

فهرست

۱۳۰	قدم ۲۱
۱۳۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۱
۱۳۶	قدم ۲۲
۱۴۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۲
۱۴۴	قدم ۲۳
۱۴۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۳
۱۵۰	قدم ۲۴
۱۵۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۴
۱۵۶	قدم ۲۵
۱۶۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۵
۱۶۲	قدم ۲۶ (آزمون دوره‌ای ۲)
۱۶۶	قدم ۲۷
۱۷۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۷
۱۷۲	قدم ۲۸
۱۷۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۸
۱۷۸	قدم ۲۹
۱۸۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۹
۱۸۴	قدم ۳۰
۱۸۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۰
۱۹۰	قدم ۳۱
۱۹۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۱
۱۹۶	قدم ۳۲
۲۰۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۲
۲۰۴	قدم ۳۳
۲۰۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۳
۲۱۰	قدم ۳۴
۲۱۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۴
۲۱۶	قدم ۳۵
۲۲۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۵
۲۲۲	قدم ۳۶
۲۲۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۶
۲۳۰	قدم ۳۷
۲۳۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۷
۲۳۶	قدم ۳۸
۲۴۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۸
۲۴۲	قدم ۳۹
۲۴۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۳۹
۲۴۸	قدم ۴۰ (آزمون دوره‌ای ۳)

بردار و مختصات

فصل ۶

مثبت

فصل ۷

توان و جذر

فصل ۸

آمار و احتمال

فصل ۹

دایره

پاسخنامه

پاسخنامه تشریحی تمرین‌ها و آزمون‌ها

۶	قدم ۱
۱۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۱
۱۲	قدم ۲
۱۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۲
۱۸	قدم ۳
۲۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۳
۲۴	قدم ۴
۲۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۴
۳۲	قدم ۵
۳۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۵
۳۸	قدم ۶
۴۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۶
۴۴	قدم ۷
۴۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۷
۵۲	قدم ۸
۵۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۸
۵۸	قدم ۹
۶۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۹
۶۴	قدم ۱۰
۶۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۰
۷۰	قدم ۱۱
۷۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۱
۷۶	قدم ۱۲
۸۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۲
۸۲	قدم ۱۳ (آزمون دوره‌ای ۱)
۸۶	قدم ۱۴
۹۱	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۴
۹۲	قدم ۱۵
۹۷	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۵
۹۸	قدم ۱۶
۱۰۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۶
۱۰۴	قدم ۱۷
۱۰۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۷
۱۱۰	قدم ۱۸
۱۱۵	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۸
۱۱۸	قدم ۱۹
۱۲۳	جمع‌بندی و مرور قدم ۱۹
۱۲۴	قدم ۲۰
۱۲۹	جمع‌بندی و مرور قدم ۲۰

فصل ۱

عددهای صحیح و گویا

فصل ۲

عددهای اول

فصل ۳

چندضلعی‌ها

فصل ۴

جبر و معادله

فصل ۵

مقدمه مؤلفان

برای طی مسیری سخت و طولانی، بهترین راه این است که آن مسیر را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم و مرحله‌به‌مرحله آن را پشت سر بگذاریم. با این روش به بسیاری از هدف‌هایمان که به‌ظاهر دست‌نیافتنی هستند، دست خواهیم یافت.

کتاب «چهل قدم ریاضی هشتم» با همین نگاه طراحی و تألیف شده است. در این کتاب، موضوعات فراوان و پیچیده ریاضی، به ابعاد کوچک‌تر و قابل فهمی تقسیم و بیان می‌شود. هر موضوع کوچک با چند جمله کوتاه، مثال و تمرین آموزش داده می‌شود. مثال‌ها معمولاً ادامه درس هستند و آن را کامل می‌کنند. همه این اتفاق‌ها در یک صفحه از این کتاب رخ می‌دهد. هر پنج صفحه، موضوعی را به‌طور کامل منتقل می‌کند و یک قدم را تشکیل می‌دهد. هر چند قدم، یک فصل از کتاب درسی را پوشش می‌دهد. در انتهای هر قدم، چند سؤال با عنوان جمع‌بندی و مرور قدم و در انتهای هر سه فصل، یک آزمون دوره‌ای از موضوعات آن فصل‌ها ارائه شده است. در نهایت، پس از چهل قدم، کل مفاهیم مطرح‌شده در کتاب درسی آموزش داده می‌شود.

پاسخ تمرین‌ها، جمع‌بندی و مرور قدم‌ها و آزمون‌های دوره‌ای در انتهای کتاب ارائه شده است. علاوه بر این، بعضی درسنامه‌ها، حل برخی تمرین‌ها و مثال‌های دشوار، که با علامت  مشخص شده‌اند، به صورت فیلم‌های آموزشی در اپلیکیشن رایگان کلاخ سپید بارگذاری شده است و شما می‌توانید با مراجعه به وبسایت www.gaj.ir، این اپلیکیشن را دریافت کنید و پس از نصب آن روی گوشی یا تبلت خود، فیلم‌ها را مشاهده کنید.

تألیف کتاب با این روش و ساختار، کاری دشوار بود؛ خرد کردن موضوعات و جا دادن کل مطالب مورد نظر در قالب از پیش تعیین‌شده، انتخاب مثال‌ها و تمرین‌های هدفمند که فرایند آموزش را کامل و از اطالۀ کلام جلوگیری کند، بخشی از مشکلات اجرایی تألیف این کتاب بود که به یاری خداوند و با همت، همکاری و سعه صدر مسئولان و کارکنان محترم انتشارات گاج برای مؤلفان میسر شد. امیدوار است نتیجه این تلاش گروهی، در راستای اعتلای سطح علمی فرزندان ایران، گامی هرچند کوچک ولی مؤثر باشد.

در پایان از همکاری خانم‌ها مهدیه میرزاعلی، زهرا خوشنود، سمیه میرزایی، یاسمین نخلی و مرضیه فرزانه و آقایان افشین فرزانه و محسن قاسمی سپاس‌گزاریم و از درگاه خداوند سلامت و توفیق روزافزون برای ایشان خواهانیم.

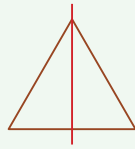
همچنین از مدیریت واحد تولید فیلم‌های آموزشی، آقای میثم رازبانی و همکاران محترمشان آقایان حسینی، اصغریان، خیرخواه و داوودی به دلیل تلاش‌های شبانه‌روزی و دلسوزانه‌شان متشکریم.

عبدالرضا دراج - جواد حیدری

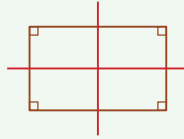


۱ محور تقارن و تقارن محوری

محور تقارن خطی است که شکل را به دو قسمت قرینه نسبت به خود تقسیم می‌کند به طوری که اگر شکل را روی آن خط تا بزنیم، دو قسمت بر هم منطبق می‌شوند.
 بعضی شکل‌ها یک محور تقارن و بعضی چند محور تقارن دارند و بعضی هم محور تقارن ندارند.



یک محور تقارن



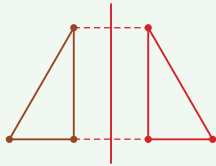
دو محور تقارن



بدون محور تقارن

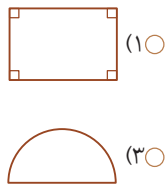
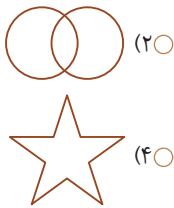
نکته

برای پیدا کردن قرینه یک شکل نسبت به یک خط، قرینه نقطه‌های آن شکل را نسبت به خط پیدا کرده و به همان ترتیب به هم وصل می‌کنیم.

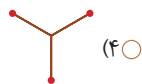
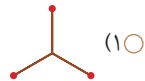
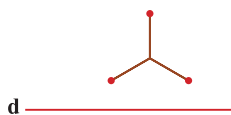


تمرین

۱ کدام شکل بیشترین محور تقارن را دارد؟



۲ اگر شکل زیر را نسبت به خط d قرینه کنیم، شکل کدام گزینه به دست می‌آید؟



۳ در تقارن محوری، کدام عبارت نادرست است؟

۱) مساحت شکل تغییر نمی‌کند.

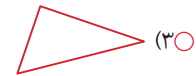
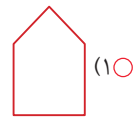
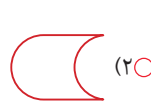
۲) محیط شکل تغییر نمی‌کند.

۳) قرینه هر نقطه از شکل نسبت به محور تقارن، نقطه‌ای از خود شکل می‌شود.

۴) مساحت شکل تغییر نمی‌کند، اما محیط تغییر می‌کند.

