

پاسخ نامه
ریاضی ۹م
شهاب

حمیدرضا بیات
مرتضی خمایی ابدی
کیان کریمی خراسانی



پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۹م شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۵۰ پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی در انتهای کتاب؛
- پاسخ‌نامه تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای در جلد دوم کتاب؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها به تمرین‌های دشوار (☆) و تمرین‌های خیلی دشوار (☆☆)

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

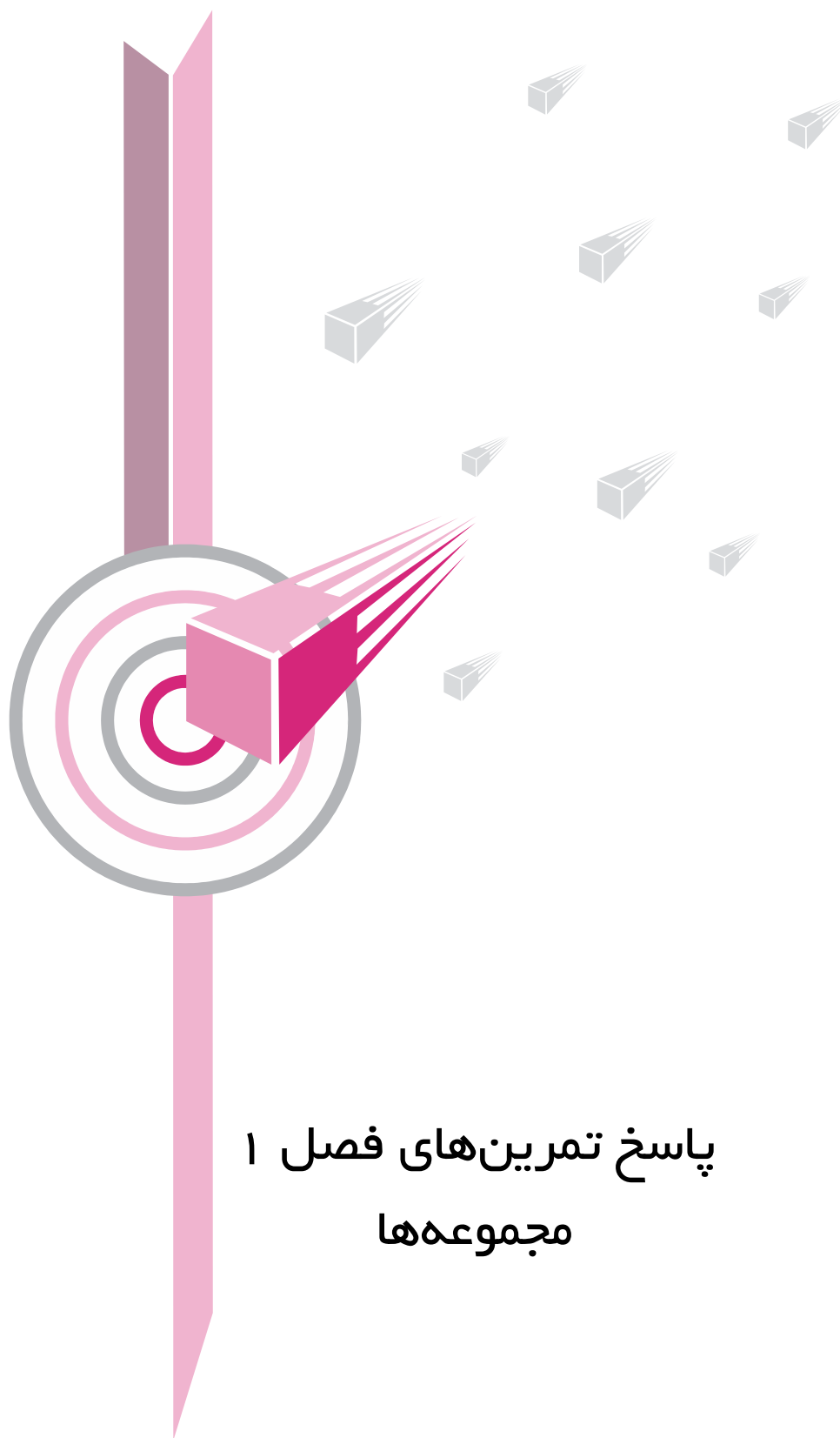
هم‌چنین از خانم‌ها حمیده نوروزی و مینا غلام‌احمدی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و ترسیم شکل‌ها را بر عهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

bayat@mobtakeran.com

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادهای:

| | |
|-----|--|
| ۵ | فصل اول: پاسخ تمرین‌های فصل اول: مجموعه‌ها |
| ۱۳ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول: مجموعه‌ها |
| ۱۹ | فصل دوم: پاسخ تمرین‌های فصل دوم: عددهای حقیقی |
| ۲۷ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم: عددهای حقیقی |
| ۳۳ | فصل سوم: پاسخ تمرین‌های فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه |
| ۵۱ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه |
| ۵۹ | فصل چهارم: پاسخ تمرین‌های فصل چهارم: توان و ریشه |
| ۶۵ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم: توان و ریشه |
| ۷۱ | فصل پنجم: پاسخ تمرین‌های فصل پنجم: عبارات جبری |
| ۸۳ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم: عبارات جبری |
| ۸۹ | فصل ششم: پاسخ تمرین‌های فصل ششم: خط و معادله‌های خطی |
| ۱۰۳ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم: خط و معادله‌های خطی |
| ۱۱۱ | فصل هفتم: پاسخ تمرین‌های فصل هفتم: عبارات گویا |
| ۱۱۹ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم: عبارات گویا |
| ۱۲۷ | فصل هشتم: پاسخ تمرین‌های فصل هشتم: حجم و مساحت |
| ۱۳۵ | پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم: حجم و مساحت |



پاسخ تمرین‌های فصل ۱
مجموعه‌ها



فصل ۱ : مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه‌ها

۱. عبارتهای «الف»، «ب» و «ج» یک مجموعه را نمی‌سازند. زیرا اعضای آن‌ها مشخص نیست. ولی عبارت «د» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

{۲, ۳, ۴, ۵}

۲.

ب) نادرست است، $\{0\} \in A$

۳. الف) نادرست است، $1 \notin A$

د) نادرست است، $3 \in A$

ج) درست است.

۴. این مجموعه در صورتی تک عضوی است که داشته باشیم $3x - 5 = 25 - 2x$.

$$3x - 5 = 25 - 2x \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \{3x - 5, 25 - 2x\} = \{7\}$$

$$A \text{ اعضای } B = \text{مجموع اعضای } A \Rightarrow x + z + w + 4 + 9 = x + y + 7 + 8 \Rightarrow z + w = y + 2$$

۵.

$$\{x, y, z, w\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

از طرفی اعداد به کار رفته در مجموعه‌ها عبارت‌اند از: ۱، ۲، ... و ۹، در نتیجه:

با توجه به تساوی $z + w = y + 2$ می‌توان نتیجه گرفت که هیچ‌کدام از اعداد y ، w و z نمی‌توانند ۵ باشند. در نتیجه $x = 5$.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

{-۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱}

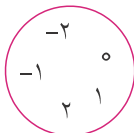
۶.

۷. کافی است هر بار یک عضو را حذف کنیم.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}, \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

۸. نمودار ون این مجموعه به صورت روبه‌روست:



هم‌چنین نمایش این مجموعه به کمک نمادهای ریاضی و عضوها به صورت زیر است:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

۹.

