$\Rightarrow A = \{(\cancel{(-5)^2}, (\cancel{-4})^2, (\cancel{-3})^2, (\cancel{-2})^2, (\cancel{-1})^2, 0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\} = n(A) = 6$$

$$B = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{1}{n} \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B = \text{شمارنده های طبیعی عدد } 12 \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$E = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq 25\} \Rightarrow n^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq n \leq 5 \Rightarrow E = \{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\} \Rightarrow n(E) = 11$$

$$X = \left\{ \gamma \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) \mid n \in \mathbb{N}, n < 10 \right\} \Rightarrow n = 1, 2, 3, \dots, 9$$

$$X = \left\{ \gamma \left(\frac{10^1 - 1}{9} \right), \gamma \left(\frac{10^2 - 1}{9} \right), \gamma \left(\frac{10^3 - 1}{9} \right), \dots, \gamma \left(\frac{10^9 - 1}{9} \right) \right\} = \{7, 77, 777, \dots, 777777777\} \Rightarrow n(X) = 9$$

گزینه ۵۳ عددهای فرد در مجموعه عددهای طبیعی یا صحیح تعریف می شوند؛ اگر $x \in \mathbb{R}$ یا $x \in \mathbb{Q}$ باشد، عددهای فرد به دست نمی آیند و گزینه های (۱) و (۲) نادرست هستند.

هیچ مقداری بر X از شرط بیرون نمی آید و این مجموعه {} است. $\Rightarrow \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, -1396 \leq x \leq 0\}$: گزینه (۳)

گزینه (۴): $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 1396\} \Rightarrow \{2 \times 0 - 1, 2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\}$

همه عضوهای فرد هستند. $\Rightarrow \{-1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$

۵۴- گزینه ۲ ابتدا x هایی را که از بخش شرط خارج می‌شود، محاسبه کنیم.

$$-7 \leq \sqrt{x} \leq 4 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} 1 \leq \sqrt{x} \leq 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 1 \leq x \leq 16$$

عضوایی از A را می‌خواهیم که عدد صحیح نباشند، شکل عضو را ساده کنیم: $\frac{12x}{x^2} = \frac{12}{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x$ نباید شمارنده ۱۲ باشد.

پس ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ $x \neq$ و تعداد x های باقی‌مانده 10 تا است، پس تعداد عضوهای غیر صحیح A نیز برابر 10 می‌شود.

۵۵- گزینه ۱ ابتدا حالت‌های مختلف x و y را به دست می‌آوریم:

$$x, y \in \mathbb{Z}, xy = -2 \Rightarrow (x=1, y=-2), (x=-1, y=2), (x=2, y=-1), (x=-2, y=1)$$

$$A = \{3(1)^{-(-2)} - 2(-(-2))^{-1}, 3(-1)^{-2} - 2(-2)^{-(-1)}, 3(2)^{-(-1)} - 2(-(-1))^{-2}, 3(-2)^{-1} - 2(-1)^{-(-2)}\}$$

$$A = \{3 - 2(\frac{1}{-2}), 3 - 2(-2), 3(2) - 2(1), 3(-\frac{1}{2}) - 2(1)\} = \{3 - 1, 3 + 4, 6 - 2, -\frac{3}{2} - 2\} = \{2, 7, 4, -\frac{7}{2}\} \Rightarrow \text{گزینه (۱)}$$

$$xy = 6 \Rightarrow (x=1, y=6), (x=6, y=1), (x=2, y=3), (x=3, y=2)$$

$$(x=-1, y=-6), (x=-6, y=-1), (x=-2, y=-3), (x=-3, y=-2)$$

در ظاهر باید ۸ محاسبه انجام دهیم اما به حاصل دو کسر زیر دقت کنید:

$$(x=1, y=6) \Rightarrow \frac{3x+y}{3x-y} = \frac{3(1)+6}{3(1)-6} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$(x=-1, y=-6) \Rightarrow \frac{3x+y}{3x-y} = \frac{3(-1)+(-6)}{3(-1)-(-6)} = \frac{-3-6}{-3+6} = -\frac{9}{3} = -3$$

فقط کافی است، حاصل کسرها را برای x و y های مثبت محاسبه کنیم. چون وقتی x و y هر دو قرینه می‌شوند، حاصل کسر $\frac{3x+y}{3x-y}$ تغییر نمی‌کند.

$$\Rightarrow J = \{-3, \frac{3(6)+1}{3(6)-1}, \frac{3(2)+2}{3(2)-3}, \frac{3(3)+2}{3(3)-2}\} = \{-3, \frac{19}{17}, 3, \frac{11}{7}\} \Rightarrow n(J) = 4$$

$$x, y \in \mathbb{Z}, -4 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow x = (-2) \text{ یا } (-1) \text{ یا } (0) \text{ یا } (1)$$

$$xy = 12 \Rightarrow (x=1, y=12), (x=-1, y=-12), (x=-2, y=-6) \Rightarrow A = \{2^{3(1)+12}, 2^{3(-1)+(-12)}, 2^{3(-2)+(-6)}\}$$

$$= \{2^{15}, 2^{-15}, 2^{-12}\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^3 = 8$$

۵۸- گزینه ۱ با توجه به $xy = 8$ و $x, y \in \mathbb{Z}$ ، می‌توان گفت مقادیرهای ممکن x و y عبارت‌اند از:

$$(x=1, y=8), (x=8, y=1), (x=2, y=4), (x=4, y=2)$$

$$(x=-1, y=-8), (x=-8, y=-1), (x=-2, y=-4), (x=-4, y=-2)$$

$$\Rightarrow A = \{1^8, 8^1, 2^4, 4^2, (-1)^{(-8)}, (-8)^{(-1)}, (-2)^{(-4)}, (-4)^{(-2)}\} = \{1, 8, 16, 4, (-\frac{1}{8}), \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\} \Rightarrow n(A) = 8$$

۵۹- گزینه ۲ می‌دانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، در نتیجه $x^2 + k$ به ازای دو عدد مختلف باید برابر ۶ و ۹ باشد.

$$x = a \Rightarrow a^2 + k = 6 \xrightarrow{(-)} (b^2 + k) - (a^2 + k) = 9 - 6 \Rightarrow b^2 - a^2 = 3$$

$$x = b \Rightarrow b^2 + k = 9$$

عبارت $b^2 - a^2$ را تجزیه می‌کنیم و چون $a, b \in \mathbb{Z}$ ، معادله حل می‌شود:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 3 \Rightarrow b-a=1, b+a=3 \Rightarrow b=2, a=1$$

$$a^2 + k = 6 \Rightarrow 1^2 + k = 6 \Rightarrow k = 5$$

یعنی x باید ۱ و ۲ باشد تا عددهای ۶ و ۹ به دست بیاید.

حالا باید بفهمیم $k = 5$ ، عضو کدام مجموعه است. چون بخش شرط همهٔ مجموعه‌ها $x \in \mathbb{Z}$ است، فقط چهار معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم و جوابی قابل قبول است که $x \in \mathbb{Z}$ باشد.

$$(۱) \text{ گزینه (۱): } 5x + 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$$

$$(۲) \text{ گزینه (۲): } 4x + 3 = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$(۳) \text{ گزینه (۳): } 2x + 6 = 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$(۴) \text{ گزینه (۴): } 3x - 4 = 5 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

۶۰- گزینه ۲ فرض کنیم کوچکترین عضو مجموعه A، ۱۰۰۰ باشد. $k = \frac{1007}{15} \notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow 15k = 1007 \Rightarrow 15k - 7 = 1000 \Rightarrow 15k - 7 = 1000$

$$\begin{array}{r} 1007 \quad | \quad 15 \\ \hline 1005 \quad 67 \\ \hline 2 \end{array}$$

عضو نیست اما اگر باقی مانده تقسیم ۱۰۰۷ بر ۱۵ را به دست بیاوریم، می توان عدد موردنظر را پیدا کرد.

اگر $k = 67 \Rightarrow 15k - 7 = 15 \times 67 - 7 = 998$

پس k باید ۶۸ باشد، پس $15k - 7 = 15 \times 68 - 7 = 1013$. کوچکترین عضو مجموعه است که رقم یکان آن ۳ می باشد.

۶۱- گزینه ۲

نکته خوب: اگر حاصل جمع دو عدد ثابت باشد، حاصل ضرب آن ها وقتی بزرگترین مقدار خود را دارد که دو عدد مساوی یا در نزدیکترین حالت نسبت به هم باشند.

$x + y \leq 20, x \in E$ (اعداد زوج), $y \in O$ (اعداد فرد)

$x + y$ را مساوی ۱۹ قرار می دهیم تا بزرگترین عددها را بتوانیم به دست بیاوریم (دقت کنید $x + y$ مساوی ۲۰ نمی شود، چون x زوج و y فرد است).

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 19 \\ x, y \text{ نزدیک باشند} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 10, y = 9 \Rightarrow (x-1)(y-1) = (10-1)(9-1) = 9 \times 8 = 72$$

$F = \{3 \times (\frac{10^{2n-1} - 1}{9}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

۶۲- گزینه ۲ ابتدا شکل عضو را ساده کنیم:

$F = \{\frac{10^{2n-1} - 1}{3} \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$F = \{\frac{10^{2(1)-1} - 1}{3}, \frac{10^{2(2)-1} - 1}{3}, \frac{10^{2(3)-1} - 1}{3}, \frac{10^{2(4)-1} - 1}{3}, \dots\} = \{\frac{10^1 - 1}{3}, \frac{10^3 - 1}{3}, \frac{10^5 - 1}{3}, \frac{10^7 - 1}{3}, \dots\}$

$F = \{\frac{9}{3}, \frac{999}{3}, \frac{99999}{3}, \frac{9999999}{3}, \dots\} = \{3, 333, 33333, 3333333, \dots\}$

$\frac{3^{x+1}}{9^{2y}} = \frac{3^{x+1}}{(3^2)^{2y}} = \frac{3^{x+1}}{3^{4y}} = 3^{x+1-4y} = 3^{x-4y+1}$

۶۳- گزینه ۲ ابتدا شکل عضو را ساده می کنیم:

از روی شرط، حاصل $x - 4y + 1$ را به دست می آوریم:

$4y - x = 2 \Rightarrow -2 = x - 4y \Rightarrow x - 4y + 1 = -2 + 1 \Rightarrow x - 4y + 1 = -1 \Rightarrow A = \{3^{x-4y+1}\} = \{3^{-1}\} = \{\frac{1}{3}\}$

۶۴- گزینه ۴ $-\frac{x}{3} \in \mathbb{Q}$ ، پس می توان گفت که $x \in \mathbb{Q}$. در بازه $-4 < x \leq 3$ بی شمار عدد گویا وجود دارد، در نتیجه مجموعه A بی شمار عضو دارد.

۶۵- گزینه ۲ در بخش شرط $x \in I$ و $x \leq 5$ ، پس تا این جا x می تواند مقدارهای صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را داشته باشد اما شرط دیگر هم باید درست باشد.

به ازای $x \geq 2$ ، $(3^x - 3) \in \mathbb{N}$ است و تعداد عضوهای مجموعه ۴ تا است. $3^0 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$ ، $3^1 - 3 = 0 \notin \mathbb{N}$ ، $3^2 - 3 = 6 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

۶۶- گزینه ۲ مجموعه داده شده را به شکل توان های ۲ می نویسیم.

یعنی ۲ به توان عدد فرد با شروع از (-۳). گزینه های (۱) و (۴) توان های زوج هم برای ۲ می سازند، چون 2^x و 2^{-x} هستند. از 2^{-1} شروع شده و نادرست است.

گزینه (۲): $\{2^{2x+1} \mid x \in \mathbb{Z}, x > -2\} = \{2^{2(-1)+1}, \dots\} = \{2^{-1}, \dots\}$

گزینه (۳): $\{2^{2x-5} \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2^{2(1)-5}, 2^{2(2)-5}, 2^{2(3)-5}, 2^{2(4)-5}, \dots\} = \{2^{-3}, 2^{-1}, 2^1, 2^3, \dots\} \checkmark$

۶۷- گزینه ۲ در گزینه (۴) به ازای هر $n^3 > n^2$, $n \in \mathbb{N}$ است و این مجموعه عضو پایانی ندارد.

گزینه (۲): $n=1 \Rightarrow 1^3 > 1^2, n=2 \Rightarrow 2^3 = 2^2, n=3 \Rightarrow 3^3 < 3^2, n=4 \Rightarrow 4^3 = 4^2, n=5 \Rightarrow 5^3 > 5^2$

این مجموعه عضو پایانی ندارد. $n=6 \Rightarrow 6^3 > 6^2 \Rightarrow$

$\{n \in \mathbb{N} | n^3 > n^2\} = \{3\}$

و از همین مثال متوجه می‌شویم، مجموعه $\{n \in \mathbb{N} | n^3 > n^2\}$ دارای عضو پایانی است.

گزینه (۱) نیز دارای عضو پایانی نیست، چون $10^3 = 1000 > 10^2 = 100 \Rightarrow n=10$ و برای $n > 10$ ، همواره $n^3 > n^2$ است.

۶۸- گزینه ۲ به شرط مجموعه نگاه کنیم: $\frac{a}{b} < 1$ پس $a < b$ و چون $b < 13$ است، می‌توان گفت: $a < b < 13$ و $a, b \in \mathbb{N}$ ، پس b می‌تواند همه

عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۱، ۱۲ باشد. a نیز می‌تواند عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۰، ۱۱ باشد، به شرطی که $\frac{a}{b} < 1$ حفظ شود. اگر $a=1$ را در نظر بگیریم، b می‌تواند عددهای ۲، ۳، ۴، ... تا ۱۲ را اختیار کند و کسرهای زیر ساخته می‌شود:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12} \Rightarrow$ کسر ۱۱

اگر $a=2$ باشد، $b \geq 3$ بوده و b نمی‌تواند مقادیر زوج را بگیرد، چون $a=2$ با مخرج ساده شده و کسر مساوی با کسرهای قبلی می‌سازد.

$\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \frac{2}{10}, \frac{2}{11}, \frac{2}{12} \Rightarrow$ کسر ۵

$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11} \Rightarrow$ کسر ۶

اگر $a=3$ باشد، $b \geq 4$ بوده و b نباید مضرب ۳ باشد.

$\frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10}, \frac{4}{11} \Rightarrow$ کسر ۴

اگر $a=4$ باشد، $b \geq 5$ و b مضرب ۲ نباشد.

$\frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{10}, \frac{5}{11}, \frac{5}{12} \Rightarrow$ کسر ۶

اگر $a=5$ باشد، $b \geq 6$ و b مضرب ۵ نباشد.

$\frac{6}{7}, \frac{6}{8} \Rightarrow$ کسر ۲

اگر $a=6$ باشد، $b \geq 6$ و b مضرب ۲ و ۳ نباشد.

$\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{7}{11}, \frac{7}{12} \Rightarrow$ کسر ۵

اگر $a=7$ باشد، $b \geq 8$ و b مضرب ۷ نباشد.

$\frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{8}{12} \Rightarrow$ کسر ۶

و کسرهای دیگر به این شکل هستند.

و در کل ۴۵ کسر مختلف و ۴۵ عضو خواهیم داشت.

۶۹- گزینه ۲ تهی زیرمجموعه، همه مجموعه‌هاست؛ حتی خود تهی. پس: $\emptyset \subseteq \emptyset$ و گزینه (۳) نادرست است.

۷۰- گزینه ۴ عضوهای زیرمجموعه‌ها، باید عضو مجموعه اصلی هم باشند اما در گزینه (۴)، $\{\{a\}\} \notin L$ و $\{\{b, \{\{a\}\}\} \notin L$

$M = \{\{\}, \{\emptyset\}\} \Rightarrow \{\{\} \in M, \{\emptyset\} \in M$

۷۱- گزینه ۲

$\left. \begin{array}{l} \{\{\} : \text{اولین زیرمجموعه} \\ \{\{\}, \{\{\emptyset\}\} : \text{تک‌عضوی‌ها} \\ \{\{\}, \{\emptyset\}\} = M : \text{دو‌عضوی‌ها} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\{\}, \{\{\}, \{\{\emptyset\}\}\}, M\}$

$A = \{a, \{1, 2a + b\}\}$ و $B = \{3, 2a + 1, \{-a, 0\}\}$

۷۲- گزینه ۲

$\{1, 2a + b\} = \{-a, 0\} \Rightarrow \begin{cases} -a = 1, & a = -1 \\ 2a + b = 0 \Rightarrow & b = -2a = 2 \end{cases}$ است، با توجه به شکل مجموعه‌ها، تساوی مقابل حتماً برقرار است:

$A = \{x | \frac{x^2}{\frac{1}{x}} \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow A = \{x | \frac{x^3}{x} \in \mathbb{Z}\}$ **۷۳- گزینه ۴** ابتدا عضوهای A را بنویسیم:

$A = \{4^0, -2^0, -1^0, -8, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\} \Rightarrow n(A) = 16$

تعداد زیرمجموعه‌های ۱۵ عضوی یک مجموعه ۱۶ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌ها (۱۶-۱۵) = یک‌عضوی برابر است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی برای مجموعه ۱۶ عضوی

۷۴- گزینه ۱ مجموعه A عضوهایی را در خود دارد که عضو P بوده و مقدار آن‌ها کم‌تر از $\sqrt{۸۰۰۰}$ است. مجموعه اعداد اول، بی‌شمار عضو دارد و پایان ندارد؛ پس حتماً $A \subseteq P$ است.

۷۵- گزینه ۲ یک مجموعه n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد و مجموعه زیرمجموعه‌های آن ۲^n عضو و $۲^{۲^n} = ۲^{(۲^n)}$ زیرمجموعه دارد. به مجموعه زیرمجموعه‌ها، مجموعه توانی می‌گویند.

۷۶- گزینه ۴ از $n(A) < n(B)$ ، نمی‌توان قطعی گفت که $A \subseteq B$ ؛ ممکن است $A \not\subseteq B$. اما وقتی می‌گوییم $B \subseteq C$ ، آن‌گاه حتماً $n(B) \leq n(C)$ خواهد بود \Leftarrow گزینه (۳) می‌تواند درست نباشد.

$$\left. \begin{matrix} A \not\subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \not\subseteq C \Rightarrow \text{گزینه (۲) می‌تواند درست نباشد.}$$

$$\left. \begin{matrix} B \subseteq C \Rightarrow n(B) \leq n(C) \\ n(A) < n(B) \end{matrix} \right\} \Rightarrow n(A) < n(C) \Rightarrow \text{گزینه (۴) حتماً درست است.}$$

۷۷- گزینه ۴ $A = \{۱, ۲\}$ و $C = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$ ، آن‌گاه مجموعه B حتماً عضوهای ۱ و ۲ را دارد اما عضوهای -۱ ، صفر و ۳ را می‌تواند داشته باشد یا نداشته باشد. پس گزینه (۳) و (۱) ممکن است نادرست باشد.

$C \subseteq D$ ، یعنی $n(C) \leq n(D)$ و ممکن است تعداد عضوهای C و D برابر باشد. پس گزینه (۲) نادرست است.

