

ریاضی لا أم شهاب

حمیدرضا بیات
مرتضی خمایی ابدی
کیان کریمی خراسانی



پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۷م شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۳۰ پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی در انتهای کتاب؛
- پاسخ‌نامه تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای در جلد دوم کتاب؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها به تمرین‌های دشوار (☆) و تمرین‌های خیلی دشوار (☆☆)

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها لیلی میرزایی و حمیده نوروزی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم رضیه صفریان که زحمت ترسیم شکل‌ها را بر عهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

bayat@mobtakeran.com

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادها:

درس سوم: مقدار عددی یک عبارت جبری ۵۰

درس چهارم: معادله ۵۱

تمرین‌ها ۵۴

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۵۹

فصل ۴: هندسه و استدلال ۶۳

درس اول: روابط بین پاره‌خطها ۶۴

قضیهٔ حمار ۶۶

درس دوم: روابط بین زاویه‌ها ۶۷

چندضلعی‌های محدب (کوژ) و مقعر (کاو) ۷۱

درس سوم: تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن و دوران) ۷۲

درس چهارم: شکل‌های مساوی (هم‌نهشت) ۷۶

هم‌نهشتی ۷۶

اجزای متناظر ۷۷

تمرین‌ها ۸۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۹۴

فصل ۵: شمارنده‌ها و اعداد اول ۹۹

درس اول: عدد اول ۱۰۰

درس دوم: شمارندهٔ اول ۱۰۰

شمارنده (مقسوم‌علیه) ۱۰۰

تجزیه ۱۰۲

تجزیه به روش رسم نمودار درختی ۱۰۲

روش دیگری برای تجزیهٔ اعداد ۱۰۴

درس سوم: بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک ۱۰۴

به‌دست آوردن ب.م.م به کمک مقسوم‌علیه‌ها ۱۰۴

به‌دست آوردن ب.م.م به کمک تجزیه ۱۰۵

درس چهارم: کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۰۷

به‌دست آوردن ک.م.م به کمک مضرب‌ها ۱۰۷

به‌دست آوردن ک.م.م به کمک تجزیه ۱۰۸

تمرین‌ها ۱۱۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۱۴

فصل ۱: راهبردهای حل مسئله ۷

راهبرد رسم شکل ۸

راهبرد الگوسازی (تفکر نظام‌دار) ۹

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب ۱۰

راهبرد الگویابی ۱۱

راهبرد حدس و آزمایش ۱۲

راهبرد زیر مسئله ۱۲

راهبرد حل مسئله ساده‌تر ۱۴

راهبرد روش‌های نمادین (مدل‌سازی) ۱۵

تمرین‌ها ۱۶

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۳

فصل ۲: عددهای صحیح ۲۷

درس اول: معرفی عددهای علامت‌دار ۲۸

قرینهٔ یک عدد ۲۸

مقایسهٔ عددهای صحیح ۲۹

درس دوم: جمع و تفریق عددهای صحیح (۱) ۳۱

جمع عددهای صحیح ۳۱

تفریق عددهای صحیح ۳۲

درس سوم: جمع و تفریق عددهای صحیح (۲) ۳۳

خاصیت جابه‌جایی ۳۵

تقریب ۳۶

ضرب و تقسیم عددهای صحیح ۳۷

تمرین‌ها ۳۹

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۴۲

فصل ۳: جبر و معادله ۴۵

درس اول: الگوهای عددی ۴۶

متغیر ۴۶

درس دوم: عبارات جبری ۴۸

جمع و تفریق جمله‌ها ۴۸

ضرب یک عدد در یک جمله ۴۹

۱۵۸..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ۸: بردار و مختصات ۱۶۱

۱۶۲..... درس اول: پاره‌خط جهت‌دار

۱۶۳..... درس دوم: بردارهای مساوی و قرینه

۱۶۴..... درس سوم: مختصات

۱۶۴..... مختصات نقاط در ناحیه‌های مختلف

۱۶۵..... نقاط روی محورها

۱۶۶..... نقاط روی نیمسازها

۱۶۷..... قرینه یک نقطه نسبت به محورها

۱۶۸..... قرینه یک نقطه نسبت به مبدأ مختصات

۱۶۹..... قرینه یک نقطه نسبت به نیمسازها

۱۷۰..... نقطه وسط یک پاره‌خط

۱۷۱..... قرینه یک نقطه نسبت به نقطه‌ای دیگر

۱۷۳..... درس چهارم: بردار انتقال

۱۷۶..... تمرین‌ها

۱۸۱..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ۹: آمار و احتمال ۱۸۵

۱۸۶..... درس اول: جمع‌آوری و نمایش داده‌ها

۱۸۷..... درس دوم: نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها

۱۸۹..... درس سوم: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱۸۹..... پیشامد

۱۹۰..... احتمال

۱۹۳..... درس چهارم: احتمال و تجربه

۱۹۴..... تمرین‌ها

۱۹۹..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخنامه کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۳

