

فهرست



- فصل اول: عددهای صحیح و گویا ۷
- فصل دوم: عددهای اول ۳۰
- فصل سوم: چندضلعی‌ها ۵۷
- فصل چهارم: جبر و معادله ۸۲
- فصل پنجم: بردار و مختصات ۱۱۶
- فصل ششم: مثلث ۱۳۷
- فصل هفتم: توان و جذر ۱۷۱
- فصل هشتم: آمار و احتمال ۲۱۱
- فصل نهم: دایره ۲۳۵

فصل ۱

پاسخ نامہ تسریحی



اعداد صحیح

۱- گزینه ۲ موارد داده شده را بررسی می‌کنیم:

(الف) بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی، عدد -1 است؛ پس این مورد درست است.

(ب) عدد صفر نه مثبت است و نه منفی، پس این قسمت نادرست است.

(پ) قرینه هر عدد منفی برابر با یک مقدار مثبت است، (که از خودش بزرگ‌تر است) لذا این قسمت نیز نادرست است.

(ت) این مورد نادرست است؛ زیرا دو برابر اعداد منفی از خودشان کوچک‌تر است.

بنابراین فقط مورد (الف) درست است.

۲- گزینه ۲ ابتدا عددی که به مرکز دایره کوچک یعنی M نسبت داده شده را به دست می‌آوریم، سپس فاصله M تا P را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{(-7) + 3}{2} = -2 \quad (\text{M مرکز دایره است.})$$

پس شعاع دایره کوچک سمت راست برابر با $5 - (-7) = 12$ است؛ بنابراین شعاع دایره کوچک سمت چپ نیز 5 است؛ پس:

$$P = -23 - 5 = -28$$

$$P \text{ تا } M \text{ فاصله} = -2 - (-28) = 26$$

پس:

$$ab + ac + bc \quad (*)$$

۳- گزینه ۲ منظور از حاصل جمع حاصل ضرب دویسه‌دوی سه عدد a ، b و c عبارت روبه‌رو است:

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) اگر هر سه عدد منفی باشند، آن‌گاه مقدار $(*)$ مثبت است (زیرا هر کدام از حاصل‌ضرب‌ها مثبت هستند).

گزینه (۲) اگر دو عدد مثبت و یک عدد منفی باشد (مثلاً a و b مثبت و c منفی)، آن‌گاه عبارت $ab + bc + ac$ امکان دارد منفی باشد. (دقت کنید منفی منفی مثبت)

که $(*)$ همواره منفی نیست، حاصل $(*)$ منفی شده، می‌خواهیم بررسی کنیم در چه حالتی منفی بودن حاصل عبارت، امکان‌پذیر است، که در این حالت این امکان وجود دارد.)

گزینه (۳) اگر دو عدد منفی و یک عدد مثبت باشد، در این صورت حاصل ضرب آن‌ها مثبت است که این خلاف فرض مسئله است.

۴- گزینه ۲ تعداد اعداد صحیح بین a تا b برابر با $b - a - 1$ است؛ پس تعداد اعداد صحیح بین -63 تا 19 برابر است با: $19 - (-63) - 1 = 81$

۵- گزینه ۲ با توجه به این که دنباله به شکلی است که دوتا دوتا علامت عوض می‌شود، پس جای علامت سؤال، عددی با علامت منفی قرار می‌گیرد؛

$$-2 = -1 \times 2$$

$$-6 = -2 \times 3$$

$$+12 = 3 \times 4$$

$$+20 = 4 \times 5$$

$$-30 = -5 \times 6$$

$$? = -6 \times 7 = -42$$

پس:

۶- گزینه ۲ ابتدا دنباله را تا چند عدد دیگر ادامه می‌دهیم، با این کار مشخص می‌شود که چند عدد مرتباً تکرار می‌شوند. با توجه به این اعداد، عدد

$$1, 7, 6, -1, -7, -6, 1, 7, 6, -1, -7, \dots$$

هزارم را مشخص می‌کنیم. اگر اعداد دنباله را ادامه دهیم، داریم:

$$1000 \overline{) 6}$$

مشخص است که 6 عدد 6 ، 7 و 1 مرتباً تکرار می‌شوند؛ پس:

$$\begin{array}{r} 166 \\ 4 \end{array}$$

هزارمین عدد، معادل چهارمین عدد از این دنباله یعنی عدد -1 است.

۷- گزینه ۲ با توجه به سؤال قبل مشخص است که مجموع هر 6 عدد از دنباله یعنی $6, -7, -1, 6, 7, 1$ برابر با صفر است؛ پس برای به دست

آوردن مجموع هزار جمله اول، کافی است مجموع 4 جمله اول این دنباله (زیرا باقی‌مانده تقسیم 1000 بر 6 برابر با 4 می‌شود) را محاسبه کنیم:

$$13 = (-1) + 6 + 7 + 1 = \text{مجموع چهار جمله اول}$$

$$-7 = -2 - 5 = \text{ابتدای بردار} - \text{انتهای بردار} = \text{طول بردار}$$

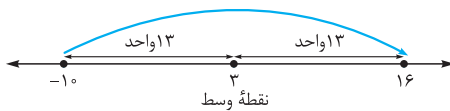
۸- گزینه ۲ می‌دانیم:

$$+20 = 10 \times (+2) = \text{طول بردار}$$

۹- گزینه ۴ با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$+14 = -6 + 20 = \text{طول بردار} + \text{ابتدای بردار} = \text{انتهای بردار}$$

۱۰- گزینه ۲ بردار به شکل زیر است:



$$\text{طول بردار} = 16 - (-10) = 26$$

۱۱- گزینه ۴ می‌دانیم اگر عددی فرد بار قرینه شود، برابر با قرینه آن عدد می‌شود؛ اما قرینهٔ صفر خود صفر است و از آن جا که صفر یا غیر صفر بودن مقدار a مشخص نیست؛ پس حاصل را نمی‌توان مشخص کرد.

$$۲ \text{ - قرینه } ۷ = ۲(۷) - (-۷) = ۱۴ + ۷ = ۲۱$$

۱۲- گزینه ۴ قرینهٔ عدد a نسبت به b برابر با $2b - a$ است؛ پس:

$$۳ \text{ - قرینه } ۳ = ۳ + (-۳) = ۰$$

۱۳- گزینه ۲

$$۲ \text{ - قرینه } ۳ = ۲(-۳) - (۲) = -۶ - ۲ = -۸$$

$$۱ \text{ - قرینه } ۱ = -۱$$

۱۴- گزینه ۲

$$۵ \text{ - قرینه } ۱ = ۵(-۱) - ۱ = -۵ - ۱ = -۶$$

$$۷ \text{ - قرینه } ۷ = ۰$$

$$۲۱ \text{ - قرینه } ۷ = ۲(۷) - (-۷) = ۱۴ + ۷ = ۲۱ \Rightarrow B \text{ تا } A \text{ فاصله} = ۲۱ - (-۷) = ۲۸$$

محاسبات در اعداد صحیح

۱۵- گزینه ۴ ابتدا (با توجه به اولویت اعمال در محاسبات) از پرانتز درون کروشه شروع به محاسبه کرده و سپس مقدار کل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$۲ - \underbrace{(۵ - ۶)}_{-1} - [- \underbrace{(-۶ - ۷)}_{-13} - ۸] = ۲ + ۱ - \underbrace{[۱۳ - ۸]}_5 = ۳ - ۵ = -۲$$

$$۵ - ۴[۳ - ۲ \underbrace{(۱ - ۲)}_{+1}] + ۳ \times ۴ - ۵ = ۵ - ۴[۳ - ۲ + ۲] \times ۴ - ۵ = ۵ - ۴ \times ۴ \times ۴ - ۵ = ۵ - ۶۴ - ۵ = -۶۴$$

۱۶- گزینه ۲

۱۷- گزینه ۴ با رعایت اولویت اعمال ریاضی در محاسبات، داریم:

$$-(-1) + (2 - (-1)) \times 3 - (-4) \times 1 - 5 = 1 + (3) \times 3 + 4 \times 1 - 5 = 1 + 9 + 4 - 5 = 9$$

۱۸- گزینه ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$(۱) \text{ گزینه } ۱: ۱ + ۲ + ۳ = ۶, ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶ \Rightarrow ۶ = ۶ \checkmark$$

$$(۲) \text{ گزینه } ۲: ۱ + ۲ + (-۳) = ۰, ۱ \times ۲ \times (-۳) = -۶ \Rightarrow ۰ \neq -۶ \times$$

$$(۳) \text{ گزینه } ۳: ۰ + (-۳) + ۳ = ۰, ۰ \times (-۳) \times ۳ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \checkmark$$

$$(۴) \text{ گزینه } ۴: (-۱) + (-۲) + (-۳) = -۶, (-۱)(-۲)(-۳) = -۶ \Rightarrow -۶ = -۶ \checkmark$$

۱۹- گزینه ۴ از آخرین پرانتز محاسبات را شروع می‌کنیم:

$$(۱ - ۱) = ۰$$

$$۲ - ۲(۱ - ۱) = ۲ - ۲ \times ۰ = ۲$$

$$۳ - ۳(۲ - ۲(۱ - ۱)) = ۳ - ۳ \times ۲ = -۳$$

$$۴ - ۴(۳ - ۳(۲ - ۲(۱ - ۱))) = ۴ - ۴ \times (-۳) = ۱۶$$

$$۵ - ۵(۱۶) = ۵ - ۸۰ = -۷۵$$

$$۶ - ۶(-۷۵) = ۶ + ۴۵۰ = ۴۵۶$$

$$(-۲ \div (-۴ - ۴)) = -۲ \div (-۸) = \frac{1}{4}$$

۲۰- گزینه ۴ با رعایت اولویت اعمال در محاسبات داریم:

$$۱۶ - ۱۶(-۲ \div (-۴ - ۴)) \div (-۱ - ۱) - ۱ = ۱۶ - ۱۶(\frac{1}{4}) \div (-۲) - ۱ = ۱۶ - ۴ \div (-۲) - ۱ = ۱۶ + ۲ - ۱ = ۱۷$$

پس:

۲۱- گزینه ۱ با توجه به عبارت داده‌شده، یکی از پرانتزها به شکل $(۱۳۹۳ - ۱۳۹۳)$ یعنی مقدار صفر است؛ پس حاصل عبارت (با توجه به وجود عدد صفر در حاصل ضرب) برابر با صفر است.