$C \subseteq D$ ، یعنی: $۰ \in D, -۱ \in D \Rightarrow ۰ \in C, -۱ \in C$ و حتماً $\{۰, -۱\} \subset D$ است.

$$۲^n \xrightarrow{n=۰} ۲^۰ = ۱$$

۷۸- گزینه ۴ مجموعه‌ای که تنها یک زیرمجموعه دارد، مجموعه تهی است $A = \emptyset$

و تهی، زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

$$A \cap \{a, b\} = \emptyset \cap \{a, b\} = \emptyset$$

گزینه (۴) نادرست است، چون:

۷۹- گزینه ۱ مجموعه $\{۲, ۳, ۴, x, y\}$ ، $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه دارد، پس مقدار عضوهای آن باید برابر ۳ شود. یعنی x و y می‌توانند مقادیر ۲ یا ۳ یا ۴ را داشته باشند. $(x + y)$ باید کوچک‌ترین مقدار شود. پس:

$$x = y = ۲ \Rightarrow x + y = ۴$$

۸۰- گزینه ۲ مجموعه $A = \{-۱, -۲, -۸, ۲x, y + ۱, z\}$ ، هفت زیرمجموعه محض و در نتیجه ۸ زیرمجموعه دارد و باید $n(A) = ۳$ شود. $(z, y + ۱, ۲x)$ می‌توانند مقادیر $(-۱, -۲, -۸)$ را داشته باشند، برای آن‌که $(x + y + z)$ کم‌ترین مقدار ممکن شود:

$$z = -۸, y + ۱ = -۸, ۲x = -۸ \Rightarrow z = -۸, y = -۹, x = -۴ \Rightarrow x + y + z = -۴ + (-۹) + (-۸) = -۲۱$$

$$A = \{x \mid -۳x - ۱ \geq -۱۶, x \in \mathbb{W}\}$$

۸۱- گزینه ۲ ابتدا مجموعه A را با عضوهایش می‌نویسیم:

$$-۳x - ۱ \geq -۱۶ \Rightarrow ۳x + ۱ \leq ۱۶ \Rightarrow ۳x \leq ۱۵ \Rightarrow x \leq ۵$$

$$x \leq ۵, x \in \mathbb{W} \Rightarrow A = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \Rightarrow n(A) = ۶$$

برای نوشتن زیرمجموعه‌های شامل ۴ و بدون صفر، هر دو عضو را کنار گذاشته و مقدار زیرمجموعه‌های ممکن را با عضوهای باقی‌مانده به دست می‌آوریم:

$$۴ \Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$$

۸۲- گزینه ۲ با توجه به رابطه $\{۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۱۰\} \supseteq A \supseteq \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ ، مجموعه A می‌تواند همه زیرمجموعه‌های ممکن که چهار عضو ۲، ۴، ۶ و ۸ را دارند، باشد، پس این چهار عضو را کنار گذاشته و تعداد زیرمجموعه‌های حاصل از ۶ عضو باقی‌مانده از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۱۰\}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۲^۶ = ۶۴$$

۸۳- گزینه ۲ در مجموعه‌ای مانند A ، زیرمجموعه‌هایی که زیرمجموعه B نیز هستند، از عضوهای مشترک A و B ساخته می‌شوند. پس در این‌جا زیرمجموعه‌های حاصل از اشتراک مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ با هر یک از مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ باید از کل زیرمجموعه‌های خودش کم شود.

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$$

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} \cap \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\} = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} \Rightarrow ۲^۵ = ۳۲$$

اما دقت کنید که برخی زیرمجموعه‌ها دو بار شمرده شده‌اند، چون $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ هم دارای عضو مشترک هستند که $\{۳, ۴\}$ می‌باشد و لازم است $۲^۲$ به جواب نهایی اضافه شود.

$$\Rightarrow ۲^۷ - ۲^۴ - ۲^۵ + ۲^۲ = ۱۸۴$$

۸۴- گزینه ۲ زیرمجموعه‌های ۳ عضوی را می‌خواهیم که عدد ۱۰ حتماً عضو آن‌ها باشد. پس دو عضو دیگر (غیر از ۱۰) باید انتخاب کرد. البته در بین این دو عضو عددهای ۲ و ۳ نباید انتخاب شوند و باید از بین ۱۲ عدد باقی‌مانده، زیرمجموعه‌های ۲ عضوی را انتخاب کرد و ۱۰ را به آن زیرمجموعه‌ها اضافه کرد.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۱۲ عضوی} = \frac{۱۲ \times (۱۲ - ۱)}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

۸۵- گزینه ۲ وقتی کوچکترین عضو مجموعه ۳ باشد، یعنی عدد ۲ در زیرمجموعه‌های مورد نظر جایی ندارد و عضوهای ۴، ۵، ۶، ۷ باقی می‌مانند که باید ۳ تا از آن‌ها، برای ساختن زیرمجموعه ۴ عضوی با عدد ۳ انتخاب شوند.

$$۴ = \text{تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی از مجموعه ۴ عضوی} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از مجموعه ۴ عضوی}$$

۸۶- گزینه ۲ ابتدا کل زیرمجموعه‌ها را به دست آورده و سپس زیرمجموعه‌هایی که اصلاً عدد اول ندارند را از کل زیرمجموعه‌ها، کم می‌کنیم:

(تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یک عضو اول دارند) - (تعداد کل زیرمجموعه‌ها) = تعداد زیرمجموعه دارای حداقل یک عدد اول

$$= ۲^۸ - ۲^۴ = ۲۵۶ - ۱۶ = ۲۴۰$$

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow A \text{ عددهای اول مجموعه } A = \{۲, ۳, ۵\}$$

۸۷- گزینه ۲

تعداد زیرمجموعه‌هایی که عدد اول دارند $(۲^۳ - ۱ = ۷)$ است. عدد ۱ را به خاطر این که یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است، کم کردیم.

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \Rightarrow A \text{ عددهای اول مجموعه } A = \{۲, ۳, ۵\}$$

۸۸- گزینه ۲

برای ساختن زیرمجموعه‌ها، ابتدا باید ۲ عضو اول برداریم که سه حالت ایجاد می‌شود: $(۲, ۳)$ یا $(۲, ۵)$ یا $(۳, ۵)$ و عضوهای دیگر می‌توانند $(۴, ۱)$ باشند که ۲ دارد.

$$\Rightarrow ۱۲ \text{ حالت} = ۲^۲ \times ۳ \text{ حالت}$$

$$۱ = \text{تعداد زیرمجموعه ۱ عضوی مجموعه } ۱ \text{ عضوی} = \frac{n(n-1)}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n(n-1) = ۹۰ \Rightarrow n = ۱۰$$

۸۹- گزینه ۲

$$۱ = \text{تعداد زیرمجموعه ۱ عضوی مجموعه } ۱ \text{ عضوی} = \text{تعداد زیرمجموعه ۹ عضوی مجموعه } ۱۰ \text{ عضوی}$$

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = ۲^۶ = ۶۴$$

۹۰- گزینه ۲ A، ۶ عضو دارد. با توجه به سؤال:

$$n_0 = \text{تعداد مجموعه بدون عضو یا تهی} = ۱$$

$$\Rightarrow n_0 + n_1 = ۷ \Rightarrow n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = ۶۴ - ۷ = ۵۷$$

$$n_1 = \text{تعداد زیرمجموعه دارای یک عضو} = ۶$$

$$۴ + a + b = ۱۵ \Rightarrow a + b = ۱۱$$

۹۱- گزینه ۲ به دنبال زیرمجموعه‌هایی مانند $\{۴, a, b\}$ هستیم که $۴ + a + b = ۱۵$ و $a \neq b$

a	۲	۳	۴	۵
b	۹	۸	۷	۶

به دنبال جفت‌هایی از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ هستیم، که حاصل جمع آن‌ها ۱۱ شود.

$$(a = ۲, b = ۹) \text{ یا } (a = ۳, b = ۸) \text{ یا } (a = ۴, b = ۷) \text{ یا } (a = ۵, b = ۶)$$

که حالت $(a = ۴, b = ۷)$ قابل قبول نیست، چون زیرمجموعه $\{۴, ۴, ۷\}$ ساخته می‌شود که در اصل دو عضوی و مساوی $\{۴, ۷\}$ است؛ پس فقط ۳ زیرمجموعه $\{۴, ۲, ۹\}$ ، $\{۴, ۳, ۸\}$ و $\{۴, ۵, ۶\}$ ساخته می‌شود.

$$۳ = \text{تعداد زیرمجموعه } ۳ \text{ عضوی} = ۲^{n-1} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow ۲n - ۱ = ۵$$

۹۲- گزینه ۲

$\Rightarrow ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow$ (۳) اما این مجموعه ۵ عضو دارد

$$\frac{۲^{n+۳}}{۲^{n-۱}} = ۲^{(n+۳)-(n-۱)} = ۲^{۳+۱} = ۲^۴ = ۱۶$$

۹۳- گزینه ۲

$$A \text{ تعداد عضوهای } A = n \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه } A = ۲^n \quad B \text{ تعداد عضوهای } B = ۵ \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه } B = ۲^۵$$

۹۴- گزینه ۲

$$۲^n - ۲^۵ = ۹۶ \Rightarrow ۲^n = ۹۶ + ۲^۵ = ۹۶ + ۳۲ = ۱۲۸ = ۲^۷ \Rightarrow n = ۷$$

$$A \text{ تعداد عضوهای } k$$

۹۵- گزینه ۲

$$۲^{k+۲} = ۲^k + ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{k+۲} - ۲^k = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k(۲^۲ - ۱) = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k \times ۳ = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^k = ۶۴ = ۲^۶ \Rightarrow k = ۶$$

$$۳^n - ۱ = \text{تعداد زیرمجموعه محض یک مجموعه } n \text{ عضوی}$$

۹۶- گزینه ۲

$$\Rightarrow ۲^{k+۳} - ۱ = ۲^{k+۵} - ۹۷ \Rightarrow ۲^{k+۳} - ۲^{k+۵} = -۹۷ + ۱ \Rightarrow ۲^{k+۳}(۱ - ۲^۲) = -۹۶ \Rightarrow ۲^{k+۳} \times (-۳) = -۹۶$$

$$\Rightarrow ۲^{k+۳} = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow k + ۳ = ۵ \Rightarrow k = ۲$$

$$۱۶ = ۲^۴ = ۲^{۲+۲} = ۲^{k+۲} = \text{تعداد زیرمجموعه مجموعه } (k+۲) \text{ عضوی}$$

۹۷- گزینه ۲ $n(B)$ را برابر x بگیریم و معادله را بنویسیم:

$$۲^{x-۲} = ۲^x - ۲۲۴ \Rightarrow ۲^x - ۲^{x-۲} = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۲}(۲^۲ - ۱) = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۲} \times ۷ = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^{x-۲} = \frac{۲۲۴}{۷} = ۳۲ = ۲^۵$$

$$\Rightarrow x - ۲ = ۵ \Rightarrow x = ۷$$

۹۸- گزینه ۲ معادله مسئله را می‌نویسیم: $10 \times 2^k - 2^{k+3} = 64 \Rightarrow 2^k(10 - 2^3) = 64 \Rightarrow 2^k \times 2 = 64 \Rightarrow 2^k = 32 = 2^5 \Rightarrow k = 5$
 یک مجموعه ۵ عضوی، چهار زیرمجموعه ۴ عضوی دارد.

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, \dots, 97, 98, 99\}$$

$$B = \{5k \mid k \in A\} \subseteq A$$

۹۹- گزینه ۱
 با توجه به مسئله:

بزرگ‌ترین عضو که در B می‌توان قرار داد، عدد ۹۵ است. چون ۹۵ عضو A بوده و $95 = 5 \times 19$ و همچنین $19 \in A$. پس عضوهای B به شکل $\{5 \times 19, 5 \times 18, 5 \times 17, 5 \times 16, \dots, 5 \times 10\}$ روبه‌رو هستند.
 که تعداد عضوهایش $10 - 10 + 1 = 1$ است.

۱۰۰- گزینه ۴ در مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، زیرمجموعه‌های $\{\}$ ، یک‌عضوی و دو‌عضوی، دارای ۳ عدد متوالی نیستند.

$$n(M) = 5 \Rightarrow \text{تعداد دو‌عضوی} = 5 \text{ و تعداد یک‌عضوی} = 1 \text{ و تعداد تهی} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

در زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، $\{1, 2, 3\}$ ، $\{1, 2, 4\}$ ، $\{1, 2, 5\}$ ، $\{2, 3, 4\}$ ، $\{1, 3, 4\}$ ، $\{1, 3, 5\}$ ، $\{2, 4, 5\}$ ، $\{1, 4, 5\}$ و $\{2, 4, 5\}$ سه عدد متوالی ندارند، که ۷ تا هستند.
 در زیرمجموعه‌های چهار‌عضوی نیز، فقط $\{1, 2, 4, 5\}$ ، سه عدد متوالی ندارد.

$$1 + 5 + 10 + 7 + 1 = 24 = \text{تعداد زیرمجموعه‌های بدون سه عدد متوالی}$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}$$

۱۰۱- گزینه ۴ می‌توانیم این مجموعه‌ها را بنویسیم:

۱۰۲- گزینه ۲ عدد ۴۵ را تجزیه کرده و شمارنده‌های آن را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم:

$$45 = 3^2 \times 5 \Rightarrow \text{شمارنده‌های } 45 = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

چون در مجموعه، مجاز به نوشتن عضو تکراری نیستیم، فقط این زیرمجموعه‌ها وجود دارد:

۱۰۳- گزینه ۱ شرط اول می‌گوید، حداقل یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ عضو A باشند، بودن یا نبودن هر کدام از این اعداد ۲ حالت دارد.

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 = \text{تعداد حالت‌های بودن یا نبودن سه عدد ۱، ۲ و ۳}$$

اما در یکی از این حالت‌ها هیچ‌کدام از این عددها در مجموعه A قرار نخواهند گرفت و در نتیجه: $8 - 1 = 7 = \text{تعداد حالت‌های شرط اول}$

شرط دوم بیان می‌کند که از بین ۴ و ۵، یا هر دو عضو A باشد یا اصلاً هیچ‌کدام نباشند پس شرط دوم، فقط ۲ حالت دارد.

در شرط سوم، یکی از عددهای ۶ یا ۷ یا ۸ وجود دارند؛ یعنی با ۳ حالت روبه‌رو خواهیم بود.

شرط‌ها در مورد اعداد ۹ و ۱۰ صحبت نمی‌کنند، بودن یا نبودن آن‌ها مهم نیست؛ در نتیجه هر کدام ۲ حالت دارند و با $4 = 2 \times 2 = \text{روبه‌رو هستیم}$.

برای ساختن زیرمجموعه A سه شرط اول باید رعایت شده و وضعیت دو عدد ۹ و ۱۰ معلوم شود و از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{7}{\text{شرط اول}} \times \frac{2}{\text{شرط دوم}} \times \frac{3}{\text{شرط سوم}} \times \frac{4}{\text{وضعیت ۹ و ۱۰}} = 7 \times 2 \times 3 \times 4 = 168$$

۱۰۴- گزینه ۲ همهٔ مضرب‌های ۶، زوج خواهند بود اما مضرب‌های ۳ و ۹، می‌توانند فرد هم باشند. پس مضرب‌های ۳ و مضرب‌های ۹ نمی‌توانند،

زیرمجموعهٔ مضرب‌های ۶ باشند.

عدد ۱۲ مضرب ۶ است، در نتیجه همهٔ مضرب‌های ۱۲، حتماً مضرب ۶ هستند و (مضرب‌های ۶) \subseteq (مضرب‌های ۱۲).

۱۰۵- گزینه ۲

نکته خوب: در یک مجموعه Ω عضوی، هر عضو در 2^{n-1} زیرمجموعه وجود دارد.

هر عضو یک مجموعه شش‌عضوی، مانند $\{a, b, c, d, e, f\}$ ، در ۳۲ زیرمجموعه آن حضور دارد. (این‌طور فکر کنید: چند زیرمجموعه داریم که حتماً a عضو آن باشد؟)

وقتی مجموع هر زیرمجموعه را می‌نویسیم و با هم جمع می‌کنیم، مانند این است که همهٔ اعضا را به تعداد تکرار شده‌شان با هم جمع کنیم:

$$\text{حاصل جمع مجموع همهٔ عددهای زیرمجموعه‌ها} = 32a + 32b + 32c + 32d + 32e + 32f = 32(a + b + c + d + e + f) = 32 \times 40 = 1280$$

۱۰۶-گزینه ۱ به شرطی می‌توان تعدادی عدد را به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کرد که مجموع عددهای آن تعداد اعداد، زوج باشد. در گزینه‌های (۳)

و (۴) مجموع عددهای داده‌شده، زوج نیست. $۲۱ \times ۱۱ = ۲۳۱ = \frac{۲۱ \times ۲۲}{۲} = \frac{۲۱ \times (۲۱+۱)}{۲}$ = مجموع اعداد $\Rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, 21\}$: گزینه (۳)

در مجموعه $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2\}$ نیز پنج عدد زوج $(2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2)$ و پنج عدد فرد $(1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2)$ داریم که حاصل جمع این ۱۰ عدد، فرد خواهد بود. در مجموعه گزینه (۲) $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\}$ ، حاصل جمع همه اعضا برابر است با:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = \underbrace{2^1 + 2^2}_{2^2} + 2^3 + \dots + 2^{10} = \underbrace{2^2 + 2^3}_{2^3} + \dots + 2^{10} = \dots = 2^{11} - 2$$

پس دو دسته با مجموع $\frac{2^{11}-2}{2}$ باید بسازیم:

چون $(2^{10} - 1)$ عددی فرد است، نمی‌توانیم آن را با مجموع عضوهای زوج بسازیم.

اما در مجموعه گزینه (۱) چون عددها متوالی هستند، به راحتی این کار تقسیم به دسته با مجموع مساوی انجام می‌شود، چون عددها به ۱۰ دسته با مجموع‌های برابر ۲۱ تقسیم می‌شوند.

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}$

$$(1+20) = (2+19) = (3+18) = (4+17) = (5+16) = \dots = (10+11)$$

برای دو دسته کردن آن‌ها، کافی است ۵ تا از این دسته‌ها را در یک مجموعه و ۵ تای دیگر را در مجموعه بعدی قرار دهیم.

۱۰۷-گزینه ۱ برای آن که مجموع دو عدد زوج باشد، باید یا هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. در مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ پنج عدد فرد

$(1, 3, 5, 7, 9)$ و پنج عدد زوج $(2, 4, 6, 8, 10)$ داریم، یا ۲ تا از مجموعه اعداد فرد یا ۲ تا از مجموع اعداد زوج انتخاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 20 = 10 + 10 = \frac{5 \times 4}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = \text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد زوج} + \text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد فرد}$$

۱۰۸-گزینه ۲ در حل سؤال دقت می‌کنیم که ۵ و ۷ نباید عضو زیرمجموعه‌ها باشند و همچنین همه عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ نمی‌توانند در یک

زیرمجموعه باشند و عدد ۴ نباید با هر کدام از عددهای ۲، ۶ و ۸ به تنهایی در یک زیرمجموعه باشد. حالا این زیرمجموعه‌ها عبارت هستند از:

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 8\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 8\}, \{1, 3, 6, 8\}, \{1, 3, 4, 6, 8\}, \{2, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 6, 8\}, \{3, 6, 8\}, \{3, 4, 6, 8\}$

۱۰۹-گزینه ۲ در مجموعه $\{x, x+2\}$ ، اگر x فرد باشد، $(x+2)$ عدد فرد بعد از آن است و اگر x زوج باشد، $(x+2)$ عدد زوج بعد از آن خواهد بود.

مجموعه A را به دو تکه، اعداد فرد متوالی و زوج متوالی تقسیم می‌کنیم: $۱ = \frac{۹۹-۱}{۲} + ۱ = ۵۰$ = تعداد اعضا $\Rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 95, 97, 99\}$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 94, 96, 98\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = \frac{۹۸-۲}{۲} + ۱ = ۴۹$$

در مجموعه اعداد فرد ۴۹ جفت، مانند $(1, 3), (3, 5), (5, 7), \dots, (97, 99)$ داریم. در مجموعه اعداد زوج، ۴۸ جفت مانند $(2, 4), (4, 6), (6, 8), \dots, (96, 98)$ داریم و در کل $۹۷ = ۴۸ + ۴۹$ جفت، یا زیرمجموعه ۲ عضوی به شکل $\{x, x+2\}$ خواهیم داشت.

۱۱۰-گزینه ۲ عدد ۱ نمی‌تواند عضو S باشد، چون همه عددها مضرب ۱ هستند. اگر ۲ را به عنوان کوچک‌ترین عضو در نظر بگیریم، بقیه ۵ عدد

باید فرد باشند که به مجموعه $\{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ می‌رسیم که درست نیست. چون ۹ مضرب ۳ است، اگر عدد ۳ را به عنوان کوچک‌ترین عضو در نظر بگیریم، عضوهای دیگر می‌توانند ۵ عضو از بین عددهای $(4, 5, 6, 8, 10, 11)$ باشند و در نهایت مجبور هستیم دو عضو $(5, 10)$ یا $(4, 8)$ را انتخاب کنیم که دوباره درست نخواهد بود.

حالا کوچک‌ترین عضو را ۴ در نظر بگیریم و مجموعه S برابر است با $\{4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ که درست است و هیچ عضوی مضرب دیگر نیست.

۱۱۱-گزینه ۲ در بین عددهای ۱ تا ۳۰، ۶ عدد مضرب ۵ هستند، پس حداکثر یکی از این ۶ عدد (یعنی ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵ و ۳۰) می‌تواند عضو S باشند.