فصل ۶: سطح و حجم ۱۱۷

۱۱۸..... درس اول: حجم‌های هندسی

۱۱۹..... نمای حجم‌ها

۱۲۱..... درس دوم: محاسبه حجم‌های منشوری

۱۲۳..... درس سوم: مساحت جانبی و کل

۱۲۵..... درس چهارم: حجم و سطح

۱۲۷..... تمرین‌ها

۱۳۲..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ۷: توان و جذر ۱۳۷

۱۳۸..... درس اول: تعریف توان

۱۴۰..... مجذور (مربع) یک عدد

۱۴۰..... مکعب یک عدد

۱۴۱..... درس دوم: محاسبه عبارت توان‌دار

۱۴۲..... تعیین علامت عبارت‌های توان‌دار

۱۴۲..... مقایسه اعداد توان‌دار

۱۴۳..... بسط اعداد

۱۴۳..... رشد اعداد توان‌دار

۱۴۴..... درس سوم: ساده کردن عبارت‌های توان‌دار

۱۴۴..... قوانین ضرب اعداد توان‌دار

۱۴۶..... قوانین تقسیم اعداد توان‌دار

۱۴۷..... تجزیه یک عدد

۱۴۸..... رقم یکان اعداد توان‌دار

۱۴۹..... درس چهارم: جذر و ریشه

۱۵۰..... جذرگیری

۱۵۱..... جذر اعداد توان‌دار

۱۵۱..... جذرگیری به کمک تجزیه

۱۵۴..... تمرین‌ها



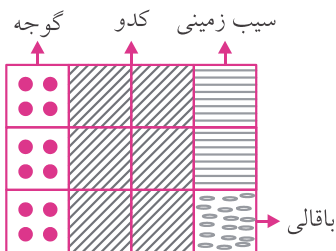
فصل ۱

راهبردهای حل مسئله

گاهی اوقات کشیدن یک شکل حل مسئله را بسیار ساده‌تر می‌کند.

مثال: کوکب خانم در $\frac{1}{4}$ از باغچه خود گوجه کاشت. در $\frac{2}{3}$ از باقیمانده باغچه کدو کاشت. در $\frac{2}{3}$ از باقیمانده باغچه سیب‌زمینی کاشت و در بقیه باغچه باقالی کاشت. او در چه کسری از باغچه خود باقالی کاشته است؟

پاسخ: با توجه به شکلی که رسم کرده‌ایم، او در $\frac{1}{12}$ زمین باقالی کاشته است.

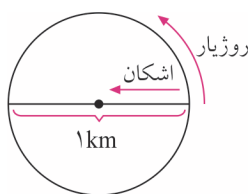


مثال: اشکان و روزیار با هم مسابقه می‌دهند که چه کسی زودتر به آن طرف دریاچه می‌رسد. دریاچه به شکل دایره است و قطر آن ۱ کیلومتر است. روزیار دور دریاچه شروع به دویدن می‌کند و اشکان هم‌زمان به درون آب می‌پرد و تصمیم می‌گیرد مسیر را شنا کند تا مسافت کم‌تری را بپیماید. اگر سرعت شنا کردن اشکان برابر نصف سرعت دویدن روزیار باشد، چه کسی مسابقه را می‌برد؟

پاسخ: مسافتی که اشکان باید شنا کند قطر دریاچه است، یعنی ۱ کیلومتر. مسافتی که

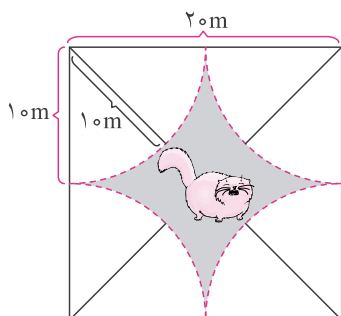
روزیار باید بدود نصف محیط دریاچه است، یعنی $\frac{1 \times 3.14}{2} = 1.57$ کیلومتر.

سرعت دویدن روزیار دو برابر سرعت شنا کردن اشکان است. اما فاصله‌ای که باید بپیماید کم‌تر از دو برابر فاصله‌ای است که اشکان باید بپیماید. پس روزیار زودتر می‌رسد و مسابقه را می‌برد.

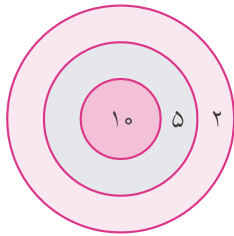


مثال: گربه‌ای بیچاره از پنجره اتاق به درون حیاطی مربع شکل به ضلع ۲۰ متر می‌افتد. چهار سگ با طناب‌هایی به طول ۱۰ متر به چهار گوشه این حیاط بسته شده‌اند. آیا جایی در حیاط وجود دارد که گربه بیچاره از دست سگ‌ها در امان باشد؟

پاسخ: طول طناب‌ها ۱۰ متر است، در نتیجه هر سگ می‌تواند تا شعاع ۱۰ متری خود حرکت کند. پس منطقه‌ای که در شکل رنگی شده است، منطقه‌ای امن برای گربه است و هیچ سگی نمی‌تواند به آن وارد شود!



گاهی اوقات لازم است همهٔ حالت‌های ممکن برای جواب یک مسئله را بررسی کنیم. لازم است این حالات را بر اساس نظم و ترتیبی خاص بنویسیم تا مطمئن باشیم هیچ حالتی از قلم نیفتاده است.

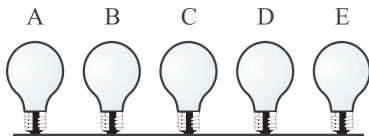


مثال: کمان‌داری دو تیر را به سمت هدف مقابل رها می‌کند. با فرض اینکه هر دو تیر به هدف برخورد می‌کند، تعداد امتیازهایی که کمان‌دار می‌تواند به دست آورد را محاسبه کن.

