

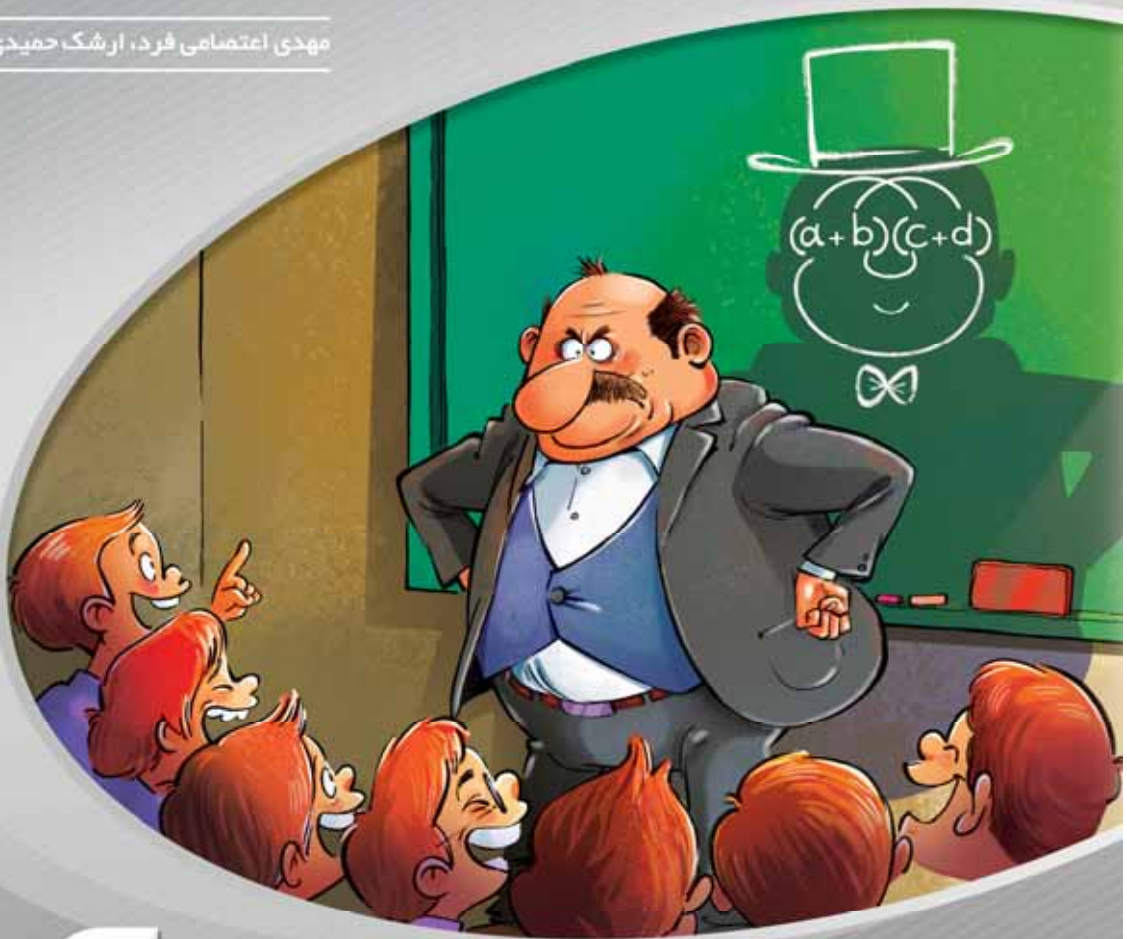
کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی نهم

مهدی اعتمادی فرد، ارشک حمیدی



انگه
انتشارات

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

فصل اول

فرض کنید A مجموعه عددهای اول زوج باشد. در این صورت $A = \{2\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعه جواب‌های معادله $x - 2 = 0$ باشد. در این صورت $B = \{2\}$. توجه کنید با اینکه توصیف مجموعه‌های A و B با هم فرق می‌کند، اما عضوهای آن‌ها یکسان‌اند.

تعریف اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و هر عضو مجموعه B نیز عضوی از مجموعه A باشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$.

مثال فرض کنید A مجموعه شمارنده‌های اول ۱۵ باشد. در این صورت $A = \{2, 3, 5\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعه شمارنده‌های اول ۴۵ باشد. در این صورت $B = \{2, 3, 5\}$. بنابراین $A = B$.

مثال مجموعه حروف کلمه «مادر» با مجموعه حروف کلمه «مراد» برابر است، زیرا هر دو $\{م, د, ا, ر\}$ هستند.

تعریف اگر یکی از دو مجموعه A یا B عضوی داشته باشد که در دیگری نباشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مثال فرض کنید A مجموعه شمارنده‌های اول ۳۰ باشد. در این صورت $A = \{2, 3, 5\}$. همچنین فرض کنید B مجموعه شمارنده‌های اول ۴۲ باشد. در این صورت $B = \{2, 3, 7\}$. توجه کنید که $5 \in A$ اما $5 \notin B$. پس $A \neq B$. همین‌طور، می‌توانستیم بگوییم $7 \in B$ اما $7 \notin A$. پس $A \neq B$.

تست ۱ اگر $\left\{1, -1, \frac{5}{4}, a\right\} = \left\{b, \frac{5}{4}, -1, 3\right\}$ مقدار ab چقدر است؟

$$1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad -3 \quad 4$$

راهنما چون مجموعه‌های دو طرف تساوی برابرند، پس هر عضو هر کدام از آن‌ها باید عضو دیگری هم باشد. چون ۱ عضو مجموعه سمت چپ است، پس باید عضو مجموعه سمت راست هم باشد، در نتیجه $b = 1$. از طرف دیگر، چون ۳ عضو مجموعه سمت راست است، پس باید عضو مجموعه سمت چپ هم باشد، در نتیجه $a = 3$. بنابراین $ab = 3$.

مسئله ۱ اگر $\{3x + 7, -4\} = \{y - 1, 5x + 1\}$ ، مقدار x و y چقدر است؟

چون دو مجموعه برابرند، پس هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است که دو حالت زیر پیش می‌آید.

حالت دوم

$$\begin{cases} 3x + 7 = y - 1 \\ -4 = 5x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

حالت اول

$$\begin{cases} 3x + 7 = 5x + 1 \\ -4 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

دقت کنید که یک حالت دیگر هم ممکن بود رخ دهد، یعنی وقتی که دو مجموعه برابر، یک عضو داشته باشند. به عبارت دیگر، $3x + 7 = -4 = y - 1 = 5x + 1$ که البته در اینجا این حالت پیش نمی‌آید.

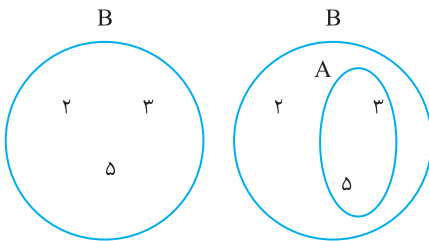
مسئله ۲ اگر مجموعه‌های $\{x^3, 3^x, 4x\}$ و $\{9, y\}$ با یکدیگر برابر باشند، مقدار xy چقدر است؟

چون مجموعه‌ای سه عضوی با مجموعه‌ای دو عضوی برابر است، پس دو عضو از مجموعه سه عضوی با یکدیگر برابرند. عدد ۹ نیز با یکی از سه عضو مجموعه دیگر برابر است که با بررسی آن‌ها به دست می‌آید

$$9 = 3^x \Rightarrow x = 2$$

بنابراین $x^3 = 8$ و $4x = 8$. پس مجموعه‌های موردنظر برابرند با $\{8, 9\}$. در نتیجه $y = 8$ و $xy = 2 \times 8 = 16$.

زیرمجموعه

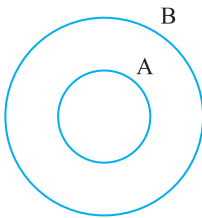


فرض کنید A مجموعهٔ شماره‌های اول ۴۵ باشد. در این صورت $A = \{3, 5\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعهٔ شماره‌های اول ۳۰ باشد. در این صورت $B = \{2, 3, 5\}$. معلوم است که هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B است. نمودارِ B را در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم. اگر بخواهیم نمودارِ B را هم روی این شکل رسم کنیم، باید مانند شکل سمت راست دور عدد‌های ۳ و ۵ یک منحنی بسته بکشیم.

اگر هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$.



فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین باشد. چون هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلثی متساوی‌الساقین نیز هست، پس $A \subseteq B$.



اگر مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B باشد (و مجموعه‌های A و B ناتهی باشند)، نمودارِ B آن‌ها به صورت مقابل است:



اگر مجموعهٔ A عضوی داشته باشد که عضوی از مجموعهٔ B نباشد، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.



فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باشد. چون مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست (مثلاً مثلث با طول ضلع‌های ۱، ۵ و ۵)، پس $A \not\subseteq B$.



اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، کدام گزینه زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A نیست؟



- (۱) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{2, 4\}$ (۳) $\{\{1\}\}$ (۴) $\{1, 2, 3, 4\}$

چون $\{1\}$ عضو مجموعهٔ A نیست، پس $\{\{1\}\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A نیست. بقیهٔ گزینه‌ها زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A هستند.



فرض کنید $A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$. درست یا غلط بودن حکم‌های زیر را مشخص کنید.



- (الف) $\{a, b\} \subseteq A$ (ب) $\{d, e\} \subseteq A$ (پ) $\{\{c\}\} \subseteq A$



(الف) چون a و b عضو مجموعهٔ A هستند، پس $\{a, b\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است، یعنی $\{a, b\} \subseteq A$.

(ب) چون d و e عضو مجموعهٔ A نیستند، پس مجموعهٔ $\{d, e\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A نیست، یعنی $\{d, e\} \not\subseteq A$ (توجه کنید که $\{d, e\} \in A$).

(پ) چون $\{c\}$ عضو مجموعهٔ A است، پس $\{\{c\}\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است، یعنی $\{\{c\}\} \subseteq A$.

اگر $A = \{0, 2, 3, \{1\}, \{2, 3\}\}$ ، کدام گزینه هم عضو مجموعهٔ A است هم زیرمجموعهٔ آن؟



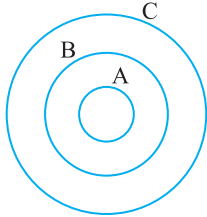
- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{\{2, 3\}\}$ (۴) $\{0\}$



توجه کنید که ۲ و ۳ عضو مجموعهٔ A هستند، پس $\{2, 3\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است. از طرف دیگر، $\{2, 3\}$ عضو مجموعهٔ A است. پس $\{2, 3\}$ هم عضو مجموعهٔ A است هم زیرمجموعهٔ آن. توجه کنید که گزینهٔ (۱) زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A نیست و گزینه‌های (۳) و (۴) عضو مجموعهٔ A نیستند.

مسئله ۴
راه حل

A, B و C سه مجموعه‌اند. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آیا لزوماً $A \subseteq C$ ؟



بله، ثابت می‌کنیم $A \subseteq C$. باید ثابت کنیم هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه C است. فرض کنید a عضو دلخواهی از A باشد. در این صورت، چون $A \subseteq B$ ، پس $a \in B$. از طرف دیگر، چون $B \subseteq C$ ، پس $a \in C$. چون هر عضو دلخواه از A عضو C است، پس تمام اعضای A عضو C هستند و در نتیجه $A \subseteq C$. توجه کنید که از روی نمودار و ن مقابل هم معلوم می‌شود $A \subseteq C$.

نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه و تعداد آن‌ها

فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد. چون هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه A است، پس $A \subseteq A$. همچنین، مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه است. در حقیقت، اگر $\emptyset \not\subseteq A$ ، آن‌گاه \emptyset عضوی دارد که در مجموعه A نیست که درست نیست، زیرا \emptyset اصلاً عضوی ندارد!

نتیجه

اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $A \subseteq A$ و $\emptyset \subseteq A$.

هر زیرمجموعه ناتهی یک مجموعه، از چند عضو این مجموعه تشکیل شده است. برای نوشتن همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه، بهتر است ابتدا زیرمجموعه صفر عضوی آن را (که مجموعه تهی است) بنویسیم، سپس زیرمجموعه‌های یک عضوی آن را بنویسیم، بعد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن را بنویسیم و همین‌طور ادامه دهیم تا در نهایت خود مجموعه را بنویسیم.

مثال

همه زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ را در زیر نوشته‌ایم:

\emptyset : صفر عضوی

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$: یک عضوی

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$: دو عضوی

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$: سه عضوی

$\{1, 2, 3, 4\}$: چهار عضوی

مسئله ۵
راه حل

زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

زیرمجموعه‌های دو عضوی آن‌هایی هستند که از دو عضو مجموعه $\{1, 2, 3\}$ تشکیل شده‌اند و عبارت‌اند از

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

مسئله ۶
راه حل

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعه A بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن؟

راه حل اول زیرمجموعه‌های یک عضوی عبارت‌اند از

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

که تعداد آن‌ها پنج‌تاست. زیرمجموعه‌های چهار عضوی عبارت‌اند از

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$

که تعداد این‌ها نیز پنج‌تاست.