در بین عددهای ۱ تا ۳۰، شش عدد داریم که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۱ است، یعنی عددهای ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ۲۶. شش عدد هم

داریم که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۴ است، یعنی عددهای ۴، ۹، ۱۴، ۱۹، ۲۴، ۲۹. از این دو دسته فقط یکی را می‌توانیم انتخاب کنیم،

چون مجموع هر کدام از آن‌ها با هم، مضرب ۵ است. مثلاً $۴۵ = ۱۶ + ۲۹$ یا $۵ = ۴ + ۱$. در بین عددهای ۱ تا ۳۰، شش عدد داریم که باقی‌مانده

تقسیم آن‌ها بر عدد ۵ برابر ۲ است و به همین ترتیب، شش عدد با باقی‌مانده ۳ داریم که $(2, 7, 12, 17, 22, 27)$ و $(3, 8, 13, 18, 23, 28)$

هستند. از این دو دسته نیز فقط یکی را می‌توان انتخاب کرد، پس در کل می‌توان $۱۳ = ۶ + ۶ + ۱$ عدد انتخاب کرد.

۱۱۲- گزینه ۴ برای ساختن زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضا مضرب ۳ باشند، آن‌ها را به سه مجموعه تقسیم می‌کنیم.
 $A =$ عضوهای مضرب ۳، $B =$ عضوهایی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۱ دارند. $C =$ عضوهایی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۲ دارند.
 $A = \{3, 6, 9\}, B = \{1, 4, 7\}, C = \{2, 5, 8\}$

سه‌تا از زیرمجموعه‌های با مجموع عضوهای مضرب ۳، همین مجموعه‌های A و B و C هستند.
 مجموعه‌های دیگر را باید این‌طور ساخت: یک عضو از A ، یک عضو از B و یک عضو از C که همیشه حاصل جمع این سه انتخاب مضرب ۳ است.

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \quad 27 + 3 = 30$$

انتخاب از C انتخاب از B انتخاب از A

۱۱۳- گزینه ۲ در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 11, 12\}$ ، شش جفت عدد داریم که حاصل جمع آن‌ها برابر ۱۳ است.
 $(1, 12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$

اگر بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه ۱۲ و کوچک‌ترین آن ۱ باشد، ۱۰ عضو دیگر می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس 2^{10} زیرمجموعه با بزرگ‌ترین عضو برابر ۱۲ و کوچک‌ترین عضو برابر ۱ وجود دارد.

اگر بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه ۱۱ و کوچک‌ترین آن ۲ باشد، ۸ عضو دیگر می‌توانند عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند و در این حالت 2^8 زیرمجموعه داریم. طبق همین روند، تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$(1, 12) \quad (2, 11) \quad (3, 10) \quad (4, 9) \quad (5, 8) \quad (6, 7)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 1024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365$$

۱۱۴- گزینه ۲ در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, \dots, 8\}$ اختلاف جفت عددهای $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)$ برابر ۴ است.

اگر در جفت عددها، یکی بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه و دیگری کوچک‌ترین عضو آن باشد، هر کدام از ۳ عضو دیگر بین آن‌ها، می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. مثلاً وقتی ۵ بزرگ‌ترین عضو و یک کوچک‌ترین عضو باشد، عددهای ۲، ۳، ۴ هر کدام ۲ حالت دارد که در زیرمجموعه باشند یا نباشند. زیرمجموعه $2^3 \Rightarrow (1, 5)$

هر کدام از دسته‌های دیگر نیز 2^3 زیرمجموعه می‌سازند و تعداد کل آن‌ها، برابر $4 \times 2^3 = 32$ می‌شود.

۱۱۵- گزینه ۲ چون همه علامت‌ها \cap است، پرانتز را برمی‌داریم:

$$(A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap B \cap A \cap B' \xrightarrow{\text{جابجایی}} \underbrace{(A \cap A)}_A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

۱۱۶- گزینه ۱ از قوانین دمورگان استفاده می‌کنیم:

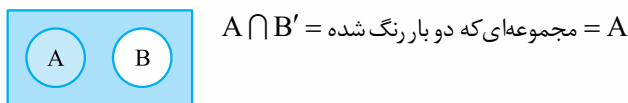
$$B' \cup C' = (B \cap C)' \Rightarrow (A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)] = (A \cup (B \cap C)) \cap [A \cup (B \cap C)]$$

$$\xrightarrow{\text{توزیع پذیری برعکس}} A \cup \underbrace{((B \cap C)' \cap (B \cap C))}_{\emptyset} = A$$

$$A \cap B' = A - B = A - (A \cap B) = A - \emptyset = A$$

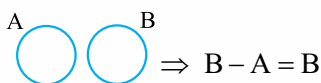
۱۱۷- گزینه ۴ A و B جدا از هم هستند. $A \cap B = \emptyset \Leftarrow$

از نمودار ون هم می‌توانستیم کمک بگیریم:



$$A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_M = A \cup B \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

۱۱۸- گزینه ۲



۱۱۹- گزینه ۲ اگر $A - B = A$ باشد، یعنی A و B دو مجموعه جدا از هم هستند و $A \cap B = \emptyset$:

(۱) گزینه ۱: $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A \Rightarrow A \cup B \neq A \neq B$

(۲) گزینه ۲: $A \cap B = \emptyset \neq B$

(۴) گزینه ۴: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A' \Rightarrow A' \cup B = A'$

۱۲۰- گزینه ۱ با استفاده از شرط‌های داده شده، حاصل عبارت‌ها را به دست می‌آوریم.

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$A \subseteq B, C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq A \subseteq B \Rightarrow C \subseteq B \Rightarrow C \cup B = B$$

$$(A - B) \cup (C \cup B) = \emptyset \cup B = B$$

$$\left. \begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A, (B - A) = B - A, A - B = \emptyset \\ [(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (B - A) \cup A = A \cup B \\ A \subseteq B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

۱۲۱- گزینه ۲ ابتدا نتایج حاصل از $A \subseteq B$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{گزینه (۱): } A - (B - A) = A - (B \cap A') = A \cap (B \cap A')' = A \cap (B' \cup A) \\ A \subseteq (B' \cup A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap (B' \cup A) = A \checkmark$$

$$\text{گزینه (۲): } (A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = A - B \checkmark$$

$$\text{گزینه (۳): } (B - A) \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B \checkmark$$

$$\text{گزینه (۴): } B \cup (A - B) = B \cup (A \cap B') = (B \cup A) \cap (B \cup B') = B \cup A \times$$

الف) $(A \cap B) \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) \cup B = B \checkmark$

ب) $(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B) = A \cup B \checkmark$

پ) $A \Rightarrow A \cap (B - A) = \emptyset \times$ دو مجموعه جدا از هم هستند.

ت) $(B \cap C) \subseteq (B \cup C) \Rightarrow (A \cap D \cap B \cap C) \subseteq (B \cup C) \Rightarrow (A \cap B \cap C \cap D) \cup (B \cup C) = B \cup C \checkmark$

گزینه (۱): $A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A' \checkmark$

گزینه (۲): $A - B = A \cap B' \checkmark$

گزینه (۴): $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \checkmark$ جدا از هم هستند.

گزینه (۳): $[A - B] \cup [B - A] \cup (A \cap B) = \text{Venn Diagrams} = A \cup B \times$

۱۲۵- گزینه ۲ با استفاده از جبر مجموعه‌ها مسئله را حل می‌کنیم:

گزینه (۱): $A' \cap (A \cup B) = (A' \cap A) \cup (A' \cap B) = B \cap A' = B - A \checkmark$

گزینه (۲): $A \cap (B \cup A') = (A \cap B) \cup (A \cap A') = A \cap B \checkmark$

گزینه (۳): $(A \cap (A \cup B)) \cup (B - A) = A \cup (B - A) = A \cup B \times$

گزینه (۴): $A \cup (B' - A) = A \cup (B' \cap A') = (A \cup B') \cap (A \cup A') = A \cup B' \checkmark$

گزینه (۱): $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \times$

گزینه (۲): $A \cap (B - C) = A \cap B \cap C' = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C \checkmark$

گزینه (۳): $(A - B) \subseteq (A \cup B) \Rightarrow (A \cup B) \cup (A - B) = A \cup B \times$

گزینه (۴): $A \cap (A' - B') = A \cap A' \cap B' = \emptyset \times$

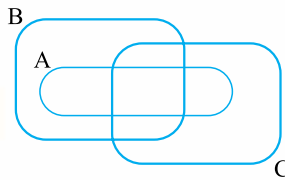
$B - A = B - (A \cap B) \Rightarrow (B - A) \cup (A \cap B) = B$

$[(B - A) \cup (A \cap B)] - B = B - B = \emptyset \Rightarrow \emptyset' = M$

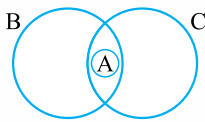
$$(A \cap \underbrace{[(B \cap A') \cup (B \cap A)]}_{(B \cap A') \subseteq B}) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A - B) \xrightarrow{(A-B) \text{ هیچ عضوی از } B \text{ ندارد.}} \emptyset$$

۱۲۸- گزینه ۲

۱۲۹- گزینه ۲ وقتی $A \subseteq (B \cup C)$ ، نمی‌توانیم حتماً بگوییم که $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$ ؛ چون ممکن است حالتی که در شکل می‌بینید به وجود آمده باشد.



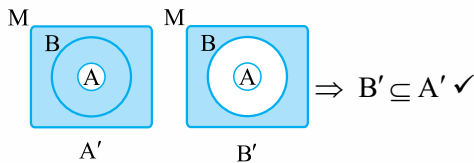
اما وقتی هم‌زمان $A \subseteq (B \cap C)$ می‌شود، یعنی همهٔ عضوهای A در ناحیهٔ مشترک B و C حضور دارند و هر عضو A هم در B است و هم در C و در نتیجه هر دو شرط $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$ لازم است.



$$\Rightarrow \text{اما} \rightarrow B \not\subseteq C$$

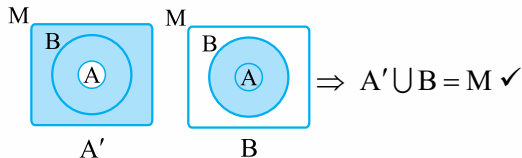
گزینهٔ (۲) می‌تواند نادرست باشد، به نمودار دقت کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow$



۱۳۰- گزینه ۲

ب) $A \subseteq B \Rightarrow$



پ) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B' = A - B = \emptyset \checkmark$

۱۳۱- گزینه ۴ مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر بگیریم، مجموعه‌های A و B و C و D را با توجه به دو شرط $(A \cup C) = (B \cup D)$ و $(A \cap C) = (B \cap D)$ و با استفاده از اعضای آن تعیین کنیم:

$A = \{1, 2, 3\}$ و $C = \{4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ و $D = \{2, 4, 6\}$
 $A \cup C = B \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap C = B \cap D = \emptyset$

الف) $A \cap B = \{1, 3\} \neq C \cap D = \{4, 6\} \times$

ب) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\} \neq C \cup D = \{2, 4, 5, 6\} \times$

پ) $A \not\subseteq B$ و $D \not\subseteq B \times$

ت) $A \neq B$ و $C \neq D \times$

هر چهار عبارت نادرست است و جواب گزینهٔ (۴) است.

۱۳۲- گزینه ۲ $(A - B)$ هیچ عضوی از B ندارد، پس وقتی $(A - B) \subseteq B$ می‌شود، $A - B = \emptyset$ خواهد بود و در نتیجه $A \subseteq B$ است.

$$[(A - B') \cup (B - A')] \cap A = [(A \cap B) \cup (B \cap A)] \cap A = \underbrace{A \cap B}_{A} \cap A = A$$

$A \subseteq B, C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq B$

۱۳۳- گزینه ۱ اگر $A \cap B = A$ باشد، $A \subseteq B$ می‌شود.

$(A - B) \cup (C \cup B) = \emptyset \cup (B) = B$

گزینهٔ (۱): $(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) \cup A = A$

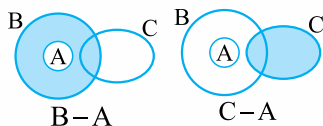
۱۳۴- گزینه ۲

گزینهٔ (۲): $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = A \cap B'$

گزینهٔ (۳): $A - B' = A \cap B$

گزینهٔ (۴): $(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

۱۳۵- گزینه ۴ گزینهٔ (۱) و (۳) درست است، چون هر عضوی که در A هست در B نیز هست. پس همهٔ عضوهای موجود در $(A \cup C)$ در $(B \cup C)$ نیز هست و هم‌چنین عضوهای $(A \cap C)$ در $(B \cap C)$ نیز هستند.



گزینهٔ (۲) درست است. $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \Rightarrow (A - B) \subseteq (B - C)$

گزینهٔ (۴) نادرست است، به نمودار دقت کنید.

۱۳۶-گزینه الف) درست است، چون همهٔ عضوهای $(A \cup B)$ در $D \cup (B \cup A)$ وجود دارند.

$$(A' \cap B') = (A \cup B)' \not\subseteq (A \cup B)$$

ب) نادرست است.

پ) نادرست است، مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ $((A - B) \cup C)$ است. همچنین در مجموعهٔ $((A - B) \cup C)$ هیچ عضوی از B نداریم. بنابراین $C - B = C \cap B'$ حتماً زیرمجموعهٔ $((A - B) \cup C)$ است.

$$(X' \cap Y' \cap A \cap B') = \underbrace{(X \cup Y \cup A' \cup B)}_{E'} \not\subseteq \underbrace{(X \cup Y \cup A' \cup B)}_E$$

ت) نادرست است.

۱۳۷-گزینه ۴) می‌دانیم $x \in (A' \cup B)'$ است، عبارت را ساده کنیم:

یعنی x عضو A هست اما عضو B نیست، در نتیجه x بر ۳ بخش پذیر است اما بر ۵ بخش پذیر نیست.

۱۳۸-گزینه ۲) مجموعهٔ B دو عضو ۳ و ۴ را دارد و چون $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ است، مجموعهٔ A حتماً ۱، ۲ و ۵ را در خود دارد. اما ممکن است هر کدام از عضوهای ۳ یا ۴ را داشته باشد یا نداشته باشد. هر کدام ۲ حالت دارند و در نتیجه $2^2 = 4$ حالت بر A وجود دارد.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 3\} \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

۱۳۹-گزینه ۲)

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\} \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow x \in \mathbb{N}, x = 1, 2 \Rightarrow B = \{1, 2\}$$

$$A - B = \{-3, -2, -1, 0, 3\} \Rightarrow n(A - B) = 5 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^5 = 32$$

۱۴۰-گزینه ۲) ابتدا مجموعهٔ B را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$B = \{x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}, -4 < x \leq 12\} \Rightarrow x \text{ باید مضرب ۳ یا صفر باشد.}$$

$$-4 < x \leq 12 \Rightarrow B = \{-3, 0, 3, 6, 9, 12\}$$

$$A = \{x^2 - m \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq m\}$$

حالا مجموعهٔ A را بررسی کنیم:

$$-3 < x \leq m \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, \dots, m, \quad m \geq 4$$

$$\Rightarrow A = \{(-3)^2 - m, (-2)^2 - m, (-1)^2 - m, 0^2 - m, 1^2 - m, \dots, m^2 - m\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

m را باید طوری انتخاب کنیم که A و B سه عضو مشترک داشته باشند، چون:

و m کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد تا حداقل تعداد عضوهای $(A - B)$ به دست بیاید. اگر $m = 4$ قرار داده شود، نتیجهٔ موردنظر به دست می‌آید:

$$A = \{9 - m, 4 - m, 1 - m, 0 - m, \cancel{m}, \cancel{4 - m}, \cancel{9 - m}, 16 - m\} = \{9 - 4, 4 - 4, 1 - 4, 0 - 4, 16 - 4\} = \{5, 0, -3, -4, 12\}$$

$$A \cap B = \{-3, 0, 12\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3, \quad A - B = \{-4, 5\} \Rightarrow n(A - B) = 2$$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x} \leq 4, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$$

۱۴۱-گزینه ۲) ابتدا هر مجموعه را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$\sqrt{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{عدد } x \text{ مربع کامل است.}$$

$$\sqrt{x} \leq 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x \leq 16, x > 0 \Rightarrow A = \{16, 9, 4, 1\}, \quad B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$A \cap B = \{16, 4\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

۱۴۲-گزینه ۴) چند مجموعهٔ A_n را بنویسیم:

$$A_1 = \{\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{1, 2, 3\}, A_4 = \{1, 2, 3, 4\}, \dots, A_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\} \Rightarrow A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \dots \subset A_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n}_{A_n} = A_n$$

$$A_1 = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A_1 = \emptyset$$

۱۴۳-گزینه ۱) A_i ها را بنویسیم:

$$A_2 = \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A_2 = \{1\}, \quad A_3 = \{x \mid -3 < x < 3, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A_3 = \{1, 2\}$$

$$A_4 = \{x \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A_4 = \{1, 2, 3\}, \quad A_n = \{x \mid -n < x < n, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, (n-1)\}$$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$$

۱۴۴- گزینه ۲ هر مجموعه ۱۰ عضو دارد و با شماره مجموعه شروع می‌شود.

$$A_3 = \{3, 4, 5, 6, \dots, 12\}$$

$$A_4 = \{4, 5, 6, 7, \dots, 13\} \Rightarrow A_3 \cap A_4 = \{4, 5, 6, 7, 8, \dots, 12\}$$

$$A_7 = \{7, 8, 9, 10, \dots, 16\}$$

$$A_8 = \{8, 9, 10, 11, \dots, 17\} \Rightarrow A_7 \cap A_8 = \{8, 9, 10, 11, \dots, 16\}$$

پس مجموعه‌های A_3 تا A_8 مجموعه عضوهای $\{8, 9, 10, 11, 12\}$ را دارند و این مجموعه، مساوی اشتراک همه آن‌ها است و پنج عضو دارد.

۱۴۵- گزینه ۱ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، تعداد عضوهای $A \cup B \cup C$ کم‌ترین مقدار خود را دارد و $A \cup B \cup C = C$ بوده و ۴ عضو دارد.

اگر مجموعه‌های A, B و C را طوری انتخاب کنیم که عضو مشترک هر کدام حداقل یکی باشد، مجموعه‌هایی مانند زیر خواهیم داشت:

$$A = \{a, b\}, B = \{a, b, d\}, C = \{a, e, f, g\} \Rightarrow A \cup B \cup C = \{a, b, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 7$$

البته مجموعه‌ها را طوری نوشتیم که در اجتماع آن‌ها بیشترین عضو را داشته باشد.

$$D = A - B, E = B - C, F = D - E$$

۱۴۶- گزینه ۵ با توجه به شکل داده‌شده صورت سؤال داریم:

$$F = D - E = (A - B) - (B - C)$$

مجموعه $(B - C)$ از B عضو دارد اما هیچ عضوی از C ندارد. مجموعه $(A - B)$ هیچ عضوی از B ندارد، پس $(A - B) \cap (B - C)$ تهی است و

$$F = A - B \Rightarrow F = D$$

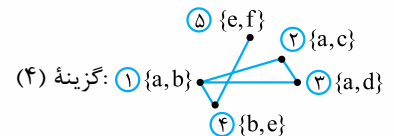
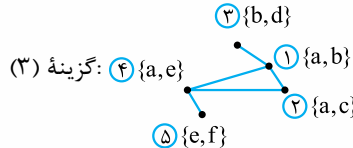
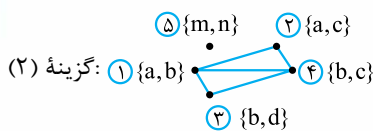
$$(D \cap C) = (F \cap C) \subseteq F$$

گزینه (۵) درست است.

دلیلی برای درستی گزینه (۱) نداریم، برای گزینه (۲) نیز دلیل حتمی برای درست بودن نداریم. برای گزینه (۳) و (۴) نیز دلیل درستی قطعی وجود ندارد و ممکن است درست نباشد.

۱۴۷- گزینه ۱ برای حل این مسئله می‌توان از حدس و آزمایش استفاده کرد. با این روش برای گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) می‌توان ۵ مجموعه متفاوت را

نوشت اما برای گزینه (۱) نمی‌توان ۵ مجموعه متفاوت نوشت. شماره‌های هر نقطه، ترتیب نوشتن مجموعه مناسب را نشان می‌دهد.



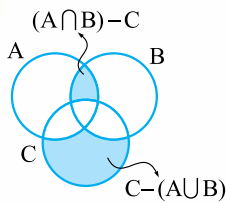
در گزینه (۱) چون یکی از نقطه‌ها به ۴ مجموعه دیگر وصل است، نمی‌توان حالت درستی نوشت.