پاسخ: تمام حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$۱۰+۱۰=۲۰, ۱۰+۵=۱۵, ۱۰+۲=۱۲, ۵+۵=۱۰, ۵+۲=۷, ۲+۲=۴$$

پس این کمان‌دار می‌تواند شش امتیاز مختلف به دست آورد.



مثال: پنج لامپ در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق دو لامپ از این پنج لامپ می‌توانند روشن باشند؟

پاسخ: فرض کن لامپ A حتماً یکی از لامپ‌های روشن باشد. لامپ دوم به چهار حالت می‌تواند انتخاب شود:

- ۱) A و B ۲) A و C ۳) A و D ۴) A و E

حالا فرض کن لامپ A حتماً خاموش باشد و B حتماً روشن باشد. سه حالت جدید به وجود می‌آید:

- ۵) B و C ۶) B و D ۷) B و E

در مرحلهٔ بعد فرض کن A و B حتماً خاموش باشند و C حتماً روشن باشد. دو حالت جدید داریم:

- ۸) C و D ۹) C و E

و در نهایت فرض کن A، B و C حتماً خاموش باشند و D حتماً روشن باشد. تنها حالت ممکن این است:

- ۱۰) D و E

پس به ۱۰ طریق دو لامپ از این پنج لامپ می‌توانند روشن باشند.

مثال: یک هندوانهٔ ۱۰ کیلویی را در یک طرف ترازو گذاشته‌ایم و با گذاشتن وزنه در طرف دیگر ترازو، می‌خواهیم تعادل ترازو را برقرار کنیم. اگر تعداد دلخواهی وزنه‌های ۱، ۲ و ۵ کیلویی داشته باشیم، به چند حالت این کار ممکن است؟

پاسخ: اول فرض می‌کنیم تنها از دو وزنهٔ ۵ کیلویی استفاده می‌کنیم. فقط یک حالت وجود دارد:

۱) $۱۰=۵+۵$

سپس فرض می‌کنیم فقط از یک وزنهٔ ۵ کیلویی استفاده می‌کنیم. به جای ۵ کیلوی باقی‌مانده از دو وزنهٔ ۲ کیلویی و یک وزنهٔ ۱ کیلویی استفاده می‌کنیم. بعد از آن هر بار یک وزنهٔ ۲ کیلویی را به دو وزنهٔ ۱ کیلویی تبدیل می‌کنیم:

۲) $۱۰=۵+۲+۲+۱$ ۳) $۱۰=۵+۲+۱+۱+۱$ ۴) $۱۰=۵+۱+۱+۱+۱+۱$

در نهایت از وزن ۵ کیلویی استفاده نمی‌کنیم. ابتدا از پنج وزن ۲ کیلویی استفاده کرده و هر بار یک وزن ۲ کیلویی را کم و دو وزن ۱ کیلویی اضافه می‌کنیم:

$$۵) ۱۰ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲$$

$$۶) ۱۰ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۱ + ۱$$

$$۷) ۱۰ = ۲ + ۲ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$۸) ۱۰ = ۲ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$۹) ۱۰ = ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$۱۰) ۱۰ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

پس این کار به ۱۰ حالت ممکن است.

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

گاهی اوقات به دست آوردن حالت مطلوب و جواب مسئله مشکل‌تر از به دست آوردن حالت‌های نامطلوب و جواب‌های نادرست است. در این مواقع بهتر است حالت‌های نادرست را پیدا کنیم و با حذف آن‌ها، به حالت مناسب و جواب مسئله دست پیدا کنیم. اگر تعداد حالات زیاد بود، برای اینکه مطمئن شویم تمام حالات را بررسی کردیم، می‌توانیم از تفکر نظام‌دار استفاده کنیم.

مثال: چند عدد از بین اعداد ۱ تا ۲۰ مضرب ۳، ۵ یا ۷ نیستند؟

پاسخ: اعداد ۱ تا ۲۰ را می‌نویسیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

ابتدا اعداد مضرب ۳ را خط می‌زنیم:

۱ ۲ ~~۳~~ ۴ ۵ ~~۶~~ ۷ ۸ ~~۹~~ ۱۰ ۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ۱۴ ~~۱۵~~ ۱۶ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹ ۲۰

سپس از بین اعداد باقی‌مانده مضارب ۵ را خط می‌زنیم:

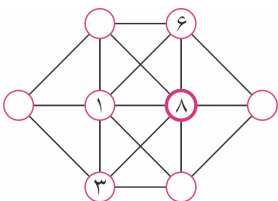
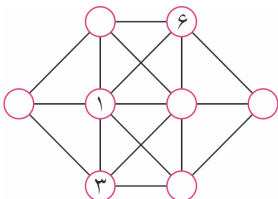
۱ ۲ ~~۳~~ ۴ ~~۵~~ ~~۶~~ ۷ ۸ ~~۹~~ ~~۱۰~~ ۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ۱۴ ~~۱۵~~ ۱۶ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹ ~~۲۰~~

در نهایت اعداد مضرب ۷ را خط می‌زنیم:

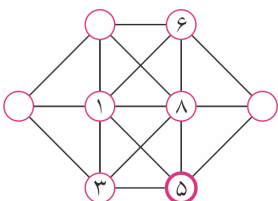
۱ ۲ ~~۳~~ ۴ ~~۵~~ ~~۶~~ ۷ ۸ ~~۹~~ ~~۱۰~~ ۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ~~۱۴~~ ~~۱۵~~ ۱۶ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹ ~~۲۰~~

پس ۹ عدد مضرب ۳، ۵ یا ۷ نیستند.