مثال

۱ کدام شکل زیر محور تقارن ندارد؟



پاسخ:

شکل گزینه‌های ۱ و ۲ یک محور تقارن و شکل گزینه ۴ دو محور تقارن دارد. شکل گزینه ۳ محور تقارن ندارد.

پاسخ گزینه «۳» است.

۲ کدام یک از جمله‌های زیر نادرست است؟

۱) مربع چهار محور تقارن دارد.

۲) دایره بی‌شمار محور تقارن دارد.

۳) متوازی‌الاضلاع محور تقارن ندارد.

۴) همه مثلث‌ها محور تقارن دارند.

پاسخ:

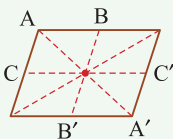
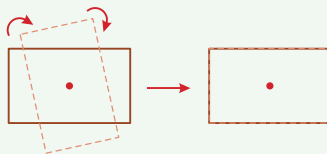
گزینه ۴ نادرست است، زیرا مثلاً ممکن است مثلث قائم‌الزاویه محور تقارن نداشته باشد.



پاسخ گزینه «۴» است.

۲) مرکز تقارن و تقارن مرکزی

مرکز تقارن نقطه‌ای است که اگر شکل را حول آن نقطه 180° دوران دهیم، بر خودش منطبق شود.



اگر نقطه‌ای مرکز تقارن یک شکل باشد، قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن، نقطه‌ای از خود شکل می‌شود. برای مثال در شکل روبه‌رو قرینه نقطه A نقطه A'، قرینه نقطه B نقطه B' و قرینه نقطه C نقطه C' است که همه آنها روی شکل قرار دارند.

یک شکل یا مرکز تقارن دارد، یا ندارد. مثلاً مربع و مستطیل مرکز تقارن دارند ولی مثلث‌ها مرکز تقارن ندارند.

نکته

هر شکلی که مرکز تقارن داشته باشد، لزوماً دارای محور تقارن نیست یا به‌عکس. به طور مثال متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی محور تقارن ندارد.

تمرین

۱) کدام گزینه در مورد شکل زیر درست است؟



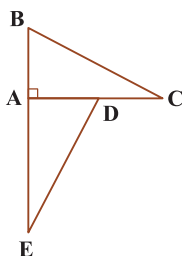
- ۱) محور تقارن دارد.
- ۲) محور تقارن و مرکز تقارن ندارد.
- ۳) فقط مرکز تقارن دارد.
- ۴) هم محور تقارن و هم مرکز تقارن دارد.

۲) اگر شکل زیر را حول نقطه O، 180° دوران دهیم، کدام شکل به دست می‌آید؟



- ۱)
- ۲)
- ۳)
- ۴)

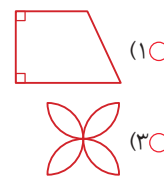
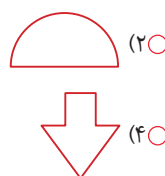
۳) اگر مثلث ABC را بچرخانیم، روی مثلث ADE منطبق می‌شود. کدام نقطه مرکز دوران است؟



- ۱) D
- ۲) A
- ۳) C
- ۴) E

مثال

۱) کدام یک از شکل‌های زیر مرکز تقارن دارد؟



پاسخ: فقط شکل گزینه ۳ اگر 180° دوران یابد بر خودش منطبق می‌شود.

شکل گزینه ۱ محور تقارن ندارد و شکل گزینه‌های ۲ و ۴ محور تقارن دارند.

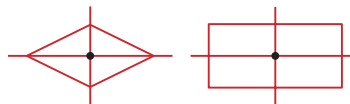
پاسخ گزینه «۳» است.

۲) کدام عبارت نادرست است؟

- ۱) متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن دارد.
- ۲) هر شکلی که محور تقارن داشته باشد، مرکز تقارن هم دارد.
- ۳) اگر شکلی حداقل دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد، مرکز تقارن نیز دارد.
- ۴) لوزی مرکز تقارن دارد.

پاسخ: گزینه ۲ نادرست است، زیرا مثلث متساوی‌الساقین محور تقارن دارد

ولی مرکز تقارن ندارد. درستی گزینه ۳ نیز با چند مثال مشخص می‌شود:



پاسخ گزینه «۲» است.



۳ محور و مرکز تقارن در چندضلعی‌ها

در جدول زیر تعداد محورهای تقارن در چندضلعی‌های مهم و همچنین داشتن یا نداشتن مرکز تقارن آنها مشخص شده است:

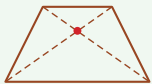
نام شکل	مثلث متساوی‌الساقین	مثلث متساوی‌الاضلاع	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع	دوازده‌نقطه متساوی‌الساقین
تعداد محورهای تقارن	۱	۳	۰	۲	۲	۴	۱
مرکز تقارن	ندارد	ندارد	دارد	دارد	دارد	دارد	ندارد

مثال: شکلی نام ببرید که تعداد محورهای تقارنش با تعداد اضلاعش برابر باشد.

پاسخ: همه چندضلعی‌های منتظم مانند مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع

مثال: یک چهارضلعی نام ببرید که قطرهایش مساوی باشند و مرکز تقارن نداشته باشد.

پاسخ: دوازده‌نقطه متساوی‌الساقین



تمرین

۱ در کدام شکل تعداد محورهای تقارن با تعداد اضلاع برابر است؟

- ۱) لوزی
- ۲) مستطیل
- ۳) مثلث متساوی‌الساقین
- ۴) هشت‌ضلعی منتظم

۲ کدام شکل بیش از یک مرکز تقارن دارد؟

- ۱) دایره
- ۲) لوزی
- ۳) بیضی
- ۴) چنین شکلی وجود ندارد.

۳ اگر مربعی را داخل یک دایره طوری قرار دهیم که رأس‌هایش روی دایره باشد، شکل حاصل چند محور تقارن دارد؟

- ۱) بی‌شمار
- ۲) ۸
- ۳) ۴
- ۴) ۲

مثال

۱ کدام شکل مرکز تقارن دارد، ولی محور تقارن ندارد؟

- ۱) مثلث متساوی‌الساقین
- ۲) نیم‌دایره
- ۳) مربع
- ۴) متوازی‌الاضلاع

پاسخ:

گزینه ۱ و ۲: مثلث متساوی‌الساقین و نیم‌دایره فقط یک محور تقارن دارند.

گزینه ۳: مربع چهار محور و یک مرکز تقارن دارد.

گزینه ۴: متوازی‌الاضلاع فقط مرکز تقارن دارد.

پاسخ گزینه «۴» است.

۲ کدام شکل هم مرکز تقارن و هم محور تقارن دارد؟

- ۱) ربع دایره
- ۲) نیم‌دایره
- ۳) لوزی
- ۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

پاسخ: گزینه ۱ و ۲: ربع دایره و نیم‌دایره فقط یک محور تقارن دارند و

مرکز تقارن ندارند.

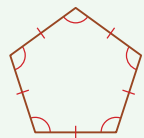
گزینه ۳: لوزی هم مرکز تقارن و هم دو محور تقارن دارد.

گزینه ۴: مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن دارد و مرکز تقارن ندارد.

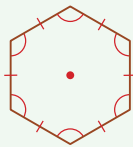
پاسخ گزینه «۳» است.

۱۴) تقارن در چندضلعی‌های منتظم

مرکز تقارن چندضلعی‌های منتظم: چندضلعی‌های منتظمی که تعداد اضلاع آنها فرد باشد، مرکز تقارن ندارند مانند پنج‌ضلعی منتظم و اگر تعداد اضلاع آنها زوج باشد، مرکز تقارن دارند مانند شش‌ضلعی منتظم.

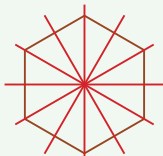


مرکز تقارن ندارد.

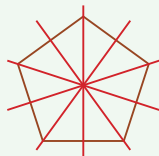


مرکز تقارن دارد.

محور تقارن چندضلعی‌های منتظم: همه چندضلعی‌های منتظم به تعداد اضلاعشان محور تقارن دارند.



۶ محور تقارن دارد.



۵ محور تقارن دارد.

مثال: تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم $2K + 5$ است. آیا این چندضلعی مرکز تقارن دارد؟

فرد زوج

$$\text{فرد} = \text{زوج} + 5 \Rightarrow 2K + 5$$

پاسخ: چون $2K + 5$ یک عدد فرد است، این چندضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

تمرین

۱) یک n ضلعی منتظمی که ۱۰ محور تقارن داشته باشد، چند قطر دارد؟

- ۱۰ (۱)
- ۷۰ (۲)
- ۳۵ (۳)
- ۲۰ (۴)

۲) در کدام شکل زیر، مرکز تقارن محل برخورد قطرهاست؟

- ۱) شش‌ضلعی منتظم
- ۲) لوزی
- ۳) هشت‌ضلعی منتظم
- ۴) همه گزینه‌ها

۳) یک چندضلعی منتظم ۲۷ قطر دارد. کدام گزینه درباره این چندضلعی درست است؟

- ۱) مرکز تقارن و ۲۷ محور تقارن دارد.
- ۲) مرکز تقارن ندارد و ۹ محور تقارن دارد.
- ۳) مرکز تقارن و ۹ محور تقارن دارد.
- ۴) مرکز تقارن ندارد و ۲۷ محور تقارن دارد.