- الف) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 14\}$ ب) $\{0, 2, 4, \dots, 98\}$
 ج) $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{49}\}$ د) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
 ه) $\{0, 17, 34, \dots\}$ و) $\{0, 17, 34, \dots\}$
 ز) $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$

$$C \subseteq B \subseteq A$$

۱۰. اگر عددی مضرب ۱۸ باشد مضرب ۹ و ۳ نیز است. همین‌طور هر عدد مضرب ۹، مضرب ۳ نیز است:

۱۱. در یک مجموعه، عضوهای یکسان را یک عضو در نظر می‌گیریم.

$$A = \{\{1, 1, 2\}, \{1, 2, 2\}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2\}\}$$

دو زیرمجموعه دارد $\rightarrow \{\}, \{\{1, 2\}\}$: زیرمجموعه‌های A

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6 \\ 2a + b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 6 = 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \{a^2, 2b + a, 2b - \frac{a}{2}\} = \{4, 10, 13\}$$

۱۲.

۱۳. می‌دانیم دو مجموعه زمانی با هم مساوی هستند که عضوهای یکسان داشته باشند. در این‌جا دو حالت وجود دارد:

x و y اعداد طبیعی نیستند $\rightarrow x = -4, y = -4, 1 - y = 5 \Rightarrow x = -4, x + 2 = -2$: حالت اول

x و y اعداد طبیعی هستند $\rightarrow x = 3, y = 3, 1 - y = -2 \Rightarrow x = 3, x + 2 = 5$: حالت دوم

$$\Rightarrow x + y = 3 + 3 = 6$$

۱۴. با حذف هر عضو از مجموعه ۲۰ عضوی یک زیرمجموعه ۱۹ عضوی به دست می‌آید. در نتیجه این مجموعه ۲۰ زیرمجموعه ۱۹ عضوی دارد.

$$\{2, 5, 10, 17, \dots\}$$

۱۵.

$$\{x \mid \frac{2^x}{x} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}\}$$

۱۶.

الف) $\{2x + 1 \mid -10 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{Z}\}$ ب) $\{10x \mid -10 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$ ۱۷.

ج) $\{5^x \mid x \in \mathbb{W}\}$ د) $\{5k + 3 \mid k \in \mathbb{W}\}$

ه) $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{W}\}$ و) $\{3^x \mid x \in \mathbb{W}\}$

۱۸. تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل a باشد و شامل b نباشد برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های $\{c, d\}$ ؛ یعنی ۴ زیرمجموعه:

$$\{\} \rightarrow \{\underline{a}\}$$

$$\{d\} \rightarrow \{\underline{a}, d\}$$

$$\{c\} \rightarrow \{\underline{a}, c\}$$

$$\{c, d\} \rightarrow \{\underline{a}, c, d\}$$

حالت اول: $b = 0 \Rightarrow \{0, a - 1, 2\} = \{1, a, 0\} \Rightarrow a = 2 \checkmark$ ۱۹.

حالت دوم: $b = a - 1 \Rightarrow \{0, b, b + 2\} = \{1, \underline{b+1}, b\} \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1, a = 0 \checkmark$

حالت سوم: $b = b + 2$ (امکان ندارد)

$$\Rightarrow a + b = 2 \text{ یا } a + b = -1$$

۲۰. عضو ۳

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{4}}, \frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{4}{\sqrt{16}} \right\} \Rightarrow B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

۲۱. تعداد مجموعه‌های A برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ است. زیرا هر کدام از اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۰ می‌توانند در A باشند یا نباشند.

$$A \text{ تعداد مجموعه‌های } = 2^6 = 64$$

۲۲. الف) مجموعه B ، ۱۵ عضو و مجموعه C ، ۱۶ عضو دارد.

ب) حالت اول: مجموعه B ، ۳۱ عضو دارد. در این صورت مجموعه C می‌تواند ۳۲ یا ۳۳ عضو داشته باشد.

حالت دوم: مجموعه B ، ۳۲ عضو دارد. در این صورت مجموعه C باید ۳۳ عضو داشته باشد.

۲۳.

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با تعداد پاره‌خط‌هایی که n نقطه می‌سازند:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{20 \times 19}{2} = 190$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۲۰ عضوی برابر است با:

$$\left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots \right\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

۲۴.

الف) $\{(-1)^{n+1}n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۲۵.

ب) $\{(-1)^n \times 2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{(-1)^n \times 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\{-1, -2, 3, 4, -5, -6, \dots\} = \left\{ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

۲۶.

۲۷. حالت اول: کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۵ باشد. در این صورت هر کدام از اعداد ۲ و ۳ و ۴ می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد حالات $2^3 = 8$ تا است.

حالت دوم: کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۶ باشد. تعداد حالات: $2^3 = 8$

حالت سوم: کوچک‌ترین عضو ۳ و بزرگ‌ترین عضو ۷ باشد. تعداد حالات: $2^3 = 8$

حالت چهارم: کوچک‌ترین عضو ۴ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد. تعداد حالات: $2^3 = 8$

در مجموع $4 \times 8 = 32$ زیرمجموعه وجود دارد.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$$A = \{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \rightarrow \text{عضو ۵} \quad .28$$

$$B = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$A - C = \{1, 2, 3\} \Rightarrow (A - C) \cap (B - A) = \emptyset \quad .29$$

$$B - A = \{4, 5\}$$

$$B - A = \{2, 3\} \quad .30$$

$$\underbrace{(A \cup B)}_B \cap \underbrace{(A \cup C)}_C = B \cap C = B \quad .31$$

$$\{b\}, \{a, c, d\} \quad \{c\}, \{a, b, d\} \quad \{d\}, \{a, b, c\} \quad .32$$

$$Z \cap (W \cup N) \cap Q = Z \cap W \cap Q = W \quad .33$$

.34 الف) نادرست است. زیرا: $W - N = \{0\}$.

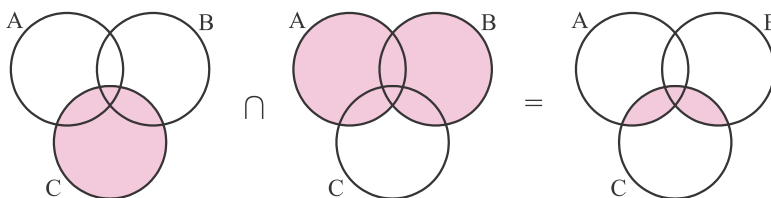
ب) نادرست است. زیرا: $W \cap Q = W$.

ج) درست است. هر عدد حسابی یک عدد گویا نیز است.

$$x - y = 17 - 6 = 11 \quad .35$$

اعداد ۱۷ و ۶ باید در هر دو مجموعه سمت چپ وجود داشته باشد پس $x = 17$ و $y = 6$.

.36 گزینه «د»



$$\emptyset \cup [A \cap (A \cup B)] = \emptyset \cup [A] = A \quad .37$$

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \quad .38$$

گزینه «د»

$$\text{الف) } A' \cap (A' \cap B') = A' \cap B' \quad .39$$

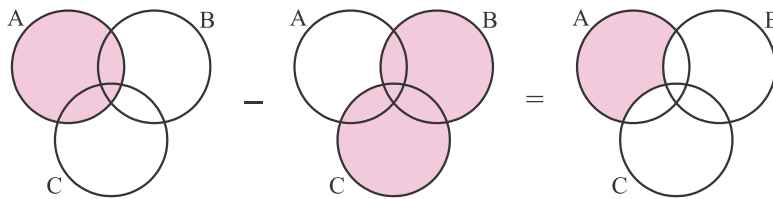
$$\text{ب) } (A \cap B) \cap (A \cap B') = \underbrace{A \cap A}_A \cap \underbrace{B \cap B'}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \quad .40$$

$$n(A \cup B) = n(A) + \underbrace{n(B) - n(A \cap B)}_{n(B - A)} \Rightarrow v = 5 + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 2$$



۴۱. گزینه «الف»



۴۲. $n(\text{نوشابه ل چای}) = n(\text{چای}) + n(\text{نوشابه}) - n(\text{نوشابه ل چای}) \Rightarrow n(\text{نوشابه ل چای}) = ۱۸ + ۱۷ - ۷ = ۲۸$

$n(\text{نه نوشابه}) = ۳۰ - n(\text{نوشابه ل چای}) = ۳۰ - ۲۸ = ۲$

۴۳. الف) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ و مجموعه \mathbb{Z} نسبت به تفریق بسته است.