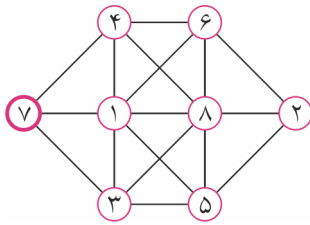
مثال: اعداد ۱ تا ۸ را در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار بده، به این شرط که اعداد قرار گرفته در هر دو دایره‌ای که با یک خط مستقیم به هم متصل هستند، متوالی نباشند.



پاسخ: دایره سمت راست ۱ با ۳ مجاور است، پس ۲ و ۴ نیست. هم‌چنین مجاور ۶ هم هست، پس ۵ و ۷ نیست. بنابراین فقط می‌تواند ۸ باشد:



دایره پایین ۸ با ۳ مجاور است، پس ۲ و ۴ نیست. مجاور ۸ هم هست، پس ۷ نیست. پس فقط می‌تواند ۵ باشد:



دایره سمت چپ ۱ با ۳ مجاور است، پس ۲ و ۴ نیست. با توجه به اعداد باقی مانده فقط می تواند ۷ باشد. دو دایره باقی مانده نیز به راحتی پر می شوند:

راهبرد الگویابی

برای حل مسائلی که در آن‌ها بین شکل‌ها یا عددها رابطه خاصی وجود دارد، کشف آن رابطه یا الگو به حل آن مسئله کمک قابل توجهی می کند.

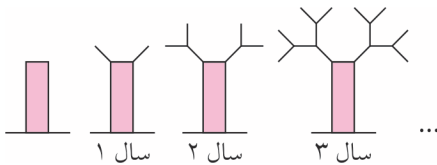
مثال: عدد بیستم دنباله زیر چه عددی است؟

۲ ۵ ۸ ۱۱ ۱۴ ...

پاسخ: هر عدد از قبلی خود سه تا بیش تر است. در نتیجه عدد بیستم به اندازه ۱۹ تا سه تا از عدد اول بیش تر است:

$$\text{عدد بیستم} = 2 + 19 \times 3 = 59$$

مثال: درختی داریم که در لحظه‌ای که آن را می کاریم شاخه ندارد. پس از یک سال دو شاخه از تنه آن رشد می کند. در سال بعد، از هر کدام از آن شاخه‌ها ۲ شاخه کوچک تر می روید. در سال بعدی، از هر شاخه کوچک دو شاخه کوچک تر سبز می شود. این روند ادامه پیدا می کند و بعد از ۸ سال از سر کوچک ترین شاخه‌ها یک سیب می روید. از این درخت چند سیب خواهد روید؟



پاسخ: هر سال تعداد شاخه‌های کوچک ۲ برابر سال قبل است. پس بعد از ۸ سال تعداد شاخه‌های کوچک برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

پس از این درخت ۲۵۶ سیب خواهد روید.

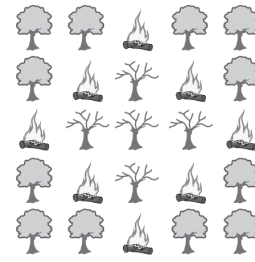
مثال: جنگلی بسیار وسیع به شکل زیر وجود دارد. صاعقه‌ای از آسمان به درختی در میان این جنگل برخورد می کند و آن را آتش می زند. بعد از گذشت یک ساعت، درختان مجاور آن نیز آتش می گیرند و بعد از گذشت ساعتی دیگر، درختان مجاور آن‌ها نیز آتش می گیرند. این روند همین طور ادامه پیدا می کند. در ساعت دوازدهم چند درخت می سوزند؟



لحظه صاعقه



ساعت اول



ساعت دوم



پاسخ: با بررسی چند ساعت بعد از لحظه آتش سوزی متوجه می شویم که تعداد درختانی که در هر ساعت می سوزند به این ترتیب است:

۱، ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ...

یعنی از ساعت دوم به بعد، در هر ساعت ۴ درخت بیش تر از ساعت قبل می سوزند. پس در ساعت دوازدهم $12 \times 4 = 48$ درخت خواهند سوخت.

راهبرد حدس و آزمایش

گاهی اوقات به دست آوردن جواب مسئله راه مشخصی ندارد. یا اگر هم دارد، بسیار طولانی و دشوار است. در این موارد سعی می کنیم جواب را حدس بزنیم و با استفاده از نتیجه به دست آمده، حدس خود را دقیق تر کنیم تا نهایتاً به جواب درست مسئله برسیم.