مثال

۱) کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر مرکز تقارن ندارد؟

- ۱) ۸ ضلعی
- ۲) ۱۲ ضلعی
- ۳) ۱۷ ضلعی
- ۴) ۲۰ ضلعی

پاسخ: چون تعداد اضلاع ۱۷ ضلعی فرد است، مرکز تقارن ندارد.

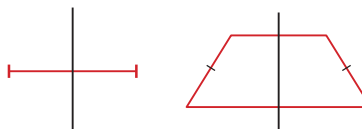
پاسخ گزینه «۳» است.

۲) کدام گزینه محور تقارن بیشتری دارد؟

- ۱) پاره‌خط
- ۲) دوزنقه متساوی‌الساقین
- ۳) ۱۱ ضلعی منتظم
- ۴) ۱۸ ضلعی منتظم

پاسخ: پاره‌خط و دوزنقه متساوی‌الساقین یک محور تقارن دارند، ۱۱ ضلعی

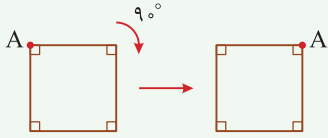
منتظم ۱۱ محور تقارن و ۱۸ ضلعی منتظم ۱۸ محور تقارن دارد.



پاسخ گزینه «۴» است.



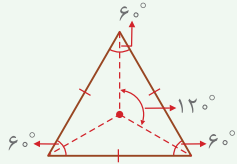
۵) تقارن چرخشی



هر شکل که به اندازه کسری از دایره (بین صفر تا 360° درجه) حول مرکز تقارنش دوران کند و بر خودش منطبق شود، تقارن چرخشی دارد، مثلاً اگر مربع را 90° در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن دوران دهیم، بر خودش منطبق می‌شود.

مثال: آیا مثلث متساوی‌الاضلاع تقارن چرخشی دارد؟

پاسخ: بله، اگر مثلث متساوی‌الاضلاع را 120° حول مرکز دوران، دوران دهیم، بر خودش منطبق می‌شود.



مثال: شکل روبه‌رو تقارن چرخشی چند درجه دارد؟

پاسخ: 90° درجه، البته با دوران‌های 180° و 270° درجه نیز بر خودش منطبق می‌شود.



نکته

۱- هر شکل که مرکز تقارن داشته باشد، تقارن چرخشی نیز دارد.

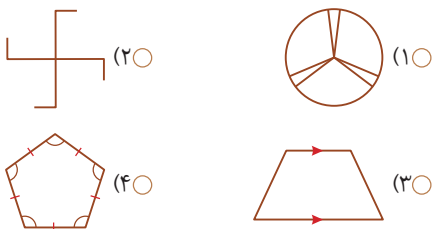
۲- اگر شکلی تقارن چرخشی داشته باشد، ممکن است مرکز تقارن نداشته باشد، مثل مثلث متساوی‌الاضلاع.

تمرین

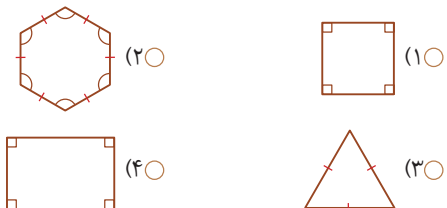
۱ کدام یک از شکل‌های زیر تقارن چرخشی دارد؟

- (۱) مثلث قائم‌الزاویه
- (۲) ربع دایره
- (۳) هشت‌ضلعی منتظم
- (۴) مثلث متساوی‌الساقین

۲ کدام شکل تقارن چرخشی ندارد؟

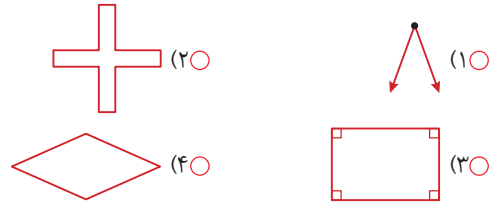


۳ کدام شکل دارای تقارن چرخشی 60° است؟



مثال

۱ کدام شکل تقارن چرخشی ندارد؟

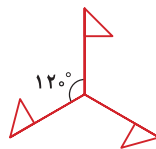


پاسخ:

شکل گزینه ۲ با دوران 90° و شکل گزینه‌های ۳ و ۴ با دوران 180° بر خودش منطبق می‌شوند. پس تقارن چرخشی دارند. شکل گزینه ۱ تقارن چرخشی ندارد.

پاسخ گزینه «۱» است.

۲ شکل زیر را حداقل چند درجه بچرخانیم تا بر خودش منطبق شود؟



- (۱) 60°
- (۲) 180°
- (۳) 120°
- (۴) 240°

پاسخ:

اگر شکل را 120° بچرخانیم بر خودش منطبق می‌شود.

پاسخ گزینه «۳» است.

جمع‌بندی و مرور

۱ در کدام شکل تعداد خط‌های تقارن با بقیه متفاوت است؟



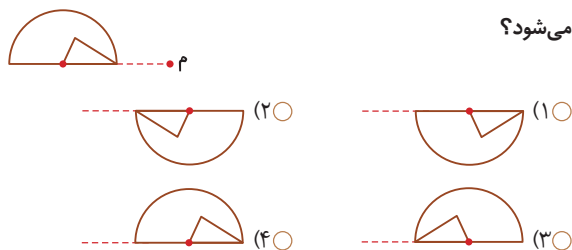
۲ در کدام گروه از شکل‌ها، تعداد محورهای تقارن شکل‌ها با یکدیگر برابر است؟

- (۱) مربع، لوزی و نیم‌دایره
- (۲) لوزی، مستطیل و بیضی
- (۳) دایره، خط و پاره‌خط
- (۴) نیم‌دایره، بیضی و مستطیل

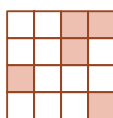
۳ کدام شکل مرکز تقارن و بیش از سه محور تقارن دارد؟

- (۱) لوزی
- (۲) مثلث متساوی‌الاضلاع
- (۳) شش‌ضلعی منتظم
- (۴) پنج‌ضلعی منتظم

۴ اگر شکل زیر را حول نقطه «م» 180° دوران دهیم، کدام شکل حاصل می‌شود؟



۵ در شکل زیر، حداقل به چند مربع رنگی دیگر احتیاج داریم تا این شکل یک محور تقارن داشته باشد؟



شکل یک محور تقارن داشته باشد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

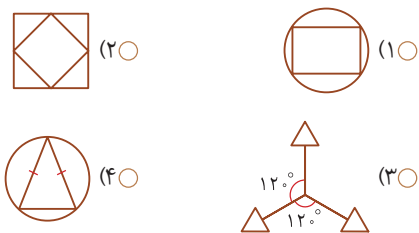
۶ در شکل زیر می‌خواهیم حداقل یکی از مربع‌ها را رنگ کنیم طوری که شکل فقط یک محور تقارن داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

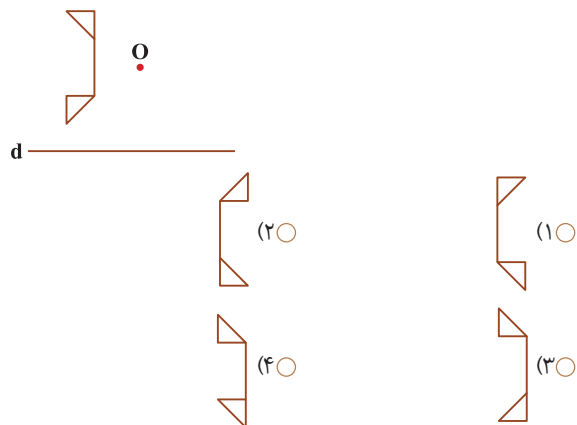
- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۷

۷ کدام شکل تقارن چرخشی ندارد؟



۸ شکل زیر را ابتدا 180° حول نقطه O دوران می‌دهیم و قرینه شکل

به دست آمده را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم. شکل نهایی کدام است؟



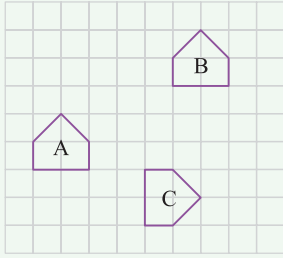
۹ در چه شکل هندسی، قطعاً مرکز تقارن وجود دارد؟

- (۱) در شکلی که حداقل دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد.
- (۲) در شکلی که محور تقارن نداشته باشد.
- (۳) در شکلی که حداقل دو محور تقارن داشته باشد.
- (۴) در شکلی که سه محور تقارن داشته باشد.