راه حل دوم برای نوشتن زیرمجموعه‌ای یک عضوی، باید یک عضو از مجموعه A انتخاب کنیم و با آن یک مجموعه درست کنیم. برای نوشتن زیرمجموعه‌ای چهار عضوی، باید یک عضو از مجموعه A انتخاب، آن را حذف کنیم و با بقیه مجموعه‌ای چهار عضوی درست کنیم. یعنی با انتخاب یک عضو، هم به زیرمجموعه‌ای یک عضوی می‌رسیم هم به زیرمجموعه‌ای چهار عضوی. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی برابر است.

به موارد زیر توجه کنید:

- مجموعهٔ صفر عضوی (مجموعهٔ تهی) یک زیرمجموعه دارد که خود مجموعهٔ تهی است.
- مجموعهٔ یک عضوی $\{a\}$ دو زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}$$

- مجموعهٔ دو عضوی $\{a, b\}$ چهار زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

- مجموعهٔ سه عضوی $\{a, b, c\}$ هشت زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

اکنون توجه کنید که هر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ سه عضوی $\{a, b, c\}$ از مجموعهٔ چهار عضوی $\{a, b, c, d\}$ نیز هست. اگر به هر یک از این زیرمجموعه‌ها عضو d را اضافه کنیم، هشت زیرمجموعهٔ دیگر به دست می‌آید که عبارت‌اند از $\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

بنابراین، مجموعهٔ چهار عضوی دو برابر مجموعهٔ سه عضوی زیرمجموعه دارد که می‌شود شانزده زیرمجموعه.

- مانند حالت قبل، معلوم می‌شود که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ پنج عضوی $\{a, b, c, d, e\}$ دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ چهار عضوی $\{a, b, c, d\}$ است که می‌شود سی و دو زیرمجموعه.
- اگر این روش استدلال را تکرار کنیم، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر با 2^n است.

نتیجه

مجموعهٔ $A = \{a, b, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

تست ۴

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

مجموعهٔ A چهار عضو دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر است با $2^4 = 16$.

راه‌حل

مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند زیرمجموعه دارد که ۲ عضوی از آن‌هاست؟

مسئله ۷

راه‌حل اول همهٔ زیرمجموعه‌هایی را که ۲ عضو آن‌هاست، می‌نویسیم:

راه‌حل

$$\{2\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 1, 3, 4\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر هشت‌تاست.

راه‌حل دوم اگر عدد ۲ عضو زیرمجموعه‌ای از A باشد، با حذف کردن آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 3, 4\}$ به دست می‌آید. مثلاً زیرمجموعهٔ $\{2, 1, 4\}$ به زیرمجموعهٔ $\{1, 4\}$ از مجموعهٔ $\{1, 3, 4\}$ تبدیل می‌شود. همین‌طور، با اضافه کردن عدد ۲ به زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 3, 4\}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ به دست می‌آید. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ A که ۲ عضو آن‌هاست برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 3, 4\}$ است، که می‌شود $2^3 = 8$.

مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d\}$ چند زیرمجموعه دارد که a و b هر دو عضو آن‌ها هستند؟

مسئله ۸

راه‌حل اول این زیرمجموعه‌ها را می‌نویسیم:

راه‌حل

$$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر چهارتاست.

راه‌حل دوم اگر به هر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{c, d\}$ عضوهای a و b را اضافه کنیم، دقیقاً یکی از زیرمجموعه‌های موردنظر به دست می‌آید.

$$\emptyset \quad \{c\} \quad \{d\} \quad \{c, d\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\{a, b\} \quad \{a, b, c\} \quad \{a, b, d\} \quad \{a, b, c, d\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{c, d\}$ که می‌شود $2^2 = 4$.

تست ۵

مجموعه $\{a, b, c, d\}$ چند زیرمجموعه دارد که a عضو آن‌ها نیست؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

راه‌حل

هر زیرمجموعه‌ای که a عضو آن نیست، زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{b, c, d\}$ است که تعداد آن‌ها برابر است با $2^3 = 8$.

تست ۶

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه دارد که a عضو آن‌ها هست، اما f عضو آن‌ها نیست؟

۳۲ (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

چون f عضو زیرمجموعه‌های موردنظر نیست، پس همه آن‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ هستند. چون a باید عضوی از این زیرمجموعه‌ها باشد، پس همه آن‌ها با اضافه کردن a به زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{b, c, d, e\}$ به دست می‌آیند. در نتیجه، تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{b, c, d, e\}$ که می‌شود $2^4 = 16$.

مسئله ۹

فرض کنید $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$. مجموعه B چند زیرمجموعه مانند C دارد که $A \subseteq C$ ؟

راه‌حل

راه‌حل اول توجه کنید که اگر $A \subseteq C$ ، آن‌گاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه C است، یعنی ۱ و ۲ عضو C هستند. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه B را پیدا کنیم که ۱ و ۲ عضو آن‌ها هستند. این زیرمجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر چهارتاست.

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $A \subseteq C$ ، آن‌گاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه C است، یعنی ۱ و ۲ عضو C هستند. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه B را پیدا کنیم که ۱ و ۲ عضو آن‌ها هستند. این زیرمجموعه‌ها از اضافه کردن ۱ و ۲ به زیرمجموعه‌های مجموعه $\{3, 4\}$ به دست می‌آیند. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{3, 4\}$ که می‌شود $2^2 = 4$.

مسئله ۱۰

فرض کنید مجموعه A چهار عضو بیشتر از مجموعه B داشته باشد و تعداد زیرمجموعه‌های آن نیز 480 عدد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B باشد.

(الف) مجموعه B چند عضو دارد؟ (ب) مجموعه A چند عضو دارد؟

راه‌حل

فرض کنید تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B به ترتیب برابر a و b باشد. در این صورت، طبق فرض‌های مسئله، $a = 4 + b$ و $2^a = 480 + 2^b$. (الف) توجه کنید که

$$2^{4+b} = 480 + 2^b \Rightarrow 2^4 \times 2^b = 480 + 2^b \Rightarrow 16 \times 2^b = 480 + 2^b \Rightarrow 15 \times 2^b = 480 \Rightarrow 2^b = 32 \Rightarrow b = 5$$

(ب) می‌توان نوشت $a = 4 + b = 9$.

نمایش مجموعه‌های اعداد

همان‌طور که دیدیم، مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵ را می‌توانیم به صورت $\{1, 2, 3, 4\}$ نشان دهیم. اگر بتوانیم همه عضوهای

یک مجموعه را بنویسیم باید چه کنیم؟

برای چند مجموعه معروف از عددها نمادهای خاصی وجود دارد که در اینجا آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

● مجموعه عددهای طبیعی را با \mathbb{N} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

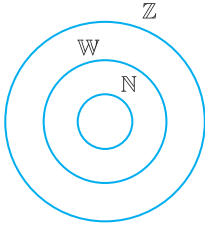
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

● مجموعه عددهای حسابی را با \mathbb{W} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

● مجموعه عددهای صحیح را با \mathbb{Z} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



چون هر عدد طبیعی، عددی حسابی است و هر عدد حسابی، عددی صحیح است، پس $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$.



مثال اگر E مجموعه عددهای طبیعی زوج باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

و اگر O مجموعه عددهای طبیعی فرد باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

توجه کنید که مجموعه E از همه عددهای به صورت $2k$ تشکیل شده است که در آن‌ها k عددی طبیعی است. می‌توانیم مجموعه E را به صورت زیر بنویسیم

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

که در آن نماد « \mid » را می‌خوانیم «به طوری که». بنابراین تساوی بالا را می‌خوانیم «مجموعه E برابر است با مجموعه عددهایی مانند $2k$ به طوری که k عضو مجموعه \mathbb{N} است».

به همین ترتیب می‌توانیم بنویسیم

$$O = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مثال توجه کنید که

$$\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{3, 5, 7, \dots\}$$

همین‌طور،

$$\left\{ \frac{x}{2} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 2 \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

اگر بخواهیم مجموعه‌ای را به صورت $\{\dots\}$ نشان دهیم، در سمت چپ نماد « \mid » صورت کلی عضوهای مجموعه و در سمت راست نماد « \mid » شرطهایی را که این عضو را به طور کامل توصیف می‌کنند، می‌نویسیم.



مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$$

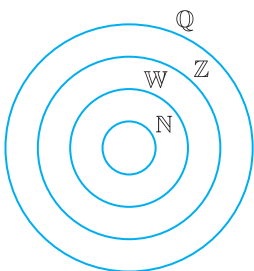
همچنین، می‌توانیم این مجموعه را به صورت $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ نمایش دهیم. همین‌طور، اگر $B = \{0, 2, 4, 6\}$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 3\}$$

مثال مجموعه عددهای گویا را با \mathbb{Q} نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

چون هر عدد صحیح، عددی گویاست (زیرا اگر a عددی صحیح باشد، برابر $\frac{a}{1}$ است)، پس $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.



مسئله ۱۱

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

(الف) $A = \{0, 4, 8, 12, \dots, 24, 28\}$ (ب) $B = \{1, 6, 11, \dots, 26, 31\}$

راه حل

(الف) عضوهای مجموعه A مضرب‌های غیرمنفی عدد ۴ هستند که از ۲۸ کوچک‌تر یا با آن برابرند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$A = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7\} = \{4k \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 7\}$$

(ب) هر عضو مجموعه B یک واحد از مضربی از عدد ۵ بیشتر است. می‌توان نوشت

$$B = \{5k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 6\}$$

راه‌های دیگری هم برای نوشتن مجموعه B وجود دارد، مثلاً،

$$B = \{5k - 4 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 7\}, \quad B = \{5k + 6 \mid k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 5\}$$

مسئله ۱۲

در هر مورد مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

(الف) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (ب) $B = \{-3, -4, -5, \dots\}$ (پ) $C = \{0\}$

راه حل

(الف) می‌توان نوشت $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$. (ب) می‌توان نوشت $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq -3\}$.

(پ) می‌توان نوشت $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 1\}$.



اگر مجموعه‌ای با عضوهای مشخص شده باشد، نمایش آن با نمادهای ریاضی منحصر به فرد نیست. مثلاً، مجموعه $\{0\}$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}, \quad \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$$

مسئله ۱۳

مجموعه $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ را با نمادهای ریاضی بنویسید.

راه حل

می‌توان مجموعه A را به یکی از صورت‌های $A = \left\{x \mid x = \frac{a}{a+1}, a \in \mathbb{N}\right\}$ یا $A = \left\{\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$ نمایش داد.

مسئله ۱۴

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نوشتن عضوهایش بنویسید.

(الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ (ب) $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 7\}$

راه حل

(الف) توجه کنید که اگر x عددی صحیح باشد و $-2 \leq x < 3$ ، آن‌گاه x یکی از عددهای $-2, -1, 0, 1, 2$ است. بنابراین،

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

(ب) توجه کنید که اگر x عددی طبیعی باشد و $3 < x < 7$ ، آن‌گاه x یکی از عددهای $4, 5, 6$ است. بنابراین،

$$B = \{2 \times 4, 2 \times 5, 2 \times 6\} = \{8, 10, 12\}$$

مسئله ۱۵

مجموعه $A = \left\{x \mid x = \frac{2a}{a-1}, a \in \mathbb{N}, 2 \leq a \leq 6\right\}$ را با نوشتن عضوهایش بنویسید.

راه حل

به جای a به ترتیب عددهای $2, 3, 4, 5, 6$ را قرار می‌دهیم:

$$A = \left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{12}{5}\right\} = \left\{4, 3, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}\right\}$$

تست ۷

مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 36\}$ چند عضو دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

راه حل

توجه کنید که $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، پس مجموعه A یازده عضو دارد.

تست
۸مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهای صحیح عضو مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -6 \leq x < -1\}$ چقدر است؟

(۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) -۸

راهنما

چون هر عدد صحیح، عددی گویا نیز هست، پس عددهای صحیح عضو مجموعه A ، عددهای صحیح مانند x هستند که $-6 \leq x < -1$. پس عددهای صحیح عضو مجموعه A عبارت‌اند از -6 ، -5 ، -4 ، -3 و -2 . کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این عددها به ترتیب -6 و -2 هستند که مجموعشان می‌شود -8 .