۱۴۸- گزینه ۱ هر مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: $A \subseteq D$ و هر لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس: $C \subseteq D$

هر مربعی هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. پس: $B \subseteq A$ و $B \subseteq C$

شکل گزینه (۱) این شرایط را برقرار می‌کند.

۱۴۹- گزینه ۴ با توجه به شکل داده‌شده، می‌توانیم عبارت‌های زیر را بنویسیم:



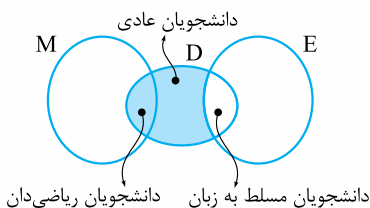
$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$$

$$B = \{13, 14, 15, 16, \dots, 33\}$$

$$C = \{15, 16, 17, \dots, 35\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 30, 31, 32, 33\} \Rightarrow C - (A \cup B) = \{34, 35\} \Rightarrow \text{تعداد عضو} = 2 \Rightarrow 2 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots, 29\} \Rightarrow (A \cap B) - C = \{13, 14\} \Rightarrow \text{تعداد عضو} = 2$$



۱۵۰- گزینه ۲ مجموعه D به سه بخش تقسیم شده است.

اجتماع دو مجموعه دانشجویان عادی و دانشجویان ریاضی‌دان، دانشجویانی است که هیچ عضوی

از دانشجویان مسلط به زبان خارجی ندارند.

۱۵۱- گزینه ۲ افرادی که حداقل از دو اپراتور استفاده می‌کنند، رنگ شده‌اند:

کل نفرات استفاده‌کننده (۱۰۰۰۰ نفر) با مجموع همهٔ عددها متناسب است.

$$7 + 6 + 9 + 8 + 4 + 2 + 5 + 1 + 8 + 9 + 8 + 5 + 8 = 80$$

افرادی که حداقل از دو اپراتور استفاده می‌کنند با مجموع عددهای ناحیهٔ رنگ‌شده متناسب هستند.

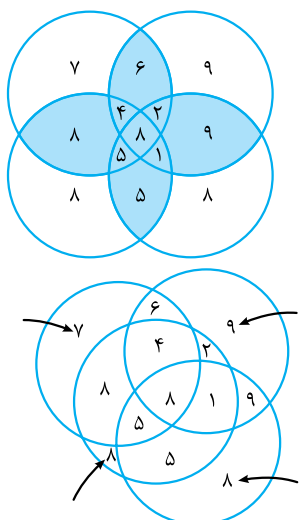
$$6 + 4 + 2 + 8 + 8 + 9 + 5 + 1 + 5 = 48 \Rightarrow \frac{48}{80} = \frac{x}{10000} \Rightarrow x = \frac{48 \times 10000}{80} = 6000$$

۱۵۲- گزینه ۱ در بین نمونهٔ ۸۰ نفری، بخش‌هایی که با علامت نشان داده شده‌اند، افرادی هستند که

فقط به یک ورزش علاقه دارند. اگر نسبت این افراد در کل ۵۰۰ نفر رعایت شود، تعداد تقریبی کل دانش‌آموزانی که فقط به یک رشته علاقه دارند، به دست می‌آید.

$$\text{تعداد افراد علاقه‌مند به یک ورزش در } 80 \text{ نفر} = 7 + 9 + 8 + 8 = 32$$

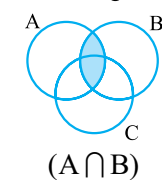
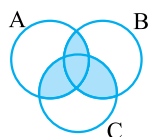
$$\Rightarrow \frac{32}{80} = \frac{x}{500} \Rightarrow x = \frac{32 \times 500}{80} = 200$$



۱۵۳- گزینه ۲ مجموعهٔ A, B, C را به صورت کلی در نظر بگیریم:

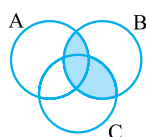
ناحیهٔ رنگ‌شده، عضوهایی دارد که حداقل در دو مجموعه دارای عضو هستند، نتیجهٔ گزینه‌های (۳) و

(۴) برابر این ناحیهٔ رنگ شده است.



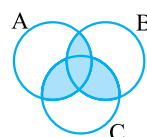
$$(A \cap B)$$

\Rightarrow



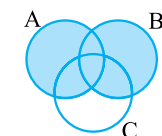
$$(A \cap B) \cup (B \cap C)$$

\Rightarrow



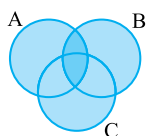
$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$$

گزینه (۲)



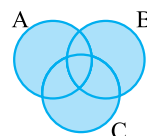
$$(A \cup B)$$

\Rightarrow



$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = \text{ناحیهٔ دو بار رنگ شده}$$

\Rightarrow

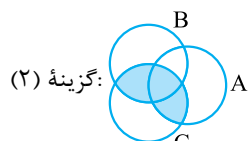
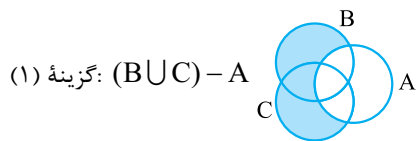


$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = \text{ناحیهٔ ۳ بار رنگ شده}$$

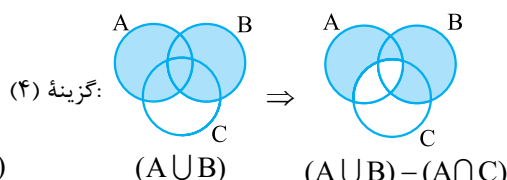
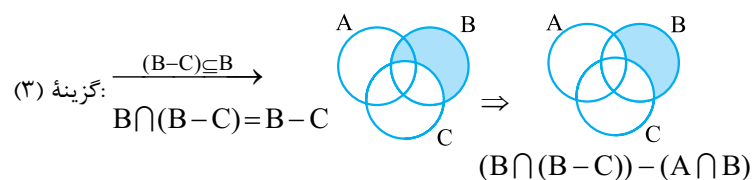
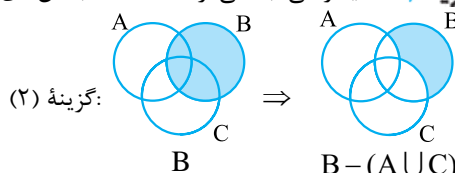
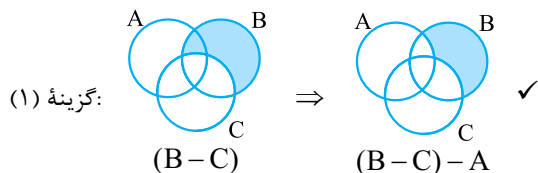
۱۵۴- گزینه ۲ ناحیهٔ رنگی از اجتماع دو تکهٔ $(A \cap B)$ و $(A \cap C)$ به وجود می‌آید.

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \xrightarrow{\text{عکس توزیع پذیری}} A \cap (B \cup C) \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

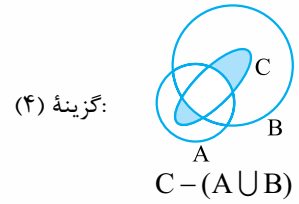
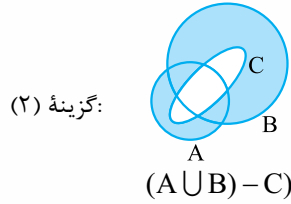
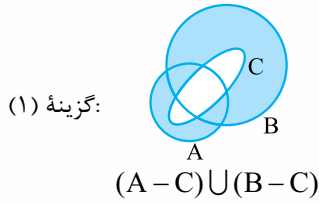
نمودار گزینه‌های دیگر:



۱۵۵- گزینه ۴ ناحیهٔ رنگی، بخشی از B است که بخش‌های A و C از آن حذف شده است.

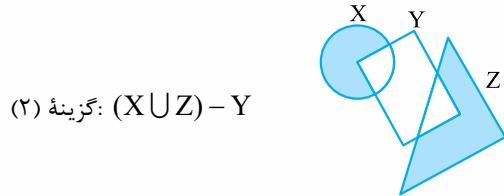
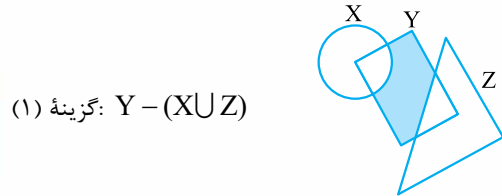


۱۵۶- گزینه ۲ ناحیه رنگی را می توان این طور به دست آورد، از $(A \cap B)$ ، مجموعه C را برداریم.



۱۵۷- گزینه ۴ حاصل اجتماع دو مجموعه حاصل از اشتراک Y با هر دو مجموعه X و Z برابر جواب است:

$$(Y \cap X) \cup (Y \cap Z) \xrightarrow{\text{عکس توزیع پذیری}} Y \cap (X \cup Z)$$



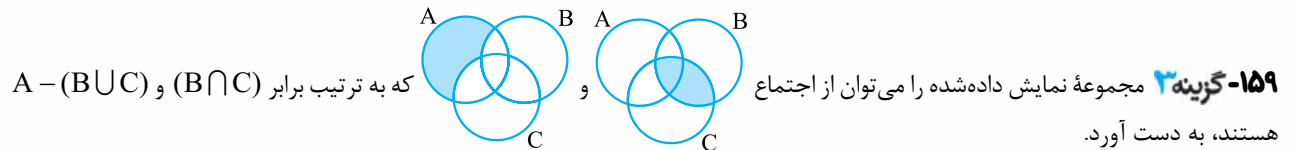
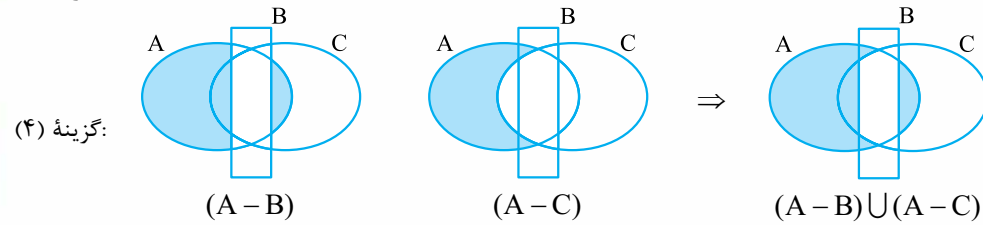
گزینه (۳): $X \cap Y \cap Z = \emptyset$

گزینه (۱): $(A - (B \cup C)) \cup ((B \cap C) - (A \cap B \cap C))$

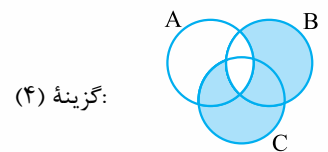
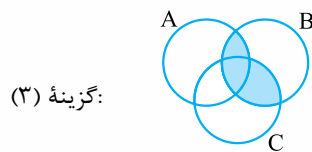
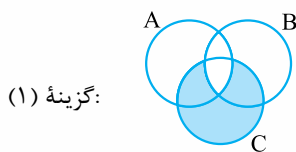
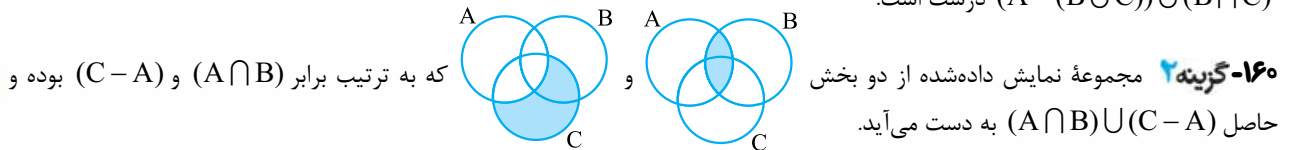
گزینه (۲): $(B - C) \cup (C - B)$

۱۵۸- گزینه ۴

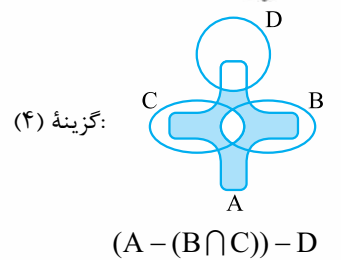
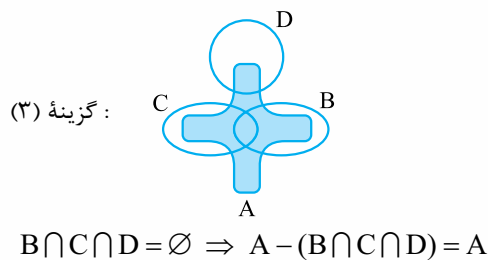
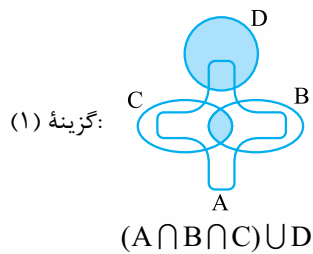
گزینه (۳): $A - (A \cap B \cap C)$



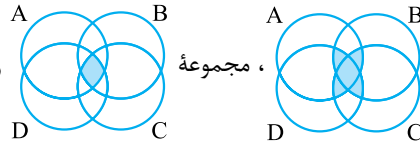
$(A - (B \cup C)) \cup (B \cap C)$ درست است.



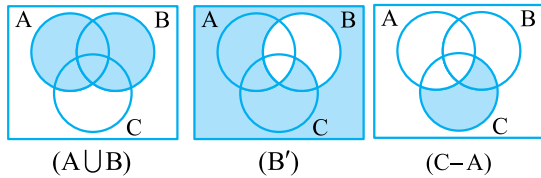
۱۶۱- گزینه ۲ از مجموعه A ، مجموعه های B ، C و D برداشته شده اند و پاسخ درست، گزینه (۲) است.



۱۶۲- گزینه ۴ اگر از مجموعه $(A \cap B \cap C \cap D)$ و $(A \cap C) \cup (B \cap D) - (A \cap B \cap C \cap D)$ را برداریم، مجموعه مورد نظر به دست می آید. این مجموعه به ترتیب برابر



است. $(A \cap C) \cup (B \cap D) - (A \cap B \cap C \cap D)$ و $(A \cap B \cap C \cap D)$ است و جواب $(A \cap C) \cup (B \cap D) - (A \cap B \cap C \cap D)$ است.

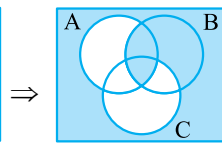
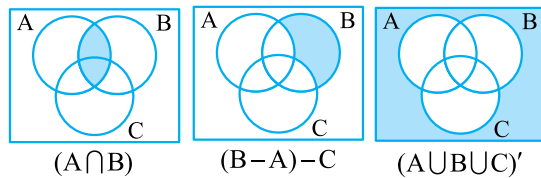


۱۶۳- گزینه ۲ در مجموعه های A، B و C، نمودار ون مجموعه های $A \cup B$ ،

B' و $C - A$ عبارتند از:

با توجه به مجموعه های بالا ناحیه $(A \cap B)$ فقط در مجموعه $(A \cup B)$

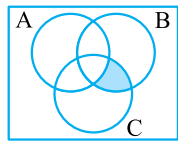
قرار دارد.



ناحیه $((B - A) - C)$ نیز فقط در $(A \cup B)$ قرار دارد.

ناحیه $(A \cup B) \cup C'$ نیز فقط در (B') قرار دارد، لذا

جواب درست از کنار هم قراردادن آن‌ها ساخته می شود.



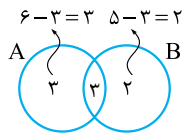
دقت کنید!!! دو مجموعه $(A \cup B)$ و $(C - A)$ در ناحیه رنگی شکل مقابل مشترک هستند و در گزینه های

(۱)، (۲) و (۴)، این ناحیه، رنگی شده است که باعث نادرستی این گزینه‌ها می شود چون اعضای این ناحیه هم

عضو $(A \cup B)$ و هم عضو $(C - A)$ هستند.

۱۶۴- گزینه ۲ مجموعه $A =$ افرادی که عینک دارند و $B =$ افرادی که ساعت دارند.

$(A \cap B) =$ افرادی که هم عینک دارند و هم ساعت.



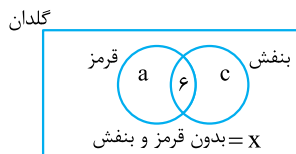
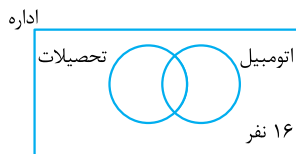
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 8 = 5 + 6 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

۱۶۵- گزینه ۱ نمودار ون را برای این مسئله بکشیم. با توجه به نمودار ون:

$$n(\text{اتومبیل} \cup \text{تحصیلات}) = 40 - 16 = 24$$

$$n(\text{اتومبیل} \cup \text{تحصیلات}) = n(\text{تحصیلات}) + n(\text{اتومبیل}) - n(\text{اتومبیل} \cap \text{تحصیلات})$$

$$24 = 20 + 6 - n(\text{اتومبیل} \cap \text{تحصیلات}) \Rightarrow n(\text{اتومبیل} \cap \text{تحصیلات}) = 2$$

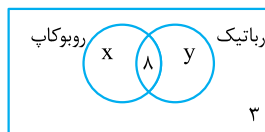


۱۶۶- گزینه ۲ نمودار ون مسئله را بکشیم. ابتدا ناحیه مشترک قرمز و بنفش را برابر ۶ قرار می دهیم:

$$\text{حالا: } a + 6 = 24 \Rightarrow a = 18$$

$$c + 6 = 29 \Rightarrow c = 23$$

$$a + 6 + c + x = \text{تعداد گل در گلدان} \Rightarrow \underbrace{18 + 6 + 23}_{47} + x = 53 \Rightarrow x = 53 - 47 \Rightarrow x = 6$$



$$\Rightarrow x + 8 = 13 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow 8 + y = 17 \Rightarrow y = 9$$

$$\text{تعداد کل نفرات کلاس} = x + 8 + y + 3 = 5 + 8 + 9 + 3 = 25$$

۱۶۷- گزینه ۲

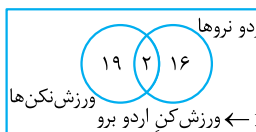
۱۶۸- گزینه ۲ عبارت های «ورزش نکردن» و «اردو رفتن» می تواند ما را به شک بیاندازد اما می توانیم تعداد افرادی که ورزش نمی کنند یا اردو

نمی روند را با رابطه عدد اصلی مجموعه به دست آورده:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 21 - 2 = 37$$

$$42 - 37 = 5$$

به غیر از این ۳۷ نفر، بقیه هم به اردو و هم به ورزش می روند.



این مسئله را این طور حل کردیم که تلاش کنید بدون شکل هم، مسئله را حل کنید. تلاش کنید

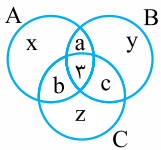
که در ذهن، این مفاهیم را تصور کنید. این هم نمودار ون مسئله:

$$\Rightarrow x = 42 - (19 + 2 + 16) = 5$$

۱۶۹- گزینه ۲ $A =$ فوتبالی ها و $B =$ بسکتبالی ها و $C =$ والیبالی ها

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$59 = \underbrace{29 + 32 + 20 - 7 - 8 - 10}_{56} + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 59 - 56 = 3$$



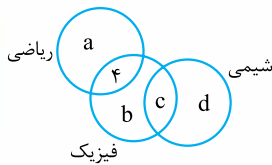
برای ادامه مسئله بهتر است، نمودار ون را بکشیم. ابتدا در ناحیه $(A \cap B \cap C)$ ، عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$n(A \cap B) = 7 \Rightarrow a + 3 = 7 \Rightarrow a = 4, \quad n(A \cap C) = 8 \Rightarrow b + 3 = 8 \Rightarrow b = 5$$

$$n(B \cap C) = 10 \Rightarrow c + 3 = 10 \Rightarrow c = 7$$

$$x + y + z + a + b + c + 3 = 59 \Rightarrow x + y + z + (4 + 5 + 7) + 3 = 59 \Rightarrow x + y + z = 59 - 19 = 40$$

تک ورزشی‌ها



۱۷۰- گزینه ۲ با توجه به توضیحات سؤال، سعی می‌کنیم نمودار ون را رسم کنیم:

$$\text{فقط فیزیک درست می‌دهند.} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \underbrace{a + 4}_{10} + b + \underbrace{c + d}_{7} = 20 \Rightarrow a + c + d = 17$$

۱۷۱- گزینه ۲ برای حل مسئله این نکته را یادآوری کنیم:

نکته خوب: تعداد مضرب‌های طبیعی عدد m در بین عددهای ۱ تا n همیشه برابر است با: خارج قسمت صحیح تقسیم n بر m .