۱۰ یک n ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد. تعداد قطرهای آن کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۹
- (۲) ۲۰
- (۳) ۲۷
- (۴) ۳۵

۱) تبدیلات هندسی (۱)

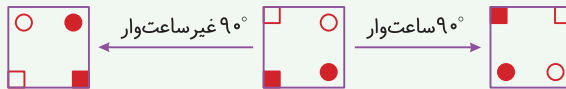


انتقال: وقتی شکلی را در یک صفحه انتقال می‌دهیم، جهت و وضعیت شکل و در نتیجه محیط و مساحت آن تغییر نمی‌کند. در تصویر روبه‌رو شکل A به شکل B انتقال یافته است.

دوران: وقتی شکلی را حول یک نقطه دوران می‌دهیم، جهت و وضعیت آن تغییر می‌کند، ولی محیط و مساحت آن بدون تغییر می‌ماند. در تصویر روبه‌رو شکل C دوران یافته شکل A است.

نکته

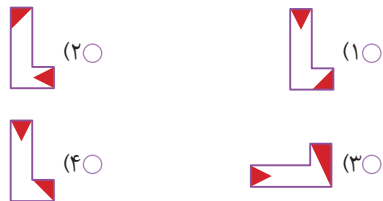
۱- در دوران، جهت دوران اهمیت دارد که ممکن است ساعت‌وار (ساعتگرد) یا غیر ساعت‌وار (پادساعتگرد) باشد.



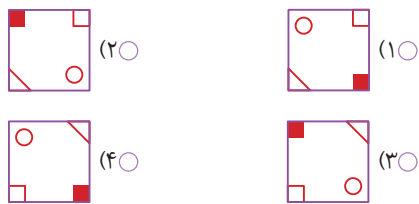
۲- در دوران 180° جهت دوران اهمیت ندارد.

تمرین

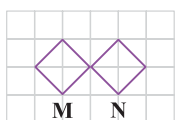
اگر شکل را در صفحه انتقال دهیم، کدام گزینه می‌تواند انتقال یافته آن باشد؟



۲) اگر شکل A را 27° در جهت عقربه‌های ساعت حول نقطه A دوران دهیم، شکل حاصل کدام است؟



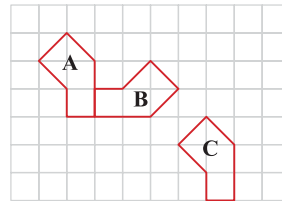
۳) شکل M با چه تبدیلی بر شکل N منطبق می‌شود؟



- (۱) انتقال
- (۲) دوران
- (۳) انتقال و دوران
- (۴) منطبق نمی‌شود.

مثال

۱) با توجه به شکل زیر، شکل B و شکل C و شکل A هستند.



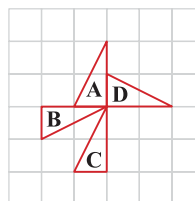
- (۱) انتقال یافته - دوران یافته
- (۲) انتقال یافته - انتقال یافته
- (۳) دوران یافته - انتقال یافته
- (۴) دوران یافته - دوران یافته

پاسخ:

شکل B دوران یافته شکل A و شکل C که جهت و وضعیتش تغییر نکرده، انتقال یافته شکل A است.

پاسخ گزینه «۳» است.

۲) در تصویر زیر کدام شکل از دوران 90° ساعت‌وار شکل A به دست می‌آید؟



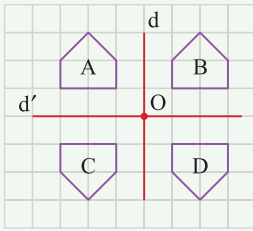
- (۱) B
- (۲) D
- (۳) C
- (۴) هیچ کدام

پاسخ:

از دوران 90° شکل A در جهت عقربه‌های ساعت، شکل D به وجود می‌آید.

پاسخ گزینه «۲» است.

۲) تبدیلات هندسی (۲)



تقارن: اگر شکلی را نسبت به یک خط یا یک نقطه قرینه کنیم، جهت و وضعیت آن ممکن است تغییر کند ولی محیط و مساحت شکل تغییر نمی‌کند. در شکل روبه‌رو شکل A نسبت به دو خط d و d' قرینه شده و شکل‌های B و C به دست آمده است. این تقارن، تقارن محوری نامیده می‌شود. شکل A نسبت به نقطه O قرینه شده و شکل D به دست آمده است. این نوع تقارن، تقارن مرکزی نامیده می‌شود.

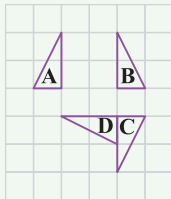
نکته

- ۱- با تبدیلات انتقال، دوران و تقارن می‌توان یک شکل را بر شکل دیگر منطبق کرد.
- ۲- یک شکل ممکن است با چند تبدیل مختلف بر شکل دیگر منطبق شود.
- ۳- تقارن مرکزی یک شکل نسبت به یک نقطه معادل دوران 180° شکل حول آن نقطه است.

مثال: چگونه با تبدیلهای پی‌درپی می‌توان شکل A را به شکل D تبدیل کرد؟

A $\xrightarrow{\text{تقارن محوری}}$ B $\xrightarrow{\text{تقارن محوری}}$ C $\xrightarrow{\text{دوران}}$ D

پاسخ:



تمرین

۱) اگر شکلی را با دو دوران متوالی 5° و 13° در خلاف جهت عقربه‌های

ساعت دوران دهیم، اندازه دوران برابر کدام است؟

۸° (۱)

۱۸° (۲)

-۱۸° (۳)

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۲) نتیجه ترکیب دو تقارن محوری که در آن محورها بر هم عمودند، کدام

تبدیل است؟

انتقال (۱)

تقارن مرکزی (۲)

تقارن محوری (۳)

هیچ کدام (۴)

۳) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی به طول وتر $\sqrt{128}$ سانتی‌متر را

نسبت به نقطه وسط وتر دوران داده‌ایم. مساحت شکل به دست آمده

کدام است؟

۶۴ (۲)

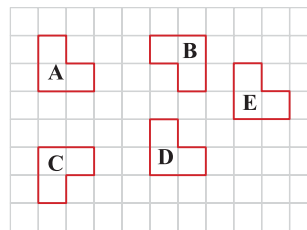
۳۲ (۱)

$16 + \sqrt{128}$ (۴)

$\sqrt{32}$ (۳)

مثال

۱) کدام شکل قرینه شکل A است؟



B (۱)

D (۲)

C (۳)

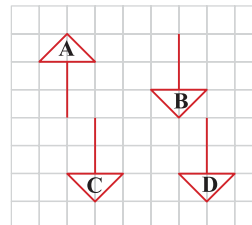
E (۴)

پاسخ: شکل C قرینه A نسبت به محور افقی است؛ دو شکل D و E

انتقال یافته شکل A و شکل B دوران یافته شکل A است.

پاسخ گزینه «۳» است.

۲) شکل A به ترتیب با کدام تبدیلات هندسی بر شکل D منطبق می‌شود؟



(۱) دوران 180° ، انتقال، انتقال

(۲) دوران 90° ، انتقال، تقارن

(۳) دوران 180° ، انتقال، تقارن

(۴) گزینه‌های ۱ و ۳

پاسخ: شکل A با دوران 180° به شکل B و شکل B با انتقال به شکل C

تبدیل شده است. شکل C را می‌توان هم با انتقال و هم با تقارن به شکل D

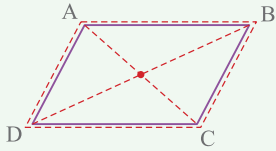
تبدیل کرد.

پاسخ گزینه «۴» است.

۳ استفاده از تبدیلات در اثبات خاصیت

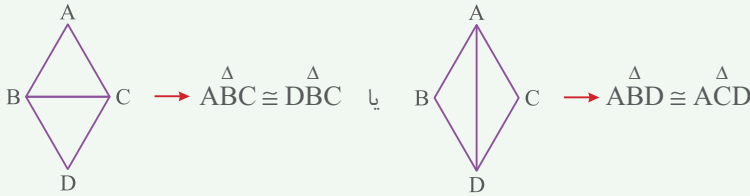
برای اثبات بعضی خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع یا دیگر چهارضلعی‌ها می‌توان از تبدیلات هندسی استفاده کرد.