۲۲- گزینه ۲ با توجه به این که (-۱) به توان عددی زوج برابر با $+۱$ و به توان عددی فرد برابر با (-۱) است؛ داریم:

$$(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots + (-1)^{99} = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1 + (-1) = 0 + 0 + \dots + 0 + (-1) = -1$$

۲۳- گزینه ۱ ابتدا طرفین سه تساوی را با هم جمع کرده و سپس با توجه به آن، مقدار خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} a + b &= -11 \\ + \quad a + c &= 17 \\ \hline b + c &= -16 \\ \hline 2a + 2b + 2c &= -10 \\ 2(a + b + c) &= -10 \\ a + b + c &= -5 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{a+b=-11} -11 + c = -5 \Rightarrow c = -5 - (-11) = 6$

a	b	c	d	e	f
---	---	---	---	---	---

$$a + b + c = b + c + d \Rightarrow a = d$$

$$b = e, c = f$$

۲۴- گزینه ۲ اعداد درون جدول را به صورت مقابل در نظر می گیریم:

پس:

به همین ترتیب:

پس سه عدد در این جدول مرتباً تکرار می شوند و با توجه به این که تعداد خانه های جدول ۱۲ تا است؛ پس اولین عدد ۱۱- و آخرین عدد ۹ است. اگر خانه دوم را X بنامیم، داریم:

-۱۱	x	۹
-----	---	---

$$-11 + x + 9 = 5 \Rightarrow x = 7$$

$$B - A = 0 + (-1) + (-2) + \dots + (-999) - [(-1) + (-2) + \dots + (-1000)]$$

$$= (-1 - (-1)) + (-2 - (-2)) + \dots + (-999 - (-999)) - (-1000) = 0 + 0 + \dots + 0 + 1000 = 1000$$

۲۵- گزینه ۲

۲۶- گزینه ۱ اعداد ۱ تا ۳۱ قرینه اعداد ۱- تا ۳۱- هستند و در جمع، یکدیگر را خنثی می کنند؛ لذا کافی است حاصل جمع اعداد ۳۲- تا ۴۵-

$$-45 - 44 - 43 - \dots - 32 = A$$

را حساب کنیم:

$$45 - 32 + 1 = 14$$

تعداد اعداد باقی مانده برابر است با:

$$A = 14 \times \frac{(-45 + (-32))}{2} = -539$$

پس:

۲۷- گزینه ۲ ابتدا تعداد اعداد دنباله را به دست آورده و سپس با توجه به آن، مجموع خواسته شده را حساب می کنیم:

$$6 + 10 + 14 + \dots + 122 = \frac{122 - 6}{4} + 1 = 30$$

با توجه به این که فاصله هر دو عدد متوالی ۴ واحد است، داریم:

$$6 + 10 + 14 + \dots + 122 = 30 \left(\frac{122 + 6}{2} \right) = 1920$$

پس:

۲۸- گزینه ۲ ابتدا با دسته بندی مناسب مقدار هر دسته را به دست آورده و سپس با توجه به آن، حاصل عبارت را محاسبه می کنیم:

$$(1-8) + (3-10) + (5-12) + \dots + (401-408) = (-7) + (-7) + \dots + (-7)$$

$$\text{تعداد پرانتزها} = \frac{408 - 8}{2} + 1 = 201$$

اما:

$$\text{حاصل عبارت} = 201 \times (-7) = -1407$$

پس:

۲۹- گزینه ۵ ابتدا مقدار هر پرانتز را حساب می کنیم، سپس حاصل عبارت را به دست می آوریم:

$$(1-2) - (3-4) - (5-6) - \dots - (99-100) = (-1) - (-1) - (-1) - \dots - (-1) = (-1) + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = (-1) + (49 \times 1) = 48$$

۳۰- گزینه ۲ مقدار هر گزینه را به دست می آوریم:

گزینه (۱): $(1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + (99-100) = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) = 50 \times (-1) = -50$

گزینه (۲): $(1+3+5+\dots+99) - (2+4+6+\dots+100) = (1-2) + (3-4) + \dots + (99-100) = -50$

گزینه (۳): $(13+15+\dots+113) - (14+16+18+\dots+114) = (13-14) + (15-16) + \dots + (113-114) = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = 51 \times (-1) = -51$

گزینه (۴): $1 - (2-3) = 2$

از راهبرد حل مسئله ساده تر و الگویی استفاده می کنیم:

$$1 - (2 - (3 - 4)) = 1 - 3 = -2$$

$$1 - (2 - (3 - (4 - 5))) = 3$$

$$1 - (2 - (3 - (4 - (5 - 6)))) = -3$$

$$-100 \div 2 = -50$$

با این روند با توجه به این که در مراحل زوج مقدار عبارت منفی می شود؛ پس حاصل عبارت:



۲۱- گزینه ۲ با توجه به ساختار عبارت، مشخص است که مجموع هر ۴ عدد متوالی برابر با صفر است؛ یعنی:

$$1 - 2 - 4 + 5 = 0$$

$$7 - 8 - 10 + 11 = 0$$

:

اما تعداد این دسته‌های ۴ تایی مشخص نیست. در عبارت A تمامی مضارب ۳ حذف شده است و بقیه اعداد با علامت مثبت یا منفی ظاهر شده‌اند.

$$3 \text{ تعداد مضارب } = \frac{1392 - 3}{3} + 1 = 464$$

$$1393 - 464 = 929$$

پس کل اعداد به کار رفته در عبارت برابر است با:

از طرفی باقی‌مانده تقسیم ۹۲۹ بر ۴، برابر با ۱ است؛ یعنی A از تعدادی دسته که جمع آن‌ها برابر با صفر است و عدد ۱۳۹۳ ساخته شده است؛

به عبارت دیگر:

$$A = (1 - 2 - 4 + 5) + (7 - 8 - 10 + 11) + \dots + (1387 - 1388 - 1390 + 1391) + 1393 = 0 + 0 + \dots + 0 + 1393 = 1393$$

۲۲- گزینه ۱ حاصل جمع اعداد هر سطر را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن، یک الگو برای حاصل جمع کل می‌یابیم:

سطر اول: -۱

$$\text{سطر دوم: } (-1) + 1 = 0$$

$$\text{سطر سوم: } (-1) + 1 + (-1) = -1$$

$$\text{سطر چهارم: } (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0$$

:

همان‌طور که مشخص است حاصل جمع اعداد سطرها با شماره فرد برابر با -۱ و سطرها با شماره زوج برابر با صفر است؛ از طرفی تعداد سطرها

$$\text{با شماره فرد از ۱ تا ۱۳۹۳ برابر است با: } \frac{1393 - 1}{2} + 1 = 697$$

$$\text{حاصل جمع اعداد} = (-1) + 0 + (-1) + 0 + \dots + 0 + (-1) = 697 \times (-1) = -697$$

پس:

میانگین

۲۳- گزینه ۱ ابتدای دمای شهر B را به دست آورده و سپس با توجه به میانگین دمای شهر A و B، دمای شهر C را به دست می‌آوریم:

$$\text{دمای شهر B} = (+12) + (-20) = -8$$

$$\text{میانگین دمای شهر A و B} = \frac{12 + (-8)}{2} = 2$$

$$\text{دمای شهر C} = 2 + 9 = 11$$

$$\text{میانگین دمای سه شهر} = \frac{12 + (-8) + 11}{3} = 5$$

۲۴- گزینه ۲ ابتدا مجموع اعداد را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع} = (-17) + (-16) + (-15) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 18 + 19 + 20 = 57$$

$$20 - (-17) + 1 = 38$$

از طرفی تعداد این اعداد برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{57}{38} = \frac{3}{2} = 1.5$$

پس:

۲۵- گزینه ۱ فرض کنید این سه عدد عبارت‌اند از a، b و c.

$$a + b = 2 \times (-21) = -42$$

با توجه به این که میانگین ۲ تا از آن‌ها -۲۱ است، پس مجموع این دو عدد برابر است با:

$$\text{بنابراین: } -42 + c = -17 \Rightarrow c = 25$$

بنابراین:

$$\text{مجموع} = 5 \times (-4) = -20$$

۲۶- گزینه ۲ با توجه به این که میانگین ۵ عدد برابر با -۴ شده است؛ پس:

$$6 \text{ مجموع عدد جدید} = 6 \times 1 = 6$$

از طرفی می‌خواهیم میانگین جدید (میانگین ۶ عدد) ۵ واحد بیشتر یعنی $1 + 5 = 6$ شود؛ پس:

$$6 - (-20) = 26$$

پس عددی که باید به این اعداد اضافه شود برابر است با:

۳۷- گزینه ۲ می‌دانیم اگر میانگین چند عدد برابر M باشد، با اضافه کردن مقدار x به همه آن اعداد اگر:

(الف) $x > M$ ، میانگین اعداد جدید بیشتر از M می‌شود.

(ب) $x = M$ ، میانگین اعداد جدید برابر با M می‌شود.

(پ) $x < M$ ، میانگین اعداد جدید کوچک‌تر از M می‌شود.

با توجه به این که میانگین اعداد داده شده برابر است با:

$$\frac{3 + (-17) + 9 + 2 + (-7)}{5} = -2$$

پس با اضافه کردن عدد -2 به هر کدام از اعداد، میانگین تغییری نمی‌کند.

چند سؤال دیگر از اعداد صحیح

۳۸- گزینه ۲ فرض کنید دو عدد مدنظر a و b باشند؛ پس:

اختلاف دو برابر می‌شود. $2a - 2b = 2(a - b)$ (ب)

حاصل تقسیم، ثابت است. $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ (ت)

پس ۳ مورد از موارد ذکر شده درست هستند.

حاصل جمع، ۲ برابر می‌شود. $2a + 2b = 2(a + b)$ (الف)

حاصل ضرب، ۴ برابر می‌شود. $(2a)(2b) = 4(ab)$ (پ)

۳۹- گزینه ۲ عبارات داده شده به ازای مقادیری از q می‌تواند صحیح باشد که q شمارنده عدد 1385 باشد؛ از طرفی تجزیه عدد 1385 برابر است

$$1385 = 5 \times 277$$

با:

$$1, -1, 5, -5, 277, -277, 1385, -1385$$

پس شمارنده‌های صحیح عدد 1385 عبارت‌اند از:

$$\frac{m^2 + 1390}{m} = \frac{m^2}{m} + \frac{1390}{m} = m + \frac{1390}{m}$$

۴۰- گزینه ۱ ابتدا با تفکیک کسر، عبارت را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

واضح است که عبارت بالا به ازای مقادیری که در آن m شمارنده 1390 است، مقداری صحیح می‌شود.

$$1390 = 2 \times 5 \times 139$$

تجزیه عدد 1390 عبارت است از:

پس تعداد شمارنده‌های مثبت آن برابر با $2 \times 2 \times 2 = 8$ و تعداد شمارنده‌های صحیح آن برابر با $16 = 8 \times 2$ است.

۴۱- گزینه ۴ برای این که حاصل کسر $\frac{100}{2n-1}$ مقداری صحیح شود، $2n-1$ باید شمارنده‌های عدد 100 باشد. شمارنده‌های عدد 100 عبارت‌اند از:

$$1, 2, 5, 10, 20, 25, 50$$

از طرفی با توجه به این که n عددی طبیعی است؛ پس $2n-1$ مقداری فرد است؛ لذا $2n-1$ فقط با اعداد $1, 5, 25$ می‌تواند برابر باشد؛ یعنی n مقدار می‌تواند داشته باشد.

۴۲- گزینه ۱ با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش این اعداد را باید پیدا کنیم. این اعداد عبارت‌اند از $1, 1, 1, 1$ و 26 که حاصل ضربشان از حاصل جمعشان کوچک‌تر است؛ پس سه عددی که مجموع آن‌ها 28 است عبارت‌اند از: $1, 1, 26$ و عدد چهارم، عدد یک است.

۴۳- گزینه ۲ اعداد منفی هر چه از صفر دورتر باشند (مقدار عددی آن‌ها بدون علامت بزرگ‌تر باشد)، مقدار کم‌تری دارند.

