هندسه و استدلال

فصل ۴

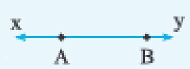
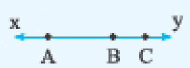
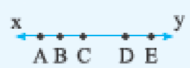
در سال‌های چهارم، پنجم و ششم با برخی از مفاهیم و شکل‌های هندسی و خواص آن‌ها مثل خط، نیم‌خط، پاره‌خط، زاویه، توازی، مساحت، تقارن، چندضلعی‌ها و مجموع زوایای آن‌ها و ... آشنا شدید. مبحث هندسه را از امسال تا آخرین سال تحصیل دورهٔ متوسطهٔ دوم در کتاب‌های درسی‌تان می‌بینید؛ پس اگر می‌خواهید از این درس عقب نمانید باید از همین الان که شکل جدی‌تری نسبت به سال‌های قبل به خودش گرفته است، خوب و مفهومی مطالبش را یاد بگیرید تا امسال و البته سال‌های بعد کارتان راحت‌تر پیش برود. این را هم بگوییم که هندسه اصلاً درس سختی نیست و فقط لازم است که برای حل مسائل آن اولاً شکل دقیق داشته باشید و ثانیاً نگاه با حوصله و دقیق‌تر. *بسیار خب!! برویم سراغ درس ...*

خط، نیم‌خط، پاره‌خط

در شکل‌های مقابل xy خط، Ax و Ay نیم‌خط و AB پاره‌خط است.

در واقع با توجه به شکل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر نقطه روی یک خط تشکیل دو نیم‌خط و هر دو نقطه روی یک خط تشکیل یک پاره‌خط می‌دهند. همیشه نقاط دو سر یک پاره‌خط و نقطهٔ ابتدایی یک نیم‌خط را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم؛ همچنین دو طرف یک خط و یک طرف یک نیم‌خط که نقطهٔ انتهای آن‌ها معلوم نیست را با حروف کوچک انگلیسی نمایش می‌دهیم. (شکل‌ها را ببینید.)

حالا با توجه به تعریف‌های پاره‌خط و نیم‌خط، می‌خواهیم ببینیم اگر n نقطه روی یک خط راست قرار بگیرند، چند نیم‌خط و چند پاره‌خط تولید می‌کنند. به جدول زیر توجه کنید:

تعداد نقاط روی خط	شکل	پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها	تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها
۲		پاره‌خط: AB نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By	تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{۲\times۱}{۲}=۲$ تعداد نیم‌خط‌ها: $۲\times۲=۴$
۳		پاره‌خط: AB, AC, BC نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy	تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{۳\times۲}{۲}=۳$ تعداد نیم‌خط‌ها: $۲\times۳=۶$
۴		پاره‌خط: AB, AC, AD, BC, BD, CD نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy	تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{۴\times۳}{۲}=۶$ تعداد نیم‌خط‌ها: $۲\times۴=۸$
۵		پاره‌خط: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy, Ex, Ey	تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$ تعداد نیم‌خط‌ها: $۲\times۵=۱۰$

با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم: **۲ ÷ (یکی کم‌تر از تعداد نقاط روی خط) × (تعداد نقاط روی خط) = تعداد پاره‌خط‌های روی یک خط راست**

(تعداد نقاط روی خط) × ۲ = تعداد نیم‌خط‌های روی یک خط راست

پس اگر n نقطه روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن‌وقت داریم: $۲\times n =$ **تعداد نیم‌خط‌ها** و $\frac{n\times(n-۱)}{۲} =$ **تعداد پاره‌خط‌ها**

تست: ۲۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌هایی که این ۲۰ نقطه می‌سازند، چه‌قدر است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۵

پاسخ: گزینه ۳ تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$\frac{۲۰\times(۲۰-۱)}{۲} = \frac{۲۰\times۱۹}{۲} = ۱۹۰$: تعداد پاره‌خط‌ها و $۲\times۲۰ = ۴۰ =$ تعداد نیم‌خط‌ها

$\Rightarrow$ اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها $= ۱۹۰ - ۴۰ = ۱۵۰$

تست: تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند. اگر تعداد پاره‌خط‌هایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خط‌هایی باشد که می‌سازند، در این صورت چند نقطه روی این خط قرار دارند؟

۱) ۱۱تا ۲) ۱۲تا ۳) ۱۳تا ۴) ۱۴تا

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنید n نقطه روی خط قرار دارند؛ در این صورت تعداد پاره‌خط‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ و تعداد نیم‌خط‌ها نیز برابر $۲n$ تا می‌شود؛ در نتیجه چون تعداد پاره‌خط‌ها سه برابر تعداد نیم‌خط‌ها است، باید داشته باشیم:

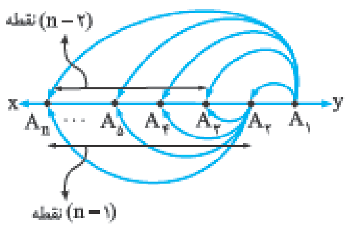
$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۳\times۲n \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۶n \xrightarrow{(\times ۲)} n(n-۱) = ۱۲n \xrightarrow{(\div n)} n-۱ = ۱۲ \Rightarrow n = ۱۳$$

بنابراین تعداد نقاط روی خط ۱۳تا است.

تست: تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند. اگر دوتا از این نقاط را برداریم، ۲۳تا پاره‌خط از تعداد کل پاره‌خط‌ها کم می‌شود. در ابتدا چند پاره‌خط روی این خط وجود داشته است؟

۱) ۶۶ تا ۲) ۹۱تا ۳) ۸۴تا ۴) ۷۸تا

پاسخ: گزینه ۴ فرض کنید n نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... و A_n روی یک خط راست قرار دارند.



همان‌طور که در شکل می‌بینید $A_۱$ به $n-۱$ نقطه و $A_۲$ نیز به $n-۲$ نقطه (به‌جز $A_۱$) وصل‌اند؛ پس اگر $A_۱$ را حذف کنیم، $n-۱$ پاره‌خط و اگر $A_۲$ را حذف کنیم $n-۲$ پاره‌خط دیگر حذف می‌شوند؛ پس باید داشته باشیم:

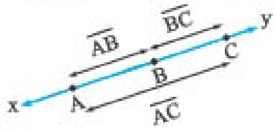
$$(n-۱)+(n-۲) = ۲۳ \Rightarrow ۲n-۳ = ۲۳ \Rightarrow ۲n = ۲۶ \Rightarrow n = ۱۳$$

$\Rightarrow$ تعداد کل پاره‌خط‌های اولیه $= \frac{۱۳\times(۱۳-۱)}{۲} = \frac{۱۳\times۱۲}{۲} = ۷۸$

طول پاره‌خط

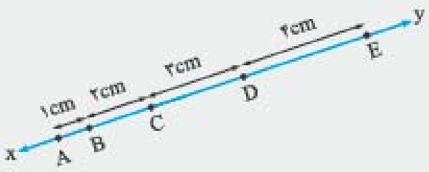
فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را طول پاره‌خط AB می‌نامند و آن را با نماد $\overline{AB}$ نمایش می‌دهند؛ مثلاً اگر فاصلهٔ نقطهٔ A و نقطهٔ B روی خطی راست مانند xy برابر ۷ سانتی‌متر باشد، آن‌وقت می‌نویسیم $\overline{AB} = ۷\,cm$.