تمرین

- ۱۳ فرض کنید A مجموعه لاک‌پشت‌هایی باشد که می‌توانند از روی کوه دماوند بپرند و B مجموعه جواب‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ باشد. آیا $A = B$ ؟
- ۱۴ اگر $\{x-2, 2y-3, 5\} = \{2x+3, -1\}$ ، مقدار x و y چقدر است؟
- ۱۵ x و y چه عددهایی باشند که مجموعه‌های $\{y, 7, -5/5\}$ و $\{-\frac{1}{y}, x, \sqrt{9}\}$ برابر باشند؟
- ۱۶ اگر $\{-3\} = \{\frac{a}{y}, a+b\}$ ، اعضای مجموعه $\{b - \frac{a}{3} - 1, \frac{a^2}{9}, 2b+a\}$ را بنویسید.
- ۱۷ اگر دو مجموعه $\{x-5, 5-x\}$ و $\{2y+2\}$ برابر باشند، مقدار $y-x$ چقدر است؟
- ۱۸ اگر دو مجموعه $\{1, 2, 3\}$ و $\{x, x^2-1, \frac{x}{y}\}$ با یکدیگر برابر باشند، مقدار x چقدر است؟
- ۱۹ اگر سه مجموعه $A = \{1-x^2, \frac{y}{5}\}$ ، $B = \{2, 3z\}$ و $C = \{\sqrt{w}, -3\}$ با یکدیگر برابر باشند، مقدار $x+y+z+w$ چقدر است؟
- ۲۰ دو مجموعه $\{-2, 3, 15\}$ و $\{x-3, 15, x^2+y^2\}$ باهم مساوی‌اند. مقادیر x و y را به دست آورید.
- ۲۱ A ، B و C سه مجموعه‌اند. اگر $A \neq B$ و $B \neq C$ ، آیا لزوماً $A \neq C$ ؟
- ۲۲ اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, c\}$ ، در هر مورد مشخص کنید که حکم داده شده درست است یا خیر.
- الف) $a \subseteq A$ ب) $\{a\} \subseteq A$ پ) $\{c\} \subseteq A$
- ت) $\{a, b\} \subseteq A$ ث) $\{a, c\} \subseteq A$ ج) $\{\{a\}\} \subseteq A$
- ۲۳ فرض کنید $A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$. در هر عبارت نماد \subseteq یا $\not\subseteq$ را طوری قرار دهید که حکم داده شده درست باشد.
- الف) $A \subseteq \{a\}$ ب) $A \subseteq \{a, \{b\}\}$ پ) $A \subseteq \{c\}$ ت) $A \subseteq \{\{d, e\}\}$
- ۲۴ فرض کنید A مجموعه همهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۲ و B مجموعه همهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد. آیا $A \subseteq B$ ؟ آیا $B \subseteq A$ ؟
- ۲۵ مجموعه‌هایی مانند A و B مثال بزنید که $A \in B$ و $A \subseteq B$.
- ۲۶ A ، B و C سه مجموعه‌اند. اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ ، آیا لزوماً $A \in C$ ؟
- ۲۷ اگر $A = \{1, 2, 3, 4-k\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A \subseteq B$ ، تمام مقادیر ممکن برای k را به دست آورید.
- ۲۸ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را بنویسید.
- ۲۹ فرض کنید $A = \{a, b, c, d\}$. زیرمجموعه‌های دو عضوی و سه عضوی مجموعه A را بنویسید.
- ۳۰ زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 6\}$ را بنویسید.
- ۳۱ عددهایی طبیعی مانند a ، b و c مثال بزنید که مجموعه‌های $A = \{2a+1, b+c\}$ ، $B = \{2b+1, a+c\}$ و $C = \{2c-5, a+b\}$ زیرمجموعهٔ مجموعه $M = \{1, 3, 4, 5\}$ باشند.
- ۳۲ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه A بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن؟

مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد؟

۳۳

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند زیرمجموعه دست کم یک عضوی دارد؟

۳۴

اگر به مجموعه‌ای سه عضوی دو عضو جدید و متمایز اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید چقدر از زیرمجموعه‌های مجموعه اصلی بیشتر است؟

۳۵

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 32 برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه چهار عضوی است. مقدار n چقدر است؟

۳۶

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $3k - 5$ عضوی، 16 برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k + 3$ عضوی است. مقدار k چقدر است؟

۳۷

مجموعه S ، 24 زیرمجموعه بیشتر از مجموعه T دارد. مجموعه S چند عضو دارد؟

۳۸

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه دارد که a یا b عضو آن‌ها هستند؟

۳۹

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه دارد که هیچ عدد زوجی عضو آن نیست؟

۴۰

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه دارد که 1 و 2 عضو آن‌ها نیستند؟

۴۱

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه دو عضوی دارد که a عضو آن‌ها هست؟

۴۲

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که a عضو آن‌ها نیست؟

۴۳

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که 4 عضو آن‌ها هست، اما 5 عضو آن‌ها نیست؟

۴۴

فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. مجموعه B چند زیرمجموعه مانند C دارد که $A \subseteq C$ ؟

۴۵

فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. چند مجموعه مانند C وجود دارد که $A \subseteq C \subseteq B$ ؟

۴۶

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$. مجموعه‌های A و B چند زیرمجموعه مشترک دارند؟

۴۷

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

۴۸

(ب) $B = \{0, 7, 26, 63, \dots\}$

(الف) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$

(ت) $D = \{3, 6, 9, \dots\}$

(پ) $C = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{7}}, \dots, \frac{10}{\sqrt{13}} \right\}$

(ج) $F = \left\{ -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25} \right\}$

(ث) $E = \{-1, 3, 7, 11, 15, 19\}$

(ح) $H = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$

(چ) $G = \left\{ 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

۴۹

(ب) $B = \left\{ 2x - 7 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$

(الف) $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 2\}$

(ت) $D = \{mn \mid m, n \in \{1, 2, 3\}\}$

(پ) $C = \left\{ \frac{2k}{v} \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 3 \right\}$

(ج) $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+10)(x+9) \dots (x-9)(x-10) = 0\}$

(ث) $E = \{(-1)^y y^2 \mid y \in \mathbb{N}\}$

(ح) $H = \{3n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{W}\}$

(چ) $G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, -2 \leq x < 2 \right\}$

اگر $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید:

۵۰

(ب) $B = \left\{ x \in A \mid \frac{x+5}{2} \in \mathbb{Z} \right\}$

(الف) $A = \{-x \mid x \in M, x^2 < 20\}$

(پ) $C = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in M, y \in B \right\}$

مجموعه $\left\{ x \mid x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, ab = 15 \right\}$ را با عضوهایش بنویسید.

۵۱

مجموعه $\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 100\}$ چند عضو طبیعی دارد؟

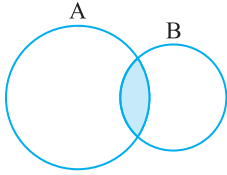
۵۲

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

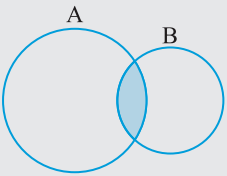
- ۱۱- فرض کنید $A = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$ ، $B = \{۴, a, b, c\}$ و $C = \{۵, a, b, ۴\}$. اگر $A=B=C$ ، مقدار $ab+c$ چقدر است؟
 (۱) ۴۷ (۲) ۴۶ (۳) ۴۱ (۴) ۳۷
- ۱۲- اگر $\{x, y-1\} = \{2x-5, 5\}$ ، مقدار $x+y$ چقدر است؟
 (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴
- ۱۳- اگر $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, c\}$ ، کدام مجموعه زیرمجموعه A است؟
 (۱) $\{a\}$ (۲) $\{a, b\}$ (۳) $\{\{a, b\}\}$ (۴) $\{\{b\}, \{c\}\}$
- ۱۴- اگر $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$ ، کدام گزینه درست نیست؟
 (۱) $\{1, 2\} \subseteq A$ (۲) $\{1\} \subseteq A$ (۳) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$ (۴) $\{1, 3\} \subseteq A$
- ۱۵- اگر $A = \{a, b, \{a, b\}, \{c\}\}$ ، کدام مجموعه زیرمجموعه A نیست؟
 (۱) $\{a\}$ (۲) $\{b\}$ (۳) $\{c\}$ (۴) $\{a, b\}$
- ۱۶- اگر $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5, \{6\}\}$ ، کدام گزینه درست نیست؟
 (۱) $\{6\} \in A$ (۲) $\{\{6\}\} \subseteq A$ (۳) $\{3, 4\} \subseteq A$ (۴) $\{5, \{6\}\} \subseteq A$
- ۱۷- اگر $A = \{a, b, c, \{b\}, \{a, c\}\}$ ، کدام گزینه هم عضو A است هم زیرمجموعه آن؟
 (۱) a (۲) b (۳) $\{a\}$ (۴) $\{b\}$
- ۱۸- مجموعه $\{a, b, c\}$ چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸
- ۱۹- اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ ، مجموعه A چند زیرمجموعه مانند C دارد که $B \subseteq C$ ؟
 (۱) 2^3 (۲) 2^4 (۳) 2^5 (۴) 2^7
- ۲۰- اعضای مجموعه B همه زیرمجموعه‌های مجموعه A هستند. مجموعه B ، 256 زیرمجموعه دارد. تعداد اعضای مجموعه A چقدر است؟
 (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳
- ۲۱- در چند زیرمجموعه مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ دست کم یک عدد فرد وجود دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲۸ (۴) ۲۹
- ۲۲- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 < x^2 \leq 25\}$ ، مجموعه A چند عضو دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۲۳- بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} < -3\right\}$ کدام است؟
 (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) بزرگ‌ترین عضو ندارد.
- ۲۴- مجموعه $A = \{x \mid 20 \leq x \leq 48, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۲۸
- ۲۵- اگر $A = \{x \mid x^2 \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ، مجموعه A چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟
 (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۳۱ (۴) ۶۳

فصل اول / درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

فصل اول



مدیر مدرسه می‌خواهد از کسانی که در المپیاد هندسه و المپیاد ورزشی مدال کسب کرده‌اند، تقدیر کند. فرض کنید A مجموعه کسانی باشد که در المپیاد هندسه و B مجموعه کسانی باشد که در المپیاد ورزشی مدال کسب کرده‌اند. در این صورت مدیر باید نام کسانی را بیابد که هم عضو مجموعه A هستند هم عضو مجموعه B ، یعنی کسانی که بین مجموعه‌های A و B مشترک‌اند. از روی نمودار و شکل مقابل معلوم می‌شود که مدیر باید نام کسانی را که در ناحیه سایه‌دار نوشته شده‌اند، بیابد.

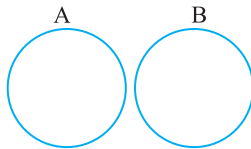


اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه همه اعضایی است که بین مجموعه‌های A و B مشترک‌اند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت:

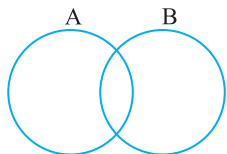
$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



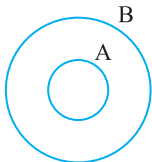
مجموعه $A \cap B$ از همه اعضایی تشکیل شده است که هم عضو مجموعه A هستند و هم عضو مجموعه B . همچنین از روی نمودار و معلوم است که $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ ، یعنی $A \cap B$ هم زیرمجموعه مجموعه A است و هم زیرمجموعه مجموعه B .



معلوم است که اگر مجموعه‌های A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، نمودار و مجموعه‌های A و B به صورت مقابل است.



با این حال، اگر درباره وضعیت مجموعه‌های A و B نسبت به هم چیزی ندانیم، نمودار و آن‌ها را به صورت مقابل می‌کشیم.

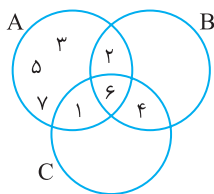


$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cap B = A$.



فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$ و $C = \{1, 4, 6\}$. مجموعه $A \cap (B \cap C)$ را مشخص کنید.



$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\} = \{4, 6\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6\} = \{6\}$$

ابتدا توجه کنید که

پس

مسئله ۱

راه حل

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{3, 5\}$ و $C = \{4, 5\}$ ، مجموعه $(A \cap B) \cap C$ کدام است؟

{۵} (۴)

{۴} (۳)

{۳} (۲)

\emptyset (۱)

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{3\} \cap \{4, 5\} = \emptyset$$

ابتدا توجه کنید که

پس

تست ۱

راه حل

مسئله ۲

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 20\}$ ، مجموعه $A \cap B$ را مشخص کنید.

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$A = \{2, 1, 0, \dots\}, \quad B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین

$$A \cap B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

مسئله ۳

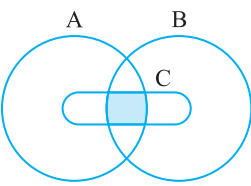
اگر $A \cap B = A$ ، مجموعه‌های A و B چه رابطه‌ای با هم دارند؟

راه حل

توجه کنید که همواره $A \cap B \subseteq B$ ، پس $A \subseteq B$.

مسئله ۴

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

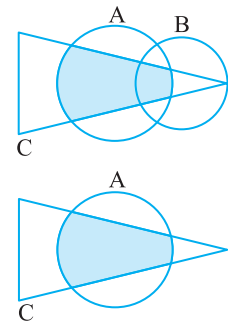


راه حل

توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اشتراک مجموعه‌های $A \cap B$ و C است، یعنی مجموعه مورد نظر می‌شود $(A \cap B) \cap C$.

مسئله ۵

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



راه حل

اگر به‌طور موقت مجموعه B را از این نمودار ون حذف کنیم، نمودار ون مقابل به‌دست می‌آید. ناحیه سایه‌دار در این نمودار ون مجموعه $A \cap C$ است. اکنون توجه کنید که اگر مجموعه B را به این نمودار ون اضافه کنیم، مجموعه مورد نظر تغییری نمی‌کند. بنابراین ناحیه سایه‌دار در نمودار ون اصلی هم مجموعه $A \cap C$ را مشخص می‌کند.