ب) مجموعه اعداد گویا نسبت به تفریق بسته است.

ج) مجموعه \mathbb{Z} نسبت به تفریق بسته است.

د) مجموعه \mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست. مثال $۳ \notin \mathbb{N}$ و $۲ - ۵ = -۳$.

۴۴. مجموعه A باید اعضای ۱، ۲ و ۵ را داشته باشد. بنابراین ۴ حالت مختلف برای A می توان نوشت:

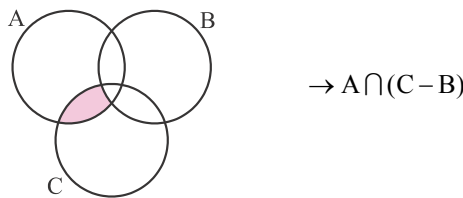
$A = \{۱, ۲, ۵\}$ یا $\{۱, ۲, ۳, ۵\}$ یا $\{۱, ۲, ۴, ۵\}$ یا $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

$M = \mathbb{Z}$
 $A' = \{۱, ۲, ۳\} \Rightarrow A = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۴, ۵, ۶, \dots\} \Rightarrow A - B = \{۴, ۵\}$

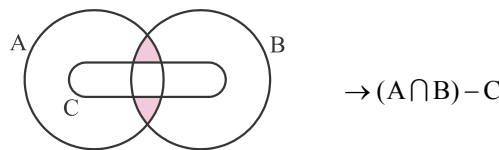
$M = \mathbb{Z}$
 $B' = \{۲, ۳, ۴, ۵\} \Rightarrow B = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۶, ۷, \dots\}$

$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \Rightarrow (A - B) \cap (A - C) = \emptyset \cap (A - C) = \emptyset$

۴۷. گزینه «ب»



۴۸. گزینه «ج»



$n(A \cup B) = n(B - A) + n(A \cap B) + n(A - B) \Rightarrow n(A \cup B) = ۴ + ۳ + ۳ = ۱۰$

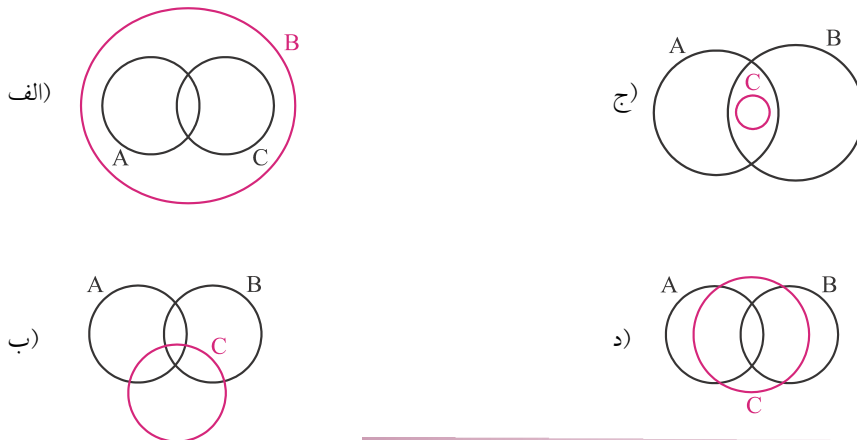
۵۰. اگر A دربرگیرنده قبول شدگان ریاضی و B شامل قبول شدگان فیزیک باشد:

$n(A' \cap B') = n(M) - n(A \cup B)$
 مجموعه مرجع

$n(A' \cap B') = ۱۰, n(M) = ۵۵ \Rightarrow n(A \cup B) = ۵۵ - ۱۰ = ۴۵$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۴۵ = ۳۰ + ۳۵ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۶۵ - ۴۵ = ۲۰$





۵۲. الف) بله. زیرا هر عضوی که در C وجود دارد در D نیز وجود دارد.

ب) بله. زیرا تمام عضوهایی که در C یا D وجود دارد در D نیز وجود دارد.

ج) بله. زیرا نمی‌توان عضوی در E پیدا کرد که در F نباشد.

د) خیر. ممکن است عضوی در E وجود داشته باشد که در F نباشد.

۵۳. مجموعه X باید عضوهای ۳ و ۴ را داشته باشد.

$$X = \{3, 4\} \text{ یا } \{1, 3, 4\} \text{ یا } \{2, 3, 4\} \text{ یا } \{1, 2, 3, 4\}$$

۵۴. الف) در سمت چپ تساوی عضوهای ۳ و ۶ وجود دارد پس در سمت راست نیز باید وجود داشته باشد. به این ترتیب $\{x, y\} = \{3, 6\}$.

در سمت راست تساوی عضوهای ۵ و ۹ وجود دارد در نتیجه در سمت چپ تساوی نیز باید وجود داشته باشند. $\{u, z\} = \{9, 5\}$.

ب) هر دو مجموعه سمت چپ عضو ۳ را دارند در نتیجه عضو C در سمت راست تساوی برابر است با ۳.

با توجه به این که در سمت راست عضو ۲ وجود دارد می‌توان نتیجه گرفت $a = b = 2$.

۵۵. فرض کنید تعداد کل مردم صد نفر هستند. در این صورت ۸۵ نفر انگلیسی صحبت می‌کنند و ۷۵ نفر فرانسوی صحبت می‌کنند.

$$n(\text{فرانسوی} \cap \text{انگلیسی}) = n(\text{فرانسوی}) + n(\text{انگلیسی}) - n(\text{فرانسوی} \cup \text{انگلیسی})$$

$$\Rightarrow 100 = 85 + 75 - n(\text{فرانسوی} \cap \text{انگلیسی}) \Rightarrow n(\text{فرانسوی} \cap \text{انگلیسی}) = 60$$

پس ۶۰٪ مردم هر دو زبان را صحبت می‌کنند.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 3$$

$$n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 2$$

$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) = 2$$

$$n(C - A) = n(C) - n(C \cap A) = 4$$

$$n(C - B) = n(C) - n(C \cap B) = 5$$

$$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = ?$$

$$\frac{n(A - B) + n(B - C) + n(C - A)}{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(C \cap A) - n(B \cap C)} = \frac{n(B - A) + n(C - B) + n(A - C)}{n(B) + n(C) + n(A) - n(B \cap A) - n(C \cap B) - n(A \cap C)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 2 + 4 = 2 + 5 + n(A - C) \Rightarrow n(A - C) = 2$$

۵۷. مجموعه A برابر است با $A = \{100, 101, \dots, 999\}$.

با توجه به توضیحات سؤال کوچک‌ترین عضو $A * A$ برابر با $\frac{100}{999}$ و بزرگ‌ترین عضو آن $\frac{999}{100}$ است.



اعداد طبیعی بین دو مقدار $\frac{100}{999}$ و $\frac{999}{100}$ اعداد $\{1, 2, \dots, 9\}$ هستند که هر کدام از این اعداد در مجموعه $A * A$ وجود دارد.

$$\frac{100}{100} = 1, \frac{200}{100} = 2, \frac{300}{100} = 3, \dots, \frac{900}{100} = 9$$

پس $A * A$ دارای ۹ عضو طبیعی است. البته بدیهی است که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ...، ۹ چندین بار تولید می‌شوند.