برگردیم به مسئله: مضرب‌های ۶ = هم‌مضرب ۲، هم‌مضرب ۳ = $A \cap B$ و مضرب‌های ۳ = B و مضرب‌های ۲ = A

$$\Rightarrow n(A) = 2 \text{ بر } 1000 = 500, \quad n(B) = 3 \text{ بر } 1000 = 333$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 6 \text{ بر } 1000 = 166$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500 + 333 - 166 = 367$$

۱۷۲- گزینه ۱ مجموعه جواب این مسئله، دقیقاً متمم مجموعه جواب مسئله قبلی است.

$$A = 3 \text{ یا } 2 \text{ مضرب‌های } 3 \Rightarrow A' = 3 \text{ نه مضرب } 2, \text{ نه مضرب } 3 \Rightarrow n(A') = n(M) - n(A) = 1000 - 367 = 633$$

۱۷۳- گزینه ۴ مجموعه مضرب ۳ را A و مجموعه مضرب ۱۱ را B در نظر می‌گیریم: $A - B =$ مجموعه عددهایی که مضرب ۱۱ نیست اما مضرب ۳ است.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

پس به دنبال $n(A - B)$ هستیم:

$$n(A) = 3 \text{ بر } 1396 = 465$$

$$n(A \cap B) = n(3 \times 11 \text{ مضرب‌های } 33) = n(33 \text{ مضرب‌های } 33) = 33 \Rightarrow n(A - B) = 465 - 33 = 432$$

۱۷۴- گزینه ۱ مجموعه X را عددهایی در نظر بگیریم که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ باشند. این مجموعه، متمم مجموعه مورد نظر مسئله است. پس ابتدا

$n(X)$ را به دست می‌آوریم، سپس از تعداد کل عضوهای مجموعه مرجع که عددهای ۱ تا ۹۹۹ هستند، کم می‌کنیم.

$A = 2$ مضرب‌های ۲، $B = 3$ مضرب‌های ۳، $C = 5$ مضرب‌های ۵

$A \cap B = 6$ مضرب‌های ۶، $A \cap C = 10$ مضرب‌های ۱۰، $B \cap C = 15$ مضرب‌های ۱۵، $A \cap B \cap C = 30$ مضرب‌های ۳۰

$$n(A) = 2 \text{ بر } 999 = 499, \quad n(B) = 3 \text{ بر } 999 = 333$$

$$n(C) = 5 \text{ بر } 999 = 199, \quad n(A \cap B) = 6 \text{ بر } 999 = 166$$

$$n(A \cap C) = 10 \text{ بر } 999 = 99, \quad n(B \cap C) = 15 \text{ بر } 999 = 66$$

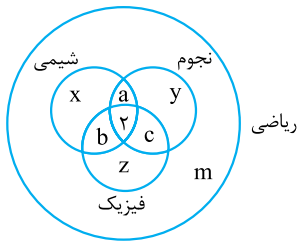
$$n(A \cap B \cap C) = 30 \text{ بر } 999 = 33$$

$$X = 5 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ مضرب‌های } A \cup B \cup C$$

$$n(X) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

$$X' = 5 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ مضرب‌های } 5 \text{ نیستند} \Rightarrow n(X') = n(M) - n(X) = 999 - 733 = 266$$



۱۷۵- گزینه ۲ با توجه به سؤال، ۵۰ نفر المپیاد ریاضی می‌خوانند که همه دانش‌آموزان هستند. در ناحیه مشترک همه مجموعه‌ها، عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$\text{هم فیزیک، هم شیمی} \Rightarrow b+2=5 \Rightarrow b=3$$

$$\text{هم فیزیک، هم نجوم} \Rightarrow 2+c=7 \Rightarrow c=5$$

$$\text{هم شیمی، هم نجوم} \Rightarrow a+2=6 \Rightarrow a=4$$

$$\text{شیمی‌ها} \Rightarrow 18 = x+a+2+b \Rightarrow 18 = x+4+2+3 \Rightarrow x=9$$

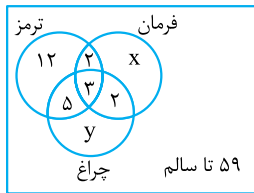
$$\text{نجوم‌ها} \Rightarrow 17 = y+a+2+c \Rightarrow 17 = y+4+2+5 \Rightarrow y=6$$

$$\text{فیزیک‌ها} \Rightarrow 24 = z+b+2+c \Rightarrow 24 = z+3+2+5 \Rightarrow z=14$$

$$\text{کل نفرات} = 50 = x+y+z+a+b+c+2+m$$

$$50 = \underbrace{9+6+14+4+3+5+2}_{43} + m \Rightarrow m=7$$

خودروها



۱۷۶- گزینه ۱ چراغ خراب‌ها = C، فرمان خراب‌ها = B، ترمز خراب‌ها = A

$$n(A \cap B) = 5, n(A \cap C) = 8, n(B \cap C) = 5, n(A \cap B \cap C) = 3$$

نمودار ون را رسم کنیم:

$$\Rightarrow n(A) = 12+2+3+5 = 22 \Rightarrow \text{نقص چراغ}$$

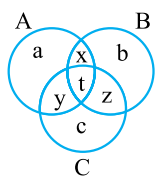
$$\text{کل خودروها} = 100 = 59+12+2+3+5+2+x+y \Rightarrow x-y=17$$

$$\text{تعداد فرمان خراب‌ها} = \text{تعداد چراغ خراب‌ها} \Rightarrow x+2+y+y = y+5+y+y \Rightarrow x-y=3$$

فقط نقص فرمان

$$\begin{cases} x+y=17 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2x=20 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=7$$

فقط نقص چراغ



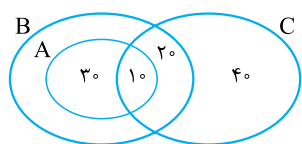
۱۷۷- گزینه ۲ برای مجموعه‌های A، B و C یک نمودار ون معمولی رسم می‌کنیم و تعداد عضوهای هر ناحیه را با یک

مجهول نشان می‌دهیم:

$$n(A-B) = a+y=3, n(B-C) = x+b=2, n(B-A) = b+z=2$$

$$n(C-A) = z+c=4, n(C-B) = y+c=5, n(A-C) = a+x=?$$

$$\begin{cases} x+b=2 \\ b+z=2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} x-z=0 \\ z+c=4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x+c=4 \\ y+c=5 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} x-y=-1 \\ a+y=3 \end{cases} \xrightarrow{(+)} a+x=2$$



۱۷۸- گزینه ۲ مجموعه دانش‌آموزان مدرسه دارای ۱۰۰ عضو است. اگر همه دانش‌آموزان عضو B یا C باشند، می‌توان نوشت:

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

$$100 = 60 + 70 - n(B \cap C) \Rightarrow n(B \cap C) = 30$$

یعنی ۳۰ دانش‌آموز از B حتماً عضو C نیستند و عبارت (پ) نادرست است. با توجه به شکل، عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

۱۷۹- گزینه ۵ همه عددهایی که نه بر ۵ و نه بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند، حذف شده‌اند. پس عددهای مضرب ۵ یا مضرب ۱۱ باقی مانده‌اند. به دنبال

۲۰۰۴ امین عدد باقی‌مانده هستیم، پس بهتر است در یک تعداد معین و متوالی بررسی کنیم که چند عدد باقی می‌ماند. باید دسته‌هایی پیدا کنیم

که تعداد عدد باقی‌مانده در آن‌ها یکسان باشد. هر دسته ۵۵ تایی از ۱ تا ۱۰۰۰۰ مناسب است، در بین عددهای ۱ تا ۵۵، ۱۱ عدد مضرب ۵، ۵ عدد مضرب ۱۱ و یک عدد، هم مضرب ۱۱ و هم مضرب ۵ است.

$$11 + 5 - 1 = 15$$

$$2004 = 15 \times 133 + 9$$

$$133 \times 55 + 33 = 7348 = \text{عدد } 2004 \text{ ام}$$

به دنبال ۲۰۰۴ امین عدد هستیم، ۲۰۰۴ را بر ۱۵ تقسیم می‌کنیم و داریم:

پس باید به نهمین عدد (یعنی ۳۳)، ۱۳۲ بار عدد ۵۵ را اضافه کنیم:

۱۸۰- گزینه ۲ عددهای روی تاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ است که در بین آنها عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ اول هستند.

$$\text{احتمال اول بودن} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

۱۸۱- گزینه ۴ احتمال را در هر گزینه محاسبه کنیم:

گزینه (۱): $\Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} > \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ احتمال مضرب ۳ \Rightarrow احتمال مضرب ۲ نبودن

گزینه (۲): $\Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ احتمال فرد بودن تاس \Rightarrow احتمال روشن شدن سکه

گزینه (۳): $\Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۶}$ احتمال دو سکه روشن شدن \Rightarrow احتمال رو آمدن یک سکه

(پشت، پشت)(رو، پشت)(پشت، رو)(رو، رو) : حالت‌های پرتاب دو سکه

گزینه (۴): $\Rightarrow \frac{۵}{۳۶} = \frac{۵}{۳۶} > \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$ احتمال مجموع دو تاس ۵ شود. احتمال مجموع دو تاس ۷ شود.

(۱، ۴)(۲، ۳)(۳، ۲)(۴، ۱) (۱، ۶)(۲، ۵)(۳، ۴)(۴، ۳)(۵، ۲)(۶، ۱)

۱۸۲- گزینه ۵ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ (اعداد ۱ تا ۱۹)، نوزده عدد است. از ۱ تا ۱۹ عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ عدد اول هستند (تعداد اعداد اول ۱ تا ۱۹ = ۸ تا).

عدد ۱، نه اول و نه مرکب است و بقیه اعداد مرکب هستند.

$۱۰ = ۱۹ - ۸ - ۱ = ۱۰$ تعداد اعداد مرکب

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال اول بودن} = \frac{۸}{۱۹} \\ \text{احتمال مرکب بودن} = \frac{۱۰}{۱۹} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{احتمال مرکب بودن}}{\text{احتمال اول بودن}} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$$

۴ = سبز ، ۵ = زرد ، ۷ = قرمز

$\frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$ احتمال سبز بودن ، $\frac{۵}{۱۶}$ احتمال زرد بودن ، $\frac{۷}{۱۶}$ احتمال قرمز بودن

۵ = ۴ + ۱ = سبز ، ۸ = ۵ + ۳ = زرد ، ۱۱ = ۷ + ۴ = قرمز

$\frac{۵}{۲۴} = \frac{۵}{۲۴}$ احتمال سبز بودن ، $\frac{۸}{۲۴} = \frac{۱}{۳}$ احتمال زرد بودن ، $\frac{۱۱}{۲۴}$ احتمال قرمز بودن

$\frac{۵}{۲۴} < \frac{۱}{۴}$

گزینه (۱) نادرست است، چون احتمال سبز بودن کم شده است:

$\frac{۱۱}{۲۴} > \frac{۷}{۱۶}$ و $\frac{۱}{۳} > \frac{۵}{۱۶}$

گزینه (۲) نادرست است، چون احتمال سبز و قرمز را افزایش داده‌ایم:

با توجه به جملات بالا گزینه (۳) درست و گزینه (۴) نادرست است.

۱۸۴- گزینه ۴ اگر $P(A - B) = P(A) - P(B)$ باشد، یعنی:

$n(A - B) = n(A) - n(B) \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset \Rightarrow P(B - A) = 0$

۱۸۵- گزینه ۲ تعداد مهره‌های زرد را y در نظر بگیریم:

$\frac{y}{۱۴+y} = 0/۴۴ \Rightarrow \frac{y}{۱۴+y} = \frac{۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{y}{۱۴+y} = \frac{۲۲}{۵۰} \Rightarrow ۵۰y = ۳۰۸ + ۲۲y$

$\Rightarrow \frac{۵۰y - ۲۲y}{۲۸y} = \frac{۳۰۸}{۲۸} \Rightarrow y = \frac{۳۰۸}{۲۸} = ۱۱$

۱۸۶- گزینه ۱ تعداد کل حالت‌هایی که می‌توانیم یک واحد را بخریم، $۵۲ = ۱۳ \times ۴$ است. واحدهایی که حرف D را دارند، ۱۳ تا هستند.

$۱D, ۲D, ۳D, \dots, ۱۳D$ و تعداد واحدهایی که عدد ۸ را دارند، ۴ تا است: $۸A, ۸B, ۸C, ۸D$. که $۸D$ را دو بار نوشتیم.

احتمال مورد نظر $= \frac{۱۶}{۵۲} = \frac{۴}{۱۳}$ $\Rightarrow ۱۳ + ۴ - ۱ = ۱۶$ کل حالت‌های مطلوب

۱۸۷- گزینه ۱ همه برداشتن‌های قبلی هیچ تأثیری روی برداشتن فردا ندارد. چون دو حالت ۴۷ یا ۷۳ را داریم، احتمال برداشتن $\frac{۱}{۵۰} = \frac{۲}{۱۰۰}$

می‌باشد.

۱۸۸- گزینه ۴ وضعیت فرزند اول معلوم است، سه فرزند دیگر یا باید (پسر، پسر، پسر) یا (دختر، دختر، دختر) باشد. در کل 2^3 حالت نیز برای این سه فرزند داریم.

$$\text{احتمال هم جنس بودن سه فرزند آخر} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۱۸۹- گزینه ۲ در فضای نمونه $S = \{1, a, 2, b, 3, c, 4, d\}$ به شرطی احتمال پیشامد برابر $\frac{3}{4}$ می شود که تعداد عضو پیشامد ۶ تا باشد، پس تعداد پیشامدهای شش عضوی یا همان تعداد زیرمجموعه های شش عضوی مورد نظر است.

$$\text{تعداد ۲ عضوی ها در مجموعه ۸ عضوی} = \text{تعداد ۶ عضوی ها در مجموعه ۸ عضوی} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

۱۹۰- گزینه ۴ با تجزیه عدد 60 ، تعداد شمارنده های آن را به دست می آوریم:

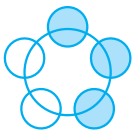
$$60 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \Rightarrow \text{تعداد شمارنده ها} = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

$$\text{احتمال انتخاب شمارنده کوچکتر از } 7 \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

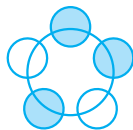
۱۹۱- گزینه ۵ در این جا پاسخ دادن به هر سؤال مانند پرتاب سکه است. یعنی پاسخ دادن به سؤال، 2^3 حالت دارد. هر کدام را یا درست می گوید یا غلط. حالت های برنده = (درست، درست، غلط) (درست، غلط، درست) (غلط، درست، درست) (درست، درست، درست)

$$\text{احتمال برنده شدن} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

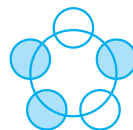
۱۹۲- گزینه ۳ حالت های مختلف دستبند، با سه مهره سیاه و دو مهره سفید را بکشیم:



(۱)



(۲)



(۳)

صبر کنید!!!

حالت جدیدی وجود ندارد، در اصل شکل (۲) و (۳) هم مساوی است (از نظر قرار گرفتن مهره ها نسبت به هم). پس در کل ۲ تا دستبند مختلف می توان ساخت که در هیچ کدام یک مهره سیاه بین دو مهره سفید قرار نمی گیرد و احتمال مورد نظر صفر است.

دقت کنید!!! بدون این صحبت ها هم چون سه تا مهره سیاه داریم و دو تا سفید، اصلاً این حالت به وجود نخواهد آمد.

۱۹۳- گزینه ۳ تعداد کل حالات پرتاب دو تاس، 36 تا است و حالت هایی که مجموع عددهای دو تاس ۴ است، عبارتند از: $(1, 3)$ ، $(2, 2)$ و $(3, 1)$ ؛ یعنی ۳ حالت.

$$\text{احتمال ۴ شدن مجموع اعداد دو تاس} = \frac{3}{36}$$

۱۹۴- گزینه ۲ فقط ۳ حالت وجود دارد که حاصل جمع عددهای دو تاس بیشتر از ۱۰ شود.

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow (6, 6) \Rightarrow \text{حاصل جمع} = 12 \Rightarrow (6, 5), (5, 6) \Rightarrow \text{حاصل جمع} = 11$$

حاصل جمع	۲	۳	۵	۷	۱۱
حالت های مختلف				(۱, ۶)	
			(۱, ۴)	(۲, ۵)	
	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۲, ۳)	(۳, ۴)	(۵, ۶)
		(۲, ۱)	(۳, ۲)	(۴, ۳)	(۶, ۵)
			(۴, ۱)	(۵, ۲)	
			(۶, ۱)		

۱۹۵- گزینه ۱ برای درک بهتر حالت های مختلف مجموع دو تاس،

به بخش درس نامه مراجعه کنید و نمودار داده شده را ببینید. اما برای حل سؤال به شکل عادی می دانیم بیشترین حاصل جمع عدد دو تاس ۱۲ و کمترین آن ۲ است. پس عددهای اول بین ۲ تا ۱۲ را با حاصل جمع دو تاس می توان ساخت.

$$15 = 1 + 2 + 4 + 6 + 2$$

$$\text{احتمال اول بودن حاصل جمع} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

تعداد کل حالت هایی که حاصل جمع عدد اول می شود:

۱۹۶- گزینه ۲ تعداد کل حالت را به دست بیاوریم: $۶^۲ \times ۲^۲$

اما حالت‌های مطلوب:

فرد	زوج	رو یا پشت	مفادوت با
حالت ۳	حالت ۳	حالت ۲	حالت ۱ = $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱$
تاس (۱)	تاس (۲)	سکه (۱)	سکه (۲)

به اندازه همین، تعداد حالت دوباره وجود دارد. چون تاس (۲) می‌تواند فرد و تاس (۱) می‌تواند زوج باشد.

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۳^۲ \times ۲^۲}{۶^۲ \times ۲^۲} = \left(\frac{۳}{۶}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$g =$ تعداد سبزه‌ها ، $b =$ تعداد آبی‌ها ، $y =$ تعداد زردها

$$(y = 3g, g = 3b) \Rightarrow y = 3(3b) \Rightarrow y = 9b$$

$$\text{احتمال زردبودن} = \frac{y}{y + b + g} = \frac{9b}{9b + b + 3b} = \frac{9b}{13b} = \frac{9}{13}$$

۱۹۸- گزینه ۲ خانم مورد بحث ۳ فرزند دارد، در کل $۲^۳$ حالت می‌توان برای فرزندان او در نظر گرفت. اما این بار کمی فرق می‌کند، چون می‌دانیم

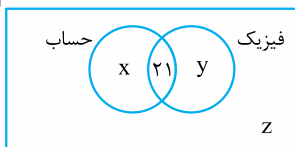
$$n(S) = 7$$

برای فرزندان او حالت (پسر، پسر، پسر) نداریم. پس:

حالت مطلوب وقتی است که در بین فرزندان بیش از یک دختر داشته باشیم. یعنی حالت‌های (دختر، دختر، پسر)، (دختر، پسر، دختر)، (پسر، دختر، دختر) و (دختر، دختر، دختر) و احتمال موردنظر $\frac{4}{7}$ خواهد بود.

۱۹۹- گزینه ۱ نمودار ون مسئله را رسم می‌کنیم:

آموزشگاه



$$n(\text{آموزشگاه}) = 200$$

$$y + 21 = 52 \Rightarrow y = 31 \quad x + 21 = 45 \Rightarrow x = 24$$

تعداد دانش‌آموزان نه حسابی، نه فیزیک $z = 124 = 200 - 24 - 21 - 31$

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{z}{200} = \frac{124}{200} = \frac{62}{100} = 0.62$$

۲۰۰- گزینه ۲ بیایید ساده فکر کنیم، از این اصل ضرب و این‌ها الان استفاده نکنیم. موقعیت A و B نسبت به هم سه حالت دارد:

(۱) B دست راست A است. (۲) B روبه‌روی A است. (۳) B دست چپ A است. $\frac{1}{3} =$ احتمال روبه‌رو بودن A و B

۲۰۱- گزینه ۱ برای فرد یا زوج بودن عدد، یکان آن به ترتیب باید فرد یا زوج باشد. برای یکان می‌توانیم ۹ انتخاب داشته باشیم که ۵ تا از آن‌ها فرد

است، پس احتمال فردبودن $\frac{5}{9}$ است.