مثال: چرا در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل مساوی‌اند؟



پاسخ: اگر متوازی‌الاضلاع را حول محل برخورد قطرهای 180° دوران دهیم، ضلع AD بر ضلع BC و ضلع AB بر ضلع DC منطبق می‌شود، پس اضلاع مقابل مساوی‌اند.

مثال: چرا هر قطر لوزی، آن را به دو مثلث هم‌نهشت تبدیل می‌کند؟



پاسخ: زیرا هر قطر لوزی محور تقارن آن است؛ اگر لوزی را از روی هر قطر آن تا بزنیم، با توجه به تبدیل تقارن، دو مثلث بر هم منطبق و هم‌نهشت می‌شوند.

تمرین

۱ در اثبات تساوی قطرهاى مستطیل از چه تبدیلی استفاده می‌شود؟

- ۱) انتقال
- ۲) دوران
- ۳) تقارن محوری
- ۴) هیچ کدام

۲ با کدام یک از تبدیلات زیر می‌توان تعیین کرد که شکلی مرکز تقارن دارد یا خیر؟

- ۱) انتقال و دوران
- ۲) انتقال
- ۳) تقارن محوری
- ۴) دوران

۳ کدام تبدیل نشان می‌دهد که «هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است»؟

- ۱) تقارن محوری
- ۲) انتقال
- ۳) دوران
- ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

مثال

۱ برای اثبات تساوی زاویه‌های مقابل در متوازی‌الاضلاع، کدام تبدیل استفاده می‌شود؟

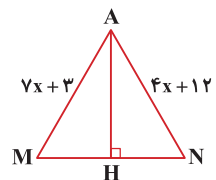
- ۱) انتقال
- ۲) دوران
- ۳) تقارن
- ۴) هیچ کدام

پاسخ:

اگر متوازی‌الاضلاع را حول محل برخورد قطرهایش 180° دوران دهیم، زاویه‌های مقابل بر هم منطبق می‌شوند، پس مساوی‌اند.

پاسخ گزینه «۲» است.

۲ در شکل زیر AH عمودمنصف پاره‌خط MN است. اندازه ضلع AM کدام است؟



- ۱) ۲۴
- ۲) ۳
- ۳) ۱۲
- ۴) ۲۰

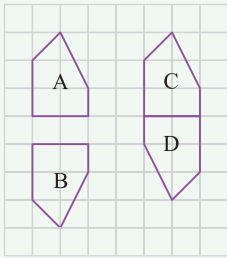
پاسخ:

اگر شکل را روی عمودمنصف AH تا بزنیم، دو مثلث بر هم منطبق می‌شوند، پس دو مثلث AHM و AHN هم‌نهشت‌اند. پس:

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \overline{AN} \Rightarrow 7x + 3 = 4x + 12 \Rightarrow 7x - 4x = 12 - 3 \\ \Rightarrow 3x &= 9 \Rightarrow x = 3 \\ \Rightarrow \overline{AM} &= 7x + 3 = 7 \times 3 + 3 = 24 \end{aligned}$$

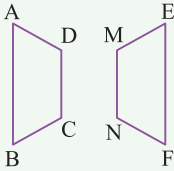
پاسخ گزینه «۱» است.

۱۴ هم‌نهشتی شکل‌ها (۱)



اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. در تصویر روبه‌رو شکل A با تبدیلات تقارن، انتقال و دوران به ترتیب بر شکل‌های B، C و D منطبق می‌شود و با آنها هم‌نهشت است. این مطلب را به صورت $A \cong B \cong C \cong D$ نمایش می‌دهیم.

وقتی دو شکل هم‌نهشت باشند، اجزای متناظر آنها (زاویه‌ها و ضلع‌ها) نیز با هم مساوی‌اند.



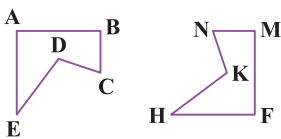
$$ABCD \cong EFMN \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{E} , \overline{AD} = \overline{ME} \\ \widehat{B} = \widehat{F} , \overline{AB} = \overline{EF} \\ \widehat{C} = \widehat{N} , \overline{BC} = \overline{NF} \\ \widehat{D} = \widehat{M} , \overline{DC} = \overline{MN} \end{cases}$$

تمرین

۱ کدام جمله درست است؟

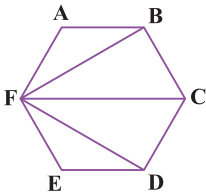
- ۱) اگر اضلاع دو شکل برابر باشند، آن دو شکل حتماً هم‌نهشت‌اند.
- ۲) اگر زاویه‌های دو شکل برابر باشند، آن دو شکل حتماً هم‌نهشت‌اند.
- ۳) همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه هم‌نهشت‌اند.
- ۴) مساحت شکل‌های هم‌نهشت مساوی است.

۲ دو شکل زیر هم‌نهشت‌اند. زاویهٔ H با کدام زاویه برابر است؟



- ۱) \widehat{A}
- ۲) \widehat{C}
- ۳) \widehat{E}
- ۴) \widehat{D}

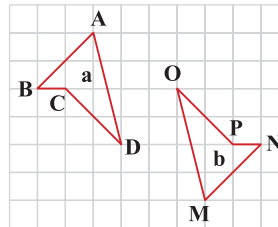
در شش‌ضلعی منتظم زیر، چند جفت شکل دوه‌دو هم‌نهشت هستند؟



- ۱) یک
- ۲) دو
- ۳) چهار
- ۴) سه

مثال

۱ اگر دو شکل a و b هم‌نهشت باشند، کدام گزینه درست نیست؟



- ۱) $\widehat{N} = \widehat{B}$
- ۲) $\overline{OP} = \overline{AD}$
- ۳) $\widehat{P} = \widehat{C}$
- ۴) $\overline{MN} = \overline{AB}$

پاسخ:

اگر شکل a را با دوران 18° بر شکل b منطبق کنیم، دو شکل هم‌نهشت‌اند و ضلع OP بر CD منطبق می‌شود.

پاسخ گزینهٔ «۲» است.

۲ در کاشی‌کاری زیر شکل‌های a و b بر کدام شکل منطبق می‌شوند؟



(همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع‌اند.)

- ۱) e
- ۲) d
- ۳) c
- ۴) بر همهٔ شکل‌ها منطبق می‌شوند.

پاسخ:

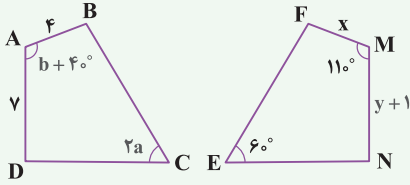
دو شکل a و b بر همهٔ شکل‌های c، d و e با تبدیلات انتقال، دوران و تقارن منطبق می‌شوند.

پاسخ گزینهٔ «۴» است.

۵ هم‌نهشتی شکل‌ها (۲)

با استفاده از تساوی اجزای متناظر در دو شکل هم‌نهشت، می‌توان با معلوم بودن زاویه‌ها یا اضلاع یکی از شکل‌ها، متناظر آنها را در شکل دیگر به دست آورد. برای این کار کافی است زاویه‌ها یا اضلاع متناظر در دو شکل را مشخص کنیم و مقدار آنها را مساوی هم قرار دهیم.

مثال: دو شکل مقابل هم‌نهشت‌اند. اندازه x ، y ، a و b را مشخص کنید.



پاسخ: چون دو شکل هم‌نهشت هستند، اجزای متناظر آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\overline{AB} = \overline{FM} \Rightarrow x = 4$$

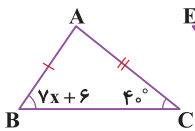
$$\overline{AD} = \overline{MN} \Rightarrow 7 = y + 1 \Rightarrow y = 6$$

$$\hat{C} = \hat{E} \Rightarrow 2a = 6^\circ \Rightarrow a = 3^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{M} \Rightarrow b + 4^\circ = 11^\circ \Rightarrow b = 11^\circ - 4^\circ \Rightarrow b = 7^\circ$$

تمرین

۱ دو مثلث زیر هم‌نهشت هستند. اندازه زاویه D چند درجه است؟



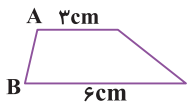
۹۰° (۱)

۱۰۰° (۲)

۸۵° (۳)

۹۵° (۴)

۲ اگر محیط شکل سمت چپ ۱۵ سانتی‌متر باشد، ضلع AB چقدر است؟ (دو شکل هم‌نهشت هستند).



