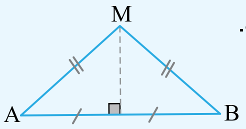
فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

درس اول و دوم: استدلال و آشنایی با اثبات در هندسه

استدلال

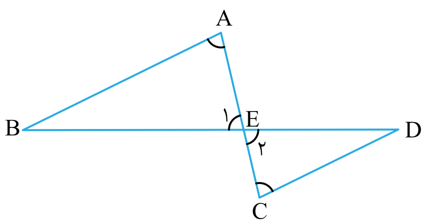
مفهوم	تعریف	مثال
حکم ریاضی	ریاضی‌دان‌ها معمولاً حدس‌های خود را در قالب عبارت‌های ریاضی بیان می‌کنند. این عبارت‌ها «حکم‌های ریاضی» نام دارند. یک حکم ریاضی می‌تواند درست یا نادرست باشد.	حکم ریاضی درست: $a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$ حکم ریاضی نادرست: $۲۳+۱۷=۳۰$
استدلال	به فرآیند نتیجه‌گیری حکم‌ها «استدلال» می‌گویند. یک استدلال می‌تواند معتبر یا نامعتبر باشد.	استدلال معتبر: $(a+b)(a-b)=a^{۲}-ab+ab-b^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$ استدلال نامعتبر: اگر $a^{۲}=b^{۲}$ در این‌صورت همواره $a=b$.
اثبات	استدلالی منطقی که درستی یک حکم را نشان می‌دهد.	$(a+b)(a-b)=a^{۲}-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$
قضیه‌ها	حکم‌هایی که درستی آن‌ها قبلاً ثابت شده است.	هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. 
اصول موضوع	احکامی که درستی آن‌ها بدون اثبات پذیرفته شده است، «اصول موضوع» نام دارند.	از یک نقطه خارج یک خط، تنها یک خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد.

اثبات در هندسه

برای اثبات یک حکم در هندسه، تلاش می‌کنیم به کمک قضیه‌ها و اصول موضوع، استدلالی منطقی برای آن بیان کنیم و به کمک آن استدلال درستی حکم را نتیجه بگیریم.

مثال **در شکل روبه‌رو $\hat{A}=\hat{E}_{۱}$ و $\hat{C}=\hat{E}_{۲}$. می‌خواهیم ثابت کنیم** $AB\|CD$.

برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

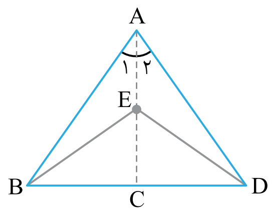


$$\left.\begin{array}{ll}\hat{A}=\hat{E}_{۱} & \text{(طبق فرض)}\\ \hat{C}=\hat{E}_{۲} & \text{(طبق فرض)}\\ \hat{E}_{۱}=\hat{E}_{۲} & \text{(t Cn\#¼®‖£T¶)}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}\xrightarrow[\text{J n¼¶»\#Ap¼¶}]{\text{طبق قضیه‌ی خطوط}} AB\|CD$$

ساختار اثبات در هندسه

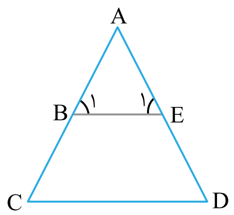
هر مسأله‌ی هندسی از دو بخش کلی تشکیل شده است.

فرض	داده‌های مسأله که پذیرفته شده‌اند.
حکم	مواردی که از فرضیات مسأله نتیجه می‌شوند ولی تاکنون درستی آن‌ها را ثابت نکرده‌ایم.



مثال «در شکل روبه‌رو $AB=AD$ و AC نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است. ثابت کنید مثلث BDE متساوی‌الساقین است.» در این مثال، فرض و حکم را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

فرض	$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ ، $AB=AD$
حکم	مثلث BDE متساوی‌الساقین است



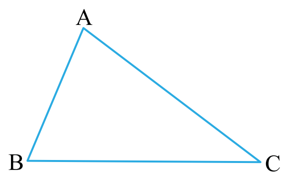
مسأله ۱ در مسأله‌ی زیر، جدول فرض و حکم را کامل کنید.

«در شکل روبه‌رو مثلث ACD مثلثی متساوی‌الساقین با قاعده‌ی CD است، نقطه‌ی B وسط AC و نقطه‌ی E وسط AD است. ثابت کنید $\hat{B}_۱=\hat{E}_۱$.»