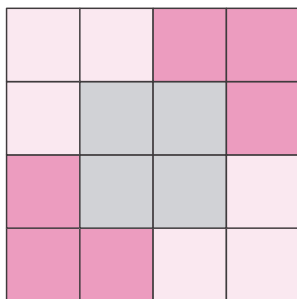
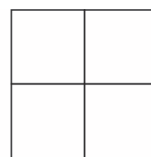
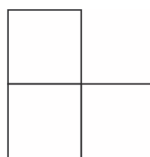
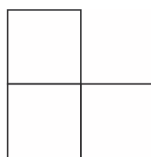
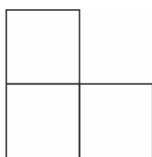
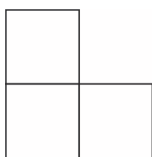
مثال: در جاهای خالی عبارت زیر، علامت + و × را طوری قرار بده که تساوی برقرار شود:

$$3 \bigcirc 5 \bigcirc 7 \bigcirc 4 = 43$$

پاسخ: با بررسی حالت های مختلف به جواب زیر می رسیم.

$$3 \times 5 + 7 \times 4 = 43$$

مثال: با چرخاندن و کنار هم قرار دادن شکل های زیر، یک مربع 4×4 بساز:



پاسخ:

راهبرد زیرمسئله

گاهی اوقات یک مسئله در واقع از چند مسئله کوچک تر تشکیل شده است. برای حل چنین مسئله ای باید آن مسائل کوچک تر را شناسایی و حل کرد و از جواب هر یک، در پاسخ دادن به مسئله بعدی کمک گرفت تا در نهایت مسئله اصلی حل شود.

مثال: محمدعلی روزی ۱۰۰ تومان پس انداز می کند. او قصد دارد ظرفی مکعبی شکل به ابعاد ۴، ۵ و ۶ سانتی متر را از اشک تمساح پُر کند! اگر هر قطره اشک تمساح که ۱ سانتی متر مکعب حجم دارد، ۱۰۰۰ تومان به فروش برسد، چند ماه طول می کشد تا محمدعلی بتواند ظرف خود را از اشک تمساح پر کند؟

پاسخ: حجم مکعب برابر است با:

$$4 \times 5 \times 6 = 120$$

پس محمدعلی به ۱۲۰ سانتی متر مکعب اشک تمساح نیاز دارد:

$$120 \div 1 = 120$$

پس محمدعلی به ۱۲۰ قطره اشک تمساح نیاز دارد:

$$120 \times 1000 = 120000$$

پس محمدعلی به ۱۲۰۰۰۰ تومان پول احتیاج دارد:

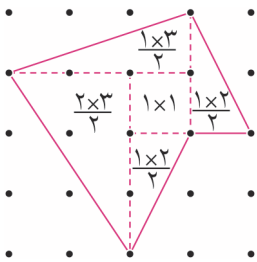
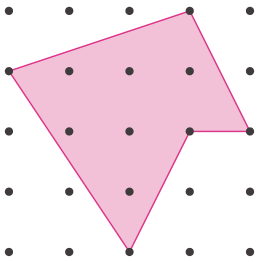
$$120000 \div 100 = 1200$$

پس محمدعلی به ۱۲۰۰ روز زمان احتیاج دارد:

$$1200 \div 30 = 40$$

پس ۴۰ ماه طول می کشد تا محمدعلی ظرف خود را از اشک تمساح پر کند.

مثال: اگر فاصله بین هر دو نقطه مجاور ۱ سانتی متر باشد، مساحت شکل روبه‌رو چقدر است؟



پاسخ: این شکل را به چند شکل کوچک تر تقسیم می کنیم، طوری که به دست آوردن

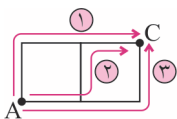
$$\frac{3}{2} + 1 + 1 + 1 + 3 = \frac{15}{2}$$

مساحت هر یک از آنها برای ما راحت باشد:

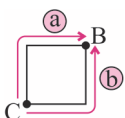
پس مساحت این شکل ۷/۵ سانتی متر مربع است.

مثال: آقای کوشا هر روز صبح از خانه اش که در نقطه A قرار دارد به محل کارش که در نقطه B قرار دارد می رود. او در خیابانها فقط می تواند به سمت راست و بالا حرکت کند. اگر او بخواهد امروز در مسیرش از روزنامه‌فروشی که در نقطه C قرار دارد روزنامه بخرد، برای رفتن به محل کارش چند راه دارد؟

پاسخ: از خانه تا روزنامه‌فروشی ۳ مسیر وجود دارد:

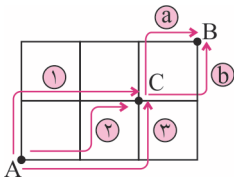


و از روزنامه‌فروشی تا محل کار ۲ مسیر وجود دارد:





ادامه هر یک از ۳ مسیر از خانه تا روزنامه‌فروشی، می‌تواند با ۲ مسیر از روزنامه‌فروشی تا محل کار تمام شود. پس در مجموع $2 \times 3 = 6$ مسیر وجود دارد:



- ۱) a و ۱ ۲) b و ۱ ۳) a و ۲
 ۴) b و ۲ ۵) a و ۳ ۶) b و ۳

راهبرد حل مسئله ساده‌تر

گاهی اوقات حل مسئله سخت است، ولی حل حالات ساده‌تر همان مسئله ساده است. در این موارد می‌توان آن مسائل ساده‌تر و ابتدایی‌تر را حل کرد و با استفاده از الگویابی، جواب مسئله اصلی را پیدا کرد.

مثال: فاصله خانه پرهام تا نانوائی نزدیک خانه‌اش ۱۰۱۷ متر است و طول قدم‌های پرهام ۵۶ سانتی‌متر است. فاصله خانه پرهام تا نانوائی حدوداً چند قدم است؟

پاسخ: برای ساده شدن مسئله از عددهای تقریبی استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{متر } 1017 \approx 1000 \\ \text{متر } 56 \approx 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله خانه پرهام تا نانوائی} = \frac{1000}{0.5} = 2000 \text{ قدم}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$ را پیدا کن.