۲cm (۱)

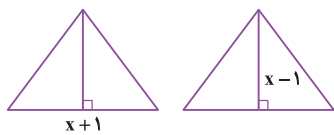
۳cm (۲)

۴cm (۳)

۵cm (۴)

۳ دو مثلث زیر هم‌نهشت‌اند. اگر مساحت هر یک ۱۲ سانتی‌متر

مربع باشد، مقدار x برابر است با:



۴ (۱)

۳ (۲)

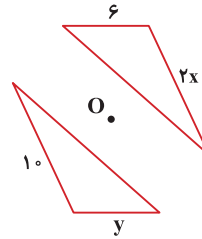
۵ (۳)

۲ (۴)

مثال

۱ دو مثلث زیر با دوران حول نقطه O بر هم منطبق می‌شوند. مقدار

$x + y$ برابر است با:



۵ (۱)

۶ (۲)

۱۱ (۳)

۱۶ (۴)

پاسخ: چون دو مثلث با دوران بر هم منطبق می‌شوند، هم‌نهشت‌اند. اضلاع متناظر آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \\ y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 5 + 6 = 11$$

پاسخ گزینه «۳» است.

۲ دو دوزنقه زیر با یکدیگر هم‌نهشت هستند. مقدار x کدام است؟



۲° (۱)

۱۲° (۲)

۱° (۳)

۳° (۴)

پاسخ: چون دوزنقه‌ها هم‌نهشت هستند، زاویه‌های متناظر آنها مساوی است. یکی از زاویه‌ها 6° است و با توجه به خاصیت خطوط موازی و خط مورب زاویه دیگر 12° می‌شود؛ بنابراین:

$$3x + 3^\circ = 12^\circ \Rightarrow 3x = 12^\circ - 3^\circ \Rightarrow 3x = 9^\circ \Rightarrow x = 3^\circ$$

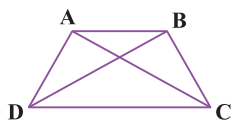
پاسخ گزینه «۴» است.

۶ با کدام تبدیل می‌توانیم نشان دهیم قطرهای لوزی منصف یکدیگرند؟

- (۱) با یک دوران 90° (۲) با یک دوران 180°
 (۳) با یک تقارن محوری (۴) با یک دوران 60°

۷ چهارضلعی ABCD دوزنقه متساوی‌الساقین است. در این شکل چند

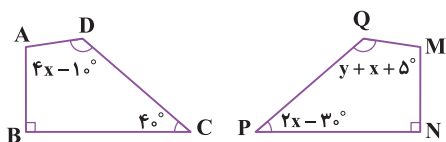
جفت مثلث، دوبه‌دو هم‌نهشت هستند؟



- (۱) ۴
 (۲) ۳
 (۳) ۲
 (۴) ۱

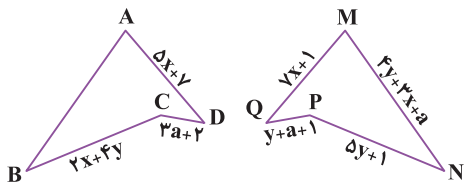
۸ چهارضلعی ABCD با چهارضلعی MNQP هم‌نهشت است. در

این صورت y برابر است با:



- (۱) 60°
 (۲) 70°
 (۳) 80°
 (۴) 90°

۹ دو شکل زیر هم‌نهشت‌اند. محیط چهارضلعی ABCD چقدر است؟



- (۱) ۸۷
 (۲) ۹۰
 (۳) ۹۴
 (۴) ۹۷

۱۰ شکل مقابل را 1395 بار و هر بار 90° به طور ساعت‌وار

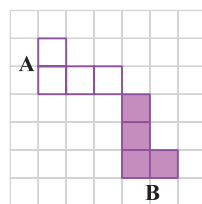


دوران می‌دهیم، سپس آن را سه بار نسبت به محور افقی قرینه می‌کنیم. کدام شکل به دست می‌آید؟

- (۱) (۲)
 (۳) (۴)

جمع‌بندی و مرور

۱ در شکل زیر، با کدام تبدیلات هندسی می‌توان شکل A را بر شکل B



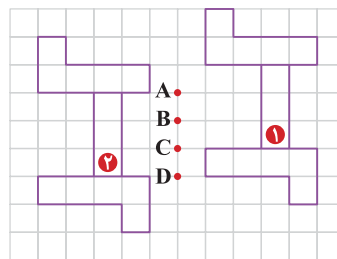
منطبق کرد؟

- (۱) دوران 90° ساعت‌وار، تقارن
 (۲) دوران 90° غیرساعت‌وار، تقارن
 (۳) تقارن
 (۴) همه گزینه‌ها

۲ ترکیب چهار تقارن با محورهای موازی کدام است؟

- (۱) یک دوران
 (۲) یک انتقال
 (۳) یک تقارن مرکزی
 (۴) یک تقارن محوری

۳ در شکل زیر، کدام نقطه مرکز دوران شکل (۱) برای تبدیل به شکل (۲)



است؟

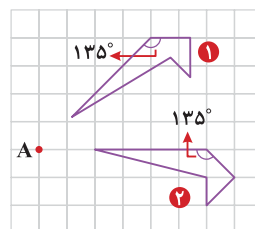
- A (۱)
 B (۲)
 C (۳)
 D (۴)

۴ اگر شکل را حول نقطه «م» به اندازه نیم‌دور در جهت حرکت

عقربه‌های ساعت بچرخانیم، کدام شکل به دست می‌آید؟

- (۱) (۲)
 (۳) (۴)

۵ در شکل زیر، شکل (۱) با چند درجه دوران حول نقطه A به شکل (۲)



تبدیل می‌شود؟

- (۱) 15°
 (۲) 30°
 (۳) 45°
 (۴) 90°

۷ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: n باید عددی باشد که تعداد قطرهای n ضلعی چهار برابر تعداد ضلع‌هایش باشد. با آزمایش کردن گزینه‌ها $n = 11$ به دست می‌آید، زیرا یازده ضلعی ۴۴ قطر دارد:

$$\frac{11 \times (11 - 3)}{2} = 44$$

روش دوم: $n(n-3) = 4n \Rightarrow n(n-3) = 4n \Rightarrow n^2 - 3n - 4n = 0 \Rightarrow n^2 - 7n = 0 \Rightarrow n(n-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 & \text{غیرممکن} \\ n = 7 \end{cases}$

۸ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا تعداد رأس‌ها را که با تعداد اضلاع برابر است، مشخص می‌کنیم: $\frac{n(n-3)}{2} = 90 \Rightarrow n(n-3) = 180$, $180 = 15 \times 12 \Rightarrow n = 15$
این n ضلعی محدب، ۱۵ ضلعی است و از هر رأس آن ۱۲ قطر می‌گذرد.

۹ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	...
تعداد قطر‌ها	۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰	۲۷	...

$\begin{matrix} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 \end{matrix}$

با نوشتن قطرهای n ضلعی (با شروع از ۳) و الگویابی می‌توان به نتیجه رسید. با توجه به جدول، با اضافه شدن یک ضلع به تعداد ضلع‌های یک n ضلعی، $(n-1)$ قطر به تعداد قطرهای آن اضافه می‌شود.

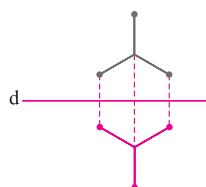
۱۰ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به جدول رسم‌شده برای پاسخ سؤال ۹ متوجه می‌شویم که هفت ضلعی ۱۴ قطر دارد و از هفت ضلعی به بعد، تعداد قطر‌ها بیشتر از دو برابر تعداد ضلع‌هاست.

قدم ۹. محور تقارن و تقارن محوری

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳

گزینه ۱: دو محور تقارن دارد. گزینه ۲: دو محور تقارن دارد. گزینه ۳: یک محور تقارن دارد. گزینه ۴: پنج محور تقارن دارد.



۲ پاسخ ۱ ۲ ۳

کافی است نقاط شکل را به خط d (به صورت عمود) وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳

در تقارن محوری اندازه شکل تغییر نمی‌کند؛ بنابراین محیط و مساحت آن ثابت است.

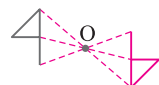
قدم ۹. مرکز تقارن و تقارن مرکزی

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



شکل فقط مرکز تقارن دارد، زیرا با دوران 180° بر خودش منطبق می‌شود.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳



۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مثلث ABC حول نقطه A ، 90° در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد، بر مثلث ADE منطبق می‌شود.

قدم ۹. محور و مرکز تقارن در چندضلعی‌ها

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳

گزینه ۱: لوزی چهار ضلع و دو محور تقارن دارد. گزینه ۲: مستطیل چهار ضلع و دو محور تقارن دارد.

گزینه ۳: مثلث متساوی‌الساقین سه ضلع و یک محور تقارن دارد. گزینه ۴: هشت ضلعی منتظم هشت ضلع و هشت محور تقارن دارد.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

هر شکل می‌تواند یک مرکز تقارن داشته باشد و بیش از یکی ممکن نیست.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل معلوم می‌شود که چهار محور تقارن دارد.