توجه: مطابق شکل روبه‌رو اگر A، B و C سه نقطه روی یک خط راست باشند، آن‌وقت روابط زیر همیشه برقرارند:



$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}\Rightarrow\begin{cases}۱)\ \overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}\\ ۲)\ \overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}\end{cases}$$

مثال: با توجه به شکل زیر، حاصل‌جمع طول همهٔ پاره‌خط‌ها را به دست آورید.



پاسخ: تمام پاره‌خط‌ها را تعیین کرده و طول آن‌ها را می‌یابیم؛ سپس همهٔ طول‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$\overline{AB}=۱\,cm,\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=۱+۲=۳\,cm,\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=۳+۳=۶\,cm,\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=۶+۴=۱۰\,cm$

$\overline{BC}=۲\,cm,\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=۲+۳=۵\,cm,\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}=۵+۴=۹\,cm$

$\overline{CD}=۳\,cm,\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}=۳+۴=۷\,cm$

$\overline{DE}=۴\,cm$

پس حاصل‌جمع طول همهٔ پاره‌خط‌ها برابر است با:

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{BE}+\overline{CD}+\overline{CE}+\overline{DE}=۱+۳+۶+۱۰+۲+۵+۹+۳+۷+۴=۵۰$$

تست: در شکل مقابل C وسط AB، D وسط AC و E وسط AD است. کدام گزینه صحیح نیست؟

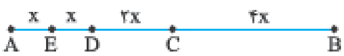
۱) $۲\overline{AE}+\overline{CD}=\overline{BC}$

۲) $\overline{CD}=\frac{\overline{AB}}{۴}$

۳) $\frac{\overline{BC}}{۲}+\overline{AE}=\frac{۳}{۴}\overline{AC}$

۴) $\overline{BE}=\frac{۵}{۶}\overline{AB}$

پاسخ: گزینه ۴ فرض کنید $\overline{AE}=x$، در این صورت چون E وسط AD است، پس $\overline{AE}=\overline{ED}$ و بنابراین $\overline{ED}=x$.
حالا دوباره چون D وسط AC است، پس $\overline{AD}=\overline{CD}$، اما دقت کنید که $\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{ED}=x+x=۲x$، پس $\overline{CD}=۲x$ و نهایتاً چون C وسط AB است، پس $\overline{AC}=\overline{BC}$ و در نتیجه چون $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=۲x+۲x=۴x$، بنابراین $\overline{BC}=۴x$. حالا تمام گزینه‌ها را چک می‌کنیم:



۱) $۲\overline{AE}=۲x,\overline{CD}=۲x\Rightarrow ۲\overline{AE}+\overline{CD}=۲x+۲x=۴x=\overline{BC}$ ✓

۲) $\frac{\overline{AB}}{۴}=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{۴}=\frac{۴x+۴x}{۴}=\frac{۸x}{۴}=۲x=\overline{CD}$ ✓

۳) $\frac{\overline{BC}}{۲}=\frac{۴x}{۲}=۲x,\overline{AE}=x\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{۲}+\overline{AE}=۲x+x=۳x=\frac{۳}{۴}\times۴x=\frac{۳}{۴}\overline{AC}$ ✓

۴) $\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CE}=۴x+۳x=۷x,\frac{۵}{۶}\overline{AB}=\frac{۵}{۶}\times۸x=\frac{۲۰}{۳}x\Rightarrow ۷x\neq\frac{۲۰}{۳}x$ ✗

پس رابطهٔ گزینهٔ (۴) غلط است و در نتیجه جواب مسئله همین گزینه است.

تست: در شکل مقابل، اگر $۲=\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$، $\frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}=\frac{۴}{۳}$، $\overline{ED}=۱۰$ و $\overline{AC}=۲$، آن‌وقت $\overline{AB}-\overline{CE}$ کدام است؟

۱) ۱۴　　۲) ۱۵　　۳) ۱۶　　۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۱ چون $۲=\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$، پس $\overline{CE}$ دو برابر $\overline{BD}$ است؛ یعنی اگر فرض کنیم $\overline{BD}=x$، آن‌وقت $\overline{CE}=۲x$. حالا با توجه به شکل داریم:

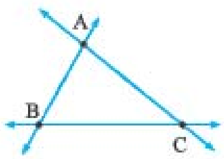
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{ED}}{\overline{ED}+\overline{DB}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۲+۲x+۱۰}{۱۰+x}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱۲+۲x}{۱۰+x}=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}۳(۱۲+۲x)=۴(۱۰+x)$$

$$\Rightarrow ۳۶+۶x=۴۰+۴x\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\Rightarrow\overline{CE}=۲x=۲\times۲=۴,\ \overline{DB}=x=۲$$

حالا با توجه به شکل چون $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{ED}+\overline{DB}$، پس داریم:

$$\overline{AB}-\overline{CE}=\overline{AC}+\overline{ED}+\overline{DB}=۲+۱۰+۲=۱۴$$

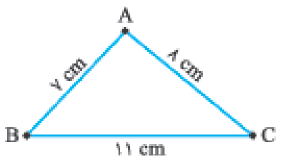
شرط وجود مثلث



دیدیم که اگر C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB (بین دو نقطهٔ A و B) باشد، آن‌وقت تساوی $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$ برقرار است. اما اگر نقاط A، B و C همگی روی یک خط قرار نداشته باشند، آن‌وقت اولاً A، B و C می‌توانند تشکیل یک مثلث بدهند و ثانیاً در مثلث به وجود آمده مجموع طول هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ یعنی با توجه به شکل مقابل داریم:

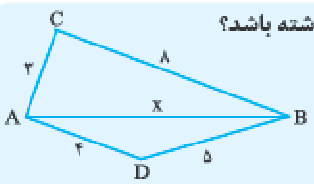
۱) $\overline{AC}+\overline{BC}>\overline{AB}$　　۲) $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$　　۳) $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$

توجه کنید که برای ساختن یک مثلث باید هر سه شرط بالا برقرار باشند؛ یعنی اگر حتی یکی از آن‌ها هم برقرار نباشد، مثلثی به وجود نمی‌آید؛ مثلاً مثلثی وجود ندارد که طول اضلاع آن ۵، ۶/۵ و ۱۲ باشد؛ چون درست است که $۱۲+۵>۶/۵$ و $۱۲+۶/۵>۵$، اما $۵+۶/۵=۱۱/۵$ است و ۱۱/۵ هم از ۱۲ بزرگ‌تر نیست؛ یعنی شرط $۵+۶/۵>۱۲$ برقرار نیست؛ پس چنین مثلثی وجود ندارد؛ اما اگر سه پاره‌خط داشته باشیم که طول آن‌ها اعداد ۷، ۸ و ۱۱ باشند، آن‌وقت می‌توانیم توسط این سه پاره‌خط مثلث بسازیم؛ چون هر سه رابطهٔ بالا برقرار می‌شوند:



۱) $\underbrace{۸+۷}_{۱۵}>۱۱$ ✓　　۲) $\underbrace{۸+۱۱}_{۱۹}>۷$ ✓　　۳) $\underbrace{۱۱+۷}_{۱۸}>۸$ ✓