۲۰۲- گزینه ۲ امتیاز مرحله ۱۱ام را X در نظر بگیرید. برای ورود به مرحله نهایی، میانگین حداقل ۱۸۸ باید باشد.

$$x + \text{مجموع قبلی} = 188 = \frac{10 + 1}{10 + 1}$$

$$1870 = 10 \times 187 = 10 \times \text{میانگین قبلی} \Rightarrow 188 = \frac{1870 + x}{11} \Rightarrow 188 \times 11 - 1870 = x$$

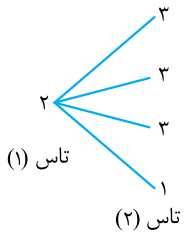
$$\Rightarrow 2068 - 1870 = x \Rightarrow x = 198$$

یعنی او باید حداقل ۱۹۸ را به دست بیاورد، امتیازهای ممکن او از ۱۸۱ تا ۲۰۰ است که شامل ۲۰ عدد است. او در حالت‌های ۱۹۸، ۱۹۹ و ۲۰۰

$$\Rightarrow \text{به مرحله بعدی می‌رود.} \quad \text{احتمال صعود} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0.15 = 15\%$$

۲۰۳- گزینه ۱ اصل ضرب... نه!

بیایید واکن‌ها را بچینیم. در مورد A و B، همیشه دو حالت پیش می‌آید: یا A نسبت به B به لوکوموتیو نزدیک‌تر است یا B نسبت به A به لوکوموتیو نزدیک‌تر است. پس احتمال نزدیک‌تر بودن A به لوکوموتیو برابر $\frac{1}{2}$ است.



۲۰۴-گزینه ۲ دو تاس را می‌ریزیم، در کل ۳۶ حالت به وجود می‌آید. برای فرد شدن مجموع دو تاس، باید یکی زوج و دیگری فرد بیاید. حالت‌های ممکن به شکل مقابل است:

$$\Rightarrow 4 \times 2 = 8 \text{ حالت}$$

هر تاس دو تا عدد ۲ دارد

همین ۸ حالت را وقتی برای تاس (۲)، عدد ۲ ظاهر شود، نیز داریم. کل حالت‌های مطلوب = $8 + 8 = 16$.

$$\text{احتمال فرد بودن حاصل جمع} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

این مسئله را می‌توانستیم با اصل ضرب و جمع یا احتمال مستقل هم حل کنیم اما کشف ریزه کاری و این‌که ببینید راه دیگری هم هست، خیلی بهتر است.

۲۰۵-گزینه ۲ فرض کنیم مجموع عدد دو تاس $2x$ شود، قطر همان دایره است که عدد مساحتش از عدد محیطش کوچک‌تر است.

$$2 > x \Rightarrow 2x > x^2 \Rightarrow 2\pi x > \pi x^2 \Rightarrow \text{مساحت} > \text{محیط} \Rightarrow 2\pi x = 2\pi x^2 \Rightarrow \text{محیط} = \text{مساحت} \Rightarrow x = \text{شعاع} \Rightarrow 2x = \text{قطر}$$

$$\Rightarrow 4 > 2x \Rightarrow 2x = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \Rightarrow \text{مجموع دو تاس} = 2 \text{ یا } 4$$

مجموع دو تاس ۱ نمی‌شود، پس $(2x)$ به دست آمده مخالف ۱ خواهد بود. مجموع دو تاس می‌تواند ۲ یا ۳ باشد که در کل سه حالت دارد $(1,1)$ ،

$$(1,2) \text{ و } (2,1). \text{ احتمال مورد نظر} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۲۰۶-گزینه ۲ بیایید دو عدد x و y را دو تاس با 50° وجه در نظر بگیریم که عددهای ۱ تا 50° روی آن‌ها نوشته شده‌اند. پس در کل $50^2 = 2500$

حالت داریم. حالا باید حالت‌هایی را که حاصل جمع دو عدد x و y برابر 50° است به دست آوریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
y	۵۰	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	...	۴	۳	۲	۱

در کل ۵۰ حالت \Rightarrow

$$\text{احتمال حاصل جمع } 51 = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}$$

۲۰۷-گزینه ۲ وقتی ۱۴ اتومبیل در ۱۶ جای پارک، توقف می‌کنند، ۱۴ جای پارک اشغال می‌شود و دو تا باقی می‌ماند. اما پندار به شرطی می‌تواند

پارک کند که این دو جای پارک خالی، کنار هم باقی مانده باشند. در ۱۶ مکان پشت سر هم، ۱۵ حالت داریم که دو مکان چسبیده به هم انتخاب

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت مطلوب} = 15$$

کنیم. تعداد حالت‌هایی که دو جای پارک از ۱۶ جای پارک خالی بماند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضو از مجموعه ۱۶ عضو است.

$$\text{احتمال پارک کردن} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۰۸-گزینه ۲ احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\text{انتخاب ۵ از ۱۰}}{2^{10}} = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{120} = \frac{252}{1024}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\text{انتخاب ۵۰ از ۱۰۰}}{2^{100}} = \frac{100!}{50! \times 50!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 51}{50!}$$

$P(A) > P(B) > P(C) \Rightarrow$ گزینه (۳) از این عدد صورت خیلی بزرگ‌تر است و در نتیجه:

۲۰۹-گزینه ۲ برای آن که حاصل ضرب سه عدد انتخابی، توانی از ۲ نباشد، حداقل یکی از عددهای انتخابی باید توانی از ۲ نباشد (مثل ۶ که فقط

مضرب ۲ نیست و مضرب ۳ هم هست). حالت‌بندی زیر نشان می‌دهد که این‌طور انتخاب کردن ساده نیست.

سارا	۲	۳	۳	۳	۳	۲	۲
روزبه	۳	۲	۳	۳	۲	۳	۲
اشکان	۳	۳	۲	۳	۲	۲	۳

انتخاب عددهای ۲، ۴ یا ۸ (توانی از ۲) را با \square و انتخاب عددهای ۶ یا ۱۰ را با \square نشان داده‌ایم، به جای این که این حالت‌ها را بشماریم، حالت‌هایی را بشماریم که همه \square را انتخاب کنند. متمم این مجموعه برابر جواب مسئله است:

$$\text{احتمال انتخاب عددی که توان ۲ برای هر کدام از نفرات} = \frac{3}{5} = \frac{n(\{2, 4, 8\})}{n(\{2, 4, 6, 8, 10\})}$$

$$1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125} = \text{احتمال توان ۲ نشدن حاصل ضرب} \Rightarrow \frac{27}{125} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \text{احتمال توان ۲ شدن حاصل ضرب} \Rightarrow \text{احتمال انتخاب‌ها مستقل است.}$$

۲۱۰- گزینه ۵ عدد m^n که $m \in \{11, 13, 15, 17, 19\}$ و $n \in \{1999, 2000, 2001, \dots, 2018\}$ در حالت‌های زیر دارای رقم یکان ۱ است:

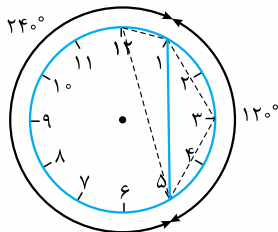
اگر $m = 11 \Rightarrow n =$ هر عدد دلخواه \Rightarrow احتمال 11^n که رقم یکان ۱ دارد $= \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$
 احتمال انتخاب ۱۱ از مجموعه‌اش

اگر $m = 13$ یا $17 \Rightarrow n =$ مضرب ۴ باشد \Rightarrow احتمال 13^n و 17^n با رقم یکان ۱ $= \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}$
 $n \in \{2000, 2004, \dots, 2016\} \Rightarrow$ تا ۵

هیچ رقم یکان m^n نمی‌شود و همیشه مساوی ۵ است. $m = 15 \Rightarrow$

اگر $m = 19 \Rightarrow n =$ زوج باشد \Rightarrow احتمال 19^n با رقم یکان ۱ $= \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$
 $n \in \{2000, 2002, 2004, \dots, 2016\}$
 تا ۱۰

احتمال m^n با رقم یکان ۱ $= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$



۲۱۱- گزینه ۴ عددهای ساعت آن را به ۱۲ بخش مساوی تقسیم کرده است؛ یعنی اندازه کمان بین هر دو

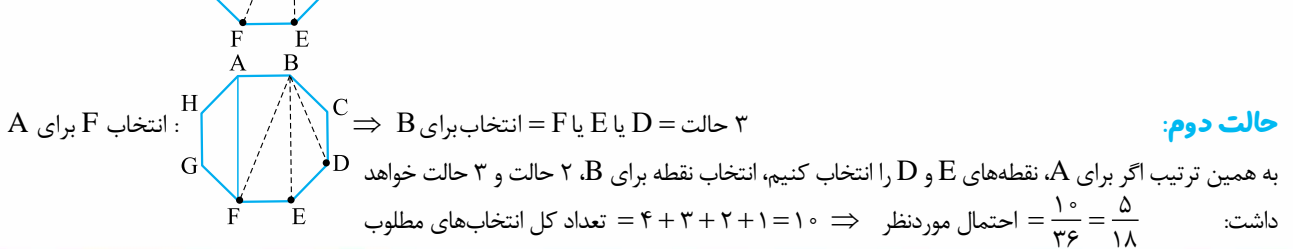
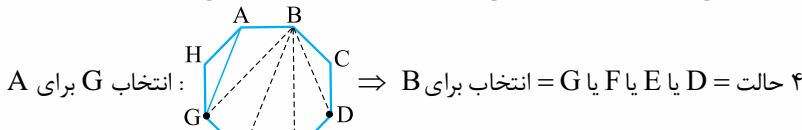
عدد ساعت $\frac{360}{12} = 30$ درجه است. اندازه کمان بین دو شماره برداشته شده ۱ و ۵ (همان دو رأس مثلث) برابر $4 \times 30 = 120$ درجه از سمت راست و $8 \times 30 = 240$ از سمت چپ یعنی رأس سوم.

اگر روی عددهای ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ قرار بگیرد، زاویه این رأس مثلث برابر $\frac{120}{3} = 60$ می‌شود و اگر رأس سوم روی عددهای ۲، ۳، ۴ قرار بگیرد، زاویه این رأس برابر $\frac{240}{3} = 120$ می‌باشد. پس رأس سوم نباید روی شماره‌های ۲ یا ۳ یا ۴ قرار بگیرد.

اما همه عددهای ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ هم برای تشکیل مثلثی که همه زاویه‌های آن تند باشد، مناسب نیستند. چون اگر رأس سوم روی عددهای ۱۲ یا ۱۱ قرار بگیرد، زاویه رأس ۱ باز یا قائمه می‌شود. هم‌چنین اگر رأس سوم روی عددهای ۶ یا ۷ قرار بگیرد زاویه رأس ۵ باز یا قائمه می‌شود.

در نتیجه فقط شماره‌های ۸، ۹، ۱۰ برای رأس سوم مطلوب هستند. در نتیجه: $\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$ احتمال تشکیل مثلث حاده‌الزاویه

۲۱۲- گزینه ۴ تعداد کل انتخاب‌های ممکن $n(S) = 6 \times 6 = 36$ است. برای آن که طبق صورت سؤال به سه ناحیه در ۸ ضلعی برسیم، حالت‌های زیر وجود دارد (دقت کنید که برای انتخاب اول که به A وصل می‌شود، انتخاب H و C بی‌فایده است؛ چون انتخاب دوم بی‌نتیجه خواهد بود).



۲۱۳- گزینه ۲ در پرتاب چهار سکه، در کل $2^4 = 16$ حالت وجود دارد.

تعداد حالت‌هایی که حداقل یک «رو» ظاهر شود، متمم تعداد حالت‌هایی است که اصلاً «رو» ظاهر نشود (همه «پشت» بیاید) که فقط ۱ حالت است.

$$\text{احتمال حداقل یک «رو»} = \frac{15}{16} = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های حداقل یک «رو»}$$

۲۱۴- گزینه ۱ کامپیوتر هر بار باید از بین عددهای ۱ تا ۲۰ که ۲۰ عدد می‌شوند، فقط یکی از عددهای $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را انتخاب کند. پس احتمال

$$\text{هر انتخاب موردنظر} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ می‌شود. هر انتخاب مستقل از انتخاب دیگر است:}$$

$$\text{احتمال برداشتن سه } X = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \quad 1 \leq X \leq 5$$

۲۱۵- گزینه ۱ در پرتاب دو تاس متفاوت، سه وضعیت به وجود می‌آید:

① عدد دو تاس برابر است که ۶ حالت دارد. ② عدد تاس اول بزرگ‌تر است. ③ عدد تاس دوم بزرگ‌تر است.

تعداد حالت‌های وضعیت‌های (۲) و (۳) مساوی است. چون در پرتاب دو تاس، در کل $36 = 6 \times 6$ حالت داریم، تعداد حالت‌هایی که عدد تاس دوم

$$\text{بزرگ‌تر باشد، برابر است با:}$$

$$\frac{36 - 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{احتمال بزرگ‌تر بودن عدد تاس دوم} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = \frac{10}{24}$$

۲۱۶- گزینه ۲ انتخاب هر جعبه برای قراردادن توپ در آن، مستقل از یکدیگر است. اولین توپ را برمی‌داریم، احتمال درست قراردادن آن در جعبه

$\frac{1}{4}$ است. حالا یک جعبه کم شده است، احتمال درست قراردادن دومین توپ در جعبه $\frac{1}{3}$ است. احتمال درست قراردادن توپ‌های سوم و چهارم

$$\text{نیز به ترتیب } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{1} \text{ است و احتمال درست قرار گرفتن توپ‌ها برابر } \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{24} \text{ است.}$$

۲۱۷- گزینه ۵ حاصل ضرب عددها وقتی منفی می‌شود که یکی از عددهای روشده مثبت و عدد روشده دیگر منفی باشد:

$$S = \{2, 1, 0, -1, -2, -3\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$\text{احتمال منفی بودن تاس اول و مثبت بودن تاس دوم} = \frac{n(\{-1, -2, -3\})}{n(S)} \times \frac{n(\{1, 2\})}{n(S)} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{احتمال مثبت بودن تاس اول و منفی بودن تاس دوم} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۱۸- گزینه ۲ اگر گوی‌های برداشته‌شده از دو جعبه هم‌رنگ باشند، رنگ‌های آن‌ها نمی‌تواند سفید باشد، چون جعبه (۲) رنگ سفید ندارد.

$$\text{احتمال برداشتن گوی بنفش از جعبه (۲)} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال برداشتن گوی بنفش از جعبه (۱)} = \frac{3}{1+3+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{احتمال برداشتن گوی طلایی از جعبه (۲)} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال برداشتن گوی طلایی از جعبه (۱)} = \frac{2}{1+3+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال برداشتن دو گوی بنفش} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \text{احتمال برداشتن دو گوی طلایی} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \text{احتمال هم‌رنگ بودن} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

۲۱۹- گزینه ۲ وقتی نیاز به برگزاری مسابقه سوم داریم که هر کدام از تیم‌ها در یکی از دو مسابقه اولیه برنده و در دیگری بازنده شوند.

$$\text{احتمال پیروزی برزیل در هر بازی} = 100\% - 60\% = 40\% = \frac{40}{100} \Rightarrow \text{احتمال پیروزی ایران در هر بازی} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$$\text{احتمال حالت اول} = \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{2400}{10000} = \frac{24}{1000}$$

حالت اول:

$$\text{احتمال حالت دوم} = \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{2400}{10000} = \frac{24}{1000}$$

حالت دوم:

$$\text{احتمال نیاز به مسابقه سوم} = \frac{24}{1000} + \frac{24}{1000} = \frac{48}{1000} = 4.8\%$$

۲۲۰- گزینه ۱ در این سؤال احتمال برداشتن هر گوی مستقل از برداشتن گوی‌های دیگر است. یعنی در برداشتن گوی اول، احتمال برداشتن هر کدام از آن‌ها $\frac{1}{4}$ است. در برداشتن گوی دوم نیز احتمال برداشتن هر کدام از گوی باقی‌مانده برابر $\frac{1}{8}$ است و در برداشتن گوی سوم هم این احتمال $\frac{1}{7}$ است. در نتیجه هر سه عددی که انتخاب می‌کنید تا از برداشتن گوی‌ها حاصل شود، دارای احتمال $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{224}$ است. پس برداشتن اعداد روی یک سطر یا ستون یا قطر نیز $\frac{1}{224}$ است.

ما در این جا، ۳ سطر، ۳ ستون و ۲ قطر داریم که احتمال برداشتن اعداد روی آن‌ها برابر است با:

$$8 \times \frac{1}{224} = \frac{8}{224}$$

۲۲۱- گزینه ۲ وقتی یک هرم چهاروجهی را می‌اندازیم یک وجه آن که قاعده است، روی زمین قرار گرفته و دیده نمی‌شود. برای آن که بتوانیم با وجه‌هایی که دیده می‌شوند عدد ۲۰۱۷ را بسازیم، به حداقل یکی از رقم‌های ۰، ۱، ۷ و ۲ نیاز داریم. پس اگر یکی از این رقم‌ها اصلاً دیده نشوند، نمی‌توان ۲۰۱۷ را ساخت؛ یعنی در حالتی که به طور مثال همه رقم‌های ۲ در وجه پایین قرار بگیرند. پس احتمال آن که همه رقم‌های ۱ یا ۲ یا ۷ در وجه پایینی قرار بگیرند را محاسبه کرده و از عدد ۱ کم می‌کنیم:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = \text{تعداد کل حالت‌ها برای عددهای وجه‌های پایینی}$$

۴ حالت = تعداد حالاتی که عددهای وجه پایینی همگی مساوی باشند

پس احتمال مساوی بودن رقم‌های وجه پایینی برابر $\frac{4}{4^4}$ است.

$$\Rightarrow \text{احتمال ساختن عدد } 2017 = 1 - \frac{4}{4^4} = 1 - \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

۲۲۲- گزینه ۵ برای آن که حاصل $ad - bc$ زوج باشد، ad و bc هر دو باید فرد یا هر دو زوج باشند. برای فرد و زوج بودن ضرب‌های ad و bc حالت‌های مقابل وجود دارد:

زوج = زوج \times زوج و زوج \times زوج و زوج \times فرد و زوج \times فرد و زوج \times فرد و زوج \times فرد
یعنی به طور جداگانه ad و bc با احتمال $\frac{1}{4}$ فرد و با احتمال $\frac{3}{4}$ زوج هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال فرد بودن هم‌زمان } ad \text{ و } bc = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ \text{احتمال زوج بودن هم‌زمان } ad \text{ و } bc = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

۲۲۳- گزینه ۴ کمی ساده‌تر نگاه کنیم. احتمال آن که مجموع عددهای روشده برابر ۷ باشد، چه قدر است؟ خوب، همه عددهای روشده باید برابر ۱

باشد که فقط یک حالت دارد، پس جواب $\frac{1}{6}$ است. حالا احتمال آن که مجموع عددهای روشده برابر ۴۲ باشد، چه قدر است؟ خوب، همه عددهای

روشده باید برابر ۶ باشد که فقط یک حالت دارد، پس جواب این هم $\frac{1}{6}$ است.

حالا در حالت کلی می‌توان گفت، یک حالت قرینه در این مسئله وجود دارد. یعنی اگر دو عدد متفاوت به ترتیب از ۴۲ و ۷، فاصله مساوی داشته باشند، احتمال یکسان دارند. اگر فاصله را x در نظر بگیریم، می‌توان گفت: دو عدد مجموع با احتمال برابر $x + 7$ و $42 - x$ است که در این جا:

$$7 + x = 42 - x \Rightarrow x = 17.5$$

۲۲۴- گزینه ۴ حل مسئله را دسته‌بندی می‌کنیم:

حالت اول: گوی اولی برابر ۱ باشد، آن‌گاه گوی دوم باید ۲ یا ۳ باشد تا در گوی سوم، حاصل جمع از ۴ عبور کند.

$$\Rightarrow \text{احتمال حالت اول} = (\text{احتمال ۱ بودن گوی اول}) \times (\text{احتمال ۲ یا ۳ بودن گوی دوم}) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

احتمال ۲ بودن گوی اول

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

حالت دوم: گوی اولی برابر ۲ باشد، پس گوی دوم فقط می‌تواند ۱ باشد تا در گوی سوم، حاصل جمع بیش از ۴ شود.

احتمال ۱ بودن گوی اول

احتمال ۳ بودن گوی اول

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

حالت سوم: گوی اولی برابر ۳ باشد و گوی دوم باید ۱ باشد.