پاسخ: ابتدا فرض کن تنها ۱ کسر داریم:

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

حالا فرض کن ۲ کسر داریم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

حالا فرض کن ۳ کسر داریم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

حالا فرض کن ۴ کسر داریم:

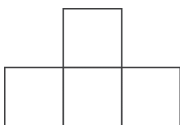
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

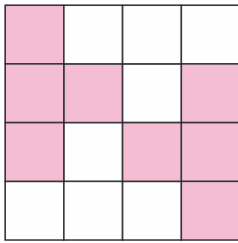
همان‌طور که می‌بینی الگوی رابطه را به‌دست آوردیم. پس حاصل عبارت اولیه برابر است با:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} = \frac{99}{100}$$

مثال: چگونه می‌توان یک صفحه شطرنجی 40×80 را با کاشی‌هایی به شکل

روبه‌رو پر کرد؟





پاسخ: به روشی که در شکل می‌بینی، می‌توان صفحه‌ای 4×4 را با این کاشی پر کرد: چون یک صفحه شطرنجی 40×80 را می‌توان به صفحات کوچک‌تر 4×4 تقسیم کرد، کافی است هر کدام از این صفحات 4×4 را به روش روبه‌رو با کاشی پر کرد تا در نهایت کل صفحه 40×80 کاشی‌کاری شود.

راهبرد روش‌های نمادین (مدل‌سازی)

گاهی اوقات مسائل را می‌توان به کمک نمادهای جبری (که در فصل سوم خواهیم آموخت) و یا اشکال هندسی مدل‌سازی کرد و آن‌ها را حل کرد.

مثال: نیمی چند ماه ورزش کرد و وزنش نصف شد. سپس چند ماه ورزش کردن را قطع کرد و 10 کیلوگرم به وزنش اضافه شد. اگر بعد از این جریان وزن او 64 کیلوگرم شده باشد، وزن او در ابتدا چقدر بوده است؟

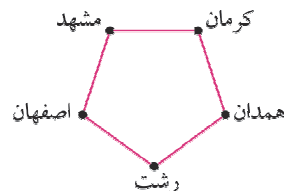
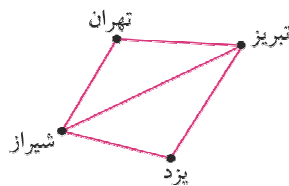
پاسخ: اگر به جای وزن اولیه \square قرار دهیم، داریم:

$$\frac{\square}{2} + 10 = 64 \Rightarrow \frac{\square}{2} = 54 \Rightarrow \square = 108$$

پس وزن او در ابتدا 108 کیلوگرم بوده است.

مثال: اگر جاده مخصوص دوچرخه‌سواری بین شهرهای تهران - تبریز، شیراز - یزد، تهران - شیراز، شیراز - تبریز، تبریز - یزد، مشهد - کرمان، کرمان - همدان، همدان - رشت، رشت - اصفهان و اصفهان - مشهد وجود داشته باشد، آیا می‌توان از تهران با دوچرخه به اصفهان رفت؟

پاسخ: شهرها را با نقطه و جاده‌های بین آن‌ها را با خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کنند، نشان می‌دهیم: همان‌طور که می‌بینی رفتن از تهران به اصفهان با دوچرخه امکان‌پذیر نیست!





فصل ۱: راهبردهای حل مسئله

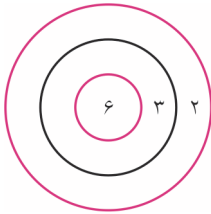
راهبرد رسم شکل

۱. مجید یک مربع مقوایی به محیط ۲۰ دارد. او مربع را برید تا ۲ تا مستطیل ایجاد شود. محیط یکی از مستطیل‌ها ۱۴ است. محیط مستطیل دیگر چند است؟
۲. ماهان یک مربع 3×3 کشید و از آن ۴ تا مستطیل 1×2 جدا کرد:

 او حالا می‌خواهد یک مربع 5×5 بکشد و از آن ۴ تا مستطیل 2×3 جدا کند. او چگونه می‌تواند این کار را انجام دهد؟
۳. حامد در یک نقطه ایستاده است. او ابتدا ۵ متر به سمت شمال رفت، سپس ۱۷ متر به سمت شرق رفت، سپس ۱۳ متر به سمت جنوب رفت، سپس ۱۳ متر به سمت غرب رفت و در آخر ۸ متر به سمت شمال رفت. اکنون چند متر با نقطه ابتدایی‌اش فاصله دارد؟
۴. یک حیاط مستطیلی 10×15 داریم که در چهار گوشه آن سگ‌هایی با طناب‌هایی به طول ۳ بسته شده‌اند. چه مساحتی از حیاط از دسترس سگ‌ها در امان است؟
۵. الف) در ساعت $4:00$ ، زاویه بین دو عقربه چند درجه است؟
ب) در ساعت $8:30$ ، زاویه بین دو عقربه چند درجه است؟
۶. تعداد کودک با شماره‌های 3021 و ... به ترتیب دور یک دایره ایستاده‌اند. می‌دانیم شماره‌های ۱ و ۷ دقیقاً روبه‌روی هم ایستاده‌اند. تعداد کودکان را به دست آورید.
۷. فاطمه روی یک صندلی سینما نشسته است. او از راست روی صندلی چهارم و از چپ روی صندلی ششم است. هم‌چنین از عقب روی صندلی دوم و از جلو روی صندلی پنجم است. در این سینما چند صندلی وجود دارد؟