تست: با توجه به شکل مقابل، اگر طول AB برابر عددی صحیح باشد، آن‌وقت چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ دقت کنید اگر فرض کنیم $\overline{AB}=x$، آن‌وقت با توجه به شرط وجود مثلث باید داشته باشیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}\Rightarrow ۳+x>۸\Rightarrow x>۵\ \ (۲)\qquad \overset{\Delta}{ABD}:\overline{AB}<\overline{AD}+\overline{BD}\Rightarrow x<۴+۵\Rightarrow x<۹\ \ (۱)$$

پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که x باید از ۹ کوچک‌تر و از ۵ بزرگ‌تر باشد؛ در نتیجه چون x صحیح است، پس می‌تواند برابر یکی از مقادیر ۶، ۷ و ۸ باشد. البته باز هم باید چک شود که اگر x برابر هر کدام از مقادیر ۶، ۷ یا ۸ باشد، هر سه شرط وجود مثلث برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند یا نه، که اگر به جای x هر یک از مقادیر ۶، ۷ یا ۸ را قرار دهیم، می‌بینیم که هر سه شرط برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند، پس طول $\overline{AB}$ سه مقدار صحیح می‌پذیرد و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

یک بار دیگر مثال قبل را ببینید. شاید این سؤال در ذهنتان ایجاد شود که روابط (۱) و (۲) از کجا آمدند؟ جواب سؤال این است که فرمول یا روش خاصی برای نوشتن این رابطه‌ها نداریم؛ بلکه با توجه به مثلث‌ها چندتا نامساوی می‌نویسیم و بعد از بین آن‌ها به‌دردبخورترین‌ها را انتخاب کرده و به کمک آن‌ها مسئله را حل می‌کنیم. در این مسئله دو نامساوی که نوشتیم از بقیهٔ نامساوی‌ها به‌دردبخورتر بودند.

تست: چند مثلث با محیط ۱۰ و طول اضلاع صحیح می‌توان ساخت؟

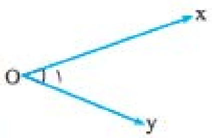
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به جدول زیر، حالت‌های مختلف طول اضلاع را نوشته و آن‌هایی که قابل‌قبول‌اند را انتخاب می‌کنیم:

طول کوچک‌ترین ضلع	مجموع طول دو ضلع دیگر (محیط = ۱۰)	حالت‌های مختلف طول دو ضلع دیگر
۱	۹	× (۸,۱) ۱+۱≯۸ ، × (۷,۲) ۲+۱≯۷ ، × (۶,۳) ۳+۱≯۶ ، × (۵,۴) ۴+۱≯۵
۲	۸	× (۲,۶) ۲+۲≯۶ ، × (۳,۵) ۲+۳≯۵ ، ✓ (۴,۴)
۳	۷	✓ (۴,۳)

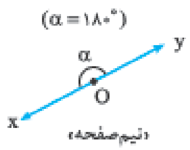
دقت کنید که طول کوچک‌ترین ضلع نمی‌تواند برابر ۴ یا مقداری بیشتر از ۴ باشد؛ چون در این صورت محیط مثلث حداقل برابر ۱۲ واحد می‌شود؛ مثل (۴,۴,۴)، در حالی که ما به دنبال مثلث‌هایی با محیط ۱۰ هستیم؛ بنابراین با توجه به جدول تنها دو مثلث وجود دارند که محیط آن‌ها برابر ۱۰ و طول اضلاع آن‌ها نیز صحیح است.

زاویه

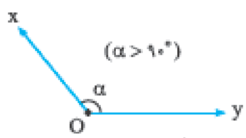


با مفهوم زاویه در سال چهارم آشنا شدید. در این‌جا اول به یادآوری نکات و تعریف‌های زاویه می‌پردازیم و بعد می‌رویم سراغ مطالب پیشرفته‌تر در مورد زاویه‌ها.

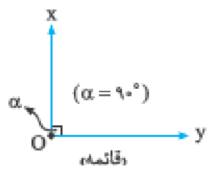
در شکل بالا زاویهٔ xOy را می‌بینید. این زاویه را می‌توان به صورت‌های $y\hat{O}x$، $\hat{O}_1$ و $\hat{O}$ نمایش داد. زاویهٔ بزرگ‌تر از 0° و کوچک‌تر از 90° را زاویهٔ تند، زاویهٔ 90° را زاویهٔ قائمه، زاویهٔ بزرگ‌تر از 90° و کوچک‌تر از 180° را زاویهٔ منفرجه و نهایتاً زاویهٔ 180° را زاویهٔ نیم‌صفحه می‌نامند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



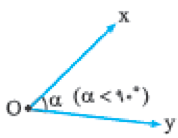
«نیم‌صفحه»



«باز ـ منفرجه»



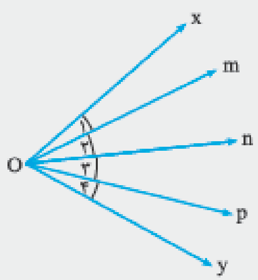
«قائمه»



«تند ـ حاده»

در همین ابتدا، شاید بد نباشد که مسئله‌های تیزهوشانی که از همین مطالب ساده در آزمون‌ها مطرح می‌شوند را بررسی کنیم، مثال زیر را ببینید:

مثال: در شکل مقابل، زاویهٔ xOy توسط چند نیم‌خط به تعدادی زاویه تقسیم شده است. اگر $x\hat{O}y < 90^\circ$، آن‌وقت تعداد کل زوایای تند شکل چندتا است؟



پاسخ: دقت کنید که در شکل $x\hat{O}y$ از همهٔ زوایای دیگر بزرگ‌تر است؛ پس چون $x\hat{O}y < 90^\circ$، نتیجه می‌گیریم مابقی زاویه‌ها هم کم‌تر از 90° هستند؛ یعنی تند هستند، بنابراین زاویه‌های حادهٔ شکل عبارت‌اند از:

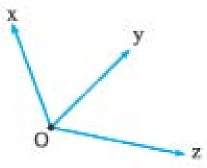
$y\hat{O}p$, $y\hat{O}n$, $y\hat{O}m$, $y\hat{O}x$, $p\hat{O}n$, $p\hat{O}m$, $p\hat{O}x$, $n\hat{O}m$, $n\hat{O}x$, $m\hat{O}x$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۱۰تا است.

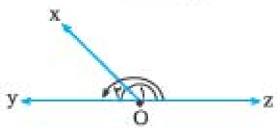
نکته: به کمک راهبرد الگوسازی، می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک زاویهٔ تند به n قسمت تقسیم شود، آن‌وقت تعداد کل زاویه‌های تند ایجادشده برابر می‌شود با $\frac{n\times(n+1)}{۲}$، مثلاً در مثال قبل چون $x\hat{O}y$ به ۴ قسمت تقسیم شده بود، تعداد کل زوایا برابر $۱۰=\frac{۴\times۵}{۲}=\frac{۴\times(۴+۱)}{۲}$ تا شد.

حالت‌های مختلف دو زاویه

دو زاویه می‌توانند نسبت به هم حالت‌های مختلفی داشته باشند که در زیر به معرفی این حالت‌ها می‌پردازیم:

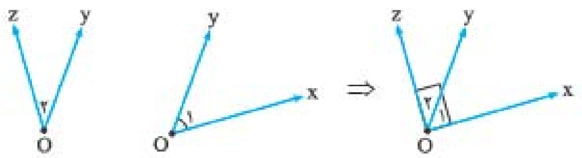


① **دو زاویهٔ مجاور:** دو زاویه‌ای که دارای رأس مشترک و یک ضلع مشترک باشند را دو زاویهٔ **مجاور** می‌نامیم؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، دو زاویهٔ $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ مجاورند.