فرض	مثلث ABE، $AB=BC$
حکم	………

راه‌حل: با توجه به آنچه بیان شد، فرض و حکم مسأله به شرح زیر می‌باشد:

فرض	مثلث ABE، مثلث ACD، $AC=AD$، $AB=BC$ و $AE=ED$
حکم	$\hat{B}_۱=\hat{E}_۱$



کتاب درسی

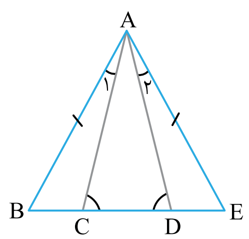
مسأله ۲ در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

«اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر بزرگ‌تر است.»

راه‌حل: برای حل این مسأله ابتدا یک شکل رسم می‌کنیم. حال دو زاویه‌ی نابرابر را با $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان جدول فرض و حکم را چنین تشکیل داد:

فرض	مثلث ABC و $\hat{B}>\hat{C}$
حکم	$AC>AB$

کامل کردن و بررسی درستی استدلال



مسأله ۳ در شکل روبه‌رو مثلث ABE، با قاعده‌ی BE متساوی‌الساقین است و می‌دانیم $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$. ثابت کنید: $A\hat{C}D=A\hat{D}C$

¾²Dv¶# ƒ oÎ: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$

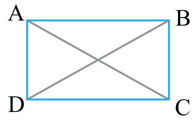
¾²Dv¶# ƒ oÎ: $\overset{(۱)}{\cdots\cdots}=AE$ $\quad \xrightarrow{\overset{(۲)}{\cdots\cdots}} \overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADE}$

$\hat{B}=\hat{E}$ چون مثلث ABE متساوی الساقین است.

در نتیجه طبق برابری اجزای نظیر $\overset{(۳)}{\cdots\cdots}$**، بنابراین مثلث ACD متساوی‌الساقین است، از این رو** $\overset{(۴)}{\cdots\cdots}$.

راه‌حل: در جایگاه (۱) باید AB را بنویسیم تا تساوی $AB=AE$ به دست آید. در جایگاه (۲) «ز ض ز» باید نوشته شود تا همنهشتی دو مثلث ABC و ADE نتیجه شود. در جایگاه (۳) باید تساوی $AC=AD$ را قرار داد و در جایگاه (۴) تساوی $A\hat{C}D=A\hat{D}C$ را قرار می‌دهیم.

مسأله ۴ **به کمک استدلال زیر می‌خواهیم ثابت کنیم در هر مستطیل قطرها برابر هستند، جاهای خالی را پرکنید.**



$$\left.\begin{array}{l}(۱)\quad AD=\ldots \\ (۲)\quad \hat{D}=\ldots=۹۰^\circ \\ (۳)\quad \ldots=DC\end{array}\right\} \xrightarrow{(f \text{ ⵗ } f)} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BDC}$$

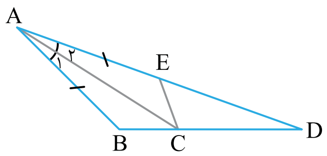
حال طبق برابری اجزای نظیر نتیجه می‌گیریم $AC=\overset{(۴)}{\ldots\ldots}$.

راه‌حل: تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) به شکل زیر کامل می‌شوند:

$(۱)\quad AD=BC \quad , \quad (۲)\quad \hat{D}=\hat{C}=۹۰^\circ \quad , \quad (۳)\quad DC=DC$

حال می‌توان دریافت طبق برابری اجزای نظیر ضلع‌های سوم دو مثلث یعنی AC و BD برابرند. در نتیجه تساوی (۴) به شکل $AC=BD$ کامل می‌شود.

مسأله ۵ **مینا برای اثبات مسأله‌ای به صورت زیر عمل می‌کند. اشکال استدلال مینا را پیدا کنید.**



فرض	$AB=AE$ و AC نیمساز $\hat{A}$
حکم	$BC=EC$

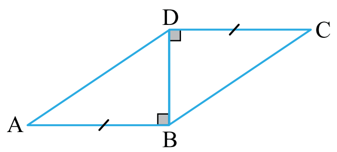
با توجه به این‌که AC نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت نیمساز زاویه‌ی C هم هست. حال دو مثلث ABC و EAC به حالت «ز ض ز» همنهشت هستند. بنابراین طبق برابری اجزای متناظر خواهیم داشت $BC=EC$.