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

۲۲۵-گزینه ۲ برداشتن بدون جای گذاری، یعنی این که اگر سنگی را برداریم به کیسه برنمی‌گردد. احتمال هم‌رنگ بودن دو سنگ را برای کیسه

اول به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{احتمال قرمزبودن دو سنگ در کیسه اول} &= \frac{2}{2+2} \times \frac{1}{2+1} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال آبی‌بودن دو سنگ در کیسه اول} &= \frac{2}{2+2} \times \frac{1}{1+2} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} \text{احتمال هم‌رنگ در کیسه اول} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{احتمال قرمزبودن دو سنگ در کیسه دوم} &= \frac{2}{2+2+g} \times \frac{1}{2+1+g} = \frac{2}{4+g} \times \frac{1}{3+g} = \frac{2}{(4+g)(3+g)} \\ \text{احتمال آبی‌بودن دو سنگ در کیسه دوم} &= \frac{2}{2+2+g} \times \frac{1}{1+2+g} = \frac{2}{4+g} \times \frac{1}{3+g} = \frac{2}{(4+g)(3+g)} \\ \text{احتمال سبزبودن دو سنگ در کیسه دوم} &= \frac{g}{2+2+g} \times \frac{g-1}{2+2+g-1} = \frac{g}{4+g} \times \frac{g-1}{3+g} = \frac{g(g-1)}{(4+g)(3+g)} \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(+)} \text{احتمال هم‌رنگ بودن در کیسه دوم} = \frac{2}{(4+g)(3+g)} + \frac{2}{(4+g)(3+g)} + \frac{g(g-1)}{(4+g)(3+g)} = \frac{4+g(g-1)}{(4+g)(3+g)}$$

$$\text{احتمال هم‌رنگ بودن دو سنگ برداشته‌شده از هر کیسه مساوی است.} \Rightarrow \frac{4+g(g-1)}{(4+g)(3+g)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4+g^2-g}{g^2+7g+12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3(4+g^2-g) = g^2+7g+12 \Rightarrow 3g^2+3g-3g = g^2+7g+12 \Rightarrow 3g^2-3g-g^2-7g = 0$$

$$\Rightarrow 2g^2-10g = 0 \Rightarrow g(2g-10) = 0 \Rightarrow g = 0 \text{ یا } 2g-10 = 0 \Rightarrow g = 5$$

۲۲۶-گزینه ۴ برای برنده شدن سینا، باید کوروش و امیر در پرتاب‌های خود بازنده شوند. موضوع مهم این است که سینا می‌تواند پس از پرتاب سوم

برنده شود، اما ممکن است برنده هم نشود و حالا در پرتاب ششم فرصت دارد برنده شود؛ اما باز هم ممکن است بازی ادامه یابد و حالا در پرتاب نهم فرصت دارد. این روند تا بی‌نهایت ادامه دارد. در پرتاب‌های قبل از سینا همه باید بازنده باشند، حتی خود سینا در پرتاب‌های قبل از پرتاب آخر.

$$\text{احتمال برد سینا} = \text{احتمال باخت کوروش} \times \text{احتمال باخت امیر} \times \text{احتمال باخت سینا} = \left(\frac{3}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)$$

برد سینا) × (باخت امیر) × (باخت کوروش) × (باخت سینا) × (باخت امیر) × (باخت کوروش) = سینا در پرتاب ششم برنده شود

$$= \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{6}$$

برد سینا
↑
باخت‌های امیر

$$\text{سینا در پرتاب نهم برنده شود} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

باخت‌های سینا
↓
باخت‌های کوروش

$$\text{احتمال برد سینا} = P = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) + \dots$$

در عبارت بالا هر عدد در $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$ ضرب شده است تا عدد بعدی به دست بیاید.

$$\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \times P = \left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \dots$$

اگر دو عبارت را از هم کم کنیم، همه جمله‌های دوم به بعد عبارت اولی حذف می‌شوند و فقط عدد اول باقی می‌ماند:

$$P - \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \times P = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow P - \frac{5}{18}P = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{13}{18}P = \frac{1}{18} \Rightarrow P = \frac{1}{18} \div \frac{13}{18} = \frac{1}{13}$$

۲۲۷-گزینه ۲ تعداد عددهای سه‌رقمی بدون تکراری را به دست می‌آوریم. ابتدا حالت‌های صدگان را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{9}{1} \times \frac{9}{1} \times \frac{8}{1} \Rightarrow 9 \times 9 \times 8 = 648 \Rightarrow 648 \times 2 = 1296$$

هر رمز دو دقیقه طول می‌کشد.

۲۲۸- گزینه ۲ دو انتخاب داریم: مستقیم از A به B برویم یا ابتدا به C رفته و سپس به B برویم:

۳ مسیر = مستقیم از A به B
 \Rightarrow کل حالت ها $= 3 + 6 = 9$
 $2 \times 3 = 6 = \frac{\text{حالت ۳}}{\text{C} \rightarrow \text{B}} = \frac{\text{حالت ۲}}{\text{A} \rightarrow \text{C}}$ از A به C و سپس C به B

۲۲۹- گزینه ۱ با توجه به تعداد رنگ‌های استفاده شده دسته‌بندی را انجام دهیم:

حالت ۱ \Rightarrow دو رنگ استفاده کنیم $4 \times 3 = 12 = 4 \times 3$
 حالت ۲ \Rightarrow سه رنگ استفاده کنیم $4 \times 3 \times 2 = 24$
 \Rightarrow کل حالت ها $= 4 + 12 + 24 + 24 = 64$

۲۳۰- گزینه ۲ از گوشه شکل آغاز کنیم. مربع گوشه را می‌توان به ۴ حالت مختلف رنگ کرد، اما سه مربع مجاور به ۲، ۳ و ۱ حالت رنگ می‌شوند. مربع A نباید هم‌رنگ دو مربع با حالت‌های ۲ و ۱ باشد اما می‌تواند ۲ رنگ داشته باشد. پس مربع A، ۲ حالت اما مربع B با مربع A و مربع‌های حالت‌های ۲ و ۱ مجاور است و خود B فقط یک حالت دارد.

$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48 =$ تعداد کل حالت‌های رنگ‌آمیزی \Rightarrow

۴	۲	۲	A
۳	۱	۱	B

۲۳۱- گزینه ۲ آبی = a، قرمز = g و زرد = z

a	z	g	a
z	g	a ^(۱)	z
a	z	g	a
z	g	a	z

از مستطیل گوشه چپ بالا شروع کنیم، می‌توانیم آن را با a رنگی کنیم اما دو مستطیل پایین آن باید متفاوت باشند؛ یعنی g و z برای رنگ کردن مستطیل سمت راست a، چاره‌ای جز رنگ کردن z نداریم. برای رنگ کردن مستطیل (۱) نیز چاره‌ای جز رنگ کردن با a نداریم و بقیه مستطیل‌ها با همین الگو رنگ خواهند شد.

پس برای انتخاب رنگ گوشه چپ راست ۳ انتخاب داریم و دو مستطیل پایین آن نیز در کل ۲ حالت دارند. پس کل حالت‌های رنگی $3 \times 2 = 6$ است.

۲۳۲- گزینه ۲ عددهای ۱ تا ۸ را می‌توان به ۴ دسته با مجموع‌های برابر تقسیم کرد: (۱، ۸)، (۲، ۷)، (۳، ۶)، (۴، ۵).

پس هر دسته در مثلث‌های یک لوزی قرار خواهند گرفت. برای لوزی اول ۴ حالت، لوزی دوم ۳ حالت، لوزی سوم، ۲ حالت و لوزی آخر یک حالت داریم. اما هر لوزی دو حالت دیگر نیز دارد، چه حالتی؟ این که مثلاً ۸ بالا باشد یا ۱ بالا باشد؟ یا ۷ سمت راست باشد یا ۲ سمت راست باشد؟

۲ حالت ۲ حالت ۲ حالت ۲ حالت
 $4! \times 16 = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(2 \times 2 \times 2 \times 2) = 4! \times 16$

۲۳۳- گزینه ۲ برای حل این مسئله بیشترین مقدار ممکن را به دست آورده و کوچک‌ترین مقدار را نیز محاسبه می‌کنیم:

کم‌ترین $\Rightarrow 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow$ هر سه تاس ۱ بیاید
 بیشترین $\Rightarrow 6 + 6 + 6 = 18 \Rightarrow$ هر سه تاس ۶ بیاید

حالا سؤال این جاست. آیا همه عددهای بین ۳ و ۱۸ را می‌توان ساخت؟ جواب: «بله».

جدول الگویابی:

تاس اول	۱	۲	۲	۲	۳	۳	...	۵	۶	۶	۶
تاس دوم	۱	۱	۲	۲	۲	۳	...	۵	۵	۶	۶
تاس سوم	۱	۱	۱	۲	۲	۲	...	۵	۵	۵	۶
جمع سه تاس	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸

از ۳ تا ۱۸، $1 + (18 - 3) = 16$ عدد وجود دارد.

۲۳۴- گزینه ۴ عدد ۱۰۰۰، رقم ۹ ندارد و آن را کنار می‌گذاریم. عددهای ۱ تا ۹۹۹ را به سه دسته تقسیم می‌کنیم. یک‌رقمی‌ها، دورقمی‌ها و سه‌رقمی‌ها.

تا ۸ = تعداد اعداد یک‌رقمی بدون رقم ۹
 $8 \times 9 = 72 = \frac{\text{تعداد اعداد دورقمی بدون رقم ۹}}{\text{حالت‌های دهگان}} \times \frac{\text{حالت‌های یکان}}{\text{حالت‌های دهگان}}$
 $8 \times 9 \times 9 = 648 = \frac{\text{تعداد اعداد سه‌رقمی بدون رقم ۹}}{\text{حالت‌های صدگان}} \times \frac{\text{حالت‌های دهگان}}{\text{حالت‌های صدگان}} \times \frac{\text{حالت‌های یکان}}{\text{حالت‌های صدگان}}$

۹ ندارند $8 + 72 + 648 + 1 = 729$ = تعداد اعدادی که رقم ۹ ندارند
 حالا از اصل متمم استفاده می‌کنیم؛ یعنی عددی که رقم ۹ ندارند را از کل عددها کم می‌کنیم: $1000 - 729 = 271$ = تعداد اعدادی که رقم ۹ دارند.

۲۳۵- گزینه ۱ عددهایی با رقم ۱ یا ۳ به حالت‌های زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

حالت اول: همهٔ ده رقم ۱ باشد \Leftarrow فقط یک عدد داریم.

حالت دوم: یک رقم ۳ و هفت رقم ۱ باشد:

حالت سوم: دو رقم ۳ و چهار رقم ۱ باشد:

حالت چهارم: سه رقم ۳ و یک رقم ۱ باشد:

۳۱۱۱۱۱۱۱, ۱۳۱۱۱۱۱۱, ۱۱۳۱۱۱۱۱, ..., ۱۱۱۱۱۱۱۳ \Rightarrow عدد ۸

$$\left. \begin{array}{l} ۳۳۱۱۱۱, ۳۱۳۱۱۱, ۳۱۱۳۱۱, ۳۱۱۱۳۱, ۳۱۱۱۱۳ \\ ۱۳۳۱۱۱, ۱۳۱۳۱۱, ۱۳۱۱۳۱, ۱۳۱۱۱۳ \\ ۱۱۳۳۱۱, ۱۱۳۱۳۱, ۱۱۳۱۱۳ \\ ۱۱۱۳۳۱, ۱۱۱۳۱۳ \\ ۱۱۱۱۳۳ \end{array} \right\} \Rightarrow$$
 عدد ۱۵

۳۳۳۱, ۳۳۱۳, ۳۱۳۳, ۱۳۳۳

$\Rightarrow ۱ + ۸ + ۱۵ + ۴ = ۲۸$ و در کل

۲۳۶- گزینه ۲ برای ساختن زیرمجموعه‌های A و B که $A \cap B = \emptyset$ بوده و مجموع اعضای آن‌ها به ترتیب زوج و فرد باشد، می‌توان گفت عدد ۱،

یا عضو A است یا عضو B و ۲ حالت دارد. عددهای ۲ و ۳ و ۴ نیز به همین ترتیب هر کدام ۲ حالت دارند و می‌توانند عضو A یا B باشند.

دقت کنید!!! مجموع اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ برابر ۱۰ است که عددی زوج است. پس تا این‌جا باید A و B یا هر دو هم‌زمان فرد یا هر دو هم‌زمان زوج

باشند. حالا وضعیت عضو ۵ مشخص می‌شود. اگر مجموع اعضای A فرد بود، به مجموعهٔ A اضافه می‌شود. اگر مجموع اعضای B زوج بود به B

اضافه می‌شود و عضو ۵، ۱ حالت خواهد داشت و تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = ۱۶$$

۲۳۷- گزینه ۲ حاصل جمع ۲ عدد به شرطی زوج است که یا هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. در بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۵ عدد زوج $\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$

و ۶ عدد فرد $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ داریم. پس جواب مسئله، حاصل جمع انتخاب ۲ عدد از هر مجموعه است.

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۶}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} + \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۰ + ۱۵ = ۲۵$$

دو عدد فرد

۲۳۸- گزینه ۴ مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \dots, ۱۱, ۱۲\}$ دارای ۶ عضو فرد $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ و ۶ عضو زوج $\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}$ می‌باشد. پس تعداد

زیرمجموعه‌های شش‌عضوی با ۴ عضو زوج و ۲ عضو فرد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\binom{۴}{۶}}{\binom{۶}{۶}} \times \frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۶}{۶}} = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} \times \frac{۶!}{۴! \times ۲!} = \frac{۳ \times ۵}{۲} \times \frac{۳ \times ۵}{۲} = ۱۵^۲ = ۲۲۵$$

۲۳۹- گزینه ۲ برای ساختن یک عدد سه‌رقمی با خاصیت این‌که صدگان از دهگان و دهگان از یکان بیشتر باشد، حتماً به سه رقم متمایز نیاز داریم

و هر سه رقمی که انتخاب کنیم می‌توانیم آن را با همین شرط بچینیم. پس جواب، همان انتخاب ۳ رقم از ۱۰ رقم است.

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳! ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳!} = \frac{۷۲۰}{۶} = ۱۲۰$$

۲۴۰- گزینه ۲ اگر تعداد مهمان‌ها n باشد، تعداد دست‌دادن‌ها برابر انتخاب ۲ از n خواهد بود، چون هر دو نفر با هم، یک عمل «دست‌دادن» انجام

$$\binom{n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n(n-1)}{۲} = ۲۸ \Rightarrow n(n-1) = ۵۶ \Rightarrow n = ۸$$

می‌دهند.

۲۴۱- گزینه ۲ نقطه‌های روی محیط دایره هیچ‌گاه روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند و هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم، یک مثلث ساخته می‌شود.

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۳!} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰$$

پس جواب انتخاب، ۳ نقطه از ۵ نقطه است:

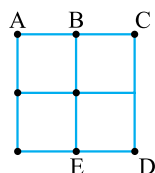
۲۴۲- گزینه ۴ برای ساخت مثلث به سه رأس نیاز داریم اما رأس‌های انتخاب‌شده نباید روی یک خط راست باشد، چون نقاط روی یک خط راست،

مثلث نمی‌سازند.

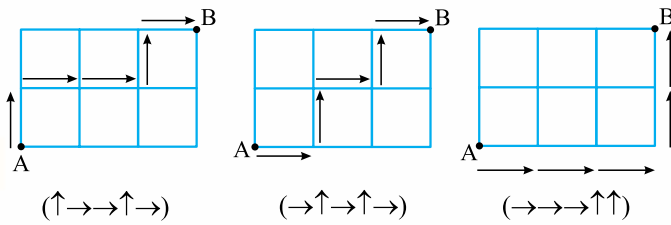
ابتدا حالت‌های انتخاب ۳ رأس را به دست می‌آوریم، سپس حالت‌هایی که سه نقطه روی یک خط هستند را کم می‌کنیم.

$$\text{کل حالت‌های انتخاب ۳ رأس} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$$

سه نقطهٔ انتخابی روی پاره‌خط‌های AC، AD و BE را باید از کل کم کرد: $۳۵ - ۳ = ۳۲$



۲۴۳- گزینه ۲ مسافت طی شده وقتی حداقل است که فقط در جهت‌های \rightarrow یا \uparrow حرکت کنیم.



در شکل‌ها سه مسیر مختلف داده شده‌اند. همه این مسیرها و دیگر مسیرها در این مسئله حتماً سه تا علامت \rightarrow و ۲ تا علامت \uparrow دارد و به هر طریق دلخواه اگر آن‌ها را بچینیم، از A به B می‌رسیم. در این جا از رابطه جایگشت با تکرار استفاده کنیم (به درس‌نامه مراجعه کنید):

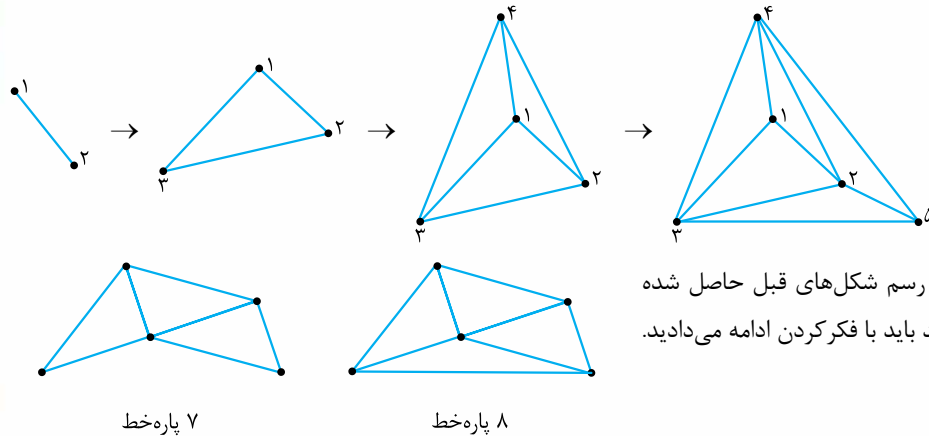
$$\Rightarrow \text{تعداد کل مسیرها} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۲۴۴- گزینه ۲ ممکن است بگویید ۳ توپ کافی است، ۳ توپ برداشتن و به نتیجه رسیدن برای خوش‌شانس‌ترین فرد است. اما ممکن است فرد دیگری این قدر خوش‌شانس نباشد و مسئله به دنبال جواب حتمی است. پس ما بدشانس‌ترین را انتخاب می‌کنیم، بدشانس‌ترین فرد، ابتدا ۵ توپ فوتبال، سپس ۴ توپ بسکتبال برمی‌دارد. حالا یک توپ که بردارد، حتماً سه توپ از سه ورزش دارد.

۲۴۵- گزینه ۱ مانند مسئله قبلی باید حالتی را در نظر بگیریم که بدشانس‌ترین حالت باشد. بدشانس‌ترین فرد، ابتدا ۳ مهره آبی، سپس ۴ مهره قرمز، سپس ۴ مهره سیاه و ۴ مهره سفید برمی‌دارد. حالا هر مهره‌ای بردارد، ۵ مهره از سیاه یا سفید دارد و تعداد کل مهره موردنظر بدشانس‌ترین فرد $16 = 3 + 4 + 4 + 4 + 1$ است.

۲۴۶- گزینه ۴ هر سه نفری که انتخاب می‌کنیم، حداقل یکی عینک دارد. چه زمانی نمی‌توانیم این کار را بکنیم؟ وقتی که سه نفر باشند که عینک نداشته باشند و ما این سه نفر را انتخاب خواهیم کرد. پس ۳ نفر بدون عینک درست نیست و حداکثر دو نفر می‌توانند بدون عینک باشند. دو نفر بدون عینک، ۴۰ نفر با عینک. در کل ۴۲ نفر به اردو رفته‌اند.

۲۴۷- گزینه ۲



مسیر مقابل را دنبال کنید تا به جواب برسید. در هر مرحله سعی کردیم، نقطه بعد را طوری انتخاب کنیم که نقطه جدید به بیشترین نقطه ممکن و بدون قطع کردن خطوط دیگر وصل شود.

و در کل ۹ پاره‌خط داریم، این تفکر از رسم شکل‌های قبل حاصل شده است. اگر چنین شکل‌هایی کشیده بودید باید با فکر کردن ادامه می‌دادید.

۲۴۸- گزینه ۲ ابتدا بررسی می‌کنیم «چه زیرمجموعه‌هایی «نارنجک» نیستند؟» خب! مجموعه تهی «نارنجک» نیست، زیرمجموعه‌ای که هیچ عددی فرد یا هیچ عددی زوج ندارد، «نارنجک» نیست.

$$15 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\substack{\text{حالت بودن یا نبودن هر یک} \\ \text{از عددهای فرد } 7, 5, 3, 1}} - 1 = 15$$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که هیچ عدد فردی ندارند نیز دقیقاً مانند زیرمجموعه‌هایی است که عدد زوج ندارند؛ یعنی ۱۵ تا.