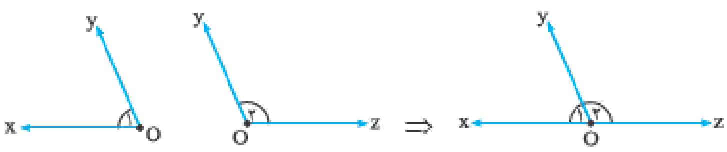
② **دو زاویهٔ مجانب:** دو زاویه‌ای که در کنار هم تشکیل زاویهٔ نیم‌صفحه می‌دهند را دو زاویهٔ **مجانب** می‌نامیم؛ مثلاً در شکل مقابل چون $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ$، پس $x\hat{O}z$ و $x\hat{O}y$ مجانب‌اند.

③ **دو زاویهٔ متمم:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر ۹۰° باشد را دو زاویهٔ **متمم** می‌نامیم؛ مثلاً در شکل‌های زیر، چون $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۹۰^\circ$، پس دو زاویهٔ $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ متمم یکدیگرند.



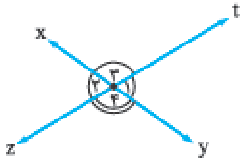
توجه: متمم زاویهٔ حادهٔ x، برابر $(۹۰-x)^\circ$ است؛ مثلاً متمم زاویهٔ ۲۰°، برابر $۷۰^\circ=۲۰-۹۰$ می‌باشد.

④ **دو زاویهٔ مکمل:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر ۱۸۰° باشد را دو زاویهٔ **مکمل** می‌نامیم؛ مثلاً در شکل زیر، چون $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ$، پس $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ مکمل یکدیگرند.



نتیجه: چون دو زاویهٔ مجانب تشکیل زاویهٔ نیم‌صفحه می‌دهند، پس مجموع آن‌ها برابر ۱۸۰° است و نتیجه آن‌که دو زاویهٔ مجانب همواره مکمل‌اند.

توجه: مکمل زاویهٔ x ($۰^\circ<x<۱۸۰^\circ$)، برابر $(۱۸۰-x)^\circ$ است؛ مثلاً مکمل زاویهٔ ۹۶°، برابر $۸۴^\circ=۹۶-۱۸۰$ است.



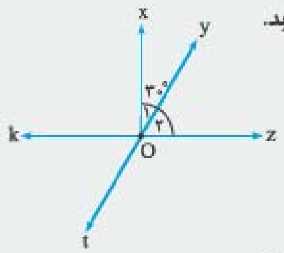
⑤ **دو زاویهٔ متقابل به رأس:** دو زاویه‌ای که یک رأس آن‌ها مشترک و اضلاع آن‌ها در امتداد یکدیگر باشند را متقابل به رأس می‌نامیم. در واقع از برخورد دو خط راست، چهار زاویه درست می‌شود که زوایای مقابل، متقابل به رأس هستند؛ مثلاً در شکل مقابل، دو زاویهٔ $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ و هم‌چنین دو زاویهٔ $\hat{O}_۳$ و $\hat{O}_۴$ متقابل به رأس‌اند.

توجه: اندازهٔ دو زاویهٔ متقابل به رأس با هم برابر است. (چرا؟)

با توجه به شکل بالا دو زاویهٔ $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۳$ مجانب‌اند؛ هم‌چنین دو زاویهٔ $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۳$ نیز مجانب‌اند، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{O}_۳\\ \hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{O}_۳\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

مثال: با توجه به شکل، اگر دو زاویهٔ $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ متمم باشند، آن‌وقت اندازهٔ زوایای خواسته‌شده را به دست آورید.



الف) $y\hat{O}z$

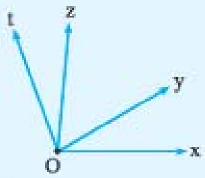
ب) $z\hat{O}t$

پ) $x\hat{O}k$

ت) $t\hat{O}k$

پاسخ: چون $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ متمم‌اند، پس $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۹۰^\circ$ و چون $\hat{O}_۱=۳۰^\circ$، بنابراین $\hat{O}_۲=۶۰^\circ$، یعنی $y\hat{O}z=۶۰^\circ$. حالا دقت کنید که دو زاویهٔ $y\hat{O}z$ و $z\hat{O}t$ مجانب‌اند؛ پس این دو زاویه مکمل‌اند؛ یعنی داریم $y\hat{O}z+z\hat{O}t=۱۸۰^\circ$ و چون $y\hat{O}z=۶۰^\circ$، بنابراین $z\hat{O}t=۱۲۰^\circ$. حالا دقت کنید که گفتیم $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۹۰^\circ$، یعنی $x\hat{O}z=۹۰^\circ$، پس دوباره با توجه به شکل، چون $x\hat{O}z$ و $x\hat{O}k$ تشکیل زاویهٔ نیم‌صفحه می‌دهند، داریم $x\hat{O}k=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ=۹۰^\circ$. نهایتاً چون دو زاویهٔ $y\hat{O}z$ و $t\hat{O}k$ متقابل به رأس‌اند، پس $t\hat{O}k=y\hat{O}z$، یعنی $t\hat{O}k=۶۰^\circ$.

تست: در شکل مقابل، داریم: $x\hat{O}z=۸۵^\circ$، $t\hat{O}y=۸۰^\circ$ و $x\hat{O}t=۱۱۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ zOy کدام است؟



۱) ۲۵° ۲) ۳۵° ۳) ۴۵° ۴) ۵۵°

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل و اندازهٔ زوایا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x\hat{O}z=۸۵^\circ \Rightarrow x\hat{O}y+y\hat{O}z=۸۵^\circ \\ t\hat{O}y=۸۰^\circ \Rightarrow t\hat{O}z+z\hat{O}y=۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \underbrace{x\hat{O}y+y\hat{O}z+t\hat{O}z}_{x\hat{O}t}+z\hat{O}y=۸۰^\circ+۸۵^\circ \Rightarrow x\hat{O}t+z\hat{O}y=۱۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۱۰^\circ+z\hat{O}y=۱۶۵^\circ \Rightarrow z\hat{O}y=۵۵^\circ$$

تست: اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو زاویهٔ مکمل باشند، به طوری که $\hat{A}$ از ۲ برابر $\hat{B}$ به اندازهٔ ۶۰° کم‌تر باشد، آن‌وقت متمم زاویهٔ B کدام است؟

۱) ۱۰° ۲) ۲۰° ۳) ۳۰° ۴) ۴۰°

پاسخ: گزینه ۱ چون $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مکمل‌اند، پس $\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$. از طرف دیگر چون $\hat{A}$ از ۲ برابر $\hat{B}$ به اندازهٔ ۶۰° کم‌تر است، پس باید داشته باشیم $\hat{A}=۲\hat{B}-۶۰$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}=۲\hat{B}-۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{۲\hat{B}-۶۰^\circ}_{\hat{A}}+\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\hat{B}=۲۴۰^\circ \xrightarrow{(\div ۳)} \hat{B}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_{\text{متمم}}=۹۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰^\circ$$