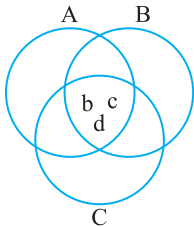
تست ۲

اگر $A \cap B = \{a, b, c, d\}$ و $A \cap C = \{b, c, d, f\}$ ، مجموعه $B \cap C$ کدام یک از مجموعه‌های زیر می‌تواند باشد؟

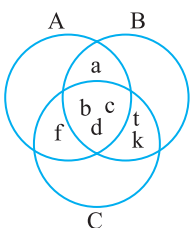
- (۱) $\{a, b, c\}$ (۲) $\{a, b, d, f\}$ (۳) $\{b, a, d, k\}$ (۴) $\{t, b, c, k, d\}$

راه حل

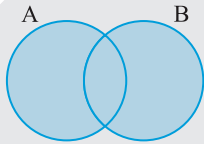
ابتدا توجه کنید که از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود که b, c, d در هر سه مجموعه A, B, C هستند (نمودار ون مقابل را ببینید).



بنابراین، مجموعه $B \cap C$ حداقل b, c, d را دارد. اکنون توجه کنید که در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد. از طرف دیگر، اگر شرایط مانند نمودار ون مقابل باشد، همه شرط‌های مسئله برقرارند.



فرض کنید A مجموعه همه دانش‌آموزان کلاس شما باشد که به ریاضیات و B مجموعه همه دانش‌آموزان کلاس شما باشد که به علوم علاقه‌مند هستند. اگر بخواهیم نام دانش‌آموزان کلاس شما را که به ریاضیات یا علوم علاقه‌مند هستند در یک مجموعه بنویسیم، باید نام همه عضوهای مجموعه A و همه عضوهای مجموعه B را بنویسیم و البته نام‌های تکراری را یک‌بار بنویسیم.



اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه همه اعضایی است که عضو مجموعه A یا عضو مجموعه B هستند.

اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

تعریف

اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$.

راه حل

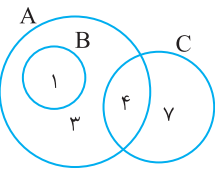
اگر $A = \{a, b, \{a, b\}, c\}$ و $B = \{a, c, \{b, c\}\}$ ، مجموعه $A \cup B$ را مشخص کنید.

مجموعه $A \cup B$ از همه اعضایی تشکیل شده که عضو مجموعه A یا عضو مجموعه B هستند (اعضوی مشترک را یک بار حساب می‌کنیم). بنابراین

$$A \cup B = \{a, b, c, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

مسئله ۶

راه حل



نمودار ون مجموعه‌های A ، B و C در شکل زیر رسم شده است. مجموع اعضای مجموعه $A \cap (B \cup C)$ چقدر است؟

۴ (۲)

چقدر است؟

۳ (۱)

۸ (۴)

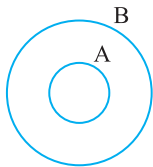
۵ (۳)

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$A = \{1, 3, 4\}, \quad B = \{1\}, \quad C = \{4, 7\}$$

بنابراین $B \cup C = \{1, 4, 7\}$ و $A \cap (B \cup C) = \{1, 4\}$. در نتیجه، مجموع اعضای مجموعه $A \cap (B \cup C)$ برابر است با ۵.



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cup B = B$.

تست ۳

A ، B و C مجموعه‌اند و $A \subseteq B \subseteq C$. حاصل $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ کدام است؟

۴ هیچ کدام

۳ C

۲ B

۱ A

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad B \subseteq C \Rightarrow B \cap C = B$$

بنابراین

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cup B$$

چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cup B = B$.

تست ۴

راه حل

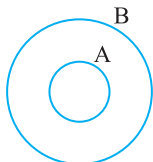
اگر $A \cup B = B$ ، کدام گزینه حتماً درست است؟

۴ $A = B$

۳ $A \cap B = \emptyset$

۲ $A \subseteq B$

۱ $B \subseteq A$



$$A \cup B = B$$

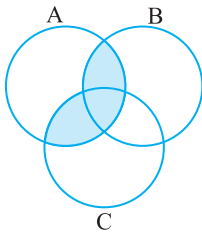
توجه کنید که همواره $A \subseteq A \cup B$ ، پس از تساوی $A \cup B = B$ نتیجه می‌شود $A \subseteq B$. نمودار ون مقابل نشان می‌دهد که گزینه‌های دیگر ممکن است درست نباشند.

تست ۵

راه حل

مسئله ۷

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



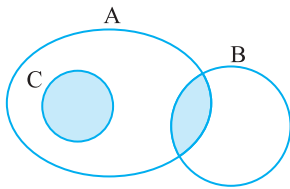
راه‌حل

توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اجتماع دو ناحیه سایه‌دار در نمودارهای ون مقابل است. بنابراین ناحیه مورد نظر مجموعه $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ را مشخص می‌کند. البته این ناحیه در حقیقت اشتراک مجموعه A با مجموعه $B \cup C$ نیز هست که می‌شود $A \cap (B \cup C)$. توجه کنید که تساوی زیر همیشه درست است.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

تست ۶

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل، کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



(۱) $A \cap (B \cap C)$

(۲) $A \cap (B \cup C)$

(۳) $B \cap (A \cup C)$

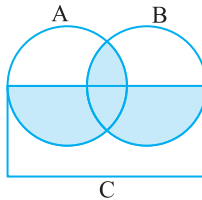
(۴) $B \cup (A \cap C)$

راه‌حل

مجموعه مورد نظر $A \cap (B \cup C)$ است. خودتان نمودار ون بقیه گزینه‌ها را رسم کنید تا ببینید که نمودار ون هیچ کدام به شکل مورد نظر نیست.

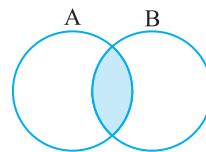
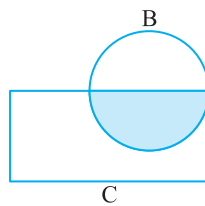
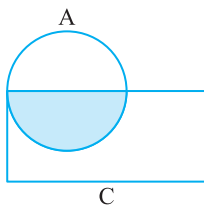
مسئله ۸

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



راه‌حل

ناحیه سایه‌دار مورد نظر اجتماع سه ناحیه سایه‌دار در نمودارهای ون زیر است:



بنابراین، ناحیه مورد نظر مجموعه $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B)$ را مشخص می‌کند.

تست ۷

اگر $A = \{1, 2\}$ ، چند مجموعه مانند B می‌توان پیدا کرد که $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل

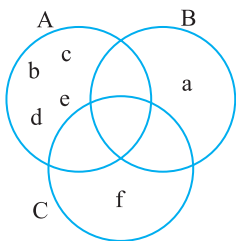
چون $B \subseteq A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ، پس مجموعه B عضوی به جز ۱، ۲ و ۳ ندارد. چون ۳ عضو A نیست ولی عضو $A \cup B$ است، پس ۳ عضو B است. عددهای ۱ و ۲ هم می‌توانند عضو مجموعه B باشند یا نباشند. بنابراین B یکی از مجموعه‌های $\{1, 3\}$ ، $\{2, 3\}$ و $\{1, 2, 3\}$ است. بنابراین چهار مجموعه مانند B می‌توان پیدا کرد.

مسئله ۹
راه حل

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4, 5, 6\}$ و $A \cup B = B \cup C$ ، حداقل و حداکثر تعداد اعضای مجموعه C چقدر است؟ ابتدا توجه کنید که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، پس $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. بنابراین مجموعه C دست کم باید شامل عضوهای ۱ و ۲ باشد. معلوم است که اگر $C = \{1, 2\}$ ، شرطهای مسئله برقرارند. پس حداقل تعداد اعضای مجموعه C برابر ۲ است. از طرف دیگر، اگر مجموعه C عضوی به جز عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ داشته باشد، مجموعه $B \cup C$ نیز چنین عضوی خواهد داشت، که درست نیست. معلوم است که اگر $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، شرطهای مسئله برقرارند. بنابراین حداکثر تعداد اعضای مجموعه C برابر ۶ است.

مسئله ۱۰
راه حل

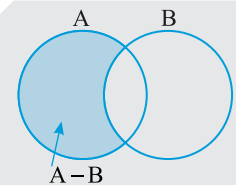
اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cup C = \{b, c, d, e, f\}$ ، مجموعه A حداکثر چند عضو دارد؟



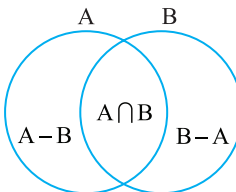
ابتدا توجه کنید که $A \subseteq A \cup B$ و چون مجموعه $A \cup B$ پنج عضو دارد، پس مجموعه A حداکثر پنج عضو دارد. اکنون توجه کنید که اگر مجموعه A پنج عضو داشته باشد، آن گاه a, b, c, d, e عضو مجموعه A هستند. اما در این صورت $a \in A \cup C$ که درست نیست. بنابراین A حداکثر چهار عضو ممکن است داشته باشد. نمودار و ن مقابل نشان می‌دهد که این شرایط ممکن است پیش بیاید.

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند مجموعه $A - B$ (بخوانید A منهای B) مجموعه همه عضوهای A است که عضو مجموعه B نیستند. در حقیقت،

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



در حالت کلی، ناحیه‌های نمودار و ن دو مجموعه A و B به صورت مقابل هستند.



اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه $A - B \subseteq A$.



در هر مورد مجموعه $A - B$ را مشخص کنید.

مسئله ۱۱

الف) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7\}$
 ب) $A = \{1, 2, 3, \{3\}, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, \{3\}, 5\}$
 الف) مجموعه $A - B$ از آن عضوهایی از مجموعه A تشکیل شده است که عضو مجموعه B نیستند. بنابراین $A - B = \{1, 2, 3, 4\}$.
 ب) عضوهای مجموعه $A - B$ آن عضوهایی از مجموعه A هستند که عضو مجموعه B نیستند. بنابراین $A - B = \{3, 4\}$.

راه حل

اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه $A \cap B = B \cap A$ و $A \cup B = B \cup A$. اما ممکن است $A - B \neq B - A$. مثلاً، اگر $A = \emptyset$ و $B = \{1\}$ ، آن گاه $A - B = \emptyset$ و $B - A = \{1\}$ ، پس $A - B \neq B - A$.

مثال

مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

مسئله ۱۲

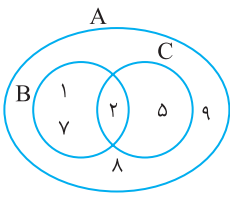
الف) $Z - N$ (ب) $N - Z$ (پ) $N - W$ (ت) $W - N$ (ث) $Z - W$ (ج) $W - Z$ (ح) $N \cap W$ (ع) $Z \cup N$ (غ)

الف) $Z - N = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ (الف)
 ب) $N - Z = \{0\}$ (پ)
 ث) $Z - W = \{\dots, -3, -2, -1\}$ (ث)
 ج) $W - N = \{0\}$ (ت)
 ح) $W - Z = \{0\}$ (ج)
 ع) $N \cap W = \{1, 2, 3, \dots\} \cap \{0, 1, 2, 3, \dots\} = N$ (ع)
 غ) $Z \cup N = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} \cup \{1, 2, \dots\} = Z$ (غ)

راه حل

مسئله ۱۳

با توجه به نمودار وِن مقابل، مجموعه $A \cap (B - C)$ را مشخص کنید.

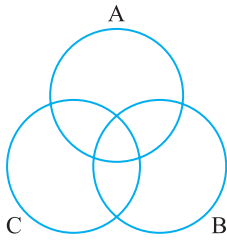


توجه کنید که $A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ و $B - C = \{1, 7\}$. پس $A \cap (B - C) = \{1, 7\}$.

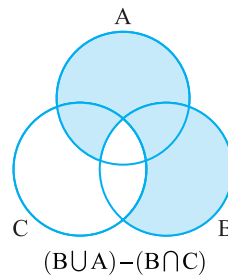
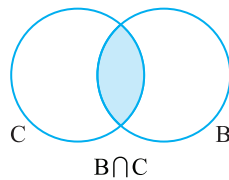
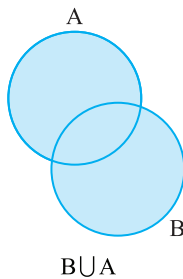
راه حل

مسئله ۱۴

مجموعه $(B \cup A) - (B \cap C)$ را روی نمودار وِن مقابل هاشور بزنید.



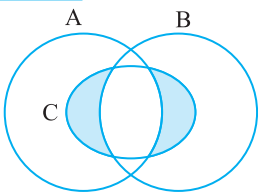
ابتدا مجموعه‌های $B \cup A$ و $B \cap C$ و سپس مجموعه مورد نظر را مشخص می‌کنیم:



راه حل

مسئله ۱۵

ناحیه سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

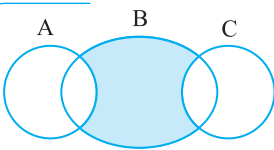


توجه کنید که اگر از مجموعه C عضوهای مجموعه $A \cap B$ را حذف کنیم، ناحیه سایه‌دار مورد نظر به دست می‌آید. بنابراین مجموعه مورد نظر $C - (A \cap B)$ است.