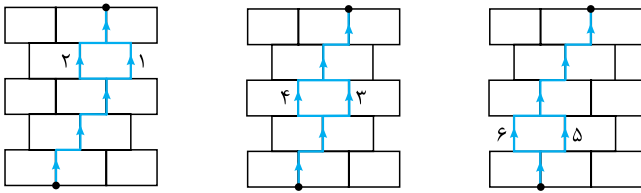
زیرمجموعه دیگری که نارنجک نیست، زیرمجموعه‌ای است که دقیقاً یک عدد فرد یا دقیقاً یک عدد زوج دارد. تعداد این دو دسته زیرمجموعه هم با هم مساوی است.

$$64 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\substack{\text{وجود یکی از اعداد} \\ \text{زوج } 2 \text{ یا } 4 \text{ یا } 6 \text{ یا } 8 \text{ هر یک از اعداد فرد} \\ 7, 5, 3, 1}} \times 4$$

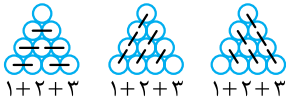
در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌هایی که دقیقاً یک عدد فرد دارند هم ۶۴ تا است.

$$159 = 1 + 15 + 64 + 64 = \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی که «نارنجک» نیستند.}$$

۲۴۹- گزینه ۲ مسیره‌های مورچه به شکل روبه‌رو خواهند بود.



۲۵۰- گزینه ۴ ابتدا یک مسئله ساده‌تر حل کنیم. فرض کنیم مثلث داده‌شده کوچک‌تر بود و مانند بود؛ یعنی به جای ۱۱ ردیفی که شکل اولیه دارد، ۴ ردیف داشت.



$$1+2+3 \quad 1+2+3 \quad 1+2+3 \Rightarrow 3(1+2+3) = 3 \times 6 = 18$$

هر هشت‌تایی $\circ\circ$ ، \circ و \circ را با علامت $-$ ، \backslash و $/$ روی شکل می‌شماریم.

حالا اگر یک ردیف به کل دایره‌ها اضافه می‌شد، تعداد هشت‌تایی‌ها برابر می‌شد با:

$$3(1+2+3+\dots+9+10) = 3(55) = 165$$

حالا که ۱۱ ردیف داریم، تعداد هشت‌تایی‌ها برابر است با:

۲۵۱- گزینه ۴ برای زوج‌شدن حاصل ضرب دو عدد، می‌توان یک زوج و یک فرد یا هر دو را زوج انتخاب کرد.

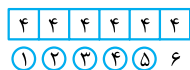
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{حالت ۳}}{\text{عدد دومی زوج}} \frac{\text{حالت ۲}}{\text{عدد اولی فرد}} \Rightarrow 3 \times 2 = 6 \\ \frac{\text{حالت ۲}}{\text{عدد دومی فرد}} \frac{\text{حالت ۳}}{\text{عدد اولی زوج}} \Rightarrow 2 \times 3 = 6 \\ \frac{\text{حالت ۲}}{\text{عدد دومی زوج}} \frac{\text{حالت ۱}}{\text{عدد اولی زوج}} \Rightarrow 2 \times 1 = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 6 + 6 + 2 = 14$$

تعداد کل حالت‌ها نیز برابر $\frac{\text{حالت ۴}}{\text{عدد دومی}} \frac{\text{حالت ۵}}{\text{عدد اولی}}$ و $5 \times 4 = 20$ است.

۲۵۲- گزینه ۴ ابتدا تعداد کل حالت‌ها را به دست بیاوریم. ۵ حرف داریم و این حرف‌ها می‌توانند به $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ حالت کنار هم قرار بگیرند. حالا دو حرف «س» و «د» را در کنار هم و یک حرف در نظر می‌گیریم. با این کار، حالا ۴ حرف متمایز داریم، البته خود «س» و «د» می‌توانند خودشان با هم جا عوض کنند که کل حالت‌ها در ۲ ضرب می‌شود.

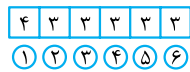


$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{4! \times 2}{5!} = \frac{2 \times 24}{120} = \frac{2}{5}$$

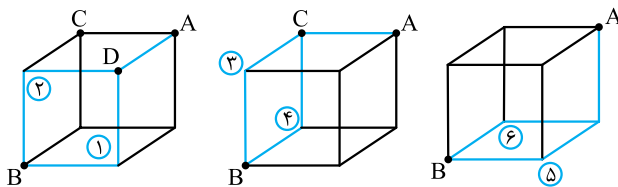


۲۵۳- گزینه ۱ تعداد کل حالت‌های مختلف رنگ‌کردن خانه‌ها برابر 4^6 است، چون هر خانه ۴ حالت دارد.

برای رنگ‌کردن خانه اول، ۴ حالت داریم، برای رنگ‌کردن خانه دوم فقط باید رنگ خانه اول را انتخاب نکنیم که ۳ حالت داریم. برای انتخاب رنگ خانه سوم، فقط باید رنگ خانه دوم را دوباره ۳ حالت و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم:

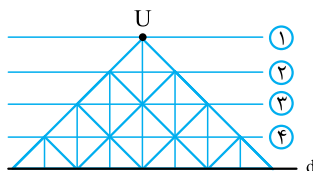


$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{4 \times 3^5}{4^6} = \frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$



۲۵۴- گزینه ۱ برای رسیدن از نقطه A به B، در کل ۶ مسیر مختلف با کوتاه‌ترین طول (طول مسیر = ۳) داریم.

مسیری که از C می‌گذرد و کوتاه‌ترین است، اصلاً از D عبور نمی‌کند. پس حالت‌های مطلوب ۲ است. $\text{احتمال مورد نظر} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



۲۵۵- گزینه ۲ به شکل مقابل نگاه کنید، به هر کدام از خط‌های ۱، ۲، ۳، ۴ که رسیده باشید، ۳ حالت

برای ادامه مسیر دارید و جواب $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ خواهد بود.

۲۵۶- گزینه ۱ ابتدا بررسی کنیم که کلمه «خیلی» را به چند حالت می‌توان ساخت. اگر از بالاترین (خ) شروع کنیم، فقط یک راه داریم. از (خ) پایین

بیاییم تا به (ی) برسیم: $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ حالا شکل را، از سمت راست شکل در نظر بگیرید، هر چه مسیر این طرف وجود دارد، در سمت چپ نیز وجود دارد؛ چون شکل متقارن است. $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ یا $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ یا $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$

حالت ۳ \Rightarrow یا $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ یا $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ یا $\begin{matrix} \text{خ} \\ \downarrow \\ \text{ل} \end{matrix}$ برای حالت (خ ی ل ی) هم ۳ حالت داریم و برای (خ ی ل ی) ۱ حالت، پس کل حالت‌ها برای ساخت «خیلی» برابر است با:

$$(1+3+3+1)+1+(1+3+3+1)=17$$

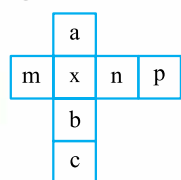
برای ساختن کلمه «سبز» در کل ۷ حالت داریم:



«خیلی» را که ساختیم از پایین‌ترین (ی) با یک حرف، به بالاترین (س) می‌رسیم و در پایان می‌توان نوشت:

$$\frac{17}{7} = 17 \times 7 = 119$$

حالت‌های (سبز) حالت‌های (خیلی)

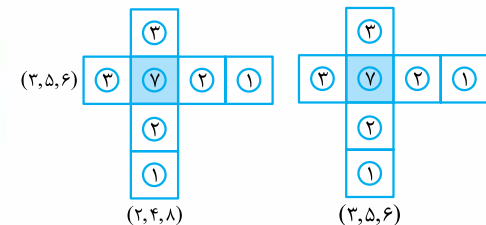


۲۵۷- گزینه ۲ ابتدا بررسی کنیم که عددها را چه‌طور باید چید؟ عدد X در تقاطع سطر و ستون قرار دارد و در هر

سطر و ستون حاصل جمع ۲۱ است.

$$\text{سطر} + \text{ستون} = (a+x+b+c) + (m+x+n+p) = 21 \times 2 = 42 \Rightarrow x + a + b + c + m + n + p + x = 42 \Rightarrow x = 7$$

حاصل جمع عددهای ۲ تا ۸ = ۳۵



عدد ۷ حتماً در محل اتصال سطر و ستون قرار دارد اما (m,n,p) و (a,b,c)

چه‌طور انتخاب می‌شوند؟ حاصل (m+n+p) و (a+b+c) باید مساوی ۱۴ شود که با ۷، مساوی ۲۱ خواهد شد. به جای (m,n,p) و (a,b,c) می‌توانیم

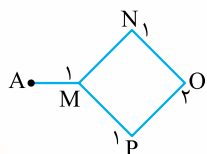
عددهای (۳,۵,۶) یا (۳,۴,۸) را قرار دهیم پس دو حالت مقابل را داریم. حالت‌های

هر مربع را با (۳) یا (۲) یا (۱) نوشتیم.

$$3! \times 3! = 36$$

$$3! \times 3! = 36$$

$$72 = 36 + 36 = \text{کل حالت‌ها}$$

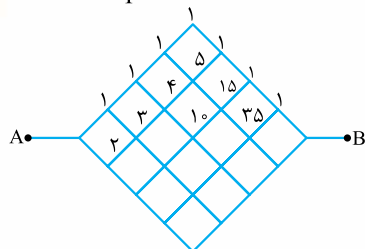


۲۵۸- گزینه ۲ از نقطه A آغاز می‌کنیم. برای هر نقطه روی شکل یک عدد می‌سازیم؛ این عدد مساوی تعداد راه‌هایی

است که به آن نقطه می‌رسند. مثلاً راه رسیدن به نقطه M، N و P فقط یکی است. پس برای M، N و P می‌نویسیم: ۱

اما برای O، ۲ می‌نویسیم، چون هم از N به O می‌رسیم، هم از P.

شکل مقابل با همین روش (که معروف به روش پاسکال است) نوشته شده است.



برای رسیدن به B، ۷۰ مسیر مختلف با کوتاه‌ترین طول وجود دارد.

۲۵۹- گزینه ۲ تعداد کل حالت‌های روشن یا خاموش بودن لامپ‌ها ($2^6 = 64$) است. تعداد حالت‌های روشن بودن ۳ لامپ از ۶ لامپ، برابر انتخاب

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

از ۶ می‌باشد:

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!1!} = 6, \quad \text{تعداد حالت‌های ۵ لامپ روشن} = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!1!} = 6, \quad \text{تعداد حالت‌های ۴ لامپ روشن} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = 1 + 15 + 6 + 20 = 42, \quad \text{تعداد حالت‌های ۶ لامپ روشن} = 1$$

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

۲۶۴- گزینه ۲ تعداد کل حالت‌ها برابر انتخاب ۲ تا ۹ است:

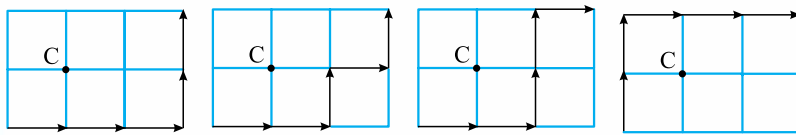
برای فرد شدن مجموع دو عدد انتخابی، یکی باید زوج و دیگری باید فرد باشد.

$$\frac{\text{حالت ۵}}{\text{انتخاب عدد فرد انتخاب عدد زوج}} = \frac{4 \times 5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۲۶۴- گزینه ۴ برای رسیدن از A به B و با کوتاه‌ترین طول، باید در همه حالت‌ها، سه حرکت \rightarrow ، \rightarrow ، \rightarrow و دو حرکت \uparrow ، \uparrow را انجام

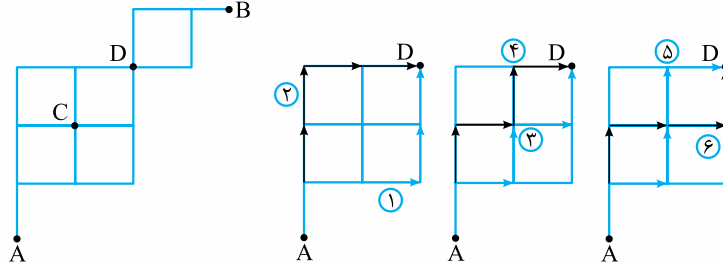
دهیم. پس تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن این حرکت را به دست می‌آوریم. از روش جایگشت با تکرار استفاده کنیم:

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$



مسیرهایی که از نقطه C عبور نمی‌کنند به شکل مقابل هستند که ۴ تا مسیر هستند.

$$\Rightarrow \text{احتمال عبور نکردن از نقطه C} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



۲۶۵- گزینه ۲ ابتدا تعداد کل مسیرها از A تا B را به دست

می‌آوریم. مسیر را به دو قسمت تبدیل می‌کنیم، از A به D و از D به B. ۶ مسیر از A به D داریم و ۲ مسیر از D به B. در کل از A به B (۶ × ۲ = ۱۲) مسیر مختلف داریم:

برای شمارش تعداد مسیرهایی که از نقطه C عبور نمی‌کند، ابتدا مسیرهای عبوری از نقطه C را پیدا می‌کنیم و از کل مسیرها کم می‌کنیم. برای رسیدن از A به B با عبور از C، ابتدا از A به C، از C به D در دو مسیر، از D به C در دو مسیر، از C به A در دو مسیر می‌توانیم عبور کنیم. تعداد کل مسیرهای عبوری از نقطه C برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ است.

$$\text{تعداد مسیرهایی که از C عبور نمی‌کنند} = 12 - 8 = 4$$

۲۶۶- گزینه ۴ تعداد کل حالت‌های ممکن برابر $6^3 = 216$ است. برای آن که تعداد حالت‌های عدد زرد < عدد آبی < عدد قرمز باشد، می‌توان این حالت را در نظر گرفت که مثلاً زرد، آبی و قرمز به ترتیب یکان، دهگان و صدگان عددی سه‌رقمی هستند که فقط با $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ساخته می‌شوند. پس ۳ تا عدد از این مجموعه انتخاب کرده و طوری می‌چینیم که یکان < دهگان < صدگان باشد.

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

۲۶۷- گزینه ۴ ابتدا کل حالت‌های ممکن را حساب کنیم، افراد نوبت به نوبت شناسنامه‌ها را انتخاب می‌کنند.

نفر اول ۴ انتخاب، نفر دوم ۳ انتخاب و نفر سوم دو انتخاب و نفر چهارم ۱ انتخاب دارند. سپس تعداد کل حالت‌های ممکن $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ است.

حالا حالت‌های مطلوب را بشماریم. ابتدا حالتی که فقط دو نفر درست شناسنامه خود را بردارند. اگر نام افراد A، B، C و D و شناسنامه درست هر کدام آن‌ها به ترتیب a، b، c و d باشد، جدول روبه‌رو حالت‌هایی که فقط دو نفر شناسنامه خود را بردارند را نشان می‌دهد.

و فقط یک حالت وجود دارد که بیش از دو نفر شناسنامه‌شان را درست بردارند و آن حالتی که همه، شناسنامه خود را درست بردارند. در نتیجه:

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = 6 + 1 = 7$$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{7}{24}$$

A	B	C	D
a	b	d	c
a	d	c	b
a	c	b	d
d	b	c	a
c	b	a	d
b	a	c	d

۲۶۸-گزینه ۲ تعداد دانش‌آموزان چپ‌دست را x در نظر بگیریم. راست‌دست‌ها ۴۰ درصد بیشتر از چپ‌دست‌ها هستند و می‌توان گفت:

$$x + 0.4x = 1.4x$$

پس تعداد کل دانش‌آموزان برابر $1.4x = 2/4x$.

برای انتخاب دو نفر از n نفر، از رابطه $\frac{n(n-1)}{2}$ استفاده می‌کنیم. پس در این‌جا $n = 2/4x$:

$$\text{تعداد کل انتخاب‌های دونفره} = \frac{2/4x(2/4x-1)}{2}$$

$$x \times 1/4x = (\text{تعداد راست‌دست}) \times (\text{تعداد چپ‌دست}) = \text{تعداد حالت‌های تیم چپ‌دست-راست‌دست}$$

$$\text{احتمال انتخاب تیم راست‌دست-چپ‌دست} = \frac{x \times 1/4x}{\frac{2/4x(2/4x-1)}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \times 1/4x^2 = \frac{2/4x(2/4x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 1/4x^2 = 2/4x(2/4x-1) \Rightarrow 5/6x = 5/76x - 2/4 \Rightarrow 5/76x - 5/6x = 2/4 \Rightarrow 0.16x = 2/4$$

$$\Rightarrow x = \frac{2/4}{0.16} \Rightarrow x = 15$$

$$\text{تعداد کل} = 2/4x = 2/4 \times 15 = 36$$

۲۶۹-گزینه ۲ احتمال قرارگرفتن علامت (\rightarrow) روی هر کدام از رنگ‌ها برابر تقسیم زاویه مرکزی آن بر 360° درجه است.

$$\text{احتمال قرارگرفتن } (\nearrow) \text{ روی ناحیه سفید} = \frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

۲۷۰-گزینه ۴ دو عدد انتخاب‌شده یا باید مثبت یا هر دو منفی باشد. در بازه $[-20, 10]$ ، صفر تا 10° ناحیه مثبت و صفر تا -20° ناحیه منفی است. طول ناحیه مثبت برابر 10° و طول ناحیه منفی برابر 20° است، پس احتمال انتخاب هر عدد مثبت $\frac{1}{3}$ و انتخاب هر عدد منفی $\frac{2}{3}$ است.

$$\left. \begin{aligned} \text{احتمال هر دو عدد مثبت} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ \text{احتمال هر دو عدد منفی} &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

۲۷۱-گزینه ۱ اندازه یک زاویه برابر 60° درجه است، پس مجموع دو زاویه دیگر مانند A و B برابر 120° خواهد بود.

زاویه C تند است، برای آن‌که هر دو زاویه \hat{A} و \hat{B} تند باشند؛ هر کدام از زاویه‌های \hat{A} و \hat{B} می‌توانند بین صفر تا 120° درجه باشند. یعنی مقدار هر کدام می‌تواند روی پاره‌خط مقابل قرار بگیرد.

اگر A یا B (فرقی نمی‌کند) بین 30° تا 90° باشند، مثلث حتماً ۳ زاویه تند خواهد داشت. $P = \frac{90-30}{120-0} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. طول پاره‌خط از 30° تا 90° طول پاره‌خط از 0° تا 120° .

۲۷۲-گزینه ۲ مساحت کل صفحه $15 \times 15 \times \pi = 225\pi$

$$75\pi = 25\pi - 100\pi = 10 \times 10 \times \pi - 5 \times 5 \times \pi = \text{مساحت دایره با شعاع ۵} - \text{مساحت دایره با شعاع ۱۰} = \text{مساحت ناحیه تیره}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال برخورد با ناحیه تیره} = \frac{\text{مساحت ناحیه تیره}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{75\pi}{225\pi} = \frac{1}{3}$$

۲۷۳-گزینه ۲ قورباغه موردنظر می‌تواند در هر پرش، در هر جهت دلخواه پرش کند. اما اگر روی یک خط راست

بپرد در نهایت به محیط دایره‌ای به شعاع سه متر از نقطه شروع می‌رسد. شکل مقابل فاصله‌های مختلف قورباغه را از نقطه شروع پس از سه پرش نشان می‌دهد، بعضی از پرش‌های مختلفی که قورباغه می‌تواند بپرد را نشان داده‌ایم؛ پس بی‌شمار نوع و شکل برای سه پرش وجود دارد، پس شمارش آن‌ها بی‌معنی است.

نقطه پایانی می‌تواند در سه ناحیه با توجه به نوع پرش‌ها قرار بگیرد: ① فاصله صفر تا ۱ از نقطه شروع ② فاصله ۱ تا ۲ از نقطه شروع (ناحیه A) ③ فاصله ۲ تا ۳ از نقطه شروع.

$$\text{مساحت دایره به شعاع ۱} - \text{مساحت دایره به شعاع ۲} = \frac{\text{مساحت ناحیه A}}{\text{مساحت دایره به شعاع ۳}} = \text{احتمال قرارگیری قورباغه در فاصله ۱ تا ۲ از نقطه شروع}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times \pi - 1 \times 1 \times \pi}{3 \times 3 \times \pi} = \frac{4\pi - \pi}{9\pi} = \frac{3\pi}{9\pi} = \frac{1}{3}$$