تست: حاصل‌جمع سه زاویهٔ A، B و C به اندازه ۳۰° از زاویهٔ نیم‌صفحه بیشتر است. اگر $\hat{B}$ به اندازهٔ ۳۰° از متمم $\hat{A}$ بیشتر باشد و $\hat{C}$ نیز به اندازهٔ ۱۰° از مکمل $\hat{B}$ کم‌تر باشد، آن‌وقت حاصل‌جمع متمم $\hat{A}$، مکمل $\hat{B}$ و ۲۰ درجه بیشتر از مکمل مکمل $\hat{C}$ کدام است؟

۱) ۲۶۰° ۲) ۲۳۰° ۳) ۲۲۰° ۴) ۲۱۰°

پاسخ: گزینه ۱ چون $\hat{B}$، ۳۰° از متمم $\hat{A}$ بیشتر است، پس باید داشته باشیم:

$$\hat{B}=\underbrace{(۹۰^\circ-\hat{A})}_{\hat{A}_{\text{متمم}}}+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ-\hat{A} \quad (۱)$$

از طرف دیگر چون $\hat{C}$ به اندازهٔ ۱۰° از مکمل $\hat{B}$ کم‌تر است، پس داریم:

$$\hat{C}=(۱۸۰^\circ-\hat{B})-۱۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۷۰^\circ-\hat{B} \xrightarrow{(۱)} \hat{C}=۱۷۰^\circ-(۱۲۰^\circ-\hat{A})=۱۷۰^\circ-۱۲۰^\circ+\hat{A} \Rightarrow \hat{C}=۵۰^\circ+\hat{A} \quad (۲)$$

حالا چون زاویهٔ نیم‌صفحه برابر ۱۸۰° است، پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ \Rightarrow \cancel{\hat{A}}+\underbrace{۱۲۰^\circ-\cancel{\hat{A}}}_{\hat{B}}+\underbrace{۵۰^\circ+\hat{A}}_{\hat{C}}=۲۱۰^\circ \Rightarrow ۱۷۰^\circ+\hat{A}=۲۱۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۴۰^\circ \Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=۱۲۰^\circ-۴۰^\circ=۸۰^\circ\\ \hat{C}=۵۰^\circ+۴۰^\circ=۹۰^\circ\end{cases}$$

پس با توجه به اندازه‌های $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\text{متمم } \hat{A}=۹۰^\circ-\hat{A}=۹۰^\circ-۴۰^\circ=۵۰^\circ$$

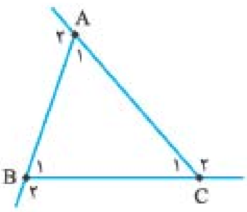
$$\text{مکمل } \hat{B}=۱۸۰^\circ-\hat{B}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

$$\text{مکمل } \hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{C} \Rightarrow \text{مکمل مکمل } \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۱۸۰^\circ-\hat{C})=\cancel{۱۸۰^\circ}-\cancel{۱۸۰^\circ}+\hat{C}=\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \text{۲۰ درجه بیشتر از مکمل } \hat{C}=۹۰+۲۰=۱۱۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل‌جمع موردنظر}} ۵۰+۱۰۰+۱۱۰=۲۶۰$$

زوایا در مثلث



هر مثلث سه زاویهٔ داخلی و سه زاویهٔ خارجی دارد. در شکل مقابل، زاویه‌های $\hat{A}_۱$، $\hat{B}_۱$ و $\hat{C}_۱$ زوایای داخلی و زاویه‌های $\hat{A}_۲$، $\hat{B}_۲$ و $\hat{C}_۲$ نیز زوایای خارجی هستند.

در هر مثلث دلخواه ABC روابط زیر همواره برقرارند:

۱) مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است؛ یعنی $\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$.

۲) هر زاویهٔ خارجی مکمل زاویهٔ داخلی‌اش است؛ یعنی:

الف) $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ$ **ب)** $\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ$ **پ)** $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ$

۳) هر زاویهٔ خارجی برابر حاصل‌جمع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش است؛ یعنی:

الف) $\hat{A}_۲=\hat{B}_۱+\hat{C}_۱$ **ب)** $\hat{B}_۲=\hat{A}_۱+\hat{C}_۱$ **پ)** $\hat{C}_۲=\hat{A}_۱+\hat{B}_۱$

اما چرا هر زاویهٔ داخلی برابر حاصل‌جمع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش است؟ رابطهٔ اول را اثبات می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱\\ \hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{B}_۱+\hat{C}_۱$$

تست: اندازهٔ سه زاویهٔ مثلثی با اعداد ۳، ۷ و ۸ متناسب‌اند. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی این مثلث چه‌قدر است؟

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۱۰° ۴) ۱۷۰°

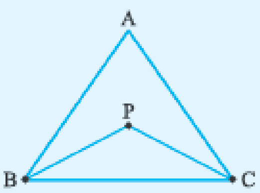
پاسخ: گزینه ۱ فرض کنید زوایای این مثلث به ترتیب $۳x$، $۷x$ و $۸x$ درجه هستند؛ در این صورت باید داشته باشیم:

$$۳x+۷x+۸x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸x=۱۸۰^\circ \xrightarrow{(\div ۱۸)} x=۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زوایا: } ۳x=۳\times۱۰^\circ=۳۰^\circ\ ,\ ۷x=۷\times۱۰^\circ=۷۰^\circ\ ,\ ۸x=۸\times۱۰^\circ=۸۰^\circ$$

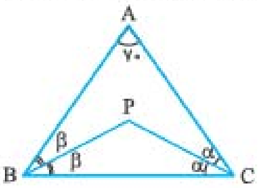
حالا دقت کنید که کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی، بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی را دارد. پس با توجه به زاویه‌ها، بزرگ‌ترین زاویه خارجی مثلث برابر است با $۱۸۰^\circ-۳۰^\circ=۱۵۰^\circ$.

تست: در شکل زیر، اندازهٔ زاویهٔ BAC برابر ۷۰° است. اندازهٔ زاویهٔ BPC چه‌قدر است؟ (PB و PC به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند.)



۱) ۱۰۵°
۲) ۱۱۵°
۳) ۱۲۵°
۴) ۱۳۵°

پاسخ: گزینه ۳ چون PC نیمساز زاویهٔ C است، پس فرض می‌کنیم $A\hat{C}P = P\hat{C}B = \alpha$، به همین ترتیب چون PB نیمساز $A\hat{B}C$ است، پس فرض می‌کنیم $A\hat{B}P = P\hat{B}C = \beta$.



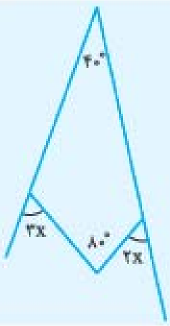
حالا توجه کنید که چون $\hat{A}$ در مثلث ABC برابر ۷۰° است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷۰^\circ+۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۱۱۰^\circ \xrightarrow{(\div ۲)} \alpha+\beta=۵۵^\circ$$

اکنون مثلث PBC را ببینید. در این مثلث داریم:

$$P\hat{B}C+B\hat{C}P+B\hat{P}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta+\alpha+B\hat{P}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵۵^\circ+B\hat{P}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{P}C=۱۲۵^\circ$$

تست: با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ x برابر است با ....