راه حل

مسئله ۱۶

ناحیه سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه است؟

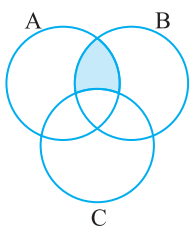


توجه کنید که اگر از مجموعه B عضوهای مجموعه‌های A و C را حذف کنیم، ناحیه مورد نظر به دست می‌آید. بنابراین ناحیه سایه‌دار مورد نظر مجموعه $B - (A \cup C)$ است.

راه حل

تست ۸

ناحیه سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



(۱) $A - (B \cup C)$

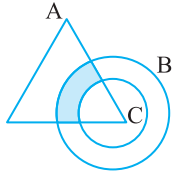
(۲) $C - (A \cap B)$

(۳) $(A \cup B) - C$

(۴) $(A \cap B) - C$

توجه کنید که اگر از مجموعه $A \cap B$ عضوهای مجموعه C را حذف کنیم، ناحیه مورد نظر به دست می‌آید. بنابراین ناحیه سایه‌دار مورد نظر مجموعه $(A \cap B) - C$ است.

راه حل



ناحیه سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

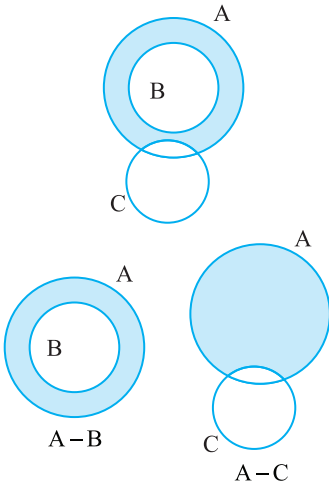
- ۱) $(A-B) \cap C$ ۲) $A-(B-C)$
 ۳) $A \cap (B-C)$ ۴) $A-(B \cap C)$

تست ۹

راهنما

توجه کنید که ناحیه مورد نظر اشتراک مجموعه A و مجموعه $B-C$ ، یعنی $A \cap (B-C)$ است.

مسئله ۱۷ ناحیه سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

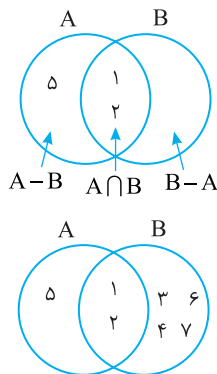


توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اشتراک ناحیه‌های سایه‌دار در نمودارهای وِن روبه‌رو است. بنابراین ناحیه مورد نظر مجموعه $(A-B) \cap (A-C)$ را مشخص می‌کند. توجه کنید ناحیه سایه‌دار را به صورت $(A-B)-C$ و $(A-C)-B$ نیز می‌توان نوشت.

مسئله ۱۷

راهنما

مسئله ۱۸ فرض کنید $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A \cap B = \{1, 2\}$ و $A-B = \{5\}$. مجموعه‌های A و B را مشخص کنید.



از فرض‌های $A \cap B = \{1, 2\}$ و $A-B = \{5\}$ نمودار وِن مقابل به دست می‌آید. چون

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

باید مشخص کنیم که عددهای ۳، ۴، ۶ و ۷ عضو کدام مجموعه‌اند. توجه کنید که این عددها عضو مجموعه‌های $A \cap B$ و $A-B$ نیستند. پس عضو مجموعه $B-A$ هستند.

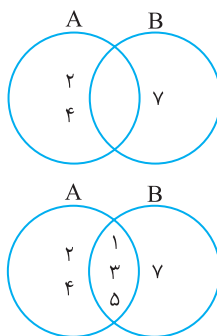
بنابراین به نمودار وِن مقابل می‌رسیم. در نتیجه

$$A = \{1, 2, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

مسئله ۱۸

راهنما

مسئله ۱۹ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A-B = \{2, 4\}$ و $B-A = \{7\}$ ، مجموعه B را مشخص کنید.



برای حل این مسئله بهتر است از نمودار وِن استفاده کنیم. ابتدا توجه کنید که از $A-B = \{2, 4\}$ معلوم می‌شود که عددهای ۲ و ۴ عضو مجموعه A هستند، اما عضو مجموعه B نیستند. همین‌طور، از $B-A = \{7\}$ معلوم می‌شود که عدد ۷ عضو مجموعه B است، اما عضو مجموعه A نیست. بنابراین، فعلاً به نمودار وِن مقابل می‌رسیم.

از طرف دیگر، از اینکه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A-B = \{2, 4\}$ معلوم می‌شود که عددهای ۱، ۳ و ۵ عضو هر دو مجموعه A و B هستند. بنابراین به نمودار وِن مقابل می‌رسیم، پس

$$B = \{1, 3, 5, 7\}$$

مسئله ۱۹

راهنما

قرارداد تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

$$n(\{\}) = 1 \quad \text{و} \quad n(\emptyset) = 0$$

مثال

تست ۱۰

اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x^3 < 100\}$ ، مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راهنما

توجه کنید که

$$1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125, \dots$$

بنابراین $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $n(A) = 4$.

مسئله ۲۰

اگر $A = \{x | 10 < x < 120, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{y | 6 < y < 90, y = 6p, p \in \mathbb{N}\}$ ، مقدار $n(B - A)$ چقدر است؟

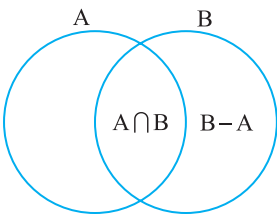
راهنما

از روی نمودار و شکل مقابل معلوم می‌شود که $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$. از طرف دیگر،

$$n(B) = \frac{84 - 12}{6} + 1 = 13 \text{ بنابراین } 84 \text{ تا } 12 \text{ است.}$$

همین‌طور، A مجموعه مضرب‌های عدد ۴ از ۱۲ تا ۱۱۶ است. بنابراین مجموعه $A \cap B$ ، مجموعه عددهایی از ۱۲ تا ۸۴ است که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیرند. این عددها، مضرب‌های عدد ۱۲ از ۱۲ تا ۸۴ هستند.

$$\text{بنابراین } n(A \cap B) = \frac{84 - 12}{12} + 1 = 7 \text{ به این ترتیب، } n(B - A) = 13 - 7 = 6.$$



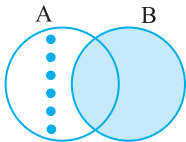
مسئله ۲۱

اگر $n(A \cup B) = 18$ و $n(A - B) = 6$ ، مقدار $n(B)$ چقدر است؟

راهنما

چون $n(A - B) = 6$ ، پس به نمودار و شکل مقابل می‌رسیم. اکنون توجه کنید که چون

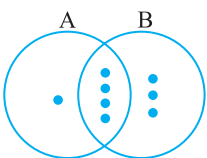
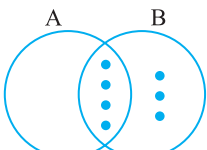
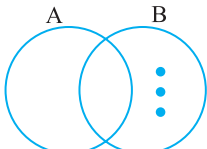
$$n(A \cup B) = 18 \text{، پس باید در ناحیه رنگی این نمودار و } 18 - 6 = 12 \text{ عضو وجود}$$

داشته باشد. بنابراین $n(B) = 12$.

مسئله ۲۲

اگر $n(A) = 5$ ، $n(B) = 7$ و $n(B - A) = 3$ ، مقدار $n(A - B)$ چقدر است؟

راهنما

برای حل این مسئله بهتر است از نمودار و شکل استفاده کنیم. چون $n(B - A) = 3$ ، پس مجموعه $B - A$ سه عضو دارد.چون $n(B) = 7$ ، پس مجموعه B هفت عضو دارد که با توجه به نمودار و شکل، چهار عضو آن،عضو مجموعه $A \cap B$ هستند.اکنون توجه کنید که چون $n(A) = 5$ ، پس مجموعه A پنج عضو دارد که با توجه به نمودار وشکل، یک عضو آن، عضو مجموعه $A - B$ است، یعنی $n(A - B) = 1$.

تست ۱۱

A و B دو مجموعه‌اند، $n(A - B) = n(B - A)$ ، $n(A \cap B) = 4$ و $n(A \cup B) = 16$. مقدار $n(A)$ چقدر است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

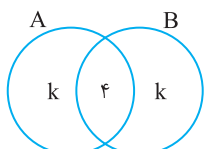
راهنما

فرض می‌کنیم $n(A - B) = n(B - A) = k$. بنابراین چون $n(A \cap B) = 4$ ، به نمودار و

شکل مقابل می‌رسیم که در آن تعداد عضوهای هر ناحیه را درون آن نوشته‌ایم. اکنون توجه کنید که چون

$$n(A \cup B) = 16 \text{، پس}$$

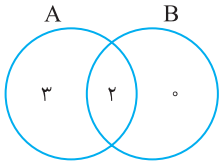
$$k + 4 + k = 16 \Rightarrow 2k = 12 \Rightarrow k = 6$$

در نتیجه، $n(A) = 6 + 4 = 10$.

تست ۱۲

 اگر $n(A \cap B) = 2$ و $n(A - B) = 3$ ، کمترین مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)



از روی نمودار و ن مقابل معلوم است که برای اینکه $n(A \cup B)$ کمترین مقدار ممکن باشد، باید $n(B - A) = 0$ بنابراین.

$$n(A \cup B) \geq 3 + 2 = 5$$

راه حل

تست ۱۳

 اگر $n(A \cup B) = 13$ و $n(A) = 4$ ، بیشترین مقدار ممکن $n(B)$ چقدر است؟

۴ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴)

توجه کنید که $B \subseteq A \cup B$ ، پس $n(B) \leq n(A \cup B) = 13$. بنابراین بیشترین مقدار $n(B)$ وقتی اتفاق می افتد که تمام اعضای $A \cup B$ عضو B باشند. یعنی B ، 13 عضو داشته باشد.

راه حل

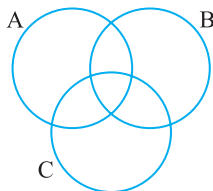
تمرین

 ۵۳ اگر $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$ ، مجموعه $A \cap B$ را پیدا کنید.

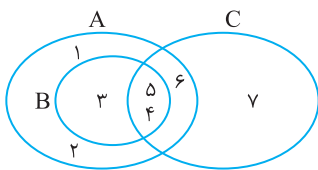
 ۵۴ اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 20\}$ ، مجموعه $A \cap B$ را مشخص کنید.

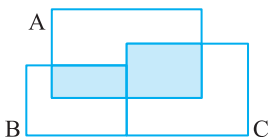
 ۵۵ اگر $A \cap B = \{a, b, c, d\}$ و $A \cap C = \{b, c, d, e\}$ ، مجموعه $B \cap C$ دست کم چند عضو دارد؟

 ۵۶ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ ، $B = \{2, 4, 7, 8\}$ و $C = \{4, 5, 7, 9\}$ ، مجموعه های زیر را مشخص کنید.

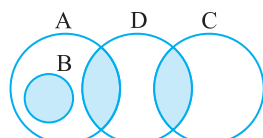
 الف) $A \cap B$ ب) $B \cup C$ پ) $A \cup (B \cap C)$ ت) $(A \cap B) \cup C$

 ۵۷ A مجموعه ششمارنده های طبیعی عدد ۲۴، B مجموعه اعداد اول یک رقمی و C مجموعه مضارب طبیعی ۳ و کوچک تر از ۲۰ هستند.

الف) اعضای این مجموعه ها را در نمودار و ن روبه رو بنویسید.
ب) مجموعه $(A \cap B) \cap C$ را به دست آورید.


 ۵۸ با توجه به نمودار و ن مقابل، مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cap C)$ را مشخص کنید.

 ۵۹ اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 17\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x < 13\}$ ، مجموعه های $A \cap B$ و $A \cup B$ را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید.


۶۰ ناحیه سایه دار در شکل مقابل کدام مجموعه را مشخص می کند؟



۶۱ ناحیه سایه دار در شکل مقابل کدام مجموعه را مشخص می کند؟

 ۶۲ مجموعه هایی مانند A و B مثال بزنید که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap \{6, 7\} = \emptyset$.

۶۳ اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و $A \cup X = B$ ، تمام مجموعه‌های ممکن X را بنویسید.

۶۴ اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، چند مجموعه مانند B می‌توان پیدا کرد که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ؟

۶۵ اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ ، چند مجموعه مانند K می‌توان پیدا کرد که $A \cap B \subseteq K \subseteq A \cup B$ ؟

۶۶ مقادیر x و y را در هر یک از تساوی‌های زیر به دست آورید.

الف) $\{11, x, 5\} \cup \{-5, 13, 11, 2\} = \{5, 2, 11, -5, y\}$

ب) $\{1, x\} = \left\{ 7, -6, 4, \frac{y}{2} \right\} \cap \{4, y+1, 0, x-3\}$

۶۷ فرض کنید $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 6\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - B$

ب) $B - A$

پ) $A - C$

ت) $C - A$

۶۸ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $C = \{1, 3, 6, 9\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - (B \cap C)$

ب) $A - (B \cup C)$

۶۹ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{1, 2, 7\}$ و $C = \{3, 4, 7, 8\}$.

الف) تحقیق کنید که $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

ب) تحقیق کنید که $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

۷۰ فرض کنید $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ و $B = \{x^2 + 1 \mid x \in A\}$. مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را مشخص کنید.