در بین گزینه‌ها، مقدار گزینه (۳) (صرف‌نظر از علامت) از سایر گزینه‌ها بیشتر است؛ پس از همه موارد کوچک‌تر است.

۴۴- گزینه ۲ از آن جا که x یک مقدار منفی است؛ پس مقدار عبارت $-2x$ مثبت می‌شود که از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

۴۵- گزینه ۲ با حدس و آزمایش این حداقل مقدار عبارت است از:

$$2 \times 5 + 7 \times 8 + 9 \times 1 = 75$$

۴۶- گزینه ۲ برای به دست آوردن بیشترین مقدار، باید علامت‌های تفریق را در سمت چپ اعداد منفی قرار دهیم تا قرینه و در نتیجه مثبت شوند؛

$$-5 \times -6 \times 3 - 9 = 90 + 9 = 99$$

پس می‌توان گفت بیشترین مقدار برابر است با:

$$1 * 2 = (2 \times 1) - (3 \times 2) - 5 = -9$$

۴۷- گزینه ۲ محاسبات را از داخلی‌ترین پرانتز شروع می‌کنیم:

$$((1 * 2) * 3) = (-9 * 3) = 2(-9) - 3(3) - 5 = -32$$

$$((1 * 2) * 3) * (-4) = (-32) * (-4) = 2(-32) - 3(-4) - 5 = -57$$



۴۸- گزینه ۲ ابتدا تعداد حالات مختلفی که می توان ۶ را به صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح نوشت، مشخص می کنیم و سپس با توجه به آن، مسئله را حل می کنیم:

$$\begin{array}{llll} ۱) ۶ = ۱ \times ۶ & ۲) ۶ = ۶ \times ۱ & ۳) ۶ = (-۱) \times (-۶) & ۴) ۶ = (-۶) \times (-۱) \\ ۵) ۶ = ۲ \times ۳ & ۶) ۶ = ۳ \times ۲ & ۷) ۶ = (-۲) \times (-۳) & ۸) ۶ = (-۳) \times (-۲) \end{array}$$

پس برای a و b و ۸ مقدار مختلف به دست می آید.

۴۹- گزینه ۱ ابتدا عدد ۴۵ را به صورت ضرب ۵ عدد صحیح متفاوت می نویسیم:
(که این حالت، منحصر به فرد است)، پس:

$$\begin{array}{l} ۶ - a = ۱ \Rightarrow a = ۵ \quad \text{و} \quad ۶ - b = -۱ \Rightarrow b = ۷ \quad \text{و} \quad ۶ - c = ۳ \Rightarrow c = ۳ \\ ۶ - d = -۳ \Rightarrow d = ۹ \quad \text{و} \quad ۶ - e = ۵ \Rightarrow e = ۱ \end{array}$$

$$a + b + c + d + e = ۵ + ۷ + ۳ + ۹ + ۱ = ۲۵$$

بنابراین:

۵۰- گزینه ۱ در مسابقاتی به این شکل، مجموع تفاضل گل ها باید صفر شود؛ زیرا اگر تیمی تعدادی گل زده باشد، در مقابل، تیم دیگری همان مقدار گل خورده است؛ پس اگر تفاضل گل تیم ششم X باشد، داریم:

$$۱ + ۳ + ۴ + (-۲) + (-۷) + X = ۰ \Rightarrow X = ۱$$

۵۱- گزینه ۱ از آن جا که در بین این اعداد، ۶ عدد را انتخاب کرده و به ۳ دسته تقسیم کرده ایم، پس مجموع آن ها باید بر ۳ بخش پذیر باشد. در بین اعداد اگر ۵ را کنار بگذاریم مجموع اعداد باقی مانده برابر با $-۱۲ = ۵ + ۰ + (-۱) + (-۳) + (-۴) + (-۹)$ می شود که بر ۳ بخش پذیر است؛ پس گزینه (۱) پاسخ مسئله است.

۵۲- گزینه ۴ هر حرکت را با یک عدد علامت دار نشان داده و سپس مجموع آن ها را به دست می آوریم:

$$\underbrace{(-۱)}_{+۱} + \underbrace{۲}_{+۱} + \underbrace{(-۳)}_{+۱} + \underbrace{۴}_{+۱} + \dots + \underbrace{(-۱۳۹۱)}_{+۱} + \underbrace{۱۳۹۲}_{+۱} + \underbrace{(-۱۳۹۳)}_{+۱} = ۱ + ۱ + \dots + ۱ - ۱۳۹۳ = ۶۹۶ - ۱۳۹۳ = -۶۹۷$$

۵۳- گزینه ۴ سعی می کنیم با حدس و آزمایش اعداد را حذف کنیم؛ مثلاً اگر روی فلش عدد ۵ + قرار گیرد، در این صورت $۱ = ۵ - ۴$ می شود که عدد ۱ در بین اعداد داده شده قرار نمی گیرد. با امتحان کردن همه اعداد به جدول زیر می رسیم:

-۴	۹	→ -۱	-۵	۸
۶	۱۱		۵	۱۰

۵۴- گزینه ۱ ابتدا جدول را به شکل زیر نام گذاری می کنیم و سپس با توجه به الگوی داده شده مقدار * را به دست می آوریم:

*			
e	f		
c	-۱۱	d	
۱۰	a	b	۱۵

$$a + b = -۱۱$$

با توجه به سطر آخر می توان نوشت:

هم چنین:

$$* = e + f = (c + (-۱۱)) + ((-۱۱) + d) = c + d - ۲۲ = (۱۰ + a) + (b + ۱۵) - ۲۲ = a + b + ۲۵ - ۲۲ = \underbrace{a + b}_{-۱۱} + ۳ = -۱۱ + ۳ = -۸$$

۵۵- گزینه ۲ از آن جا که مجموع اعداد سطر دوم و ستون اول برابر است؛ پس:

$$y + x + ۸ = x + (-۱۳) + (-۷) \Rightarrow y + ۸ = -۲۰ \Rightarrow y = -۲۸$$

$$x + (-۱۳) + ۴ = x + ۸ \Rightarrow -۹ = x + ۸ \Rightarrow x = -۱۷$$

هم چنین مجموع اعداد قطر اصلی و ستون اول برابر است؛ پس:

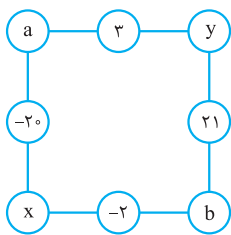
$$x + y = (-۱۷) + (-۲۸) = -۴۵$$

بنابراین:

۵۶- گزینه ۲ طبق الگوی زیر، پس از ۴ مرحله به جدول مورد نظر می رسیم:

<table border="1"> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> </table>	+۱	+۱	+۱	+۱	+۱	+۱	+۱	+۱	+۱	→ مرحله اول	<table border="1"> <tr><td>+۱</td><td>-۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>-۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> </table>	+۱	-۱	-۱	+۱	-۱	-۱	+۱	+۱	+۱	→ مرحله دوم	<table border="1"> <tr><td>-۱</td><td>+۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>-۱</td><td>+۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> </table>	-۱	+۱	-۱	-۱	+۱	-۱	+۱	+۱	+۱	→ مرحله سوم	<table border="1"> <tr><td>-۱</td><td>+۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>-۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>-۱</td><td>-۱</td><td>+۱</td></tr> </table>	-۱	+۱	-۱	+۱	-۱	-۱	-۱	-۱	+۱	→ مرحله چهارم	<table border="1"> <tr><td>-۱</td><td>+۱</td><td>-۱</td></tr> <tr><td>+۱</td><td>+۱</td><td>+۱</td></tr> <tr><td>-۱</td><td>+۱</td><td>-۱</td></tr> </table>	-۱	+۱	-۱	+۱	+۱	+۱	-۱	+۱	-۱
+۱	+۱	+۱																																																			
+۱	+۱	+۱																																																			
+۱	+۱	+۱																																																			
+۱	-۱	-۱																																																			
+۱	-۱	-۱																																																			
+۱	+۱	+۱																																																			
-۱	+۱	-۱																																																			
-۱	+۱	-۱																																																			
+۱	+۱	+۱																																																			
-۱	+۱	-۱																																																			
+۱	-۱	-۱																																																			
-۱	-۱	+۱																																																			
-۱	+۱	-۱																																																			
+۱	+۱	+۱																																																			
-۱	+۱	-۱																																																			

پس برای رسیدن به این جدول، تعداد مراحل حتماً مضرب ۴ است که در بین گزینه ها فقط ۱۳۹۲ مضرب ۴ است.



۵۷- گزینه ۱ ابتدا جدول را به شکل زیر نام گذاری می کنیم:

$$\frac{a+y}{2} = 3 \Rightarrow a+y = 6 \quad (1)$$

پس:

$$\frac{y+b}{2} = 21 \Rightarrow y+b = 42 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} (a+y) - (y+b) = 6 - 42 \Rightarrow a - b = -36$$

۵۸- گزینه ۲ همان طور که مشخص است اعداد ۴، ۸، ۲-، ۷ و صفر هر کدام در دو ضلع محاسبه می شوند؛ پس اگر مجموع اعداد داده شده را

به دست آوریم با این تفاوت که اعداد ۴، ۸، ۲-، ۷ و صفر را دو بار حساب کنیم، مجموع ۶ ضلع ۳ تایی به دست می آید. این مجموع برابر است با:

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 11 + (4 + 8 + (-2) + 7 + 0) = 48$$

$$\frac{48}{6} = 8$$

پس مجموع اعداد روی هر ضلع برابر است با:

$$7 + a + (-2) = 8 \Rightarrow a = -2$$

در این صورت:

اعداد گویا

۵۹- گزینه ۲ مشخص است که اعداد طبیعی، صحیح و اول یا زوج هستند یا فرد، اما اعداد گویا با توجه به ساختاری که دارند (کسری بودن آن‌ها)

زوج یا فرد بودن آن‌ها مطرح نمی شود.

۶۰- گزینه ۱ با توجه به این که $-\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$ و $\sqrt{5} \sim 2\frac{2}{5}$ ، پس فقط گزینه (۱) می تواند در این محدوده قرار گیرد.

۶۱- گزینه ۲ عددهای صفر، $\sqrt{4} = 2$ و $\frac{2}{3}$ گویا هستند.

۶۲- گزینه ۴ اعداد ۲، (-3) و $\sqrt{81}$ طبیعی، اعداد ۲، (-3) ، $\sqrt{81}$ و -21 صحیح و اعداد ۲، (-3) ، $\sqrt{81}$ ، -21 ، $-\frac{2}{5}$ و $-1\frac{1}{7}$ گویا هستند.

۶۳- گزینه ۲ می دانیم بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد که این بی شمار عدد را می توان با پیدا کردن کسر بین دو کسر نوشت.

۶۴- گزینه ۲ اعداد طبیعی در این محدوده، اعداد ۱ تا ۱۴ هستند که تعداد آن‌ها ۱۴ تا است.

$$14 - (-13) + 1 = 28$$

اعداد صحیح در این محدوده، اعداد ۱۳- تا ۱۴+ هستند که تعداد آن‌ها برابر است با:

تعداد اعداد گویا، در این محدوده بی شمار است.