راه‌حل: می‌دانیم AC نیمساز $\hat{A}$ می‌باشد، اما ضرورتی ندارد که نیمساز زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز باشد. در واقع اشکال استدلال مینا این است که فرض کرده است AC، نیمساز زاویه‌ی $\hat{C}$ می‌باشد. استدلال مینا را می‌توان به روش زیر درست کرد:

$$\left.\begin{array}{l}AC=AC \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AB=AE\end{array}\right\} \xrightarrow{(f \text{ ⵗ } f)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ACE}$$

حال طبق برابری اجزای متناظر می‌توان نتیجه گرفت $BC=EC$.

مسأله ۶ **زهرا برای اثبات یک مسأله چنین عمل می کند:**



فرض	$DB\perp AB$، $DB\perp DC$ و $AB=DC$
حکم	$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{DBC}$

$$\left.\begin{array}{l}D\hat{B}C=A\hat{D}B \\ AD=BC \\ BD=BD\end{array}\right\} \xrightarrow{(f \text{ ⵗ } f)} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BDC}$$

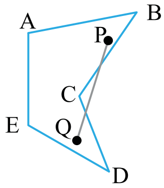
آیا استدلال زهرا درست است؟

راه‌حل: در فرضیات مسأله دلیلی برای تساوی $AD=BC$ آورده نشده است و علت برابری دو زاویه‌ی $D\hat{B}C$ و $A\hat{D}B$ ذکر نشده است. بنابراین استدلال زهرا نامعتبر است. صورت درست استدلال برای ثابت کردن حکم به صورت زیر است:

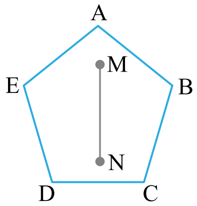
$$\left.\begin{array}{l}BD=BD \\ D\hat{B}A=B\hat{D}C=۹۰^\circ \\ AB=DC\end{array}\right\} \xrightarrow{(f \text{ ⵗ } f)} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{DBC}$$

مسأله ۷ **محمد و مهدی در حال بررسی محدب و مقعّر بودن چندضلعی‌ها هستند. آن‌ها چنین استدلال می‌کنند:**

محمد: چندضلعی زیر مقعّر است زیرا دو نقطه مثل P و Q درون آن پیدا کرده‌ایم که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند، به طور کامل درون چندضلعی قرار نمی‌گیرد.



مهدی: چندضلعی روبه‌رو محدب است زیرا دو نقطه مثل M و N درون آن پیدا کرده‌ایم که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند داخل چندضلعی است.



استدلال کدام‌یک معتبر است؟

راه‌حل: می‌دانیم اگر پاره‌خط واصل **هر** دو نقطه، داخل یک چندضلعی، درون آن چندضلعی قرار گیرد، چندضلعی موردنظر محدب است.

توجه کنید که اگر در یک چندضلعی، دو نقطه پیدا کنیم که پاره‌خط واصل آن‌ها به‌طور کامل داخل چندضلعی قرار نگیرد، آن چندضلعی محدب نیست و در نتیجه مقعّر است. بنابراین محمد درست استدلال کرده است. همان‌طور که دیدید برای این‌که ثابت کنیم یک چندضلعی محدب است، باید بگوییم به‌ازای **هر** دو نقطه داخل چندضلعی پاره‌خط واصل داخل چندضلعی قرار می‌گیرد و نمی‌توانیم تنها به دو نقطه مثل M و N اکتفا کنیم. در نتیجه استدلال مهدی نامعتبر است.

نتیجه برای ردکردن یک حکم، پیدا کردن تنها یک مثال که خلاف آن حکم باشد کافی است. به این مثال در اصطلاح «مثال نقض» می‌گوییم.