۹ قدم ۴. تقارن در چندضلعی‌های منتظم

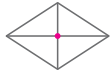
۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

در یک چندضلعی منتظم، تعداد محورهای تقارن با تعداد اضلاع برابر است؛ بنابراین n ضلعی مورد نظر ده ضلعی منتظم است و تعداد قطرهای آن برابر است با:

$$\frac{10 \times (10 - 3)}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

در لوزی، محل برخورد قطرها مرکز تقارن است.



۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

چندضلعی منتظم مورد نظر ۹ ضلع دارد؛ بنابراین مرکز تقارن ندارد و ۹ محور تقارن دارد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27 \xrightarrow{\text{حس و آزمایش}} n = 9$$

۹ قدم ۵. تقارن چرخشی

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر یک هشت ضلعی منتظم 45° دوران کند، بر خودش منطبق می‌شود، پس تقارن چرخشی دارد.

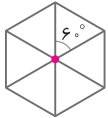
$$360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ اگر شکل را بچرخانیم، در حالت‌هایی بر خودش منطبق می‌شود؛ اما در گزینه ۳ که دوزنقه است تقارن چرخشی وجود ندارد.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر شش ضلعی منتظم را به اندازه 60° دوران دهیم، بر خودش منطبق می‌شود.



جمع‌بندی و مرور ۹ قدم

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

شکل گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ هر کدام یک محور تقارن دارند؛ شکل گزینه ۴ دو محور تقارن دارد.

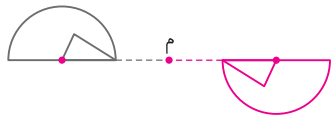
۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

هر یک از شکل‌های لوزی، مستطیل و بیضی دو محور تقارن دارد.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

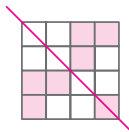
لوزی دو محور تقارن و مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن دارد. پنج ضلعی منتظم پنج محور تقارن دارد، اما مرکز تقارن ندارد. شش ضلعی منتظم شش محور تقارن و همچنین مرکز تقارن دارد.

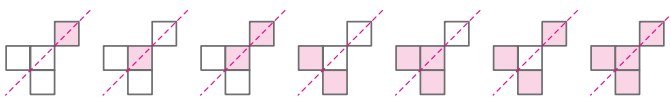
۴ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



۵ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

مربع‌های مختلفی را می‌توان رنگ کرد تا شکل یک محور تقارن داشته باشد، حداقل تعداد مربع‌هایی که باید رنگ شود، ۲ تا است.





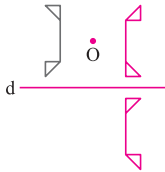
۶ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

۷ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب تقارن چرخشی 18° ، 9° و 12° دارند.

۸ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

شکل را نسبت به نقطه O قرینه و قرینه شکل به دست آمده را نسبت به خط d رسم می‌کنیم.



۹ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

در این حالت، مرکز تقارن محل برخورد دو قطر عمود بر هم آن شکل است، مثل لوزی.

۱۰ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

چون این n ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد، تعداد ضلع‌هایش فرد است. عدد هر گزینه را با توجه به تعداد قطرهای داده شده بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱: $\frac{n(n-3)}{2} = 9 \Rightarrow n(n-3) = 18 = 6 \times 3 \Rightarrow n = 6$

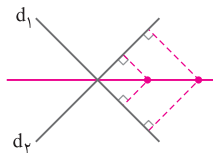
گزینه ۲: $\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n(n-3) = 40 = 8 \times 5 \Rightarrow n = 8$

گزینه ۳: $\frac{n(n-3)}{2} = 27 \Rightarrow n(n-3) = 54 = 9 \times 6 \Rightarrow n = 9 \rightarrow$ نه ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

گزینه ۴: $\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow n(n-3) = 70 = 10 \times 7 \Rightarrow n = 10$

قدم ۱۰. خطوط موازی (۱)

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

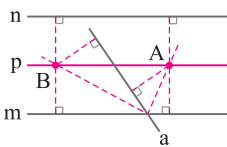


دو خط متقاطع هستند، پس هر نقطه که روی نیمساز زاویه بین آنها باشد، از دو خط به یک فاصله است.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

باید از یک نقطه خارج خط، خطی موازی با آن خط رسم کنیم، پس فقط یک خط می‌توان رسم کرد.

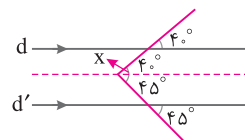
۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



خط‌های موازی m و n را رسم می‌کنیم. خطی موازی این دو خط مانند خط p که از آنها به یک فاصله باشد در نظر می‌گیریم. خط a و m متقاطع‌اند، پس نقطه‌ای که روی نیمساز زاویه بین آنها و نیز روی p باشد، از این سه خط به یک فاصله است، یعنی نقاط A و B.

قدم ۱۰. ۲. خطوط موازی (۲)

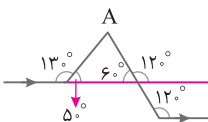
۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



$\Rightarrow x = 45^\circ + 45^\circ = 85^\circ$

کافی است از رأس زاویه x خطی به موازات d و d' رسم کنیم:

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

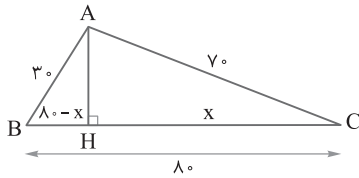


یکی از خطوط موازی را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث به وجود آید، سپس از خاصیت خطوط موازی و مورب استفاده می‌کنیم. در نتیجه:

$\hat{A} = 180^\circ - (50^\circ + 6^\circ) = 70^\circ$

۱۰. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

شکل فرضی مثلث را رسم می‌کنیم. خواسته مسئله اندازه CH است:



$$\Delta AHB: \overline{AH}^2 = 30^2 - (80-x)^2 = 900 - (6400 - 160x + x^2)$$

$$= 900 - 6400 + 160x - x^2 = -5500 + 160x - x^2 \quad (1)$$

$$\Delta AHC: \overline{AH}^2 = 70^2 - x^2 = 4900 - x^2 \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow -5500 + 160x - x^2 = 4900 - x^2 \Rightarrow 160x = 4900 + 5500 = 10400 \Rightarrow x = \frac{10400}{160} = 65$$

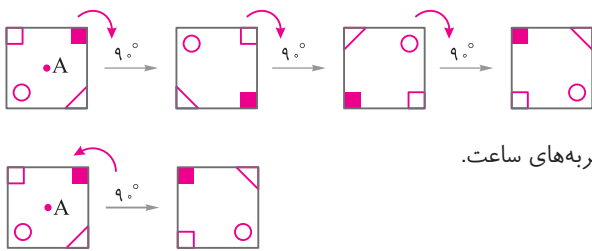
قدم ۲۴. ۱. تبدیلات هندسی (۱)

۱. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

در تبدیل انتقال، جهت و وضعیت شکل تغییر نمی‌کند.

۲. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:



روش دوم: 270° در جهت عقربه‌های ساعت، یعنی همان 90° خلاف جهت عقربه‌های ساعت.

۳. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

شکل M را هم با انتقال و هم با دوران 180° حول نقطه مشترک دو مربع می‌توان بر شکل N منطبق کرد.

قدم ۲۴. ۲. تبدیلات هندسی (۲)

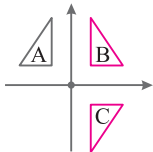
۱. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

هرگاه دو یا چند دوران متوالی با یک مرکز دوران روی یک شکل اعمال شود، می‌توان با حاصل جمع دوران‌ها شکل اول را بر شکل دوم منطبق کرد:

$$5^\circ + 13^\circ = 18^\circ$$

اما چون در دوران 180° جهت مهم نیست، هم 180° و هم -180° درست است.

۲. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

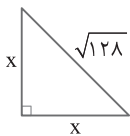


به طور مثال شکل A را نسبت به محور عمودی قرینه کرده‌ایم و شکل B به دست آمده، سپس شکل B را نسبت به محور افقی قرینه کرده‌ایم و شکل C به دست آمده است. با کمی دقت مشاهده می‌کنید که شکل C دوران یافته (180°) شکل A حول محل برخورد دو محور است که نشان‌دهنده تقارن مرکزی شکل است.

۳. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

چون در تبدیل دوران مساحت تغییر نمی‌کند، مساحت مثلث دوم با مساحت مثلث اول برابر است؛ بنابراین از رابطه فیثاغورس اضلاع قائمه مثلث و سپس مساحت را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + x^2 = (\sqrt{128})^2 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$



قدم ۲۴. ۳. استفاده از تبدیلات در اثبات خاصیت

۱. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

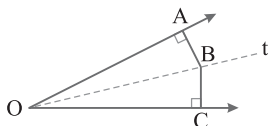
برای اثبات تساوی قطره‌های مستطیل با تبدیلات هندسی کافی است مستطیل را حول محل برخورد قطرهایش 180° دوران دهیم.