۶۵- گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می کنیم:

گزینه (۱) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد.

گزینه (۲) بین دو عدد $-\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{10}$ فقط عدد صحیح صفر وجود دارد؛ پس این گزینه نادرست است.

گزینه (۳) بین دو عدد $-\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{10}$ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد.

گزینه (۴) همان طور که در گزینه (۲) مطرح شد، فقط صفر در این فاصله به عنوان عدد صحیح وجود دارد.

۶۶- گزینه ۲ عدد $\frac{29}{4}$ عددی بین ۷ و ۸ است؛ پس گزینه آن بین ۷- و ۸- قرار دارد.

۶۷- گزینه ۲ به جای این که حاصل تقسیم عدد a بر b را به دست آوریم کافی است a را در معکوس b یعنی $\frac{1}{b}$ ضرب کنیم:

$$-\left(\frac{-2}{-8}\right) = -\left(\frac{2}{8}\right) = -\frac{1}{4}$$

پس به جای تقسیم بر $\frac{1}{4}$ کافی است عدد مورد نظر را در معکوس $-\frac{1}{4}$ یعنی -4 ضرب کنیم.

۶۸- گزینه ۲ اعداد ۱ و -1 با معکوسشان برابرند.

۶۹- گزینه ۴ عددی که از دو عدد دیگر به یک فاصله است، همان میانگین دو عدد است:

$$\frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ میانگین } = \frac{\frac{3}{7} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{29}{35}}{2} = \frac{29}{70}$$

۷۰- گزینه ۲ از آنجا که فاصله هر دو عدد متوالی یکسان است، ابتدا فاصله $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$ را به دست آورده و با تقسیم کردن این مقدار بر ۳، این فاصله مساوی را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad \text{فاصله بین هر دو عدد} = \frac{1}{6} \div 3 = \frac{1}{18}$$

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18}$$

پس:

۷۱- گزینه ۱ با توجه به این که فاصله $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{5}$ به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم شده است، ابتدا اندازه هر قسمت را به دست آورده و سپس با توجه

به آن مشخص می‌کنیم کدام نقطه نشانگر عدد $\frac{1}{4}$ است.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\text{اندازه هر قسمت} = \frac{2}{15} \div 16 = \frac{2}{15} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{120} \qquad \text{نقطه } a = \frac{1}{5} + (6 \times \frac{1}{120}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

کسرهای مساوی و مقایسه دو کسر

۷۲- گزینه ۲ با توجه به تساوی دو کسر می‌توان گفت هر مضربی و هر ترکیبی از این دو کسر با هم برابرند؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2a}{2b} = \frac{3c}{3d} = \frac{2a+3c}{2b+3d}$$

۷۳- گزینه ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم و سپس عددی را که باید در صورت و مخرج کسر ضرب شود، می‌یابیم:

$$\frac{102}{119} \xrightarrow{\div 17} \frac{6}{7} \Rightarrow \text{مخرج حاصل ضرب صورت و مخرج} = 6 \times 7 = 42$$

$$k^2 = \frac{168}{42} = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$\frac{6}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{12}{14}$$

پس کسر موردنظر برابر است با:

۷۴- گزینه ۲ ابتدا کسر را ساده می‌کنیم و سپس عددی که باید در صورت و مخرج کسر ضرب شود را می‌یابیم:

$$\frac{84}{119} \xrightarrow{\div 7} \frac{12}{17} \Rightarrow \text{اختلاف صورت و مخرج} = 17 - 12 = 5$$

$$k = \frac{25}{5} = 5$$

پس کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{12}{17} \xrightarrow{\times 5} \frac{60}{85}$$

۷۵- گزینه ۲ ابتدا کسر را ساده کرده و سپس با توجه به شرایطی که مسئله خواسته تعداد کسرهای مدنظر را می‌یابیم:

$$\frac{16}{68} = \frac{4}{17}$$

با توجه به این که صورت کسر بزرگ‌تر از ۱۰۰ باید باشد، پس عدد ۴ باید حداقل در ۲۶ و برای این که مخرج کسر کم‌تر از ۵۵ باشد، عدد ۱۷ حداکثر باید در ۳۲ ضرب شود.

$$\frac{4}{17} \xrightarrow{\times 26} \frac{104}{442}$$

$$\frac{4}{17} \xrightarrow{\times 32} \frac{128}{544}$$

پس:

$$32 - 26 + 1 = 7$$

که تعداد این کسرها برابر است با:

۷۶- گزینه ۲ فرض کنید عدد موردنظر برابر با X باشد؛ پس:

$$\frac{8-X}{11-X} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(8-X) = 2(11-X) \Rightarrow 24-3X = 22-2X \Rightarrow -X = -2 \Rightarrow X = 2$$

۷۷- گزینه ۱ فرض کنید صورت کسر اول برابر با a و صورت کسر دوم برابر با b باشد؛ پس:

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{6} = \frac{2a+2b}{12} = \frac{p}{q}$$

از آن جا که $\frac{p}{q}$ یک کسر ساده‌نشده است، پس حداکثر مقداری که q می‌تواند داشته باشد برابر با ۱۲ است؛ یعنی q می‌تواند ۱۲ یا شمارنده‌های ۱۲ باشد.

۷۸- گزینه ۱ می‌دانیم اگر دو کسر با هم برابر باشند، آن‌گاه هر ترکیبی از آن‌ها نیز با هم برابرند؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+14}{b+35} = \frac{-a}{-b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+14-a}{b+35-b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

از طرفی:

$$a=2, b=5 \Rightarrow a+b=7$$

از آن جا که بزرگ‌ترین شمارنده مشترک a و b برابر با یک است، پس:

۷۹- گزینه ۲ کسرهای $\frac{7}{15}$ ، $\frac{3}{7}$ و $\frac{4}{9}$ از کسر $\frac{1}{4}$ کوچک‌تر هستند؛ اما کسر $\frac{6}{11}$ از $\frac{1}{4}$ بزرگ‌تر است؛ پس بزرگ‌ترین کسر برابر با $\frac{6}{11}$ است.

۸۰- گزینه ۲ در بین کسرهایی که صورت آن‌ها یک واحد از مخرج آن‌ها کم‌تر است، کسری بزرگ‌تر است که عدد صورت و مخرج آن بیشتر باشد؛ پس کسر $\frac{100001}{100002}$ از همه بزرگ‌تر است.

۸۱- گزینه ۱ برای حل این سوال به دو مطلب باید توجه داشته باشید:

الف) با توجه به این که a عددی منفی است، پس توان‌های زوج آن مثبت و توان‌های فرد آن منفی است؛ پس کوچک‌ترین مقدار از بین توان‌های فرد a باید انتخاب شود.

ب) با توجه به این که a عددی بین صفر و -1 است، پس هر چه توان آن کم‌تر باشد از صفر دورتر می‌شود و مقدار آن کم‌تر می‌شود (اعداد منفی هر چه از صفر دورتر باشند کوچک‌ترند).

پس می‌توان گفت کوچک‌ترین مقدار بین آن‌ها، عدد a است.

۸۲- گزینه ۲ با توجه به این که $0 < \frac{a}{b} < 1$ ، پس معکوس $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر از یک است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{b}{a} > 1$$

۸۳- گزینه ۲ می‌دانیم اگر کسری بین صفر و یک باشد و مقدار یکسانی به صورت و مخرج آن اضافه کنیم مقدار کسر بزرگ‌تر شده و به عدد یک نزدیک می‌شود. از طرفی:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

پس:

۸۴- گزینه ۲ این سؤال را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

الف) اگر کسر بین صفر و یک باشد، با اضافه کردن مقداری ثابت، مقدار کسر بزرگ‌تر می‌شود.

ب) اگر کسر برابر با واحد باشد، مقدار کسر تغییر نمی‌کند.

پ) اگر کسر بزرگ‌تر از یک باشد، مقدار کسر کوچک‌تر می‌شود.

پس هر سه حالت امکان دارد اتفاق بیفتد.

۸۵- گزینه ۱ سعی می‌کنیم همه گزینه‌ها را برحسب کسر $\frac{2}{5}$ بنویسیم و با توجه به آن، نزدیک‌ترین کسر را به دست می‌آوریم:

گزینه (۱): $\frac{399}{1000} = \frac{400}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{2}{5} - \frac{1}{1000}$

گزینه (۲): $\frac{199}{500} = \frac{200}{500} - \frac{1}{500} = \frac{2}{5} - \frac{1}{500}$

گزینه (۳): $\frac{41}{100} = \frac{40}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{5} + \frac{1}{100}$

گزینه (۴): $\frac{21}{50} = \frac{20}{50} + \frac{1}{50} = \frac{2}{5} + \frac{1}{50}$

گزینه (۵): $\frac{39}{100} = \frac{40}{100} - \frac{1}{100} = \frac{2}{5} - \frac{1}{100}$

در بین گزینه‌ها، عدد گزینه (۱) کم‌ترین اختلاف را تا کسر $\frac{2}{5}$ دارد.



۸۶- گزینه ۴ می‌دانیم هر چه مخرج کسر بزرگ‌تر باشد، (صورت‌ها مساوی) مقدار کسر کوچک‌تر می‌شود.

واضح است که:

$$2009 < 2009 + \frac{1}{2009}$$

$$\frac{1}{2009} > \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}}$$

$$2009 = 2009$$

$$\Rightarrow 2009 + \frac{1}{2009} > 2009 + \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}} \quad (*)$$

پس:

یعنی: $A > B$.

با توجه به (*): $\frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}} < \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009 + \frac{1}{2009}}}$ پس $C > B$ ، بنابراین $A > C > B$.

کسر بین دو کسر

۸۷- گزینه ۲ مشخص است که $\frac{19}{8} < \frac{19}{9} < \frac{19}{10}$ قرار دارد.

۸۸- گزینه ۴ با بررسی گزینه‌ها داریم:

پس $\frac{4}{7}$ بین این دو کسر وجود ندارد.

۸۹- گزینه ۲ می‌خواهیم این ۱۱ کسر را با روش مخرج مشترک‌گیری بنویسیم.

ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{7} = \frac{20}{35} \\ \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}, \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

از آن‌جا که می‌خواهیم ۱۱ کسر بین دو کسر بنویسیم کافی است صورت و مخرج هر دو کسر را در ۱۲ ضرب کنیم:

$$\frac{15}{20} \xrightarrow{\times 12} \frac{180}{240}$$

$$\xrightarrow{\text{کسرهای موردنظر}} \frac{181}{240}, \frac{182}{240}, \dots, \frac{191}{240}$$

$$\frac{16}{20} \xrightarrow{\times 12} \frac{192}{240}$$

پس عدد ۳ یک بار در ۵ و یک بار در ۱۲ یعنی در $5 \times 12 = 60$ ضرب شده است.