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$$

۵۸. گزینه «د»

$$n(\text{مضرب ۳ یا زوج}) = n(\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}) = 6 \Rightarrow P(\text{مضرب ۳ یا زوج}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۵۹

$$\text{حالات کل} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

۶۰

$$\text{حالات مطلوب} = \{(2, 5), (5, 2)\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالات کل} = 10 \times 9 = 90 \\ \text{تعداد حالات مطلوب} = 4 \times 3 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

۶۱

۶۲. هر تاس ۶ حالت دارد پس در مجموع تعداد کل حالات برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالات} = 6^3 = 216$$

حالات مطلوب عبارت‌اند از:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۳} \rightarrow \{1, 6, 6\} \\ \text{حالت ۶} \rightarrow \{2, 3, 6\} \\ \text{حالت ۳} \rightarrow \{4, 3, 3\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{تعداد حالات مطلوب} = 12$$

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

۶۳

در واقع $P(A) = \frac{1}{4}$ اطلاعات اضافی است!

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{10} \\ n(A) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n(S) = \frac{2}{\frac{2}{10}} = 10 \\ n(B) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

۶۴



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۱ : مجموعه‌ها



فصل ۱ : مجموعه‌ها

۱. گزینه «۴» $\frac{3}{2} = 1/5 \xrightarrow[\text{بعدی}]{\text{عدد طبیعی}} 2$, $\frac{17}{3} = 5/6 \xrightarrow[\text{قبلی}]{\text{عدد طبیعی}} 5 \Rightarrow \{2, 3, 4, 5\}$

۲. گزینه «۱» با توجه به مجموعه‌های A و B، داریم:
بنابراین فقط عضو ۳ در A هست ولی در B نیست.

$$A = \{3, 4, 13, 12\} \quad B = \{4, 12, 9, 13\}$$

۳. گزینه «۱»

$$A = \{1, 12, 10, 13, 18\}$$

$$B = \{19, 15, 10, 13, 17\}$$

$$C = \{14, 16, 13, 17, 18\}$$

گزینه ۲: درست نیست، زیرا $17 \in C$.
گزینه ۳: درست نیست، زیرا عدد ۱۹ عضو A هم نیست.
گزینه ۴: درست نیست، زیرا عدد ۱۷ عضو A نیست.

۴. گزینه «۱» $\emptyset \notin \emptyset$ درست است. چون طبق تعریف \emptyset عضوی ندارد.

۵. گزینه «۳»

$$A_n : 8 + 16n = 1000 \Rightarrow n = 62$$

بنابراین ۱۰۰۰ در مجموعه A_n قرار دارد.

۶. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x - 1 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 6, y = 3$$

۷. گزینه «۴»

$$2x - 5 = 25 - 3x \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 2x - 5 = 7$$

۸. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \\ C \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

به همین ترتیب $A = C$ و $B = C$ است ولی دلیلی ندارد که A، B و C تهی باشند.

۹. گزینه «۲»



۱۰. گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 B &= \{1, 2, 9, 28, 65\} \\
 &= \{0+1, 1+1, 8+1, 27+1, 64+1\} \\
 &= \{0^3+1, 1^3+1, 2^3+1, 3^3+1, 4^3+1\}
 \end{aligned}$$

$$A = \{x \mid -1/2 < x \leq \sqrt{5}\}$$

۱۱. گزینه «۱» با توجه به این که $\sqrt{5} \simeq 2/2$ ، عبارت $2/005 \in A$ درست است.

۱۲. گزینه «۴» اعداد منفی و صفر طبیعی نیستند، پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ حذف می‌شوند.

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \sqrt{25}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۱۳. گزینه «۲»

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \in \mathbb{N} \quad , \quad x = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} = 2 \in \mathbb{N}$$

تنها دو عدد $\sqrt{2}$ و ۲ در شرایط مجموعه B صدق می‌کنند:

۱۴. گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 B &= \{2, 11, 101, 1001, \dots\} \\
 &= \{1+1, 10+1, 100+1, 1000+1, \dots\} \\
 &= \{10^0+1, 10^1+1, 10^2+1, 10^3+1, \dots\} \\
 &= \{10^x+1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}
 \end{aligned}$$

۱۵. گزینه «۳» اعداد یکی در میان مثبت و منفی و همگی مضرب ۲ هستند.

۱۶. گزینه «۱» با توجه به این که $x, y \in \mathbb{N}$ و $xy = 10$ ، از بین x و y یکی زوج و دیگری فرد است، پس $(-1)^x + (-1)^y$ حتماً صفر است.

$$\{(-1)^x + (-1)^y \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 10\} = \{0\}$$

۱۷. گزینه «۴»

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

۱۸. گزینه «۴» مثال نقض: $a = 1$ و $b = 2$.

$$2^2 = 4 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

۱۹. گزینه «۳» این مجموعه دو عضو دارد. پس:

۲۰. گزینه «۱» یک مجموعه ۷ عضوی دارای ۷ زیرمجموعه تک عضوی و ۷ زیرمجموعه ۶ عضوی است.

$$2^{k-2} + 2^k + 2^{k+1} = 104 \Rightarrow 2^k \left(\frac{1}{4} + 1 + 2 \right) = 104 \Rightarrow \frac{13}{4} \times 2^k = 104 \Rightarrow 2^k = \frac{104 \times 4}{13} \Rightarrow 2^k = 32$$

۲۱. گزینه «۴»



۲۲. گزینه «۲» این مجموعه $2^6 = 64$ زیرمجموعه دارد که هر عضو آن دقیقاً در نیمی از این زیرمجموعه‌ها آمده است. پس داریم:

$$64 \times \frac{1}{2} \times 40 = 1280$$

۲۳. گزینه «۳» 2^{10} زیرمجموعه وجود دارد که بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن‌ها ۱ و ۱۲ است، 2^8 زیرمجموعه وجود دارد که بزرگ‌ترین و

کوچک‌ترین عضو آن‌ها ۲ و ۱۱ است، ... و 2^0 زیرمجموعه وجود دارد که بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ و ۷ است.

$$2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 1365$$

$$2 \in \mathbb{N}, \quad -2 \notin \mathbb{N}$$

۲۴. گزینه «۴» مثال نقض:

۲۵. گزینه «۳» می‌توان دو زیرمجموعه از زیرمجموعه‌های دو عضوی را یافت که اشتراک آنها تهی باشد، بنابراین اشتراک تمام آن زیرمجموعه‌ها

تهی می‌شود.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$$

۲۶. گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{5, 7\} \\ B - A = \{1, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{1, 5, 6, 7\}$$

۲۷. گزینه «۲»

$$\text{گزینه ۱: } A \cap B = \{2, 7\}$$

$$\text{گزینه ۲: } (A \cup C) - B = \{1, 5, 6\}$$

۲۸. گزینه «۴»

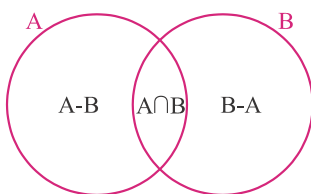
$$\text{گزینه ۳: } A \cap B \cap C = \{7\}$$

$$\text{گزینه ۴: } (A \cap B) - C = \{2\}$$

۲۹. گزینه «۱» در گزینه ۲، $A \cup B \neq A$ ، در گزینه ۳، $A \cup B \neq A$ و در گزینه ۴، $B \cap C \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \\ A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C \stackrel{B \subseteq C}{=} B$$

۳۰. گزینه «۲»