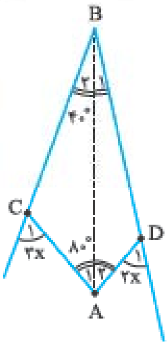
۱) ۲۴°

۲) ۳۶°

۳) ۱۲°

۴) ۱۸°

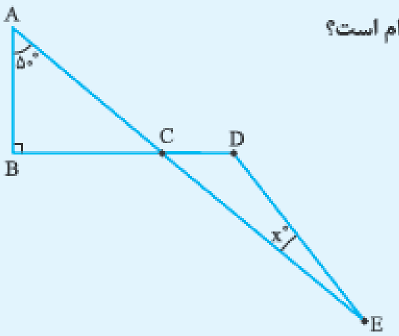
پاسخ: گزینه ۱ به شکل مقابل دقت کنید. اگر از A به B وصل کنیم، آن‌وقت دو مثلث ABD و ABC به وجود می‌آیند که به ترتیب $\hat{D}_۱$ و $\hat{C}_۱$ زوایای خارجی آن‌ها هستند؛ پس چون هر زاویهٔ خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش است، نتیجه می‌گیریم:



$$\left.\begin{aligned} &\overset{\Delta}{ABD}: \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱+\hat{A}_۲ \\ &\overset{\Delta}{ABC}: \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱+\hat{B}_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\hat{C}_۱+\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{B}_۲ = (\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)+(\hat{A}_۱+\hat{A}_۲) = C\hat{B}D + C\hat{A}D \\ &= ۴۰^\circ+۸۰^\circ = ۱۲۰^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ۳x+۲x=۱۲۰^\circ \Rightarrow ۵x=۱۲۰^\circ \xrightarrow{(\div ۵)} x=۲۴^\circ$$

تست: در شکل مقابل، نصف مکمل زاویهٔ D از دو برابر متمم زاویهٔ A، ۵۵° کم‌تر است. مقدار x کدام است؟



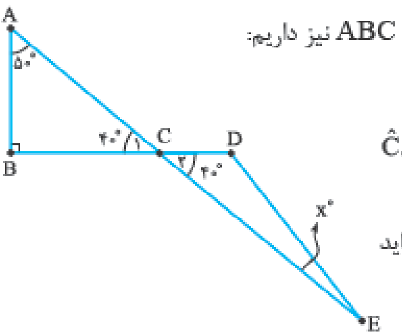
۱) ۱۰°

۲) ۲۰°

۳) ۳۰°

۴) ۴۰°

پاسخ: گزینه ۱ اول دقت کنید که چون $\hat{C}_۱$ و $\hat{C}_۲$ متقابل به رأس هستند، پس $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$. در مثلث ABC نیز داریم:



$$\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B}) \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - \overset{۱۴۰^\circ}{\cancel{(۹۰^\circ+۵۰^\circ)}} \Rightarrow \hat{C}_۱=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۲=۴۰^\circ$$

حالا چون دو برابر متمم $\hat{A}$، برابر $۲\times(۹۰^\circ-\hat{A}) = ۲\times \overset{۴۰^\circ}{\cancel{(۹۰^\circ-۵۰^\circ)}} = ۸۰^\circ$ است، پس نصف مکمل $\hat{D}$ باید برابر $۸۰^\circ-۵۵^\circ=۲۵^\circ$ باشد؛ پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{۱۸۰^\circ-\hat{D}}{۲}=۲۵^\circ \xrightarrow{(\times ۲)} ۱۸۰^\circ-\hat{D}=۵۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۱۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{CDE}: \hat{E}=x=۱۸۰^\circ-(\hat{C}_۲+\hat{D}) = ۱۸۰^\circ - \overset{۱۷۰^\circ}{\cancel{(۴۰^\circ+۱۳۰^\circ)}} = ۱۰^\circ$$

سؤالات چهارگزینه‌ای

تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها

۱- در شکل روبه‌رو چند نیم‌خط موجود است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۲- اگر روی خطی پنج نقطه قرار داشته باشد، آن‌وقت تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با .... (تیمز)

۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳- چند نقطه روی یک خط تشکیل ۲۰تا نیم‌خط می‌دهند. این نقاط تشکیل چند پاره‌خط می‌دهند؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۱۹۰ ۴) ۴۰

۴- روی خطی ۹۶ نقطه قرار دارند. اگر چپ‌ترین نقطه و راست‌ترین نقطهٔ روی خط را حذف کنیم، چند پاره‌خط حذف می‌شوند؟

۱) ۱۹۲تا ۲) ۱۹۱تا ۳) ۱۹۰تا ۴) ۱۸۹تا

۵- تعدادی نقطه روی یک خط مشخص می‌کنیم. اگر تعداد پاره‌خط‌هایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خط‌ها باشد، با قراردادن سه نقطه بیشتر از دو برابر این نقاط روی یک خط، چند نیم‌خط به دست می‌آید؟

۱) ۵۶تا ۲) ۵۸تا ۳) ۶۰تا ۴) ۶۲تا

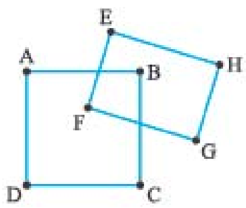
۶- چند نقطه روی یک خط قرار دارند، به طوری که اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌هایی که ایجاد می‌کنند، پنج برابر تعداد این نقاط است. اگر یک نقطه به این نقاط اضافه کنیم، چند پاره‌خط جدید تولید می‌شود؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۷- روی خطی ۱۶ نقطه موجود است. اگر دو نقطه به این نقاط اضافه کنیم، به تعداد کل پاره‌خط‌ها xتا اضافه می‌شود. از این ۱۶ نقطه چند نقطه برداریم تا تعداد پاره‌خط‌های حذف‌شده از دو برابر x یکی کم‌تر شود؟

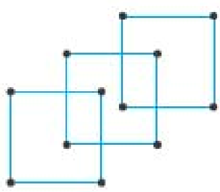
۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۸- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟



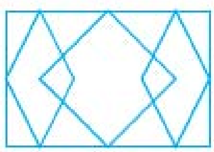
۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷

۹- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۸
۴) ۳۲

۱۰- تعداد پاره‌خط‌های موجود در شکل مقابل برابر است با ....



۱) ۵۴ ۲) ۵۵
۳) ۵۶ ۴) ۵۷

طول پاره‌خط

۱۱- پاره‌خط AB به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. کدام گزینه نادرست است؟ *(سیزدهمین دورهٔ مسابقات علمی اصفهان ۹۴-۹۳)*

۱) $\overline{AD}=\frac{۱}{۲}\overline{DB}$ ۲) $\overline{AC}=\frac{۱}{۶}\overline{AB}$

۳) $\overline{AF}=۴\overline{DE}$ ۴) $\overline{CE}=\frac{۲}{۳}\overline{AB}$

۱۲- پاره‌خط AB به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. کدام گزینه نادرست است؟ *(پیشرفت تحصیلی یزد ۹۶-۹۵)*

۱) $AE=۳AC$ ۲) $CB=\frac{۲}{۳}DB$

۳) $(AD-CD)+CE=AE$ ۴) $EB=\frac{۱}{۴}AB$

۱۳- با توجه به شکل، چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟ (پاره‌خط AF به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است.) *(پیشرفت تحصیلی سمپاد ۹۵)*

الف) $\overline{AC}=\frac{۱}{۲}\overline{BF}$ ب) $\overline{AD}-\overline{BD}=\overline{AE}-\overline{DE}$ پ) $\frac{۲}{۳}\overline{BE}=\frac{۲}{۵}\overline{AF}$