۹۰- گزینه ۲ ابتدا صورت دو کسر را یکسان می‌کنیم و سپس با توجه به مخرج جدید، تعداد آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{5} = \frac{75}{125} \Rightarrow \text{کسرهای موردنظر} = \frac{75}{124}, \frac{75}{123}, \dots, \frac{75}{91}$$

پس تعداد این کسرها برابر است با: $124 - 91 + 1 = 34$

۹۱- گزینه ۲ با توجه به این که ۵ و ۸ هم‌زمان هر دو بر ۱۰۰ بخش‌پذیر نیستند، مخرج مشترک بین آن‌ها را $200 = [8, 5, 100]$ در نظر می‌گیریم و

$$\frac{7}{8} = \frac{175}{200} \Rightarrow \text{کسرهای با مخرج } 200 = \frac{176}{200}, \frac{177}{200}, \dots, \frac{279}{200}$$

سپس از بین آن‌ها، کسرهایی که مخرج آن‌ها به ۱۰۰ تبدیل می‌شود را انتخاب می‌کنیم.

در بین کسرهای بالا، کسرهایی که صورت آن‌ها زوج است قابل قبول‌اند (چون مخرج آن‌ها بعد از تقسیم بر ۲، به ۱۰۰ تبدیل می‌شود)؛ پس کسرهای

$$\frac{176}{200}, \frac{178}{200}, \dots, \frac{278}{200}$$

موردنظر عبارت‌اند از:

$$\frac{278 - 176}{2} + 1 = 52$$

که تعداد آن‌ها برابر است با:

۹۲- گزینه ۲ ابتدا صورت دو کسر را با ضرب عدد مناسب به ۶۰ تبدیل می‌کنیم و با توجه به عدد مخرج‌ها در مورد تعداد بحث می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{40}{60} \\ \frac{4}{5} = \frac{48}{60} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{کسرهای موردنظر} = \frac{40}{74}, \frac{40}{73}, \dots, \frac{40}{37}$$

$$74 - 37 + 1 = 38$$

پس تعداد این کسرها برابر است با:

۹۳- گزینه ۱ این کسر را با جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{5}{15} < \frac{5+2}{15+5} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{5}{15} < \frac{7}{20} < \frac{2}{5}$$

۹۴- گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $\frac{2}{\sqrt{1000000}} = \frac{2}{1000} \Rightarrow \frac{1}{1000} < \frac{2}{1000} < \frac{1}{100} \checkmark$

گزینه (۲): $\frac{1}{1000} < \frac{1}{250} = \frac{4}{1000} < \frac{1}{100} \checkmark$

گزینه (۳): $2 \times 10^{-4} = \frac{2}{10^4} = \frac{2}{10000} < \frac{1}{1000} \times$

گزینه (۴): $1/2 \times 10^{-3} = \frac{1/2}{10^3} = \frac{1/2}{1000} \Rightarrow \frac{1}{1000} < \frac{1/2}{1000} < \frac{1}{100} \checkmark$

$$\frac{2009}{2008} \sim 1/0004$$

$$\frac{2009}{2008} \sim 1/00004$$

۹۵- گزینه ۳

پس:

$$1 < a \Rightarrow \frac{a}{a} < \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{a}{a} < \frac{a+a}{a+1} < \frac{a}{1} \Rightarrow 1 < \frac{2a}{a+1} < a$$

۹۶- گزینه ۲ به جای عدد ۱ از مقدار $\frac{a}{a}$ استفاده می‌کنیم:

۹۷- گزینه ۱ با توجه به صورت سؤال:

$$1/5 = \frac{15}{10} = \frac{b}{11}, \frac{c}{15} < \frac{18}{10} = 1/8$$

$$\frac{15}{10} < \frac{b}{11} < \frac{18}{10} \xrightarrow{\times 11} \frac{165}{10} < b < \frac{198}{10}$$

$$\frac{15}{10} < \frac{c}{15} < \frac{18}{10} \xrightarrow{\times 15} \frac{225}{10} < c < \frac{270}{10}$$

اما:

پس: ۱۹ یا ۱۸ یا ۱۷ = b

هم‌چنین:

پس: ۲۶ یا ۲۵ یا ۲۴ یا ۲۳ = c

$$b + c = 26 + 17 = 43$$

از طرفی $1/5 < \frac{c}{b} < 1/8$ ، پس فقط $c = 26$ و $b = 17$ قابل قبول است، بنابراین:

محاسبات در اعداد گویا

$$-1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} [3\frac{1}{2} - (-\frac{2}{3})] = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5} [\frac{7}{2} + \frac{2}{3}] = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5} [\frac{25}{6}] = -\frac{6}{5} + \frac{5}{6} = \frac{-36+25}{30} = -\frac{11}{30}$$

۹۸- گزینه ۲

۹۹- گزینه ۲ با توجه به این که در صورت و مخرج هر کسر، کسرهایی با مخرج ۱۰۰ ظاهر می‌شود، برای سهولت در محاسبات، صورت و مخرج هر دو کسر را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1/01 - 1/5}{3\frac{1}{2} - 0/8} \times \frac{300 - 24}{100 - 31} = \frac{101 - 20}{300 - 24} \times \frac{300 - 24}{100 - 31} = \frac{81}{270} \times \frac{276}{69} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\text{عبارت} = \frac{101 - 20}{350 - 80} \times \frac{300 - 24}{100 - 31} = \frac{81}{270} \times \frac{276}{69} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۱۰۰ داریم:

۱۰۰- گزینه ۱ با رعایت اولویت اعمال ریاضی در محاسبات مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$3 - 3 \left[\frac{3}{4} (1 - 3)^2 - (24 \div 2) + 6 \right] = 3 - 3 \left[\frac{3}{4} \times 4 - (12) + 6 \right] = 3 - 3 [3 - 6] = 3 - 3 \times (-3) = 3 + 9 = 12$$

۱۰۱- گزینه ۲ اگر کمی دقت کنید، صورت دو کسر اصلی مثل هم است ولی مخرج آن‌ها قرینه هم است. پس حاصل عبارت برابر با صفر است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = 0$$

۱۰۲- گزینه ۱ ابتدا هر عدد مخلوط را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$0\frac{1}{3} - 2\frac{0}{6} + \frac{1}{2} - 0 \times 2 - 2\frac{-2}{-3} = \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{8}{3} = -\frac{23}{6}$$

۱۰۳- گزینه ۲ ابتدا تساوی داده شده در فرض مسئله را به شکل ساده تری می نویسیم: $\frac{x}{y} \div \frac{e}{f} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{f}{e} = 1 \Rightarrow \frac{xf}{ye} = 1 \Rightarrow \frac{ye}{xf} = 1$

$$\frac{\left(\frac{f}{e} \times \frac{x}{y}\right)^{10000}}{10000 \left(\frac{y}{x} \times \frac{e}{f}\right)} = \frac{\left(\frac{fx}{ey}\right)^{10000}}{10000 \frac{ye}{xf}} = \frac{1^{10000}}{10000 \cdot 1} = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

پس:

۱۰۴- گزینه ۴ مقدار هر گزینه را به دست می آوریم، سپس با هم مقایسه می کنیم.

(۱) گزینه (۱): $10 \times 0/00 \times 1000 = 10 \times \frac{1}{1000} \times 1000 = 1$

(۲) گزینه (۲): $0/01 \div 100 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$

(۳) گزینه (۳): $100 \div 0/01 = 100 \times \frac{100}{1} = 10000$

(۴) گزینه (۴): $10000 \times 100 \div 10 = 1000000 \div 10 = 100000$

(۵) گزینه (۵): $0/1 \times 0/01 \times 100000 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} \times 100000 = 10$

پس مقدار عددی گزینه (۴) از سایر موارد بزرگ تر است.

۱۰۵- گزینه ۲ با توجه به این که مخرج کسرها برابر است، یکی از مخرج ها را نوشته سپس صورت ها را با هم جمع می کنیم:

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{99}{100} + 1 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{99}{100} + \frac{100}{100} = \frac{1+2+3+\dots+100}{100} = \frac{100 \times 101}{2 \times 100} = \frac{101}{2} = 50/5$$

۱۰۶- گزینه ۴ با توجه به دستورالعمل داده شده، ابتدا مقدار داخل پرانتز را محاسبه می کنیم، سپس مقدار عبارت را به دست می آوریم:

$$-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{-2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \quad \left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{2} \times -\frac{1}{4} = \frac{1}{-2} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۰۷- گزینه ۲ با استفاده از رابطه مجموع n جمله متوالی ابتدا صورت و مخرج را به شکل ساده تری نوشته و سپس حاصل عبارت را به دست می آوریم:

$$\frac{1+2+3+\dots+60}{-1-2-3-\dots-59} = \frac{60 \times 61}{2} = \frac{61}{59}$$

۱۰۸- گزینه ۲ می دانیم مجموع اعداد زوج متوالی و فرد متوالی از روابط زیر به دست می آید:

$$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

پس:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{115}{116} \Rightarrow 116n = 115n + 115 \Rightarrow n = 115$$

یعنی:

۱۰۹- گزینه ۲ علامت های منفی را به جای علامت های مثبت طبق دستورالعملی که در صورت سؤال بیان کرده، جایگزین می کنیم:

$$\frac{1+2+3+\dots+154}{1+2+3+\dots+308} \Rightarrow \frac{(1-2)+(3-4)+\dots+(153-154)}{(-1+2)+(-3+4)+\dots+(-307+308)} = \frac{(-1)+(-1)+\dots+(-1)}{1+1+\dots+1} = \frac{77 \times (-1)}{154 \times 1} = \frac{-77}{154} = -\frac{1}{2}$$

۱۱۰- گزینه ۱

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{99}{100}\right) = 1+1+\dots+1 = 99 \times 1 = 99$$

۱۱۱- گزینه ۲ ابتدا کسرهایی که علامت آن ها مثبت و سپس کسرهایی را که علامت آن ها منفی است، کنار هم می نویسیم، سپس مقدار هر یک را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} = \frac{1483}{1680} \end{aligned}$$

۱۱۲- گزینه ۵ ابتدا در صورت از عدد ۱۰ و در مخرج از عدد ۳۰ فاکتور گرفته، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{10+20+30+\dots+400}{30+60+90+\dots+1200} = \frac{10(1+2+3+\dots+40)}{30(1+2+3+\dots+40)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

۱۱۳- گزینه ۱ در صورت کسر از ۴ و در مخرج کسر از ۲ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{(1 \times 4) + (2 \times 4) + (3 \times 4) + \dots + (100 \times 4)}{(1 \times 2) + (2 \times 2) + (3 \times 2) + \dots + (100 \times 2)} = \frac{4(1+2+3+\dots+100)}{2(1+2+3+\dots+100)} = \frac{4}{2} = 2$$

۱۱۴- گزینه ۲ در صورت کسر، هر پرانتز شامل عدد ۴ و در مخرج، هر پرانتز شامل عدد ۲ است. این عددها را از هر پرانتز بیرون آورده و کنار هم می‌نویسیم:

$$\frac{(1 \times 4) \times (2 \times 4) \times (3 \times 4) \times \dots \times (100 \times 4)}{(1 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 2) \times \dots \times (100 \times 2)} = \frac{4^{100} (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100)}{2^{100} (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100)} = \frac{4^{100}}{2^{100}} = 2^{100}$$