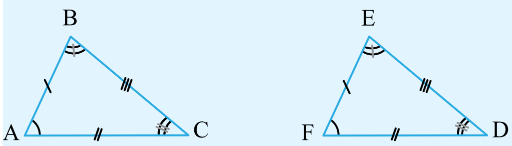
درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

تعریف **دو شکل را همنهشت می‌نامیم اگر بتوان آن‌ها را منطبق بر هم قرار داد.**

دو مثلث را همنهشت می‌گوییم اگر هر سه ضلع و هر سه زاویه‌ی آن‌ها با هم برابر باشند. به‌طور مثال در شکل مقابل دو مثلث ABC و DEF، همنهشت هستند. در این‌صورت می‌توان چنین نوشت:

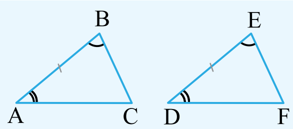
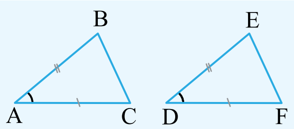
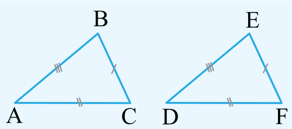
$$\hat{A}=\hat{F} \quad , \quad \hat{B}=\hat{E} \quad , \quad \hat{C}=\hat{D}$$

$$AB=EF \quad , \quad BC=DE \quad , \quad AC=DF$$

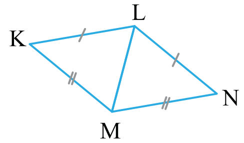


حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها

برای بررسی همنهشتی مثلث‌ها، نیازی نیست که همواره برابری هر سه ضلع و هر سه زاویه را بررسی کنیم. بلکه به کمک چند قاعده می‌توان مثلث‌های همنهشت را تشخیص داد. این قاعده‌ها در جدول زیر آمده است.

تساوی دو زاویه و ضلع بین آن‌ها «ز ض ز»	تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها «ض ز ض»	تساوی سه ضلع «ض ض ض»
		
اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.	اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.	اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.

توجه اگر دو مثلث ABC و DEF همنهشت باشند می‌نویسیم $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$.

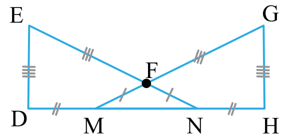


مسأله (۸) با توجه به شکل مقابل ثابت کنید دو مثلث KLM و NLM همنهشت هستند.

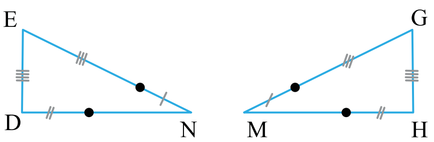
راه‌حل: می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} KL=LN \\ LM=LM \\ KM=MN \end{array}\right\} \xrightarrow{(f \sharp f \sharp f)} \overset{\Delta}{NLM}\cong\overset{\Delta}{KLM}$$

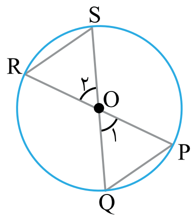
یعنی دو مثلث به حال «ض ض ض»، همنهشت هستند.



مسأله (۹) در شکل روبه‌رو ثابت کنید دو مثلث DEN و HGM همنهشت هستند.



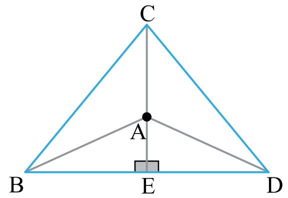
راه‌حل: ابتدا دو مثلث را به شکل مجزا، در شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم. حال می‌توان دریافت $DE=GH$، $MG=NE$ و $DN=MH$. در نتیجه دو مثلث DEN و HGM به حالت «ض ض ض»، همنهشت هستند.



مسأله (۱۰) در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است. ثابت کنید $\overset{\Delta}{ORS}\cong\overset{\Delta}{OPQ}$.

راه‌حل: با توجه به این‌که O مرکز دایره است نتیجه می‌گیریم OS، OR، OP و OQ شعاع‌های دایره هستند در نتیجه می‌توان گفت:

$$\left\{\begin{array}{l} OS=OQ \ (\text{شعاع دایره}) \\ OR=OP \ (\text{شعاع دایره}) \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \ (t\ \text{...}) \end{array}\right. \xrightarrow{(f \sharp f)} \overset{\Delta}{ORS}\cong\overset{\Delta}{OPQ}$$



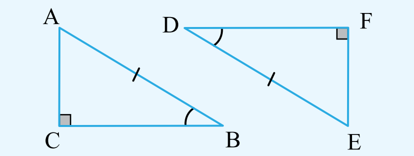
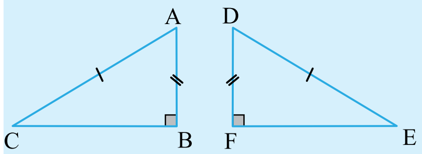
مسأله (۱۱) در شکل روبه‌رو $CE\perp BD$ و $C\hat{A}B=C\hat{A}D$. ثابت کنید $\overset{\Delta}{ABE}\cong\overset{\Delta}{ADE}$.