راهبرد الگوسازی (تفکر نظام‌دار)

۸. دو عدد مختلف از میان ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ انتخاب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم. چند پاسخ مختلف می‌توانیم به دست آوریم؟



۹. با شلیک یک تیر می‌توانیم با توجه به شکل ۲، ۳ یا ۶ امتیاز کسب کنیم. در

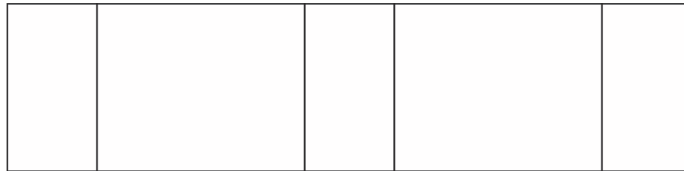
صورتی که تیر به هدف نخورد امتیازی نمی‌گیریم. با شلیک دو تیر چند

امتیاز مختلف ممکن است کسب کنیم؟ (مسابقات ریاضی کانگورو سال ۲۰۰۸)

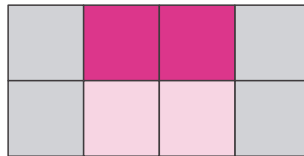
۱۰. به چند طریق می‌توان یک اسکناس ۱۰۰ تومانی را به سکه‌های ۱۰، ۲۰ و ۵۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۱. با داشتن ۲۴ مکعب هم‌اندازه، چند مکعب مستطیل مختلف می‌توان ساخت؟

۱۲. در شکل زیر، چند مستطیل دیده می‌شود؟



۱۳. یک جدول 2×4 داریم. به چند طریق می‌توان در این جدول، ۴ تا کاشی 1×2 قرار دارد؟



برای مثال:

۱۴. در عمل جمع $1+2+3+4+5$ ، باید به جای دو تا از + ها، علامت - قرار دهیم. چند پاسخ مختلف می‌توانیم به دست آوریم؟

۱۵. محیط یک مستطیل که طول اضلاع آن اعداد طبیعی هستند، برابر ۱۸ است. مساحت این مستطیل چه عددی می‌تواند باشد؟

۱۶. چند عدد طبیعی کوچکتر از 1000000 وجود دارد که مجموع ارقامش ۲ باشد؟

راهبرد حذف حالات نامطلوب

۱۷. کوچک‌ترین عدد ده رقمی که می‌توان با کنار هم چیدن عددهای ۳۰۹، ۴۱، ۵، ۷، ۶۸ و ۲ به دست آورد را پیدا کنید.

(مسابقات ریاضی کانگورو ۲۰۰۶)

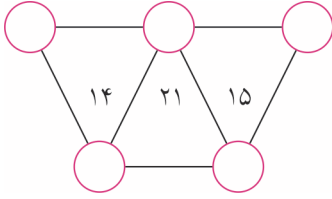
۱۸. جدول مقابل به وسیله ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ پر می‌شود، به طوری که در هر

ردیف و هر ستون تمام ارقام ذکر شده به کار رفته باشد. جدول را پر

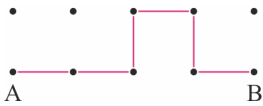
کنید. (اولین دوره المپیادهای ریاضی نوجوانان)

۲	۱		۳
۳			۲
			۱
	۲		

۱۹. در دایره‌های عبارت $2 \circ (3 \circ 6) \circ 4$ ، علامت‌های $+$ و \times را طوری قرار دهید که حاصل عددی فرد شود.

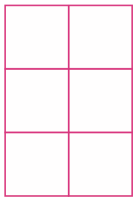


۲۰. اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷ را طوری در دایره‌های شکل زیر قرار دهید که حاصل ضرب سه عدد داخل هر مثلث برابر با عدد داخل آن مثلث شود.



۲۱. چند عدد دو رقمی داریم که مجموع ارقامشان بر ۷ بخش پذیر نباشد؟

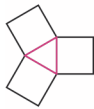
۲۲. در شکل روبه‌رو، فاصله بین دو نقطه مجاور برابر با ۱ سانتی‌متر است. چند مسیر از A به B به طول ۶ سانتی‌متر وجود دارد، به طوری که از هر نقطه حداکثر یک بار عبور کنیم؟ (یک مثال در شکل روبه‌رو دیده می‌شود)



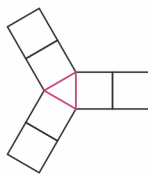
۲۳. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۶ را در جدول مقابل قرار دهیم، طوری که هر عدد از عدد سمت چپی و پایینی‌اش بیش‌تر باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟
(اولین دوره المپیادهای ریاضی نوجوانان)

راهبرد الگویی

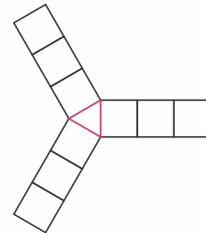
۲۴. با توجه به الگوی شکل‌ها، مشخص کنید که شکل ۲۵ ام چند مربع دارد؟



(۱)



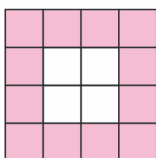
(۲)



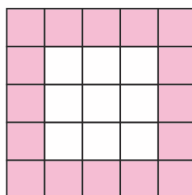
(۳)

۲۵. در الگوی اعداد ...، ۳۲، ۲۶، ۲۰، ۱۴، ۸، ۲، عدد بیستم را پیدا کنید.