۱۱۵- گزینه ۲ با توجه به عددهای ظاهر شده در صورت، واضح است که در هر جمله می‌توان از $2 \times 2 \times 2$ فاکتور گرفت. به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 \times 4 \times 8) + (444 \times 888 \times 1776) + (888 \times 1776 \times 3552)}{8 + (222 \times 444 \times 888) + (444 \times 888 \times 1776)} \\ &= \frac{(2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 4) + (2 \times 2 \times 2 \times 222 \times 444 \times 888) + (2 \times 2 \times 2 \times 444 \times 888 \times 1776)}{(1 \times 2 \times 4) + (222 \times 444 \times 888) + (444 \times 888 \times 1776)} \\ &= \frac{2 \times 2 \times 2 \times [(1 \times 2 \times 4) + (222 \times 444 \times 888) + (444 \times 888 \times 1776)]}{(1 \times 2 \times 4) + (222 \times 444 \times 888) + (444 \times 888 \times 1776)} = 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

۱۱۶- گزینه ۲ ابتدا حاصل هر پرانتز (با توجه به این که مخرج مشترک دارند) را به دست آورده و سپس با توجه به حاصل جمع این کسرها، مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} &= \frac{3}{3} = 1 = \frac{2}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} &= \frac{10}{5} = 2 = \frac{4}{2} \\ &: \end{aligned}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100} = \frac{(99 \times 100) \div 2}{100} = \frac{99}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{99}{2} = \frac{1+2+\dots+99}{2} \\ &= \frac{99 \times 100}{2} = \frac{99 \times 100}{4} = 2475 \end{aligned}$$

۱۱۷- گزینه ۲ قسمت‌های صحیح را با هم جمع کرده و سپس قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$1392 \frac{1}{6} + 1391 \frac{1}{3} - 1390 \frac{1}{2} = (1392 + 1391 - 1390) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1393 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1393$$

۱۱۸- گزینه ۱ قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M &= 1 \frac{1}{4} + 1 \frac{2}{4} + 1 \frac{3}{4} + \dots + 31 = 1 \frac{1}{4} + 1 \frac{2}{4} + 1 \frac{3}{4} + \dots + 1 \frac{60}{4} = (1+1+1+\dots+1) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{60}{4}\right) = 60 + \frac{1+2+3+\dots+60}{4} \\ &= 60 + \frac{60 \times 61}{4} = 60 + (15 \times 61) = 975 \end{aligned}$$

۱۱۹- گزینه ۲ ابتدا هر عدد را به صورت عدد مخلوط نوشته و سپس قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= 1/01 + 2/02 + 3/03 + \dots + 10/1 = 1 \frac{1}{100} + 2 \frac{2}{100} + 3 \frac{3}{100} + \dots + 10 \frac{10}{100} = (1+2+3+\dots+10) + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{10}{100}\right) \\ &= \frac{10 \times 11}{2} + \frac{1+2+3+\dots+10}{100} = 55 + \frac{55}{100} = 55 + \frac{55}{100} = 55 \frac{55}{100} \end{aligned}$$

۱۲۰- گزینه ۲ برای به دست آوردن حاصل عبارت، قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$k = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{10}{100} = (1+2+3+\dots+10) + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{10}{100}\right)$$

یعنی:

$$= \left(\frac{1 \times 11}{2}\right) + \left(\frac{1+2+3+\dots+10}{100}\right) = 55 + \frac{55}{100}$$

$$\frac{k}{55} = \frac{55 + \frac{55}{100}}{55} = \frac{55}{55} + \frac{\frac{55}{100}}{55} = 1 + \frac{1}{100} = 1/01$$

پس:

۱۲۱- گزینه ۲ قسمت‌های صحیح را با هم و قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{3}{2} - \dots - \frac{100}{2} = -\frac{1}{2} + (1-2+3-4+\dots+99-100) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + ((-1) + (-1) + \dots + (-1)) + 0 = -\frac{1}{2} + 50(-1) = -50\frac{1}{2}$$

۱۲۲- گزینه ۴ ابتدا مقدار هر پرانتز را ساده می‌کنیم و سپس مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2003}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2004}{2003} = \frac{2004}{2} = 1002$$

۱۲۳- گزینه ۲ ابتدا مقدار هر پرانتز را به دست آورده و سپس با توجه به تعداد پرانتزها، علامت عبارت را تعیین می‌کنیم و در نهایت مقدار عبارت را حساب می‌کنیم:

$$A = \left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{6} - 1\right)\left(\frac{1}{7} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{40} - 1\right) = -\frac{4}{5} \times -\frac{5}{6} \times -\frac{6}{7} \times \dots \times -\frac{39}{40}$$

با توجه به این که تعداد کسرها برابر با $36 = 40 - 5 + 1$ تا است، پس حاصل عبارت مثبت است؛ یعنی: $A = \frac{4}{40} = 0/1$

۱۲۴- گزینه ۲ ابتدا حاصل هر پرانتز را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به این که هر کسری که مخرج آن عددی زوج است، علامت منفی دارد، تعداد علامت‌های منفی را تشخیص داده و سپس مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{69}\right)\left(\frac{1}{70} - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{68}{69}\right)\left(-\frac{69}{70}\right)$$

تعداد علامت‌های منفی برابر با $35 = 70 \div 2$ تا است؛ پس حاصل کسر منفی است؛ یعنی:

۱۲۵- گزینه ۲ در هر یک از پرانتزها از عدد ۲ فاکتور گرفته، سپس حاصل هر پرانتز را به دست می‌آوریم و مقدار عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\left(2 - \frac{2}{3}\right)\left(2 - \frac{2}{4}\right)\left(2 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(2 - \frac{2}{100}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \times 2\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \times 2\left(1 - \frac{1}{100}\right) = 2^{99} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{99}{100}\right) = 2^{99} \times \frac{2}{100} = \frac{2^{99}}{100}$$

پس صد برابر این عبارت مساوی است با:

$$100 \times \frac{2^{99}}{100} = 2^{99}$$

۱۲۶- گزینه ۲ هر پرانتز را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم و سپس با توجه به ساختار ایجادشده، عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{2}{20} + \frac{1}{400}\right) = \frac{9}{4} \times \frac{16}{9} \times \frac{25}{16} \times \frac{36}{25} \times \dots \times \frac{441}{400} = \frac{441}{4}$$

۱۲۷- گزینه ۲ منظور از کسر تحویل‌ناپذیر در صورت سؤال، همان کسر ساده‌نشده است. با استفاده از راهبرد حل مسئله ساده‌تر، براساس مقدار چند پرانتز اول، یک الگو برای پرانتزهای این عبارت به دست می‌آوریم.

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \frac{24}{25} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}$$

:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2001^2}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{2001^2 - 1}{2001^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2002}{2001} = \frac{1001}{2001}$$

حاصل جمع صورت و مخرج $= 1001 + 2001 = 3002$

پس:

۱۲۸- گزینه ۲ با توجه به قاعدهٔ تلسکوپی در کسرها داریم:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{a \times b}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \dots \times \frac{1}{48} - \frac{1}{49} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{42} \times \dots \times \frac{1}{48 \times 49} = \frac{12}{6} \times \frac{30}{20} \times \frac{56}{42} \times \dots \times \frac{49 \times 50}{48 \times 49}$$

پس:

$$= \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \dots \times \frac{50}{48} = \frac{50}{2} = 25$$

۱۲۹- گزینه ۲ ابتدا ساختار سؤال را در حالتی حل می‌کنیم که مرتباً صورت‌ها و مخرج‌ها با هم ساده شوند و سپس با توجه به آن، مقدار A را

محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

می‌دانیم:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}\right)}_A \times \underbrace{\left(\frac{1}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99}\right)}_B = \frac{1}{100}$$

به عبارت دیگر:

$$A \times B = \frac{1}{100}$$

یعنی:

اگر $A = B = \frac{1}{10}$ ، آن‌گاه $A = B = \frac{1}{10}$ ، اما مشخص است که $B > A$ ، زیرا تک‌تک کسرها در ساختار B از کسره‌های نظیرشان در ساختار A بزرگ‌تر

$$\left(\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \dots, 1 > \frac{99}{100}\right)$$

هستند.

$$\text{پس: } B > \frac{1}{10} \text{ و } A < \frac{1}{10}$$

۱۳۰- گزینه ۲ با توجه به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین کسر در بین این ۱۰۰ کسر، محدودهٔ تغییرات A را تعیین می‌کنیم. مشخص است که همهٔ کسرها

از $\frac{1}{100}$ کوچک‌تر هستند؛ به عبارت دیگر:

$$A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} < \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < 100 \times \frac{1}{100} \Rightarrow A < 1$$

$$A > 100 \times \frac{1}{200} \Rightarrow A > \frac{1}{2}$$

هم‌چنین، همهٔ کسرها از $\frac{1}{200}$ (به جز آخرین کسر) بزرگ‌تر هستند؛ یعنی:

$$\frac{1}{2} < A < 1$$

پس:

۱۳۱- گزینه ۲ ابتدا هر کسری را طوری به دو کسر تبدیل می‌کنیم که حتماً یکی از آن‌ها عدد یک باشد، یعنی:

$$B = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{61}{60}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{60}{61}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{6} + \dots + 1 + \frac{1}{60}\right) + \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{7} + \dots + 1 - \frac{1}{61}\right)$$

$$= 30 + 30 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{61}\right) = 60 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3660}}_{\text{تا } 30}$$

مشخص است که حداکثر مقدار هر کسر برابر با $\frac{1}{6}$ است؛ پس جمع ۳۰ تا کسر از $\frac{1}{6}$ تا $\frac{1}{6}$ کم‌تر است؛ به عبارت دیگر جمع این کسرها از $30 \times \frac{1}{6} = 5$

$$60 < B < 65$$

کم‌تر است؛ پس:

۱۳۲- گزینه ۲ برای این که ساختار A و B در کسر داده‌شده ایجاد شود، صورت و مخرج آن را در $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100 \times (2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100)}{3 \times 5 \times \dots \times 101 \times (2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100)} = \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100)^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 101}$$

$$= \frac{(2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2 \times 50)^2}{A \times 101} = \frac{(2^{50} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50)^2}{A \times 101} = \frac{2^{100} \times B^2}{101A}$$



۱۳۳- گزینه ۲ ابتدا طرفین تساوی را در ۴ ضرب می‌کنیم و سپس با توجه به رابطه بین A و $4A$ مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$4A = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \Rightarrow 4A = 2 + A \Rightarrow 3A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}, \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$$

۱۳۴- گزینه ۱ با توجه به این که متغیر a در همه کسرها وجود دارد، ابتدا از a فاکتور گرفته، سپس مقدار عبارت باقی‌مانده را به دست می‌آوریم و

در نهایت با توجه به آن، مقدار a را به دست می‌آوریم: $a + \frac{a}{3} + \frac{a}{9} + \frac{a}{27} + \dots = 12 \Rightarrow a(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots) = 12$ (*)

از طرفی: $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \Rightarrow 3A = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \Rightarrow 3A = 3 + A \Rightarrow 2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

پس با توجه به (*) داریم: $a(\frac{3}{2}) = 12 \Rightarrow a = 12 \div \frac{3}{2} = 12 \times \frac{2}{3} = 8$

۱۳۵- گزینه ۴ می‌دانیم اگر در دنباله‌ای بی‌انتهای بی‌انتهای از اعداد، هر عدد از ضرب عدد قبلی در عددی ثابت (بین ۱ و -۱) به وجود آید، برای به دست