راه‌حل: می‌دانیم زاویه‌های $C\hat{A}D$ و $E\hat{A}D$ مکمل یک‌دیگرند، به همین ترتیب، $C\hat{A}B$ و $B\hat{A}E$ نیز با هم مکمل هستند. همچنین با توجه به فرض مسأله می‌دانیم $C\hat{A}B=C\hat{A}D$، در نتیجه $B\hat{A}E=E\hat{A}D$. حال می‌توان نوشت:

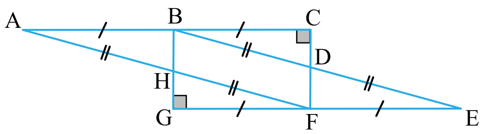
$$\left\{\begin{array}{l} B\hat{A}E=D\hat{A}E \\ AE=AE \\ A\hat{E}B=A\hat{E}D=۹۰^\circ \end{array}\right. \xrightarrow{(\sharp f \sharp)} \overset{\Delta}{ABE}\cong\overset{\Delta}{AED}$$

همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

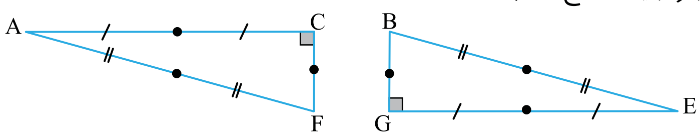
می‌توان حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها را برای مثلث‌های قائم الزاویه به صورت ساده‌تری بیان کرد، این حالت‌ها در جدول زیر آمده‌اند.

	توضیح	مثال	شکل
وتر و یک زاویه‌ی حاده	اگر وتر و یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلثی قائم‌الزاویه‌ی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.	در شکل روبه‌رو $AB = DE$ و $\hat{B} = \hat{D}$. در نتیجه: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$	
وتر و یک ضلع	اگر وتر و یک ضلع مثلثی قائم‌الزاویه، با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.	در شکل روبه‌رو $AC = DE$ و $DF = AB$. در نتیجه: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$	

مسأله (۱۲) **در شکل روبه‌رو ثابت کنید** $\overset{\Delta}{ACF} \cong \overset{\Delta}{EGB}$.



راه‌حل: ابتدا دو مثلث را جدا از هم ترسیم می‌کنیم. حال می‌توان دریافت $BE = AF$ و $AC = GE$، در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BGE و ACF به حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند.

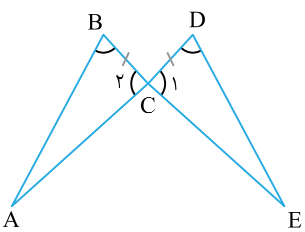


اجزای نظیر

در حالت کلی، بعد از این‌که ثابت کردیم دو مثلث همنهشت هستند، می‌توان دریافت ۳ جزء دیگر آن دو مثلث نیز با هم برابر هستند. این ۳ جزء را اجزای متناظر یا اجزای نظیر می‌نامیم.

مثال **در شکل روبه‌رو دو مثلث ABC و DCE به حالت «ز ض ز»، همنهشت هستند (زیرا $\hat{B} = \hat{D}$، $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و $BC = DC$) اجزای نظیر در این همنهشتی عبارت‌اند از:**

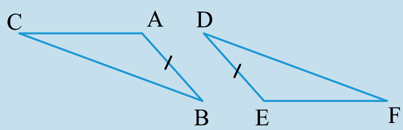
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{E} \\ AC = CE \\ AB = DE \end{cases}$$



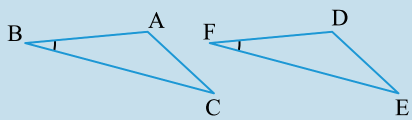
نکته

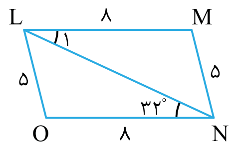
برای تشخیص اجزای نظیر می‌توان از جدول زیر استفاده کرد.