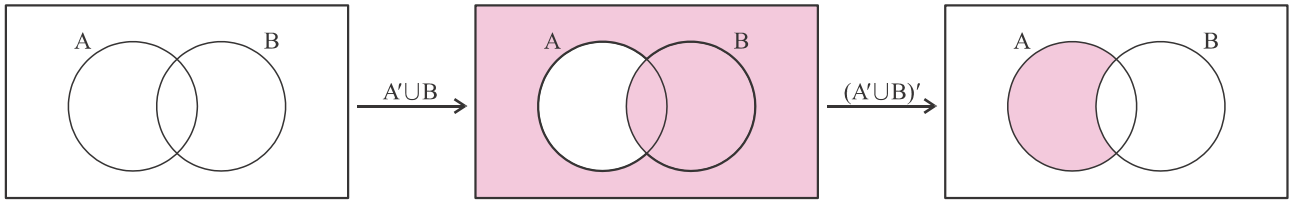


۳۱. گزینه «۴» با رسم یک نمودار و ن، مشخص می‌شود که جواب $A \cup B$ است.

$$A' = M - A = \{8, 1, 2, \dots, 6\}$$

۳۲. گزینه «۳»

۳۳. گزینه «۴»



پس $(A' \cup B)' = A - B$ با توجه به این که A اعداد بخش پذیر بر ۳ و B اعداد بخش پذیر بر ۵ هستند، نتیجه می گیریم که $A - B$ شامل اعدادی است که بر ۳ بخش پذیرند، ولی بر ۵ بخش پذیر نیستند.

$$(A \cap \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

۳۴. گزینه «۱»

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 7 - 3 = 9$$

۳۵. گزینه «۳»

$$n(B - A) = 4 \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) = 4 \Rightarrow n(B) - 3 = 4 \Rightarrow n(B) = 7$$

۳۶. گزینه «۴»

۳۷. گزینه «۲» تعداد کل حالتها برابر است با $6 \times 6 \times 6 = 216$. حالت های مطلوب عبارت اند از: $(6, 6, 4)$, $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 2)$, $(6, 6, 1)$.

$(6, 6, 5)$, $(6, 1, 6)$, $(6, 2, 6)$, $(6, 3, 6)$, $(6, 4, 6)$, $(6, 5, 6)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 6, 6)$, $(3, 6, 6)$, $(4, 6, 6)$ و $(5, 6, 6)$ که تعداد

آن ها ۱۵ تاست. پس احتمال آن $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$ است.

۳۸. گزینه «۱» از بین حالت های ممکن، یعنی $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$ و $(3, 4, 5, 6)$ ، در دو حالت عدد ۲ وجود دارد. پس احتمال وقوع آن

است $\frac{2}{3}$.

۳۹. گزینه «۲» تعداد کل حالات برابر است با $2 \times 2 \times 6 = 24$. حالت های مطلوب عبارت اند از $(2, 2, 3)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 2, 5)$ و $(2, 2, 6)$ که تعداد آن ها ۴ تاست. پس احتمال آن $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ است.

که تعداد آن ها ۳ تاست. پس احتمال آن $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ است.

$$P(\text{دختر } 4) = 1 - P(\text{دختر } 5) = 1 - \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

۴۰. گزینه «۱»

۴۱. گزینه «۱» اجتماع یک مجموعه و متمم آن برابر مجموعه مرجع (فضای نمونه ای) است.

$$(A \cap B)' \cup (A \cap B) = C' \cup C = S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\left. \begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + P(B) - 0 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

۴۲. گزینه «۱»

گزینه ۴۳ «۲»

$$\left. \begin{array}{l} P(\text{فیزیک}) = 0/55 \\ P(\text{شیمی}) = 0/6 \\ P(\text{فیزیک} \cup \text{شیمی}) = 0/75 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\text{فیزیک} \cap \text{شیمی}) = 0/6 + 0/55 - 0/75 = 0/4$$

گزینه ۴۴ «۱» A، ۳ عضو و B بیشمار عضو دارد.

$$A - B = \{\underline{3}, \underline{4}, \{5, 6, 7, \dots\}\} - \{\underline{3}, \underline{4}, 5, 6, \dots\} = \{\{5, 6, 7, \dots\}\}$$

$$A_9 = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45 \Rightarrow A_1 = 46 \text{ اولین عضو}$$

گزینه ۴۵ «۲»

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

گزینه ۴۶ «۲»

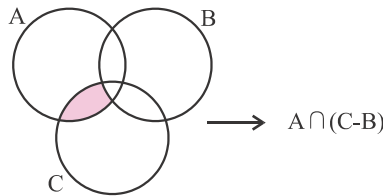
گزینه ۴۷ «۱» مجموعه‌ی {} به عنوان یک عضو در E نیست.

$$A - B = \{a, d\}$$

گزینه ۴۸ «۳»

$$A - (A - B) = \{b, c\} = A \cap B$$

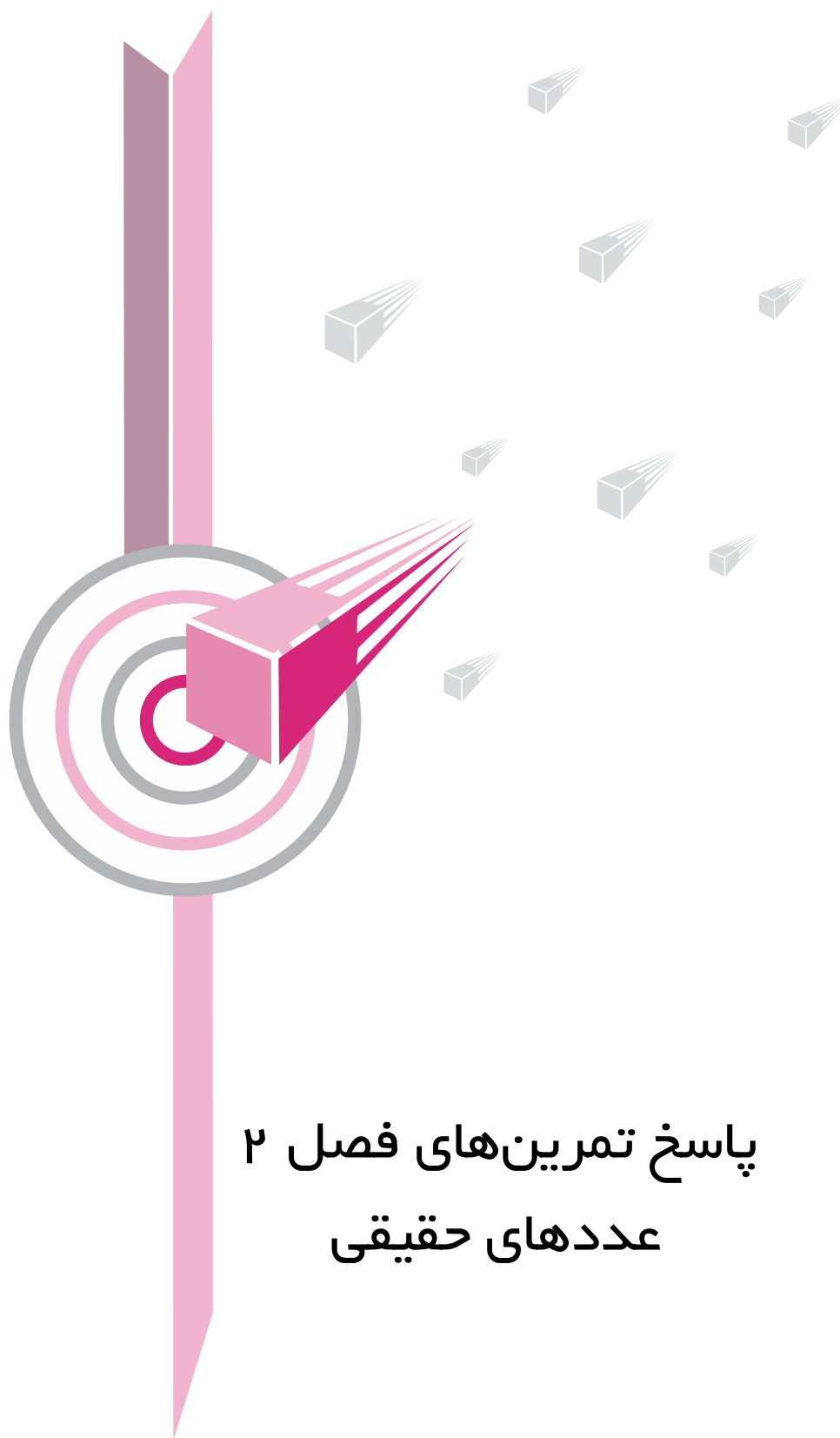
گزینه ۴۹ «۲»