۷۱ فرض کنید $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$ ، $B = \{x - 2 \mid x \in A, x \neq 2\}$ و $C = \{y^2 \mid y \in B\}$. مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ ، $(A - B) \cup C$ و $A - (B \cup C)$ را مشخص کنید.

۷۲ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. هر یک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از عمل‌های اشتراک، اجتماع و

تفاضل برحسب مجموعه‌های A و B بنویسید.

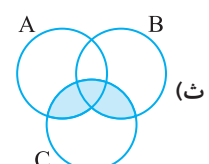
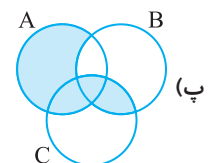
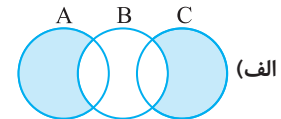
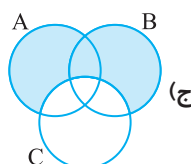
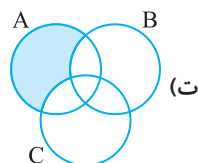
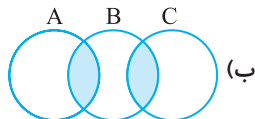
الف) $C = \{5, 6, 7\}$

ب) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

پ) $E = \{1, 2, \dots, 10\}$

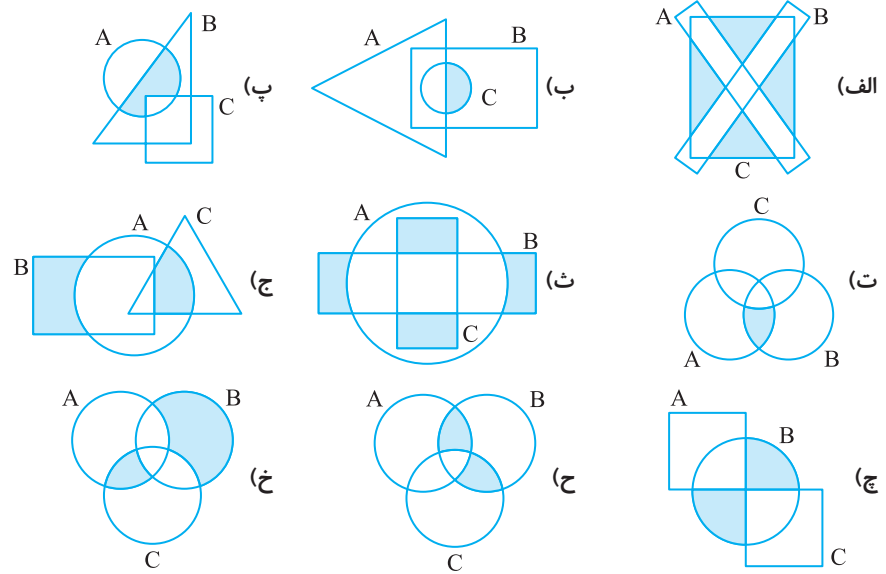
ت) $F = \{8, 9, 10\}$

۷۳ در هر مورد تعیین کنید ناحیه سایه‌دار کدام مجموعه را مشخص می‌کند.



در هر مورد تعیین کنید ناحیه سایه‌دار چه مجموعه‌ای را مشخص می‌کند.

۷۴



اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B - A = \{5, 6, 7\}$ ، مجموعه $A \cup B$ را مشخص کنید. ۷۵

اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A - B = \{2, 4\}$ ، مجموعه B چند عضو دارد؟ ۷۶

اگر $A = \{1, 2, \{2\}, \{1, 3\}\}$ ، $B - A = \{3\}$ و $A - B = \{2, \{1, 3\}\}$ ، مجموعه B را مشخص کنید. ۷۷

مجموعه‌های A و B را طوری مشخص کنید که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ، $A - (A \cap B) = \{1, 2\}$ و $B - (A \cap B) = \{7, 8\}$. ۷۸

اگر $A = \{3, 4, 5\}$ ، $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ و $A - B = \{3, 4\}$ ، مجموعه B را مشخص کنید. ۷۹

اگر $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8\}$ ، $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $A - B = \{5, 6, 7\}$ ، مجموعه B را مشخص کنید؟ ۸۰

مجموعه‌های A و B را طوری مشخص کنید که $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{1, 3, 4\} \subseteq A$ و $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 4\}$. ۸۱

در هر مورد تعداد اعضای مجموعه را مشخص کنید. ۸۲

الف) $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ ۸۳

ب) $B = \{x \mid x \in \mathbb{W}, x < 7\}$

پ) $C = \{\emptyset\}$ ۸۴

ت) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\}$

اگر $A = \{1, 3, 4, 9\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \in A\}$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟ ۸۳

اگر $A = \{1, \{2\}, 3, \{4, 5\}\}$ ، $B = \{1, \{2, 3\}, 4, 5\}$ و $C = \{\{1\}, \{2\}, 3, \{4, 5\}\}$ ، مقدار $n((A \cap C) \cup B)$ چقدر است؟ ۸۴

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 6\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x \leq 1\}$ ، مقدار $n(A \cup B) + n(A \cap B)$ چقدر است؟ ۸۵

A و B دو مجموعه‌اند، $n(A) = 8$ و $n(B - A) = 5$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟ ۸۶

اگر $n(A - B) = 7$ ، $n(A \cap B) = 8$ و $n(A \cup B) = 25$ ، مقدار $n(B - A)$ چقدر است؟ ۸۷

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل
۱

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

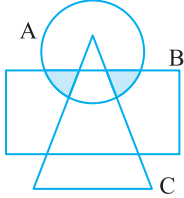
- ۲۶- مجموعه $(A \cap B) \cup (A \cap \emptyset)$ کدام است؟
 (۱) \emptyset (۲) $A \cap B$ (۳) $A \cup B$ (۴) A
- ۲۷- کدام یک از سه گزاره زیر درست است؟
 الف) از $A \cap B = A \cap C$ نتیجه می‌شود $B = C$.
 ب) از $A \cap B = C$ نتیجه می‌شود $C \cap A = C$.
 پ) از $A \subseteq C$ نتیجه می‌شود $A \cap B = B$.
 (الف) (۱) (الف) (۲) (ب) (۳) (الف) و (ب) (۴) (ب) و (پ)
- ۲۸- اگر x زوج است، $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$ و x مضرب ۳ است، $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ، کوچک‌ترین عضو مجموعه $A \cap B$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲
- ۲۹- اگر $A \cap B = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $A \cap C = \{b, d, g\}$ ، مجموعه $B \cap C$ کدام نمی‌تواند باشد؟
 (۱) $\{b, d\}$ (۲) $\{b, c, d, g\}$ (۳) $\{b, d, x, y, z\}$ (۴) $\{b, d, h\}$
- ۳۰- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، مجموعه B حداکثر چند عضو دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۳۱- اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، مجموعه C دست کم چند عضو دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۳۲- مجموعه‌های ناتهی و نامساوی A و B در رابطه $(A - B) \cup B = A$ صدق می‌کنند. کدام گزینه درست است؟
 (۱) $B \subseteq A$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \cap B = \emptyset$ (۴) $A \cup B = B$
- ۳۳- اگر $A \subseteq B \subseteq C$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $A - B = A$ (۲) $A \cap C = C$ (۳) $B - C = \emptyset$ (۴) $C \cap A = B$
- ۳۴- اگر $M = \{a, b, \{1, 2\}, \Delta\}$ و $N = \{a, 1, 2, \{\Delta\}\}$ ، مجموعه $M - N$ چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۳۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، مجموعه $A - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۳۶- مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ کدام است؟
 (۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) $(A \cup B) - A$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$
- ۳۷- اگر $A = \{\nabla, \emptyset, \{\emptyset\}, \Delta, \{?\}\}$ و $B = \{\{\emptyset, \nabla\}, \Delta, \{?\}\}$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۳۸- اگر $A = \{x \mid 15 \leq x \leq 67, x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{y \mid 18 < y \leq 75, y = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ ، مقدار $n(A \cap B)$ چقدر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۳۹- مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ چند زیرمجموعه مانند K دارد که $n(K) < 4$ ؟
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵
- ۴۰- k عددی طبیعی است، $A = \{k, 2k, k^2, 3k\}$ و $n(A) = k$. به‌ازای چند مقدار k این روابط درست است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۴۱- اگر $n(A) = 8$ و $n(B - A) = 3$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟
 (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۱
- ۴۲- A و B دو مجموعه‌اند و مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ به ترتیب ۱۲۸، ۸ و ۴ زیرمجموعه دارند. مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۱۶ (۲) ۱۱۶ (۳) ۲ (۴) ۱۲۰

۴۳- اگر $n(A-B)=7-x$ ، $n(B-A)=12-2x$ و $n(A \cap B)=3x$ ، مقدار $n(A \cup B)$ چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴) نمی‌توان مشخص کرد.

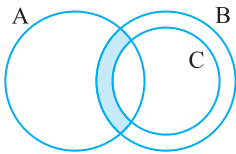
۴۴- اگر مجموعه $A \cap B$ ، ۳۲ زیرمجموعه داشته باشد، $n(A \cup B)=5x+1$ ، $n(B)=4x-1$ و $n(A)=3x-1$ ، مقدار $n(B-A)$ چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۸



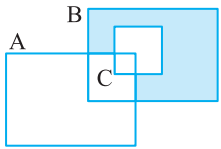
۴۵- نمودارِ وِن مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- (۱) $(A \cap B) \cap C$
 (۲) $(A-C)-B$
 (۳) $(A \cap B)-C$
 (۴) $(B-C)-A$



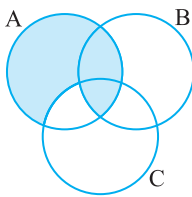
۴۶- نمودارِ وِن مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- (۱) $A \cap (B \cap C)$
 (۲) $(B-C) \cap (A \cap C)$
 (۳) $(B-C)-A$
 (۴) $(A \cap B)-C$



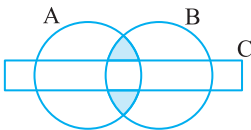
۴۷- نمودارِ وِن مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

- (۱) $(B-C) \cap A$
 (۲) $B-(A \cup C)$
 (۳) $B-(A \cap B)$
 (۴) $(B-C) \cap ((A \cup C) \cap B)$



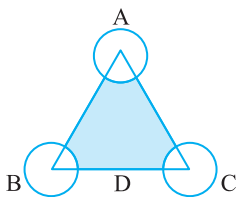
۴۸- ناحیه سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه است؟

- (۱) $(A \cap B \cap C) \cup A$
 (۲) $(A \cap B) \cup C$
 (۳) $A-(A \cap B)$
 (۴) $(A \cap B) \cup (A-(B \cup C))$



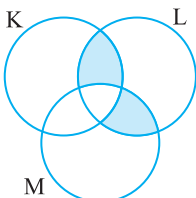
۴۹- ناحیه سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه است؟

- (۱) $(A \cap B)-C$
 (۲) $(A \cup B) \cap C$
 (۳) $(A-B) \cap C$
 (۴) $(C \cap B) \cup A$



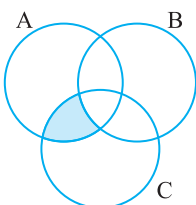
۵۰- ناحیه سایه‌دار برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $(A \cup B \cup C) \cap D$
 (۲) $(A \cup B \cup C)-D$
 (۳) $(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$
 (۴) $D-(A \cup B \cup C)$



۵۱- ناحیه سایه‌دار برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $(K \cap L)-M$
 (۲) $(M \cap L)-K$
 (۳) $(K \cap M)-(K \cap L \cap M)$
 (۴) $(L \cap (K \cup M))-(K \cap L \cap M)$



۵۲- با توجه به نمودارِ وِن مقابل، ناحیه سایه‌دار برابر با کدام گزینه نیست؟

- (۱) $(A \cap C)-B$
 (۲) $C \cap (A-B)$
 (۳) $A \cap (C-B)$
 (۴) $(A \cap B)-(B \cap C)$

فصل ۱

امتحانات نهایی

۱

عبارت‌های درست را با علامت ✓ و عبارت‌های نادرست را با علامت ✗ مشخص کنید.

(الف) مجموعه «اعداد اول بین ۱۵ و ۱۸» یک مجموعه تک عضوی است.

(ب) مجموعه تهی را به صورت $\{\emptyset\}$ نشان می‌دهیم.

(پ) هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

(ت) در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد رو آمده اول باشد برابر $\frac{1}{3}$ است.

(ث) یک مجموعه سه عضوی ۸ زیرمجموعه دارد.

(ج) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cap B = A$.

(چ) در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن اعضا مهم است.

(ح) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

(خ) مجموعه $A \cup B$ زیرمجموعه A است.

(د) اگر $n(A) = n(B)$ ، آن‌گاه A و B دو مجموعه برابرند.

(ذ) مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

(ر) عبارت «دو عدد اول یک رقمی» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

در جای خالی عدد، کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.

(الف) اگر $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ ، آن‌گاه $n(A) = \dots\dots\dots$

(ب) احتمال ظاهر شدن عددی زوج و کوچک‌تر از ۵ در پرتاب یک تاس $\dots\dots\dots$ است.