آوردن مجموع آن‌ها داریم: $\text{مجموع} = \frac{\text{اولین عدد}}{\text{عدد ثابت} - 1}$

در این سؤال: $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) + \dots$$

طبق مطلبی که در بالا گفته شده می‌توان نوشت:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 1 = 2$$

کسره‌های مسلسل و تلسکوپی

۱۳۶- گزینه ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را کمی ساده‌تر کرده و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\text{صورت کسر} = 2 + \frac{2+2+1}{1} = 2 + \frac{2+3}{1} = 7 \quad \text{مخرج کسر} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-1}} = 2 - \frac{1}{2-1} = 2-1=1$$

$$2 \div \frac{2 + \frac{2+1}{1}}{2 - \frac{1}{2-1}} = 2 \div \frac{7}{1} = \frac{2}{7}$$

پس:

۱۳۷- گزینه ۲ می‌دانیم هر کسری مثل $\frac{x}{y}$ برابر است با: $\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$

با استفاده از این روند و تبدیل عدد کسری به عدد مخلوط، ساختار موردنظر را ایجاد کرده و سپس مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم:

$$53 = 3 + \frac{2}{17} = 3 + \frac{17}{17} = 3 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}$$

$$x = 8, y = 2 \Rightarrow x + y = 10$$

پس:

۱۳۸- گزینه ۱ برای حل این سؤال می‌توانیم از رابطه زیر که به ازای هر عدد a غیرصفر همواره برقرار است، استفاده کرد: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = 1$
 برای استفاده از این رابطه ابتدا کسر اول را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2014}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2014}}}}} = \frac{1}{1+A}$$

با این ساختار کسر دوم به شکل $\frac{1}{1+\frac{1}{A}}$ نوشته شده است، پس: حاصل عبارت $= \frac{1}{1+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{A}} = 1$

۱۳۹- گزینه ۱ در این نوع سؤالات، ساختار عبارت درون عبارت مرتباً تکرار می‌شود. با در نظر گرفتن این ساختار به شکل A ، مقدار عبارت را به دست می‌آوریم:

$$A = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\dots}}} \Rightarrow A = 1 + \frac{2}{A} \Rightarrow A = \frac{A+2}{A} \Rightarrow A^2 = A+2$$

با امتحان گزینه‌ها: $A = 2$.

۱۴۰- گزینه ۲ با استفاده از قانون تسکویی، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{29 \times 30} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} = \frac{1}{1} - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

۱۴۱- گزینه ۲ با توجه به این که اختلاف اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند، در صورت ظاهر شده، با استفاده از قانون تسکویی، حاصل عبارت را به

$$\frac{3}{1 \times 4} + \frac{5}{4 \times 9} + \frac{7}{9 \times 16} + \dots + \frac{19}{81 \times 100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

۱۴۲- گزینه ۵ ابتدا از منفی فاکتور گرفته و سپس از قاعده تسکویی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \dots - \frac{1}{49 \times 50} = \frac{1}{1 \times 2} - \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{49 \times 50} \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{1}{50}$$

۱۴۳- گزینه ۲ اختلاف اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند برابر با ۲ است ولی در صورت، عدد ۱ ظاهر شده است. برای این که بتوانیم از قانون

تسکویی استفاده کنیم، عبارت را در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{998 \times 1000} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \dots + \frac{2}{998 \times 1000} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{998} - \frac{1}{1000} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{499}{1000} = \frac{499}{2000}$$

۱۴۴- گزینه ۲ با توجه به این که مجموع اعدادی که در مخرج ضرب شده‌اند، در صورت کسر ظاهر شده است، از قاعده تسکویی جمع استفاده می‌کنیم:

$$\frac{5}{1 \times 4} - \frac{13}{4 \times 9} + \frac{25}{9 \times 16} - \frac{41}{16 \times 25} + \dots - \frac{221}{100 \times 121} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} \right) + \dots - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{121} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{121} = \frac{120}{121}$$

۱۴۵- گزینه ۲ با فاکتورگیری از $\frac{7}{5}$ ، ساختار عبارت به شکلی تبدیل می‌شود که می‌توان از قانون تسکویی استفاده کرد.

$$\frac{7}{50} + \frac{7}{150} + \frac{7}{300} + \frac{7}{500} + \frac{7}{750} + \frac{7}{1050} = \frac{7}{5 \times 10} + \frac{7}{10 \times 15} + \frac{7}{15 \times 20} + \frac{7}{20 \times 25} + \frac{7}{25 \times 30} + \frac{7}{30 \times 35}$$

$$= \frac{7}{5} \left(\frac{5}{5 \times 10} + \frac{5}{10 \times 15} + \dots + \frac{5}{30 \times 35} \right) = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{30} - \frac{1}{35} \right) = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{35} \right) = \frac{7}{5} \times \frac{6}{35} = \frac{6}{25}$$

۱۴۶- گزینه ۲ ابتدا مخرج هر کسر را با توجه به رابطه $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ به شکل ساده‌تری نوشته و سپس به کمک قاعدهٔ تلسکوپی، حاصل عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{100 \times 101} \\ &= \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{4 \times 5} + \dots + \frac{2}{100 \times 101} = 2 \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{100 \times 101} \right) \\ 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) = 2 \times \frac{100}{101} = \frac{200}{101} \end{aligned}$$

۱۴۷- گزینه ۴ هر کسر را با استفاده از قانون کسره‌های تلسکوپی به شکل ساده‌تری می‌نویسیم و با توجه به آن، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} &= \frac{2-1}{2!} = \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\ \frac{2}{3!} &= \frac{3-1}{3!} = \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ \frac{3}{4!} &= \frac{4-1}{4!} = \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \\ &\vdots \\ \frac{99}{100!} &= \frac{100-1}{100!} = \frac{100}{100!} - \frac{1}{100!} = \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} \\ A &= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{100!} = 1 - \frac{1}{100!} \end{aligned}$$

پس:

چند سؤال دیگر از اعداد گویا

۱۴۸- گزینه ۲ وقتی آب یخ می‌زند، حجمش $\frac{1}{10}$ بیشتر می‌شود؛ یعنی حجم جدید برابر است با: از طرفی وقتی یخ آب می‌شود، حجم آن باید به حجم اولیه برسد؛ برای این که این حجم به حجم اولیه برسد، باید $\frac{1}{10}$ از $\frac{11}{10}$ کم شود؛ یعنی نسبت مقدار حجم کم‌شده برابر است با:

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{11}{10}} = \frac{1}{11}$$

۱۴۹- گزینه ۱ با توجه به این که فرزند اول در هر ساعت $\frac{1}{8}$ کار و فرزند دوم در هر ساعت $\frac{1}{6}$ کار را انجام می‌دهد، پس پدر که معادل دو فرزند خود کار می‌کند در هر ساعت $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ کار را انجام می‌دهد؛ پس کل کار توسط پدر در $\frac{24}{7}$ ساعت انجام می‌شود. $\left(\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}\right)$

۱۵۰- گزینه ۴ افشین و محمد کار را در $\frac{4}{5}$ روز انجام می‌دهند، یعنی در یک روز $\frac{5}{4}$ کار را انجام می‌دهند.

محمد و شهرام کار را در $\frac{2}{3}$ روز، یعنی در یک روز $\frac{3}{2}$ کار را انجام می‌دهند.

شهرام و افشین کار را در $\frac{4}{7}$ روز انجام می‌دهند، یعنی در یک روز $\frac{7}{4}$ کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{5+6+7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

اما

پس کل کاری که در یک روز انجام می‌شود (به شرطی که هر نفر ۲ بار حساب شود) برابر با $\frac{9}{2}$ است؛ یعنی کل کار در $\frac{2}{9}$ روز انجام می‌شود؛ ولی چون

هر شخص ۲ بار حساب شده، زمان ۲ برابر می‌شود؛ یعنی کل کار توسط این ۳ نفر در $\frac{4}{9}$ روز انجام می‌شود.

۱۵۱- گزینه ۲ شیرهای C و D در هر دقیقه به ترتیب $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{6}$ استخر را پر می‌کنند؛ پس در ۲۰ دقیقه به ترتیب $\frac{20}{9}$ و $\frac{20}{6}$ استخر را پر می‌کنند؛

$$\left(\frac{20}{9} + \frac{20}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}\right) \text{ یعنی با هم } \frac{5}{9} \text{ استخر را پر می‌کنند:}$$

بنابراین $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ استخر هنوز خالی است. حال اگر همه شیرها با هم باز باشند در هر دقیقه $\frac{1}{12}$ استخر پر می‌شود؛ زیرا:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{6+4+3+2}{180} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}$$

اگر مدت زمانی که احتیاج است تا بقیه استخر پر شود را X دقیقه فرض کنیم، داریم:

$$\frac{1}{X} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{1}{12} X = \frac{4}{9} \Rightarrow X = \frac{4}{9} \div \frac{1}{12} = \frac{48}{9} = 5 \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{14+7+4}{28} = \frac{25}{28}$$

۱۵۲- گزینه ۲ نسبت افرادی که مشغول مطالعه هستند برابر است با:

پس $\frac{25}{28}$ کل افراد در حال مطالعه و $1 - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}$ افراد هم غایب هستند. با توجه به فرض مسئله، تعداد افراد غایب که $\frac{3}{28}$ افراد را تشکیل می‌دهند

$$\frac{3}{28} \mid \frac{3}{?} \Rightarrow ? = 28$$

برابر با ۳ نفر است؛ پس تعداد کل افراد برابر است با:

که عدد ۲۸ بر ۷ بخش پذیر است.

۱۵۳- گزینه ۱ با توجه به فرضیات مسئله، مقدار حافظه باقی مانده بعد از گذشت هر روز را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مقدار حافظه باقی مانده در روز اول} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مقدار حافظه باقی مانده در روز دوم} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3} \text{ باقی مانده از بین می‌رود، پس } \frac{2}{3} \text{ آن باقی می‌ماند}\right)$$

$$\text{مقدار حافظه باقی مانده در روز سوم} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{مقدار حافظه باقی مانده در روز چهارم} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

۱۵۴- گزینه ۲ با توجه به این که حقوق احمدآقا هر سال $\frac{1}{6}$ و قیمت سکه هر سال $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود، پس نسبت افزایش حقوق احمدآقا به افزایش

$$\frac{1/6}{1/2} = \frac{4}{3}$$

قیمت سکه برابر است با:

پس بعد از ۴ سال این نسبت برابر می‌شود با: $\left(\frac{4}{3}\right)^4$.

$$54 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 54 \times \frac{256}{81} = \frac{512}{3} \sim 170 \frac{2}{3}$$

بنابراین تعداد سکه‌هایی که او می‌تواند بعد از ۴ سال بخرد برابر است با:

یعنی او می‌تواند بعد از ۴ سال ۱۷۰ سکه بخرد.