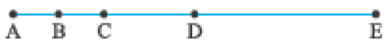
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴- در شکل زیر طول پاره‌خط‌های کوچک با هم برابر است. در این شکل اندازهٔ پاره‌خط AC برابر $۲\overline{AB}$ است. اندازهٔ چند پاره‌خط دیگر برابر $۲\overline{AB}$ است؟ *(آزمون پیشرفت تحصیلی اصفهان ۹۵-۹۴)*

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) ۵

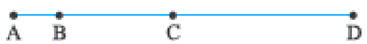
۱۵- در شکل زیر، نقطهٔ D وسط پاره‌خط AE و نقطهٔ C وسط $\overline{AD}$ و نقطهٔ B وسط $\overline{AC}$ است. اگر $\overline{AE}=۱۶\ cm$، مجموع طول همهٔ پاره‌خط‌های موجود در شکل چند سانتی‌متر است؟ *(المپیاد ریاضی خراسان ۹۵)*



۱) ۷۶ ۲) ۶۸

۳) ۷۲ ۴) ۸۰

۱۶- در شکل زیر اگر $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{۵}{۸}$، در این صورت $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ کدام است؟ *(آفریقای جنوبی مرحلهٔ دوم)*



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۴}{۵}$ ۵) $\frac{۲}{۳}$

۱۷- نقطه‌های A ،B ،C و D روی یک خط راست قرار دارند و $\overline{AB}=۱۰$، $\overline{AC}=۳$، $\overline{BD}=۵$ و $\overline{CD}=۸$. طول پاره‌خط BC چه‌قدر است؟ *(المپیاد هندسهٔ ایران ۹۵)*

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸

۴) ۱۳ ۵) ۱۸

۱۸- نقاط A ،B ،C و D روی یک خط راست طوری قرار گرفتند که $\overline{AB}=۱۳$، $\overline{BC}=۱۱$، $\overline{CD}=۱۴$ و $\overline{DA}=۱۲$. فاصلهٔ بین دورترین نقطه‌ها کدام است؟ *(کانگورو)*

۱) ۱۴ ۲) ۳۸ ۳) ۵۰

۴) ۲۵ ۵) هیچ‌کدام

۱۹- چهار نقطهٔ A،B،C و D روی خطی راست قرار دارند. اگر $\overline{AB}=۱۳$، $\overline{CD}=۱۴$ و $\overline{DA}=۱۲$. آن‌وقت بیشترین فاصلهٔ بین دو نقطه چه‌قدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۳۹

۲۰- دو نقطهٔ B و C روی پاره‌خط $\overline{AD}$ قرار دارند. طول $\overline{AB}$، ۴ برابر طول $\overline{BD}$ و طول AC، ۹ برابر طول $\overline{CD}$ است. طول $\overline{BC}$ چند برابر طول $\overline{AD}$ است؟ *(آمریکا)*

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۲۱- پنج نقطهٔ A، D، B، D و E طوری قرار گرفته‌اند که $\overline{AC}=5$، $\overline{AE}=4$، $\overline{BC}=14$، $\overline{BD}=2$ و $\overline{DE}=3$. فاصلهٔ بین وسط پاره‌خط‌های $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ چه‌قدر است؟ (Regatta)

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۲۲- چهار نقطهٔ A، B، C و D روی خطی قرار دارند به طوری که $\overline{AC}>\overline{AB}$، $\overline{AD}>\overline{AC}$، $\overline{BC}>\overline{BD}$ و $\overline{CD}>\overline{AB}$. این نقاط از چپ به راست با چه ترتیبی ظاهر می‌شوند؟

۱) DACB ۲) CADB ۳) DBAC ۴) CDAB

۲۳- پنج نقطه روی یک خط راست هستند. علی فاصلهٔ بین هر دو جفت از این نقطه‌ها را اندازه گرفت و به ترتیب صعودی، عددهای ۲، ۵، ۶، ۸، ۹، k، ۱۵، ۱۷، ۲۰ و ۲۲ را به دست آورد. مقدار k چه‌قدر است؟ (کانگورو ۲۰۱۵)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲

۴) ۱۳ ۵) ۱۴

۲۴- نقاط A، B و C طوری قرار دارند که $\overline{AB}=5$، $\overline{AC}=9$ و $\overline{BC}=14$. اگر D نقطه‌ای باشد که فاصلهٔ آن از A برابر نصف فاصله‌اش از C باشد، آن‌وقت مجموع همهٔ مقادیر ممکن برای حاصل‌جمع $\overline{AD}+\overline{BD}$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۲۵- نقاط A، B، C، D، E و F را روی خط d چنان در نظر گرفته‌ایم که $\overline{AB}=2\overline{BC}=3\overline{CD}=4\overline{DE}=5\overline{EF}$. اگر این نقاط به ترتیب از چپ به راست روی خط قرار گیرند و ضمناً $\overline{AC}=90$ و هم‌چنین نقطهٔ X در سمت راست F قرار گیرد. طول $\overline{XF}$ چه‌قدر باشد تا طول $\overline{XD}$ سه برابر طول $\overline{EC}$ باشد؟

۱) ۷۵ ۲) ۷۶ ۳) ۷۷ ۴) ۷۸

شرط وجود مثلث

۲۶- کدام دسته از اعداد زیر، اندازه‌های سه ضلع مثلث می‌توانند باشند؟ (تیمز)

۱) ۲،۳،۵ ۲) ۴،۲/۵،۱/۵ ۳) ۷،۳،۵ ۴) ۸،۴،۳

۲۷- طول اضلاع مثلثی x، ۳/۵ و ۸ است. x کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟ (سنجه ۹۴)

۱) ۷ ۲) ۹/۰۶ ۳) ۱۱

۴) $\frac{35}{3}$ ۵) ۸

۲۸- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم قرار دارند. چند نقطه مانند C می‌توان پیدا کرد که از A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر و از B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر قرار داشته باشند؟ (تیمز)

۱) دو نقطه ۲) یک نقطه ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۲۹- چند مثلث به طول اضلاع صحیح موجود هستند که محیط آن‌ها برابر ۱۰ شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

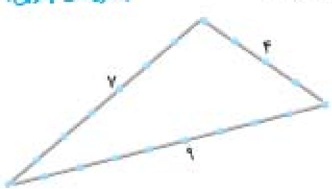
۳۰- چند مثلث متساوی‌الساقین با حداکثر ۱۳ چوب‌کبریت می‌توان ساخت؟ (پیشرفت تحصیلی سمپاد ۹۵)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۳۱- ۲۰ چوب‌کبریت را به شکل یک مثلث چیده‌ایم. با این تعداد چوب‌کبریت، چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟ (آفریقای جنوبی)

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶

۴) ۷ ۵) ۱۰



۳۲- با توجه به ادعاهای زیر، کدام گزینه صحیح است؟ *(پیشرفت تحصیلی استعدادهای درخشان ۹۳)*

ادعای اول: تمام مثلث‌های با محیط ۷ و اندازهٔ اضلاع صحیح، متساوی‌الساقین هستند.

ادعای دوم: فقط دو مثلث با محیط ۹ و اندازهٔ اضلاع صحیح وجود دارد.

۱) ادعای اول درست و ادعای دوم نادرست است.　　۲) ادعای اول و دوم هر دو درست هستند.

۳) ادعای اول نادرست و ادعای دوم درست است.　　۴) ادعای اول و دوم هر دو نادرست هستند.