$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 4, 9, 16\} \\ B = \{\text{اعداد زوج}\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{4, 16\}$$

گزینه ۵۰ «۲»





پاسخ تمرین‌های فصل ۲ عددهای حقیقی



فصل ۲: عددهای حقیقی

درس اول: معرفی اعداد گویا

$$3 + \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{3}$$

$$4 + \frac{4}{3} = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

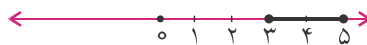
۱. الف) درست است.

ب) درست است.

۲. گزینه «۴» از $\frac{2}{5}$ کوچک‌تر است و $\frac{3}{5}$ از $\frac{1}{4}$ بزرگ‌تر است.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

۳. عدد $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ بین دو عدد گویای $\frac{5}{11}$ و $\frac{3}{7}$ قرار دارد.



$$x = 0, \overline{52} \Rightarrow 100x = 52, \overline{52}$$

$$\underline{x = 0, \overline{52}}$$

$$100x - x = 52, \overline{52} - 0, \overline{52} \Rightarrow 99x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{99}$$

$$x = 0, \overline{525} \Rightarrow 1000x = 525, \overline{525}$$

$$\underline{x = 0, \overline{525}}$$

$$1000x - x = 525, \overline{525} \Rightarrow x = \frac{525}{999} = \frac{175}{333}$$

$$\frac{3}{5}(x + \frac{1}{5}) = \frac{12}{35} \Rightarrow x + \frac{1}{5} = \frac{12}{35} \Rightarrow x + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{14} = \frac{x}{100} &\Rightarrow 14x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{14} \approx 7/... \\ \frac{1}{15} = \frac{x}{100} &\Rightarrow 15x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{15} \approx 6/... \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{کسر مطلوب} = \frac{7}{100}$$

۸

الف) $a = 0.\overline{25} \Rightarrow 100a = 25.\overline{25}$

$$\begin{aligned} a &= 0.\overline{25} \\ \hline 99a &= 25 \Rightarrow a = \frac{25}{99} \end{aligned}$$

۹

ب) $b = 0.\overline{250} \Rightarrow 1000b = 250.\overline{50}$

$$\begin{aligned} 10b &= 2.\overline{50} \\ \hline 990b &= 248 \Rightarrow b = \frac{248}{990} = \frac{124}{495} \end{aligned}$$

ج) $c = 0.\overline{329} \Rightarrow 1000c = 329.\overline{29}$

$$\begin{aligned} 10c &= 3.\overline{29} \\ \hline 990c &= 326 \Rightarrow c = \frac{326}{990} = \frac{163}{495} \end{aligned}$$

د) $d = 0.\overline{329} \Rightarrow 1000d = 329.\overline{9}$

$$\begin{aligned} 100d &= 32.\overline{9} \\ \hline 900d &= 297 \Rightarrow d = \frac{297}{900} = \frac{33}{100} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 0.\overline{201} &= 0.201111... \\ 0.\overline{201} &= 0.2010101... \\ 0.\overline{201} &= 0.201201201... \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0.\overline{201} < 0.\overline{201} < 0.\overline{201}$$

۱۰

$0.\overline{19} = x \Rightarrow 100x = 19.\overline{9}$

$$\frac{100x = 19.\overline{9}}{100x = 19}$$

$$90x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0.\overline{2} \Rightarrow 0.\overline{19} = 0.\overline{2}$$

$$\Rightarrow 0.\overline{18} < 0.\overline{19} = 0.\overline{2} < 0.\overline{201} < 0.\overline{201} < 0.\overline{201} < 0.\overline{2}$$

۱۱. برای به دست آوردن حاصل $0.\overline{2} \times 0.\overline{3}$ ، ابتدا هر کدام را به کسر تبدیل می‌کنیم. کسرها را در هم ضرب می‌کنیم و در نهایت به صورت اعشاری نمایش می‌دهیم.

$x = 0.\overline{2} \Rightarrow 10x = 2.\overline{2}$

$$\frac{x = 0.\overline{2}}{10x = 2.\overline{2}}$$

$$9x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

$y = 0.\overline{3} \Rightarrow 10y = 3.\overline{3}$

$$\frac{y = 0.\overline{3}}{10y = 3.\overline{3}}$$

$$9y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0.\overline{2} \times 0.\overline{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27} = 0.\overline{074}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,3 = \frac{3}{10} = \frac{9}{30} \\ \frac{2}{5} = \frac{12}{30} \\ \frac{a}{15} = \frac{2a}{30} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{30} < \frac{2a}{30} < \frac{12}{30} \Rightarrow 9 < 2a < 12 \Rightarrow a = 5$$

.۱۲

۱۳. الف) عدد $0,2$ از $0,198$ بزرگتر و از $0,298$ کوچکتر است، پس عدد $0,2$ بین آن دو قرار دارد.

$$0,198 = 0,1989898... < 0,2 < 0,2989898... = 0,298$$

ب) عددهای $0,1232$ و $0,12322$ بین دو عدد $0,123$ و $0,124$ است.

$$0,123123... < 0,1232 < 0,124124...$$

$$0,123123... < 0,12322 < 0,124124...$$

$$\frac{18+x}{48+16} = \frac{18}{48} \quad \text{طرفین وسطین} \rightarrow \cancel{18 \times 48} + x \times 48 = \cancel{18 \times 48} + 18 \times 16 \Rightarrow x = 6$$

.۱۴

$$\frac{x}{x+7} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x + 14 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow \text{کسر} = \frac{14}{21}$$

.۱۵

$$\Rightarrow \text{مجموع صورت و مخرج} = 14 + 21 = 35$$

$$\frac{3}{7} = 0,428571$$

.۱۶

طول دوره گردش نمایش اعشاری $\frac{3}{7}$ برابر با ۶ است. از طرفی ۸۴ بر ۶ بخش پذیر است، در نتیجه هشتاد و چهارمین رقم بعد از اعشار ۱ است.

$$\frac{41}{333} = 0,123$$

.۱۷

طول دوره گردش $\frac{41}{333}$ برابر با ۳ است. از طرفی ۱۹۸۶ بر ۳ بخش پذیر است، در نتیجه ۱۹۸۶ امین رقم بعد از اعشار برابر است با ۳.