(پ) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cup B = \dots\dots\dots$

(ت) مجموعه $A = \{3, \emptyset\}$ دارای $\dots\dots\dots$ زیرمجموعه است.

(ث) مجموعه شامل همه عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند، $\dots\dots\dots$ دو مجموعه A و B نام دارد.

گزینه درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

(الف) اگر خانواده‌ای دو فرزند داشته باشد، احتمال دختر شدن هر دو فرزند این خانواده کدام است؟

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$

(ب) در پرتاب همزمان دو تاس، چقدر احتمال دارد که اعداد رو آمده مثل هم نباشند؟

$\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

(پ) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 1\}$ برابر است؟

$\{-2, -1, 0, 1\}$ $\{-1, 0, 1\}$ $\{-1, 0\}$ $\{-2, -1, 0\}$

(ت) کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

اعداد اول کمتر از ۱۰ سه عدد متوالی چهار شهر ایران اعداد بزرگ

(ث) مجموعه $\{x \mid x \in A, x \in B\}$ با کدام نماد نمایش داده می‌شود؟

$A \subseteq B$ $A \cap B$ $A \cup B$ $B \subseteq A$

(ج) مجموعه $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ برابر است با

\mathbb{N} $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ \emptyset $\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

(چ) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه $\{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$ برابر است؟

$\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\{k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(ح) در پرتاب همزمان دو تاس سبز و زرد، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مساوی ۹ باشد چیست؟

$\frac{1}{18}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{4}$

۲

۳

همدان - ۹۷

یزد - ۹۷

شهرستان‌های تهران - ۹۷

تهران - ۹۷

خارج از کشور - ۹۷

اصفهان - ۹۷

آذربایجان غربی - ۹۸

هرمزگان - ۹۸

تهران - ۹۸

استان تهران - ۹۸

سیستان و بلوچستان - ۹۸

خراسان رضوی - ۹۸

خوزستان - ۹۸

گیلان - ۹۷

یزد - ۹۷

فارس - ۹۷

سمنان - ۹۸

فارس - ۹۷

اصفهان - ۹۷

آذربایجان شرقی - ۹۷

هرمزگان - ۹۸

خوزستان - ۹۸

ایلام - ۹۸

کهگیلویه و بویراحمد - ۹۸

گیلان - ۹۸

خوزستان - ۹۸

با توجه به مجموعه $A = \left\{ ۸, -۲, ۳, \frac{۱}{۲} \right\}$ ، در جای خالی نماد مناسب ($\in, \notin, \subseteq, \supseteq$) بگذارید.

$-۲ \in A$ $\{1, 3\} \subseteq A$

کرمان - ۹۷

مجموعه $\left\{ y, \frac{۱}{۲}, ۵^۲ + ۱ \right\}$ با مجموعه $\{x, ۵, \sqrt{۳}\}$ برابر است. مقادیر x و y را به دست آورید.

البرز - ۹۸

جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند.

$\left\{ -\frac{۳}{۲}, \sqrt{\frac{۲۵}{۹}}, ۵, \bigcirc \right\} = \left\{ \frac{۵}{۳}, \bigcirc, -۱/۵, ۳^۲ \right\}$

گیلان - ۹۸

الف) مجموعه $A = \left\{ \frac{x+1}{۲} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۲ \right\}$ را با عضوهای مشخص کنید.

ب) مقدار m را چنان پیدا کنید که مجموعه $B = \{-۴, m-۱\}$ یک عضو باشد.

تهران - ۹۸

الف) اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{a, c, f\}$ ، مجموعه زیر را با اعضایش بنویسید.

$A - B =$

ب) مجموعه $D = \{۳k+۱ \mid k \in \mathbb{Z}, -۱ < k \leq ۱\}$ را با اعضاها مشخص کنید.

تیزهوشان میبد - ۹۷

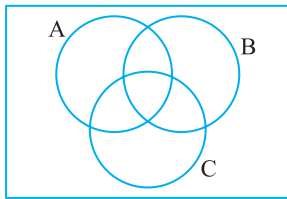
اعضای مجموعه $\left\{ \frac{۱۲}{x} \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{۱۲}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$ را بنویسید.

بوشهر - ۹۸

با توجه به مجموعه‌های $E = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$ و $O = \{۱, ۳, ۵, \dots\}$ ، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

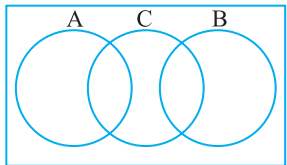
$E \cap O =$

$E \cup O =$



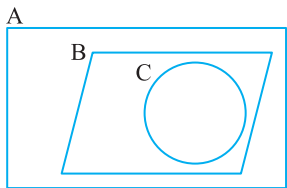
خوزستان - ۹۸

مجموعه $(A-C) \cup (B-C)$ را در شکل مقابل هاشور بزنید.



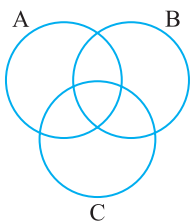
زنجان - ۹۸

در نمودار مقابل، مجموعه $(A \cup B) - C$ را هاشور بزنید.



کرمان - ۹۷

با توجه به نمودار و مقابل، مجموعه $A - (B \cup C)$ را هاشور بزنید.



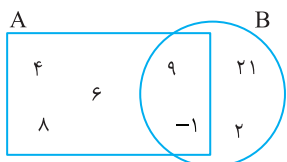
گیلان - ۹۷

الف) مجموعه $(C \cup B) - A$ را در نمودار و مقابل مشخص کنید.

ب) اگر $A = \{۳, -۲, ۵\}$ و B مجموعه «اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶» باشد، مجموعه‌های زیر با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

$A \cap B =$

$A - B =$



همدان - ۹۷

با توجه به نمودار مقابل،

الف) زیرمجموعه‌ای از A را بنویسید که عضوهایش بر ۳ بخش‌پذیر باشند (مجموعه C).

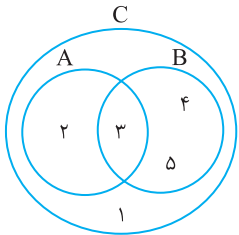
ب) کدام رابطه درست و کدام نادرست است؟

$A \subseteq B \quad \bigcirc$

$-۹ \notin B \quad \bigcirc$

$B - (A \cap B) =$

ب) با توجه به نمودار، مجموعه مقابل را با عضوهایش بنویسید.



البرز - ۹۷

$$C - (A \cup B) =$$

$$C \cap A =$$

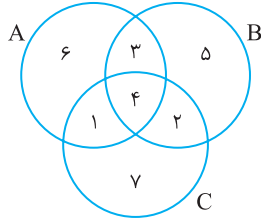
$$3 \in (B \cap A) \quad \text{○}$$

$$C \subseteq (A \cup B) \quad \text{○}$$

با توجه به نمودار و نِ مقابل،

الف) مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

ب) درستی (✓) یا نادرستی (x) عبارات زیر را مشخص کنید.



مازندران - ۹۸

○ نادرست

○ درست

○ نادرست

○ درست

○ نادرست

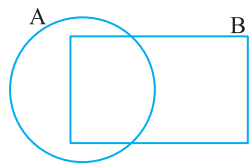
○ درست

با توجه به نمودار زیر، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - B = \{5, 2\}$

ب) $C \cap (A \cup B) = \{1, 4, 2\}$

پ) $n(A \cup C) = n(A) + n(C)$

الف) اگر بدانیم $A \cap B = \{3, 4\}$ ، $A - B = \{2\}$ و $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، اعضای A و B را

اصفهان - ۹۸

$$C = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$$

داخل نمودار قرار دهید.

ب) مجموعه مقابل را با عضوهای مشخص کنید.

اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد؟

ب) عدد رو شده فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

آذربایجان شرقی - ۹۸

خوزستان - ۹۷

در اکتشافات تاریخی، مشخص شده است که مصریان از تاس‌های بیست وجهی منتظم استفاده می‌کردند که اعداد ۱ تا ۲۰ بر آن حک شده بود. در پرتاب یک تاس بیست وجهی منتظم، احتمال اینکه عدد رو شده اول باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad \text{○}$$

$$\frac{9}{20} \quad \text{○}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{○}$$

$$\frac{7}{20} \quad \text{○}$$

اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) مجموع دو عدد رو شده ۵ باشد؟

ب) دو عدد رو شده مثل هم باشند؟

تهران - ۹۸

استان تهران - ۹۸

تیزهوشان میند - ۹۷

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را حساب کنید.

الف) اختلاف دو عدد رو شده ۳ باشد.

ب) حداقل یکی از اعداد رو شده اول باشد.

اگر دو سکه را با هم بیندازیم،

الف) احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها رو بیاید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه هر دو سکه مثل هم بیایند چیست؟

یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد تاس عددی اول و سکه رو بیاید؟

استان تهران - ۹۸

کومان - ۹۷

آذربایجان شرقی - ۹۷

یزد - ۹۷

مازندران - ۹۷

در پرتاب هم‌زمان یک سکه و یک تاس، احتمال رخ دادن کدام‌یک از پیشامدهای زیر با بقیه متفاوت است؟

○ سکه پشت و تاس عددی اول بیاید.

○ سکه رو و تاس عددی زوج بیاید.

○ سکه پشت و تاس عددی فرد بیاید.

○ سکه رو و تاس عددی مرکب بیاید.

ده کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت را بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد شماره این

کارت عددی اول باشد؟

شهرستان‌های تهران - ۹۷

در جعبه‌ای ۲ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۵ مهره زرد وجود دارد. مهره‌ای را تصادفی از این جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره زرد نباشد؟

چهارمحال و بختیاری - ۹۸

در جعبه‌ای ۲ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۴ مهره سبز موجود است. یک مهره به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه مهره انتخابی، سبز یا آبی

باشد چقدر است؟

البرز - ۹۷

مازندران - ۹۸

خانواده‌ای سه فرزند دارد. احتمال اینکه هر سه فرزند هم‌جنس باشند، چقدر است؟

$$\frac{1}{8} \quad \text{○}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{○}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{○}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{○}$$

فصل نهم

پاسخ تمرین‌ها

پاسخ تمرین‌ها

فصل اول

۱

الف) بله. $\{7, 8, 9\}$.

ب) خیر.

پ) خیر.

ت) بله. \emptyset .

ث) خیر.

ج) بله. $\left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}\right\}$.

چ) بله. $\left\{\frac{19}{3}\right\}$.

ح) بله. $\{5, 10, 15, \dots\}$.

۲ خیر.

۳

الف) $\{-4, -3, -2, \dots, 6, 7\}$ که ۱۲ عضو دارد.

ب) $\{1, 13, 17, 19\}$ که ۴ عضو دارد.

۴

الف) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (ب) $\{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

۵

الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی.

ب) مجموعه اعداد مضرب ۳ بین -7 و 10 .

پ) مجموعه اعداد طبیعی مربع کامل.

ت) مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۲.

۶

• مجموعه اعداد اول فرد یک رقمی.

• مجموعه اعداد فرد بین ۲ و ۸.

۷

الف) درست

ب) درست

پ) درست

ت) غلط

۸

الف) $\{1\} \notin A$

ب) $2 \in A$

پ) $\{1, 2\} \in A$

ت) $4 \notin A$

ث) $\{1, 2, 3\} \notin A$

ج) $\{3, \{4\}\} \notin A$

۹

خیر. مثلاً اگر $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ و $C = \{\{\emptyset\}\}$, آن‌گاه

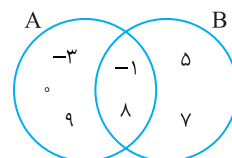
$A \in B$ و $B \in C$ اما $A \notin C$.

۱۰ الف)

$A = \{-4, -2, -1, 3, 14, 15\}$, $B = \{-12, -4, -1, 7, 15, 16\}$

ب) ۱۵ (پ) -12 (ت) -4

۱۱ الف)



ب) $\{-1, 8\}$

پ) $\{5, 7\}$

۱۲

• مجموعه اسب‌های بال‌دار.

• مجموعه اعداد اول زوج دو رقمی.

• مجموعه جواب‌های صحیح معادله $3x - 5 = -7$.

۱۳

بله. چون هر دو مجموعه A و B برابر با مجموعه تهی هستند.

۱۴

چون عدد ۵ عضو مجموعه سمت چپ است، پس عضو مجموعه سمت راست نیز هست. بنابراین $5 = 2x + 3$ ، یعنی $x = 1$. در نتیجه، تساوی

داده شده در صورت مسئله می‌شود $\{5, -1\} = \{-1, 2y - 3, 5\}$.

پس برای $2y - 3 = 5$ دو حالت پیش می‌آید:

$$2y - 3 = -1 \Rightarrow y = 1, \quad 2y - 3 = 5 \Rightarrow y = 4$$

۱۵

واضح است که $-\frac{1}{4} = -\frac{1}{5}$ عضو هر دو مجموعه است. چون

اعضای دو مجموعه برابرند. پس $x = 7$ و $y = \sqrt{9} = 3$.