۱۵۵- گزینه ۲ حاصل هر یک از عبارت‌ها را با رعایت اولویت اعمال ریاضی به دست می‌آوریم:

$$(a \div b) \div (c \div d) = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$((a \div b) \div c) \div d = \left(\frac{a}{b} \div c\right) \div d = \left(\frac{a}{b} \times \frac{1}{c}\right) \times \frac{1}{d} = \frac{a}{bcd}$$

$$(a \div (b \div c)) \div d = \left(a \div \left(\frac{b}{c}\right)\right) \div d = \left(a \times \frac{c}{b}\right) \times \frac{1}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \div ((b \div c) \div d) = a \div \left(\frac{b}{c} \div d\right) = a \div \left(\frac{b}{cd}\right) = a \times \frac{cd}{b} = \frac{acd}{b}$$

$$a \div (b \div (c \div d)) = a \div \left(b \div \frac{c}{d}\right) = a \div \left(\frac{bd}{c}\right) = a \times \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$$

با توجه به مقادیر بالا، ۴ مقدار مختلف به دست می‌آید.



۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا با توجه به مفروضات مسئله همه متغیرها را بر حسب a می‌نویسیم و سپس با توجه به معادله داده شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$b = a + \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$b = c - \frac{1}{6} \Rightarrow c = b + \frac{1}{6} \xrightarrow{(1)} c = a + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \Rightarrow c = a + \frac{11}{30} \quad (2)$$

$$d = a + \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$a + b + c + d = 9 \frac{1}{15} \xrightarrow{(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3)} a + a + \frac{1}{5} + a + \frac{11}{30} + a + \frac{1}{4} = 9 \frac{1}{15}$$

پس:

$$\Rightarrow 4a + \frac{32}{30} = \frac{46}{5} \Rightarrow 4a = \frac{46}{5} - \frac{32}{30} = \frac{240}{30} = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۵۷- گزینه ۴ با حدس و آزمایش این مقادیر را به دست می‌آوریم:

$$\text{بیشترین مقدار} = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{کمترین مقدار} = \frac{1 - 1 - 1}{2 \times 1 - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$2 = 1 - (-1) = \text{اختلاف}$$

$$x = 10, y = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{1} + \frac{1}{10} = 10 \frac{1}{10}$$

۱۵۸- گزینه ۲ با حدس و آزمایش این بیشترین مقدار را به دست می‌آوریم.

۱۵۹- گزینه ۵ برای این که بیشترین مقدار به دست آید، باید صورت کسر بیشترین مقدار ممکن و مخرج کسر کمترین مقدار ممکن باشد؛ پس:

$$\text{بیشترین مقدار صورت} = 2004 + 2003 = 4007$$

$$\text{کمترین مقدار مخرج} = 2004 - 2003 = 1$$

$$\frac{\Delta + \nabla}{\Delta - \nabla} \text{ بیشترین مقدار} = \frac{4007}{1} = 4007$$

پس:

۱۶۰- گزینه ۴ با حدس و آزمایش این مقادیر را حساب می‌کنیم:

حالت‌های متفاوتی که می‌توان عدد ۱ را با مجموع ۳ کسر نوشت عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \text{حالت ۳}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \text{حالت ۶}$$

پس جمعاً $1 + 3 + 6 = 10$ حالت برای سه‌تایی (X, Y, Z) وجود دارد.

۱۶۱- گزینه ۱ به همان ترتیبی که اعداد نوشته شده‌اند، مجموع $a + b + ab$ را به دست می‌آوریم:

$$(1) a = 1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b + ab = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$(2) a = 2, b = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b + ab = 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3$$

$$(3) a = 3, b = \frac{1}{4} \Rightarrow a + b + ab = 3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 4$$

:

$$(99) a = 99, b = \frac{1}{100} \Rightarrow a + b + ab = 99 + \frac{1}{100} + \frac{99}{100} = 100$$

پس آخرین عددی که باقی می‌ماند برابر با ۱۰۰ است.

۱۶۲- گزینه ۴ ابتدا ساختار عبارت داده شده را به صورت $a \times b - c$ می‌نویسیم و سپس با توجه به آن، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$-c + d = -(c + d)$$

(دقت شود که اولویت در این ساختار ابتدا با عمل تفریق است.)

$$a \div b - c + d = a \div b - (c + d) = a \div (b - (c + d)) = \frac{a}{b - c - d}$$

پس:

۱۶۳- گزینه ۲ ابتدا ساختار M را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم:

$$M = \frac{10n}{1+2n} = \frac{10n}{\frac{n}{n} + 2n} = \frac{10n}{n(\frac{1}{n} + 2)} = \frac{10}{\frac{1}{n} + 2}$$

با توجه به عبارت بالا، اگر n زیاد شود، مقدار $\frac{1}{n}$ کوچک‌تر می‌شود؛ یعنی مقدار مخرج M کوچک‌تر شده و حاصل کسر M بزرگ‌تر می‌شود.

۱۶۴- گزینه ۴ مربع اول به ۹ قسمت، مربع مرکز به ۴ قسمت و مجدداً مربع بعدی به ۹ قسمت تقسیم شده است؛ پس:

$$\text{مساحت مربع کوچک سیاه} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{324}$$

۱۶۵- گزینه ۴ با استفاده از راهبرد الگویابی داریم:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	۲۰
خانه‌های سیاه	$1 = 2 \times 1 - 1$	$3 = 2 \times 2 - 1$	$5 = 2 \times 3 - 1$...	$39 = 2 \times 20 - 1$
خانه‌های رنگی	$5 = 6 \times 1 - 1$	$11 = 6 \times 2 - 1$	$17 = 6 \times 3 - 1$...	$119 = 6 \times 20 - 1$

پس در شکل ۲۰م نسبت موردنظر برابر با $\frac{119}{39}$ است.

۱۶۶- گزینه ۲ برای این که به مخرج ۱۲ برسیم، باید مخرج‌های ۲، ۳، ... و ۱۰ نوشته شده باشند. از طرفی برای مخرج ۲، یک کسر، برای مخرج

۳، دو کسر، ... برای مخرج ۱۱، ده کسر وجود دارد؛ پس قبل از $\frac{1}{11}$ به تعداد $55 = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$ کسر نوشته شده است؛ پس $\frac{1}{11}$ ، $\frac{1}{13}$ ، $\frac{1}{15}$ ، ... کسر است.

۱۶۷- گزینه ۴ ابتدا مخرج کسر را پیدا می‌کنیم (می‌دانیم با توجه به سؤال قبل)، اگر مخرج کسر $n + 2$ باشد، حداقل $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq 356$$

کسر قبل از آن نوشته شده است؛ یعنی:

$$\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{3}{27}, \frac{4}{27}, \frac{5}{27} \quad \text{با حدس و آزمایش} \left(\frac{26 \times 27}{2} = 351 \right) n = 26 \quad \text{پس } 351 \text{ آمین کسر عدد } \frac{25}{26} \text{ است؛ لذا کسر } 356 \text{ م برابر است با:}$$

۱۶۸- گزینه ۱ برای پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار $\frac{a}{b}$ از حدس و آزمایش استفاده می‌کنیم:

برای پیدا کردن بیشترین مقدار، صورت کسر باید بیشترین مقدار ممکن و مخرج باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشد (اگر صورت و مخرج هم‌علامت باشند) که این بیشترین مقدار به ازای $a = 3$ و $b = 1$ به دست می‌آید.

$$\text{بیشترین مقدار} = \frac{a}{b} = \frac{3}{1} = 3$$

برای یافتن کمترین مقدار ممکن به این مطلب باید توجه داشته باشیم که صورت و مخرج باید مختلف‌العلامت باشند که این کمترین مقدار به ازای

$$\text{کمترین مقدار} = \frac{a}{b} = \frac{-3}{1} = -3$$

$a = -3$ و $b = 1$ به دست می‌آید.

$$\text{پس: } -3 < \frac{a}{b} < 3$$

۱۶۹- گزینه ۵ برای به دست آوردن a و b باید بیشترین مقدار و کمترین مقدار $\frac{x}{y}$ را به دست آوریم:

بیشترین مقدار $\frac{x}{y}$ ، به ازای مقادیری از x و y به دست می‌آید که اولاً x و y هم‌علامت باشد و ثانياً x بیشترین مقدار ممکن و y کمترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{بیشترین مقدار} = \frac{x=-6}{y=-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = +12 = b$$

برای به دست آوردن کمترین مقدار $\frac{x}{y}$ ، به این نکته باید توجه داشته باشیم که x و y باید مختلف‌العلامت باشند.

$$\text{کمترین مقدار} = \frac{x=10}{y=-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10}{-\frac{1}{2}} = -20 = a$$

$$a \times b = -20 \times 12 = -240$$

پس:



۱۷۰- گزینه ۲ می‌دانیم اگر مخرج کسر عدد 10^0 باشد، تعداد ارقام اعشار آن یکی، و اگر مخرج کسر 10^2 باشد، تعداد ارقام اعشار آن کسر دوتا و ... و اگر مخرج کسر 10^3 باشد، تعداد ارقام اعشار آن n تا است. در این سؤال ابتدا مخرج کسر را تجزیه کرده و سپس تعداد توان‌های عدد 10 را می‌یابیم و در نهایت با توجه به آن، تعداد ارقام اعشار را تعیین می‌کنیم.

$$1024000 = 2^{10} \times 10^3$$

$$\frac{1}{1024000} = \frac{1}{2^{10} \times 10^3} \xrightarrow{\times 5^{10}} \frac{5^{10}}{10^{10} \times 10^3} \xrightarrow{\times 5^{10}} \frac{5^{10}}{10^{13}}$$

پس:

با توجه به این که مخرج کسر به صورت 10^{13} است، پس تعداد ارقام اعشار این کسر برابر با 13 تا است.

$$1 \frac{15}{21} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7}$$

$$2 \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

۱۷۱- گزینه ۱ ابتدا هر یک از کسرها را ساده می‌کنیم:

فرض کنید این کوچک‌ترین عدد موردنظر برابر با a باشد؛ پس:

$$a \div \frac{8}{3} = \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8} \text{ یعنی } a \times \frac{3}{8} = \frac{3a}{8} \text{ باید مقداری صحیح باشد؛ پس } a \text{ باید مضرب } 8 \text{ باشد.}$$

$$a \div \frac{12}{7} = \frac{7a}{12} = \frac{7a}{12} \text{ یعنی } a \times \frac{7}{12} = \frac{7a}{12} \text{ باید مقداری صحیح باشد؛ بنابراین } a \text{ باید مضرب } 12 \text{ باشد.}$$

$$a \div \frac{3}{7} = \frac{7a}{3} = \frac{7a}{3} \text{ یعنی } a \times \frac{7}{3} = \frac{7a}{3} \text{ باید مقداری صحیح باشد؛ پس } a \text{ باید مضرب } 3 \text{ باشد.}$$

$$a = [8, 12, 3] = 24$$

از آن جا که کوچک‌ترین مقدار ممکن مدنظر است، پس:

۱۷۲- گزینه ۲ ابتدا ساختار کسرها را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{6}{n+9} = \frac{6}{(n+3)+6}$$

$$\frac{5}{n+8} = \frac{5}{(n+3)+5}$$

$$\frac{4}{n+7} = \frac{4}{(n+3)+4}$$

از آن جا که می‌خواهیم صورت هر کسر با مخرج آن ساده شود، کافی است $n+3$ مقداری باشد که بر 3 ، 4 ، 5 و 6 بخش پذیر باشد و از آن جا که کم‌ترین مقدار مدنظر است، پس:

$$n+3 = [4, 5, 6] = 60 \Rightarrow n = 60 - 3 = 57$$