۳۳- تعداد مثلث‌های مختلف‌الاضلاعی که ضلع‌های آن‌ها عددهای صحیح و محیط هر یک کم‌تر از ۱۳ باشد، برابر است با ....

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴　　*(استعدادهای درخشان)*

۳۴- از میان همهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین به طول ساق ۷ که طول قاعده‌شان با یک عدد صحیح بیان می‌شود، مثلثی را انتخاب کرده‌ایم که بیشترین محیط را دارد. محیط این مثلث برابر است با .... *(کانگورو)*

۱) ۱۴　　۲) ۱۵　　۳) ۲۱

۴) ۲۷　　۵) ۲۸

۳۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، می‌دانیم $\overline{AB} = \overline{AC} = ۵$ و $B\hat{A}C > ۶۰^\circ$. طول محیط این مثلث عددی صحیح است. چند مثلث از این نوع وجود دارد؟ *(کانگورو)*

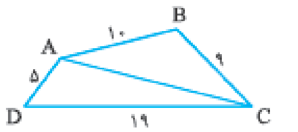
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳

۴) ۴　　۵) ۵

۳۶- مصطفی می‌خواهد مثلث متساوی‌الساقینی رسم کند که اولاً طول ساق‌هایش ۶ واحد، ثانیاً اندازهٔ رأسش بیشتر از ۶۰° باشد و ثالثاً طول قاعده‌اش عددی طبیعی باشد. او چند مثلث مختلف می‌تواند بکشد؟ *(کانگورو)*

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

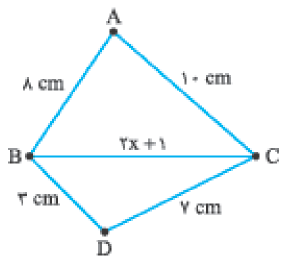
۳۷- در شکل مقابل، طول $\overline{AC}$ کدام‌یک از گزینه‌ها ممکن است باشد؟



۱) ۱۰　　۲) ۱۳

۳) ۱۵　　۴) ۲۰

۳۸- با توجه به شکل مقابل، اگر x عددی صحیح و مثبت باشد، آن‌وقت مجموع مقادیری که به جای x می‌توان قرار داد برابر است با .... *(آفریقای جنوبی ۲۰۱۰)*



۱) ۱۰　　۲) ۹　　۳) ۸

۴) ۷　　۵) ۶

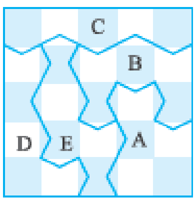
۳۹- طول ضلع‌های $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ از چهار ضلعی محدب ABCD به ترتیب برابر ۱ و ۴ است. طول قطر BD نیز برابر ۲ است. اگر BD، چهارضلعی را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کند، محیط چهارضلعی چه‌قدر است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۰　　۴) ۱۱

۴۰- روباه مکار ۱۰۰ تکه چوب دارد که طول همهٔ آن‌ها با هم فرق دارد. او ادعا می‌کند که با هر سه‌تایی از این چوب‌ها می‌تواند مثلث درست کند. پینوکیو قصد دارد درستی ادعای او را با امتحان‌کردن چوب‌ها و ساختن مثلث‌های مختلف مشخص کند. حداقل چند بار باید آزمایش کند تا از درستی یا نادرستی ادعای روباه مطمئن شود؟

۱) ۱۰۰ بار　　۲) ۹۹×۱۰۰ بار　　۳) تقریباً $\frac{۱۰۰}{۳}$ بار　　۴) ۱ بار

۴۱- مربعی ۵×۵ را مانند شکل مقابل به پنج قسمت تقسیم کرده‌ایم. هر برش، دنباله‌ای از شکل‌های به صورت ﹀ است که البته همگی با هم یکسان هستند. محیط کدام قسمت بیشتر است؟ *(انگلستان ۲۰۱۳)*



۱) B　　۲) C

۳) D　　۴) E

طول پاره‌خط در شکل‌های هندسی

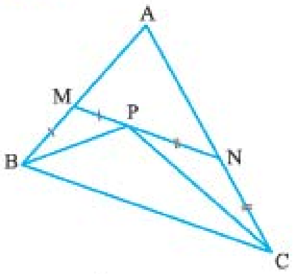
۴۲- طول ضلع‌های مثلثی ۶، ۱۰ و ۱۱ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی داریم که محیط آن با محیط این مثلث برابر است. طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع چه‌قدر است؟ *(کانگورو ۲۰۱۵)*

۱) ۱۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹ ۵) ۶

۴۳- در مثلث ABC، AB = ۵ ، BC = ۶ و AC = ۷ . دو حشره با هم و در جهت‌های مخالف از رأس A شروع به حرکت روی اضلاع مثلث می‌کنند، می‌دانیم سرعت این دو در طول مسیر یکسان است و اولین بار در نقطه‌ای مانند D روی BC به هم می‌رسند. طول BD کدام است؟ *(آمریکا)*

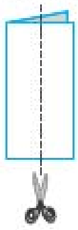
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴- می‌دانیم در شکل مقابل، AB = ۱۲ و AC = ۲۰ . در این صورت محیط مثلث AMN چه‌قدر است؟



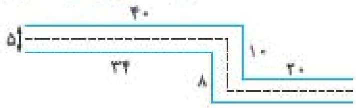
۱) ۳۰
۲) ۳۲
۳) ۳۴
۴) ۳۶

۴۵- کاغذی مربعی به طول ضلع ۴ را از وسط تا کرده و سپس هر دو لایه را موازی با خط تا بریده‌ایم، در نتیجه سه مستطیل به دست آمده است. نسبت محیط یکی از مستطیل‌های کوچک جدید به مستطیل بزرگ جدید چه‌قدر است؟ *(آمریکا)*



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۶- طول خط‌چین شکسته در وسط راه، برحسب میلی‌متر برابر است با .... *(آخریقای جنوبی مرحلهٔ دوم)*

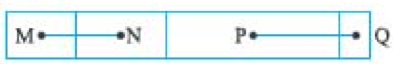


۱) ۶۷ ۲) ۶۸ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۹ ۵) ۷۰

۴۷- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB = ۲BC . اگر محیط $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۲۰۰ میلی‌متر باشد، آن‌گاه طول AC چند میلی‌متر است؟ *(آخریقای جنوبی مرحلهٔ دوم)*

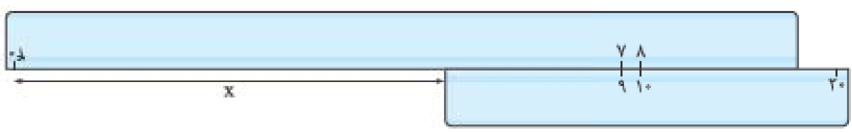
۱) ۱۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰ ۵) ۸۰

۴۸- کامبیز نواری کاغذی به طول ۳۶ سانتی‌متر را به ۴ مستطیل دلخواه، مطابق شکل زیر تقسیم کرده و سپس وسط این مستطیل‌ها را به هم وصل کرده است. مجموع طول خط‌های MN و PQ چه‌قدر است؟ *(کانگورو)*



۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۴۹- دو خط‌کش که پایینی ۲۰ سانتی‌متر و بالایی ۴۰ سانتی‌متر است، روی هم قرار گرفته‌اند. با توجه به شکل، فاصلهٔ مجهول x برابر است با ....



۱) ۱۶ cm
۲) ۱۸ cm
۳) ۱۹ cm
۴) ۱۷ cm