۲. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر شکلی با دوران 180° حول نقطه‌ای روی خودش منطبق شود، مرکز تقارن دارد.

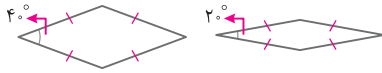
۳. پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

با تبدیل تقارن، دو مثلث حول نیمساز (Ot) بر هم منطبق می‌شوند، پس $\overline{AB} = \overline{BC}$ ، در نتیجه هر نقطه روی نیمساز از هر ضلع زاویه به یک فاصله است.

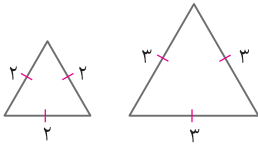


قدم ۲۴ ۴. هم‌نهشتی شکل‌ها (۱)

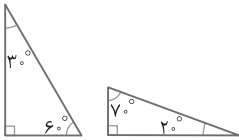
۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



گزینه ۱: نادرست؛ دو لوزی با اضلاع مساوی ولی زاویه‌های متفاوت می‌توان رسم کرد.



گزینه ۲: نادرست؛ دو مثلث متساوی‌الاضلاع با اضلاع متفاوت می‌توان رسم کرد در حالی که زاویه‌های هر دو مثلث 60° است.



گزینه ۳: نادرست؛ دو مثلث قائم‌الزاویه می‌توان رسم کرد که هم‌اندازه نباشند.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

دو شکل را می‌توان با دو تبدیل (دوران 90° پادساعتگرد و تقارن محوری) بر هم منطبق کرد. در نتیجه زاویه E متناظر زاویه H می‌شود.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

۳ جفت شکل $\triangle ABF \cong \triangle EDF$, $\triangle FBC \cong \triangle FDC$, $\triangle ABCF \cong \triangle CDEF \Rightarrow$

قدم ۲۴ ۵. هم‌نهشتی شکل‌ها (۲)

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

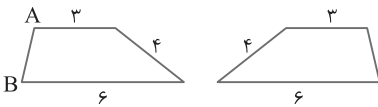
$$\hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{F} = 40^\circ, \quad \hat{A} = \hat{D}$$

چون دو مثلث هم‌نهشت‌اند، طبق تساوی اجزای متناظر داریم:

$$\hat{B} = \hat{E} \Rightarrow 7x + 6 = 8x - 1 \Rightarrow 7x - 8x = -6 - 1 \Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7$$

$$\hat{E} = 8x - 1 = 8 \times 7 - 1 = 55^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180^\circ - (40^\circ + 55^\circ) = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



دو چهارضلعی داده‌شده هم‌نهشت هستند و طبق اطلاعات مسئله اندازه سه ضلع آنها مشخص است، بنابراین:

$$\overline{AB} = 15 - (4 + 3 + 6) = 2 \text{ cm}$$

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

چون دو مثلث هم‌نهشت‌اند، ارتفاع‌های نظیر و اضلاع نظیر برابرند.

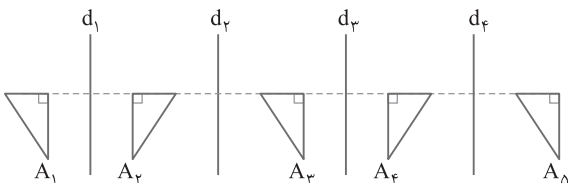
$$S = \frac{\overbrace{(x+1)(x-1)}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} = 12 \xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}} x^2 - 1 = 24 \Rightarrow x^2 = 24 + 1 = 25 \Rightarrow x = 5$$

قدم ۲۴ جمع‌بندی و مرور

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

شکل A را با تبدیلات هر سه گزینه می‌توان بر شکل B منطبق کرد.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



اگر به تعداد فرد، محور تقارن موازی با هم داشته باشیم، برای رسیدن از شکل اول به شکل آخر باید یک انتقال و یک تقارن یا یک تقارن و یک انتقال انجام شود. مثلاً شکل A_1 ابتدا با تقارن بر A_2 ، سپس با انتقال بر A_4 منطبق می‌شود. اما اگر تعداد تقارن‌ها (با محورهای موازی) زوج باشد، مانند این است که فقط یک انتقال انجام شده است. مثلاً شکل A_1 با انتقال بر A_5 منطبق می‌شود.

۳ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر شکل ① را 180° حول نقطه B دوران دهیم، بر شکل ② منطبق می‌شود.

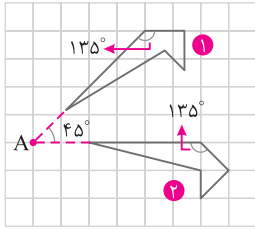
۴ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

نیم دور یعنی 180° درجه.

۵ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر از یک نقطه شکل ۱ به نقطه A وصل و از آنجا به متناظرش در شکل ۲ وصل کنیم، زاویه به وجود آمده در رأس A زاویه دوران است، پس:

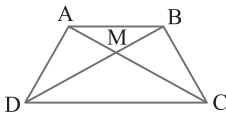
$$\widehat{A} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$



۶ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر لوزی را حول محل برخورد قطرهاش 180° دوران دهیم، بر خودش منطبق می‌شود؛ پس ثابت می‌شود که قطرهای لوزی همدیگر را نصف می‌کنند. با دو انتقال هم می‌توان منصف بودن قطرها را نشان داد.

۷ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\triangle AMD \cong \triangle BMC \quad \triangle ADC \cong \triangle BCD \quad \triangle ABD \cong \triangle ABC$$

۸ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\widehat{P} = \widehat{C} \Rightarrow 2x - 3^\circ = 4^\circ \Rightarrow 2x = 7^\circ \Rightarrow x = \frac{7^\circ}{2} = 3.5^\circ, \quad \widehat{D} = 4x - 1^\circ = 4 \times 3.5^\circ - 1^\circ = 14^\circ - 1^\circ = 13^\circ$$

$$\widehat{Q} = \widehat{D} = 13^\circ \Rightarrow \widehat{Q} = y + 3.5^\circ + 5^\circ = 13^\circ \Rightarrow y = 13^\circ - 4^\circ = 9^\circ$$

۹ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\overline{AD} = \overline{MQ} \Rightarrow 5x + 7 = 7x + 1 \Rightarrow 5x - 7x = 1 - 7 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

$$\overline{BC} = \overline{NP} \Rightarrow 2x + 4y = 5y + 1 \xrightarrow{x=3} 2 \times 3 - 1 = 5y - 4y \Rightarrow y = 5$$

$$\overline{CD} = \overline{PQ} \Rightarrow 3a + 2 = y + a + 1 \xrightarrow{y=5} 3a + 2 = 5 + a + 1 \Rightarrow 3a - a = 6 - 2 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\overline{AB} = \overline{MN} = 4y + 3x + a = 4 \times 5 + 3 \times 3 + 2 = 31$$

$$\text{محیط } ABCD = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{BC} = 31 + \underbrace{(5 \times 3 + 7)}_{22} + \underbrace{(3 \times 2 + 2)}_8 + \underbrace{(2 \times 3 + 4 \times 5)}_{26} = 87$$

۱۰ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

هر چهار بار دوران 90° یعنی یک دوران 360° که شکل روی خودش منطبق می‌شود.

$$\begin{array}{r} 1395 \quad | \quad 4 \\ - 1392 \quad 348 \\ \hline 3 \end{array} \Rightarrow 1395 \text{ بار دوران } 90^\circ \text{ مثل سه بار دوران } 90^\circ \text{ است.}$$

پس شکل را سه بار (هر بار 90° در جهت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم که شکل به دست می‌آید، سپس این شکل را سه بار حول محور افقی قرینه می‌کنیم (سه بار قرینه حول محور افقی مانند یک بار قرینه است) که نتیجه، گزینه ۴ می‌شود.

قدم ۲۵. ۱. هم‌نهشتی مثلث‌ها (۱)

۱ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر سه زاویه و یک ضلع از دو مثلث با هم برابر باشند، مثلث‌ها به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند. اگر سه ضلع و یک زاویه از دو مثلث برابر باشند، مثلث‌ها به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. اما اگر یک زاویه و دو ضلع از دو مثلث برابر باشند، چون معلوم نیست که آن زاویه بین دو ضلع قرار می‌گیرد یا نه، نمی‌توان به طور یقین دو مثلث را هم‌نهشت در نظر گرفت.

۲ پاسخ ۱ ۲ ۳ ۴

دو زاویه متقابل به رأس در شکل وجود دارد که مساوی‌اند، از طرفی در هر دو مثلث یک زاویه 5° نیز وجود دارد؛ بنابراین زاویه سوم مثلث‌ها نیز برابر می‌شود و دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.