در شکل روبه‌رو $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$ و می‌دانیم $AB = DE$ در نتیجه زاویه‌های روبه‌رو به AB و DE به عنوان اجزای نظیر برابر هستند، یعنی $\hat{C} = \hat{F}$.



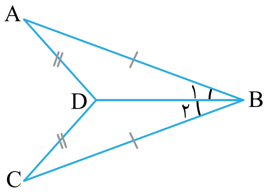
در شکل روبه‌رو $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$ و می‌دانیم $\hat{B} = \hat{F}$، در نتیجه ضلع‌های روبه‌رو به $\hat{B}$ و $\hat{F}$ به عنوان اجزای نظیر برابر هستند، یعنی $AC = DE$.





مسأله ۱۳ در شکل روبه‌رو اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{L}_۱$ را حساب کنید.

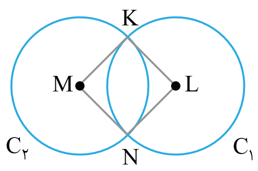
راه‌حل: با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث LMN و LON به حالت «ض ض ض»، همنهشت هستند، پس طبق برابری اجزای نظیر می‌توان نتیجه گرفت چون $MN=LO=۵$ در نتیجه زاویه‌های مقابل به آن‌ها نیز با هم برابرند یعنی: $\hat{L}_۱=۳۲^\circ$



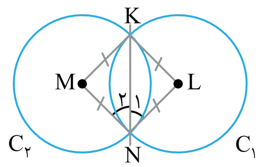
مسأله ۱۴ با توجه به شکل روبه‌رو و جدول زیر حکم مسأله را ثابت کنید.

فرض	$AD=CD$ و $AB=CB$
حکم	BD نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است.

راه‌حل: برای حل مسأله کافی است ثابت کنیم $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$. برای این منظور توجه کنید که دو مثلث DBC و ADB به حالت «ض ض ض»، همنهشت هستند، پس طبق برابری اجزای نظیر خواهیم داشت $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$، بنابراین BD نیمساز زاویه‌ی B می‌باشد.



مسأله ۱۵ در شکل روبه‌رو شعاع دو دایره برابر است. ثابت کنید KN نیمساز زاویه‌ی $M\hat{N}L$ است.



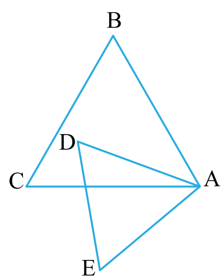
راه‌حل: ابتدا با توجه به این‌که شعاع‌های دو دایره برابر هستند نتیجه می‌گیریم:

$KL=LN=MN=MK$

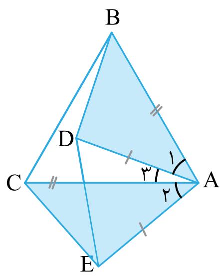
بنابرایـن می‌توان گفت دو مثلث KLN و MKN به حالت «ض ض ض»، همنهشـت هستند زیرا:

$$\left\{\begin{array}{l} KL=MK \\ NK=NK \\ NM=NL \end{array}\right. \xrightarrow{(f\sharp f\sharp f)} \overset{\Delta}{KMN}\cong\overset{\Delta}{KLN}$$

حال طبق برابری اجزای نظیر نتیجه می‌گیریم $\hat{N}_۱=\hat{N}_۲$ پس KN نیمساز زاویه‌ی $M\hat{N}L$ است.



مسأله ۱۶ در شکل روبه‌رو مثلث‌های ABC و ADE متساوی‌الاضلاع هستند، ثابت کنید $BD=CE$.



راه‌حل: ابتدا از B به D و از C به E وصل می‌کنیم. حال کافی است ثابت کنیم دو مثلث EAC و DAB همنهشت هستند. می‌دانیم $AB=AC$ و $AD=AE$، حال کافی است ثابت کنیم $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$. توجه کنید که دو مثلث ABC و ADE متساوی‌الاضلاع هستند، در نتیجه می‌توان گفت:

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۶۰^\circ \quad , \quad \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۶۰^\circ$$

از تساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$. در نتیجه دو مثلث EAC و DAB به حالت «ض ز ض» همنهشت هستند، از این رو طبق برابری اجزای نظیر داریم $BD=CE$.