۱۸. باید m برابر ۷ باشد تا حاصل $m+3$ رقم صفر تولید کند. همچنین با توجه به رقم ده بر یک تولید شده، رقم n باید ۴ باشد.

$$\begin{array}{r} 4/5m \\ + \quad \quad \quad + \\ \hline 4/57 \\ + \quad \quad \quad + \\ \hline 3/n3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 4/57 \\ + \quad \quad \quad + \\ \hline 3/43 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 4/57 \\ + \quad \quad \quad + \\ \hline 3/43 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow m = 7, n = 4 \Rightarrow 4/5m - 3/n3 = 4/57 - 3/43 = 1/14$$

$$\text{الف) } 0,444... = 0,4$$

.۱۹

$$\text{ب) } 0,131313... = 0,13$$

$$\text{ج) } 0,365365365... = 0,365$$

$$\text{د) } 0,2137676767... = 0,21376$$

$$0,1a49v49b49v... = 0,1a49v = 0,13c9d \Rightarrow a = 3, b = 7, c = 4, d = 7$$

.۲۰

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } 0, \overline{48} = 0, 484848\dots \\ 0, \overline{49} = 0, 494949\dots \end{array} \right\} \Rightarrow 0, \overline{48} < 0, \overline{49}$$

.۲۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب) } 0, \overline{307} = 0, 30777\dots \\ 0, \overline{307} = 0, 307307\dots \end{array} \right\} \Rightarrow 0, \overline{307} < 0, \overline{307}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ج) } 0, \overline{73} = 0, 737373\dots \\ 0, \overline{734} = 0, 73444\dots \end{array} \right\} \Rightarrow 0, \overline{734} < 0, \overline{73}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0, \overline{253} = 0, 253535353\dots \\ 0, \overline{2535} = 0, 25353535\dots \end{array} \right\} \Rightarrow 0, \overline{253} = 0, \overline{2535}$$

.۲۲ بله

$$\text{الف) } 0, 2 = \frac{2}{10}$$

.۲۳

$$\text{ب) } 0, 047 = \frac{47}{1000}$$

$$\text{ج) } 19, 3045 = \frac{193045}{10000}$$

$$\text{الف) } 0, \overline{42} = 0, 424242\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 2$$

.۲۴

$$\text{ب) } 0, \overline{375} = 0, 37537537\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 3$$

$$\text{ج) } 0, \overline{1394} = 0, 139413941394\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 4$$

$$\text{الف) } 0, \overline{365} = 0, 36555\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 5$$

.۲۵

$$\text{ب) } 0, \overline{12347} = 0, 123474747\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 4$$

$$\text{ج) } 0, \overline{76401} = 0, 7640164016401\dots \xrightarrow{\text{صدمین رقم}} 0$$

$$\text{الف) } \begin{array}{l} 0, 444\dots \\ + 0, 333\dots \\ \hline 0, 777\dots = 0, \overline{7} \end{array} \Rightarrow 0, \overline{4} + 0, \overline{3} = 0, \overline{7}$$

.۲۶

$$\text{ب) } \begin{array}{l} 0, 66666\dots \\ + 0, 10222\dots \\ \hline 0, 76888\dots = 0, \overline{768} \end{array} \Rightarrow 0, \overline{6} + 0, \overline{102} = 0, \overline{768}$$

$$\text{ج) } \begin{array}{l} 0, 3242424\dots \\ + 0, 5252525\dots \\ \hline 0, 8494949\dots = 0, \overline{849} \end{array} \Rightarrow 0, \overline{324} + 0, \overline{525} = 0, \overline{849}$$

$$\text{الف) } \begin{array}{l} 13, 949494\dots \\ - 1, 313131\dots \\ \hline 12, 636363\dots = 12, \overline{63} \end{array} \Rightarrow 13, \overline{94} - 1, \overline{31} = 12, \overline{63}$$

.۲۷

$$\begin{aligned} \text{ب) } & \frac{7, 5969696\dots}{1, 2323232\dots} - \frac{1, 2323232\dots}{6, 3646464\dots} = \frac{6, 364}{7, 596 - 1, 23} = \frac{6, 364}{6, 364} \\ & = 1 \end{aligned}$$

۲۸. هنگامی نمایش اعشاری یک کسر، مختوم است که در تجزیه مخرج کسر (بعد از ساده کردن کسر)، فقط عامل‌های ۲ یا ۵ دیده شوند. در نتیجه کافی است a بر ۷ بخش پذیر باشد.

$$a = 7 \Rightarrow \frac{a}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = 0,5$$

۲۹. هنگامی نمایش اعشاری یک کسر، متناوب ساده است که در تجزیه مخرج کسر (بعد از ساده کردن کسر) نه عامل ۲ دیده شود و نه عامل ۵. بنابراین در این جا کافی است a بر ۲ بخش پذیر باشد.

$$a = 2 \Rightarrow \frac{a}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = 0,142857$$

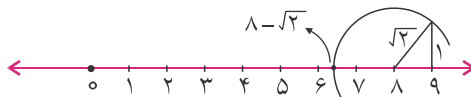
۳۰. هنگامی نمایش اعشاری یک کسر، متناوب مرکب است که در تجزیه مخرج کسر (بعد از ساده کردن کسر) به جز عامل‌های ۲ یا ۵، عامل دیگری نیز وجود داشته باشد. پس در این جا باید a نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۷.

$$a = 1 \Rightarrow \frac{a}{14} = \frac{1}{14} = 0,0714285$$

درس دوم: عددهای حقیقی

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} &\approx 1,41 \\ \sqrt{3} &\approx 1,73 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} < 1,5 < 1,6 < 1,7 < \sqrt{3}$$

۳۱



۳۲

۳۳. الف) چون نمایش اعشاری آن نامتناهی غیر متناوب است پس گنگ است.

ب) چون مختوم است، گویا است.

ج) چون متناوب است گویا است.

د) چون متناوب مرکب است گویا است.

$$\begin{aligned} 0,07007007007007\dots &= 0,07007 \\ 0,5173101731017310\dots &= 0,517310 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{1}{7}} < \sqrt{\frac{1}{6}} < \sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{1}{7}} < \sqrt{\frac{1}{6}} < \frac{1}{2}$$

۳۴

سه عدد $\sqrt{\frac{1}{8}}$ و $\sqrt{\frac{1}{7}}$ و $\sqrt{\frac{1}{6}}$ گنگ هستند و بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ قرار دارند.

$$\left. \begin{aligned} OB &= OA + AB \Rightarrow OB = 1 + AB \\ AB &= AC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow OB = 1 + \sqrt{3}$$

۳۵

$$OB = DO = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۳۶

$$MC = MA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$DC = DO + OM + MC = 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5} = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\underbrace{1 - \sqrt{2}}_{\text{گنگ}} + \underbrace{1 + \sqrt{2}}_{\text{گنگ}} = 2 \in \mathbb{Q}$$

۳۷ الف) غلط است. مثال نقض:

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \times \underbrace{2\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} = 4 \in \mathbb{Q}$$

ب) غلط است. مثال نقض:

$$\left. \begin{aligned} 0 \in \mathbb{Q} \\ \alpha \in \mathbb{Q}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \times \alpha = 0 \in \mathbb{Q}$$

ج) غلط است. مثال نقض:

د) درست است. فرض کنید عددی گنگ مانند α وجود دارد که قرینه اش $(-\alpha)$ گویاست.

$$(-1) \times (-\alpha) = \alpha \quad (\text{گویا})$$

از طرفی قرینه هر عدد گویا عددی گویاست، بنابراین:

به تناقض رسیدیم (α هم گنگ است و هم گویا)، پس فرض ابتدا غلط بود و $-\alpha$ گنگ است.

۳۸ الف) فرض می‌کنیم $\frac{1}{r}$ گنگ نباشد پس گویا است؛ یعنی برابر با $\frac{a}{b}$ (به شرطی که $a, b \in \mathbb{Z}$) است.

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b} \Rightarrow r = \frac{b}{a} \Rightarrow r \in \mathbb{Q}$$

به تناقض رسیده‌ایم (r هم گویاست و هم گنگ!)، در نتیجه $\frac{1}{r}$ عددی گنگ بوده است.