۱۶

چون اعضای دو مجموعه برابر با یکدیگر مساوی هستند، پس $\frac{a}{y}$ و

$a + b$ هر دو با -3 برابرند. در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{a}{y} = -3 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -6, b = 3$$

بنابراین

$$b - \frac{a}{y} = 3 - \frac{-6}{3} = 3 + 2 = 5, \quad \frac{a^2}{9} = \frac{36}{9} = 4, \quad 2b + a = 6 - 6 = 0$$

پس مجموعه مورد نظر $\{0, 4\}$ است.

۱۷

چون یک مجموعه دو عضوی با یک مجموعه یک عضوی برابر است، پس عضوهای مجموعه دو عضوی با یکدیگر برابرند: $x - 5 = 5 - x$ ، یعنی

$x = 5$ پس

$$2y + 2 = x - 5 = 0 \Rightarrow y = -1$$

در نتیجه $y - x = -1 - 5 = -6$.

۱۸

چون مجموعه $\{1, 2, 3\}$ عضوی دارد که دو برابر دیگری است، پس مجموعه دیگر نیز باید عضوی داشته باشد که دو برابر دیگری است. چون

x دو برابر $\frac{x}{2}$ است، پس $x = 2$.

۱۹

چون اعداد ۲ و -3 در این مجموعه‌ها هستند و مجموعه‌ها دو عضوی هستند، پس هر سه مجموعه با مجموعه $\{2, -3\}$ برابرند. در نتیجه،

$$\sqrt{w} = 2 \Rightarrow w = 4, \quad 3z = -3 \Rightarrow z = -1$$

اما در مجموعه A مقدار $1 - x^2$ برابر ۲ نمی‌تواند باشد، چون اگر $1 - x^2 = 2$ ،

آن‌گاه $x^2 = -1$ که درست نیست. پس

$$\begin{cases} 1 - x^2 = -3 \\ \frac{y}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2, -2, \quad y = 10$$

این مسئله دو جواب برای X دارد، در نتیجه $x + y + z + w$ برابر است با

$$-2 + 10 - 1 + 4 = 11 \quad \text{یا} \quad 2 + 10 - 1 + 4 = 15$$

فصل دهم

پاسخ پرسش‌های
چهارگزینه‌ای

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\{3, 4\} \in A$.

۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که $\{b\} \in A$ و

$$b \in A \Rightarrow \{b\} \subseteq A$$

۱۸- گزینه ۳ زیرمجموعه‌های دو عضوی: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

۱۹- گزینه ۲ زیرمجموعه‌هایی مانند C، شامل اعداد ۱، ۳ و ۵ هستند

ولی اعداد ۰، ۲، ۴ و ۶ می‌توانند در C باشند یا نباشند. در نتیجه

زیرمجموعه‌های C همان زیرمجموعه‌های مجموعه $\{0, 2, 4, 6\}$ هستند که

اعداد ۱، ۳ و ۵ به آن‌ها اضافه شده‌اند. پس جواب مسئله برابر است با 2^4 .

۲۰- گزینه ۴ اگر تعداد اعضای مجموعه A برابر n باشد، تعداد

زیرمجموعه‌های آن که همان اعضای مجموعه B هستند برابر است با 2^n . در

نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B برابر است با $2^{(2^n)}$. پس

$$2^{(2^3)} = 256 = 2^8. \text{ در نتیجه } 2^n = 8, \text{ پس } n = 3.$$

۲۱- گزینه ۳ اگر از تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه A، تعداد

زیرمجموعه‌هایی را که حتی یک عدد فرد هم ندارند، کم کنیم، جواب مسئله

به دست می‌آید. زیرمجموعه‌هایی که حتی یک عدد فرد هم ندارند، همان

زیرمجموعه‌های مجموعه $\{2, 4\}$ هستند که تعداد آن‌ها برابر است با $2^2 = 4$.

$$\text{در نتیجه جواب مسئله برابر است با } 2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28.$$

۲۲- گزینه ۳ چون $A = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$ ، پس $n(A) = 6$.

۲۳- گزینه ۱ چون $A = \{-7, -8, -9, \dots\}$ ، پس -7 بزرگ‌ترین

عضو A است.

۲۴- گزینه ۲ چون

$$A = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$$

پس تعداد اعضای A برابر ۱۰ است.

۲۵- گزینه ۳ چون $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، پس تعداد

$$\text{زیرمجموعه‌های غیرتهی A برابر است با } 2^5 - 1 = 31.$$

۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعه

تهی برابر است با مجموعه تهی و اجتماع هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی برابر

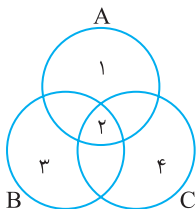
است با خود آن مجموعه، به عبارت دیگر،

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$\text{بنابراین } (A \cap B) \cup (A \cap \emptyset) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

۲۷- گزینه ۲ سه گزاره را با کمک نمودار ون بررسی می‌کنیم.

الف) در نمودار ون زیر شرط $A \cap B = A \cap C$ برقرار است ولی $B \neq C$



۱- گزینه ۳ چون عددهای اول بین ۱۰ و ۲۰ برابر ۱۱، ۱۳، ۱۷ و

۱۹ هستند، پس عبارت «مجموعه سه عدد اول بین ۱۰ و ۲۰» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

۲- گزینه ۳ توجه کنید که $\sqrt{13} = 3/6$ و $\sqrt{98} = 9/9$. بنابراین

مجموعه مورد نظر $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، که شش عضو دارد.

۳- گزینه ۱ معلوم است که ۱ عضو مجموعه مورد نظر است ولی ۲،

۳ و ۴ عضو مجموعه مورد نظر نیستند.

۴- گزینه ۳ معلوم است که ۳ عضو مجموعه مورد نظر نیست.

۵- گزینه ۴ چون $\{2, 6\} \in A$ است، پس $\{2, 6\} \notin A$

درست نیست.

۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\{1, 2\}$ همان $\{2, 1\}$ است. بنابراین

مجموعه مورد نظر $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$ است که چهار عضو دارد.

۷- گزینه ۲ توجه کنید که مجموعه $\{1, 2\}$ همان مجموعه $\{2, 1\}$

است و مجموعه \emptyset همان مجموعه $\{\}$ است. بنابراین عضوهای $\{1\}$ و

$\{\emptyset\}$ از مجموعه اول، عضو مجموعه دوم نیستند.

۸- گزینه ۱ معلوم است که باید $x=1$ یا $x=2$. اگر $x=1$ ،

مجموعه مورد نظر می‌شود $\{1, 2\}$ و اگر $x=2$ ، مجموعه مورد نظر می‌شود

$$\{1, 2, 5\} \text{ که سه عضو دارد. بنابراین } x=1.$$

۹- گزینه ۳ چون مجموع زاویه‌های مثلث برابر 180° است، پس هر

مثلث حداکثر یک زاویه باز می‌تواند داشته باشد. بنابراین مجموعه مثلث‌هایی

که دو زاویه باز دارند، تهی است.

۱۰- گزینه ۲ ۱۱ عددی اول و دو رقمی است. بنابراین مجموعه

عددهای اول دو رقمی تهی نیست. بقیه گزینه‌ها مجموعه‌هایی تهی‌اند.

۱۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون $A=C$ ، عددهای a و b به

ترتیبی عددهای ۶ و ۷ هستند. بنابراین در هر صورت $ab=42$. همین‌طور از

$$A=B \text{ نتیجه می‌شود } c=5. \text{ بنابراین } ab+c=47.$$

۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که چون x عضو مجموعه سمت چپ است،

پس باید عضو مجموعه سمت راست نیز باشد. بنابراین دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول

$$\begin{cases} x=2x-5 \\ y-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

حالت دوم

$$\begin{cases} x=5 \\ y-1=2x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

در هر دو حالت $x+y=11$.

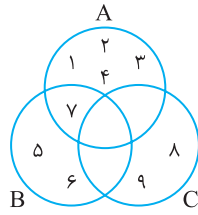
۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\{a, b\} \in A \Rightarrow \{\{a, b\}\} \subseteq A$$

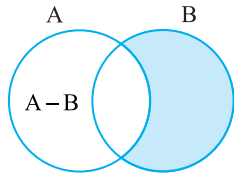
۱۴- گزینه ۳

۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که $\{c\} \in A$ ، ولی $\{c\} \not\subseteq A$.

بنابراین مجموعه C دست کم ۲ عضو دارد. $(C = \{۸, ۹\})$

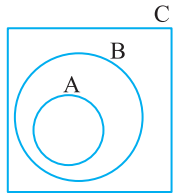


۳۲- گزینه ۱ راه حل اول با کمک نمودار ون به دست می آید که هیچ عضوی در ناحیه سایه دار وجود ندارد. بنابراین $B \subseteq A$. ضمناً $A \cup B = A$ و $A \cap B = B \neq \emptyset$



راه حل دوم از رابطه $X \cup Y = Z$ به دست می آید که $Y \subseteq Z$ و $X \subseteq Z$. طبق فرض سؤال، از رابطه $(A-B) \cup B = A$ به دست می آید $B \subseteq A$.

۳۳- گزینه ۳ برای حل این مسئله از نمودار ون کمک می گیریم. با توجه به فرض مسئله $A-B = \emptyset$, $A \cap C = A$, $A-B = \emptyset$ و $B-C = \emptyset$, $C \cap A = A$



۳۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

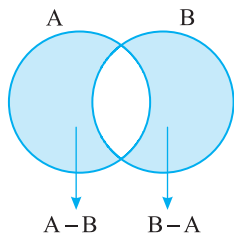
$$M - N = \{b, \{1, 2\}, \Delta\}$$

زیرمجموعه های دو عضوی مجموعه $M - N$ عبارت اند از $\{b, \{1, 2\}\}$, $\{b, \Delta\}$, $\{\{1, 2\}, \Delta\}$

پس مجموعه $M - N$ سه زیرمجموعه دو عضوی دارد.

۳۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ، بنابراین $A - (A \cap B) = \{2, 4, 6\}$ ، پس مجموعه مورد نظر ۳ عضو دارد.

۳۶- گزینه ۴ با کمک نمودار ون به دست می آید که ناحیه رنگی، مجموعه مورد نظر است. ناحیه رنگی شامل عضوهای هر دو مجموعه A و B $(A \cup B)$ است به جز اعضای مشترک هر دو مجموعه A و B $(A \cap B)$ که برابر است با $(A \cup B) - (A \cap B)$.

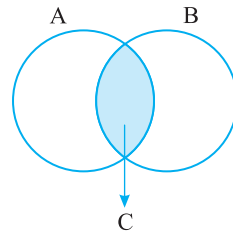


۳۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

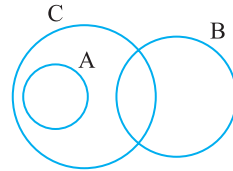
$$A \cup B = \{\nabla, \emptyset, \{\emptyset\}, \Delta, ?, \{\emptyset, \nabla\}, \{?\}\}$$

بنابراین $n(A \cup B) = 7$

ب) در این حالت، همواره رابطه $C \cap A = C$ برقرار است.



پ) از فرض $A \subseteq C$ نمی توان نتیجه گرفت $A \cap B = B$ (مطابق نمودار ون زیر).

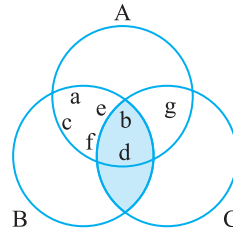


۲۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

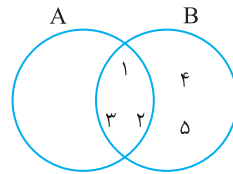
$$A = \{۲, ۴, ۶, \dots\}, B = \{۳, ۶, ۹, \dots\}$$

بنابراین مجموعه $A \cap B$ شامل اعداد طبیعی زوج و مضرب ۳ است که همان اعداد طبیعی مضرب ۶ می شود، یعنی $A \cap B = \{۶, ۱۲, \dots\}$. پس کوچک ترین عضو مجموعه $A \cap B$ برابر است با ۶.

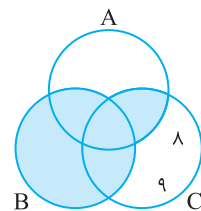
۲۹- گزینه ۲ با توجه به فرض مسئله، نمودار ون زیر به دست می آید. پس b و d حتماً عضو مجموعه $B \cap C$ هستند و a, c, e, f و g حتماً عضو این مجموعه نیستند. بنابراین گزینه ۲) رد می شود.



۳۰- گزینه ۴ چون $B \subseteq A \cup B$ ، پس مجموعه B حداکثر ۵ عضو می تواند داشته باشد. در نمودار ون زیر، شرایط مسئله برقرار است.



۳۱- گزینه ۲ با کمک نمودار ون مسئله را حل می کنیم. با توجه به فرض مسئله، ابتدا به دست می آید که اعداد ۸ و ۹ عضو مجموعه های A و B نیستند، چون در غیر این صورت عضو مجموعه $A \cup B$ می شدند.



از طرف دیگر ناحیه رنگی در نمودار ون برابر با اشتراک دو مجموعه $A \cup B$ و $B \cup C$ است که برابر است با مجموعه $\{۵, ۶, ۷\}$. برای اینکه مجموعه C کمترین تعداد عضو را داشته باشد، این اعداد را عضو مجموعه C قرار نمی دهیم.