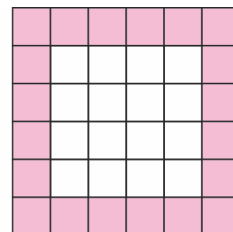
۲۶. با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل ۱۵ ام چند مربع رنگی است؟



(۱)



(۲)

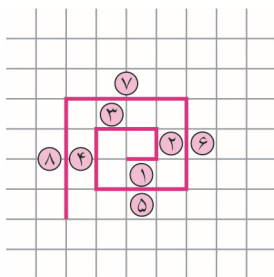


(۳)

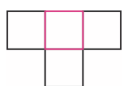


۲۷. در شکل روبه‌رو با توجه به الگوی شکل، طول پاره‌خط به شماره ۴۰ چقدر

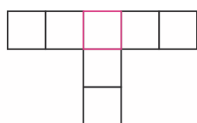
است؟ طول پاره‌خط به شماره ۴۱ چقدر است؟



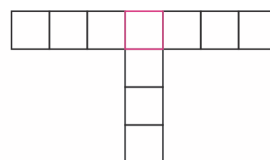
۲۸. هر کدام از شکل‌های زیر از تعدادی چوب کبریت تشکیل شده‌اند. مثلاً شکل (۱) از ۱۳ تا چوب کبریت تشکیل شده است.



(۱)



(۲)



(۳)

شکل پانزدهم از چند چوب کبریت تشکیل شده است؟

۲۹. در الگوی اعداد $1, 3, 6, 10, \dots$ عدد دهم را پیدا کنید.

۳۰. با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل دهم چند دایره وجود دارد؟



(۱)



(۲)

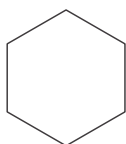


(۳)

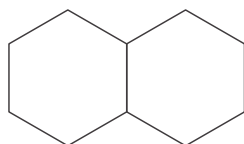


(۴)

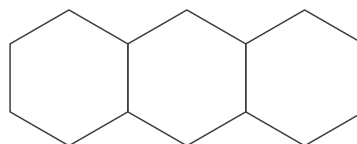
۳۱. با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل بیستم چند چوب کبریت وجود دارد؟



(۱)



(۲)

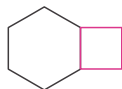


(۳)

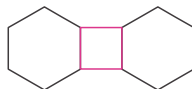
۳۲. با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل‌های نوزدهم و بیستم چند چوب کبریت وجود دارد؟



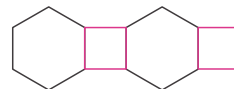
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

راهبرد حدس و آزمایش

۳۳. در یک مغازه، تعداد ۲۷ تا دوچرخه وجود دارد. می‌دانیم در کل ۶۱ چرخ دارند. تعداد هر کدام را پیدا کنید.

۳۴. دو زاویه متمم هستند. یکی از آن‌ها ۵ برابر دیگری است. اندازه هر کدام را پیدا کنید.

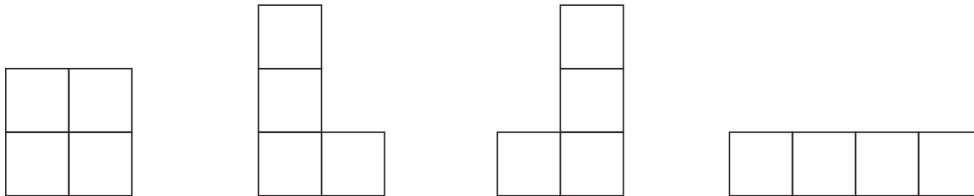
۳۵. در هر مورد به جای \square چه عددی باید قرار گیرد؟

الف) $4 \times \square + 5 = 41$

ب) $7 \times \square - 3 = 53$

ج) $3 \times \square + 22 = 5 \times 4$

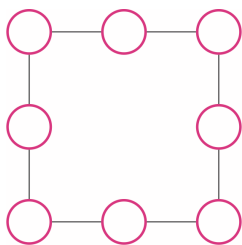
۳۶. با چرخاندن و کنار هم قرار دادن چهار شکل زیر، یک مربع 4×4 بسازید.



۳۷. به عمل‌های جمع مقابل دقت کنید:

$135 + 42$ یا $14 + 2 + 53$

در این عمل‌ها از هر کدام از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً یک بار استفاده شده است. آیا می‌توانید طوری دیگر عمل جمع را بنویسید تا حاصل ۶۰ شود؟



۳۸. اعداد ۱ تا ۸ را طوری در دایره‌های شکل مقابل قرار دهید که مجموع اعدادی روی هر چهار ضلع برابر با ۱۲ شود.

۳۹. یکی از عمل‌های جمع در عبارت زیر را به عمل ضرب تبدیل کنید تا حاصل برابر با ۷۴ شود؟

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

	۷۰		
۲۵		۵	
	۱۵		
۴۰			۵۰
	۶۰		
			۳۰
		۲۰	
	۱۰		

ورود ← خروج

۴۰. مسیری را از ورود تا خروج، از طریق عبور از مربع‌های سفید رسم کنید. شما می‌توانید عمودی یا افقی حرکت کنید و از هر خانه حداکثر یک‌بار عبور کنید. مجموع امتیازهای مسیر خود را با هم جمع کنید. حداکثر امتیازی که می‌توانید به دست آورید چقدر است؟