ب) فرض می‌کنیم \sqrt{r} گنگ نباشد، پس گویا است؛ یعنی برابر با $\frac{a}{b}$ (به شرطی که $a, b \in \mathbb{Z}$) است.

$$\sqrt{r} = \frac{a}{b} \Rightarrow r = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow r \in \mathbb{Q}$$

به تناقض رسیده‌ایم (r هم گویاست و هم گنگ!)، در نتیجه \sqrt{r} عددی گنگ بوده است.

$$\text{الف) } \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۳۹

$$\text{ب) } \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{ج) } -\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{-2 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{-2\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{الف) } \frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{5 \times (\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{5} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

۴۰

$$\text{ب) } \frac{11}{\sqrt{3} - 1} = \frac{11(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{11(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\text{ج) } \frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}$$

.۴۱

الف) $|(-1)^4| = |-1| = 1$

ب) $|3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$

ج) $|-2 \times 7 - 10| = |-14 - 10| = |-24| = 24$

د) $|4 - \sqrt{20}| = \sqrt{20} - 4$

ه) $|3 + 2 - \sqrt{37}| = |5 - \sqrt{37}| = \sqrt{37} - 5$

.۴۲

$$|4 - \sqrt{20}| + 2|\sqrt{5} - 3| = \sqrt{20} - 4 + 2(3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4 + 6 - 2\sqrt{5} = 2$$

.۴۳

$$\frac{|\sqrt{5} - \pi| - |\sqrt{3} - \pi| + |1 - \sqrt{5}|}{|-2 + 2\sqrt{3}|} = \frac{(\pi - \sqrt{5}) - (\pi - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{\pi - \sqrt{5} - \pi + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{2}$$

.۴۴

$$\begin{aligned} & |-2 - \sqrt{5}| + |-1 - \sqrt{5}| + |-\sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| + |2 - \sqrt{5}| + \dots + |7 - \sqrt{5}| \\ &= \underbrace{(2 + \sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5}) + (\sqrt{5}) + (\sqrt{5} - 1) + (\sqrt{5} - 2)}_{5\sqrt{5}} + \underbrace{(3 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5}) + (5 - \sqrt{5}) + (6 - \sqrt{5}) + (7 - \sqrt{5})}_{25 - 5\sqrt{5}} \\ &= 5\sqrt{5} + 25 - 5\sqrt{5} = 25 \end{aligned}$$

.۴۵

$$1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4, 3 < 3x < 6$$

$$\Rightarrow |2x - 1| + |3 - x| - |3x - 1| = (2x - 1) + (3 - x) - (3x - 1) = 2x - 1 + 3 - x - 3x + 1 = -2x + 3$$

.۴۶

$$b < a < 0 \Rightarrow |-a + b| + |-a| + |-b| = a - b - a - b = -2b$$

.۴۷

$$\begin{aligned} |x| &= a \\ a &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow x = a \text{ یا } x = -a$$

$$|x - 4| = 8 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 8 \Rightarrow x = 12 \\ x - 4 = -8 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

.۴۸

$$|4 - |x - 5|| = 3 \Rightarrow 4 - |x - 5| = 3 \text{ یا } 4 - |x - 5| = -3$$

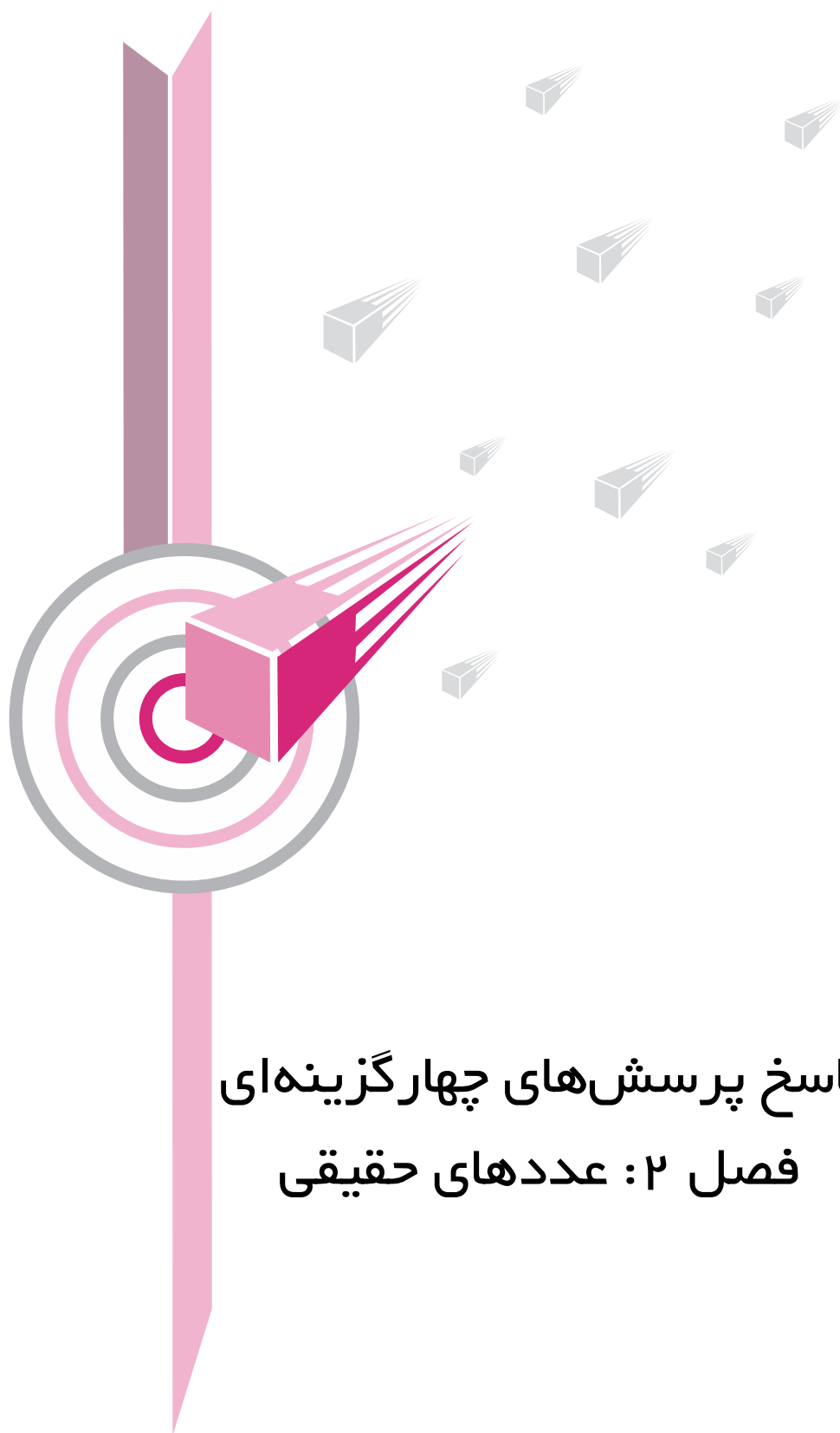
$$\text{حالت اول: } 4 - |x - 5| = 3 \Rightarrow |x - 5| = 1 \Rightarrow x - 5 = 1 \text{ یا } x - 5 = -1$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ یا } x = 4$$

$$\text{حالت دوم: } 4 - |x - 5| = -3 \Rightarrow |x - 5| = 7 \Rightarrow x - 5 = 7 \text{ یا } x - 5 = -7$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ یا } x = -2$$

بنابراین معادله $|4 - |x - 5|| = 3$ چهار جواب دارد.



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۲: عددهای حقیقی



فصل ۲: عددهای حقیقی

۱. گزینه «۱»

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

۲. گزینه «۲»

$$\text{گزینه ۱: } \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{گزینه ۲: } \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{گزینه ۳: } \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{گزینه ۴: } \frac{11}{12} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۳. گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{9 \times 10} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \\ B &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{11} \right) = \frac{5}{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = \frac{9}{22}$$

۴. گزینه «۱»

$$\begin{aligned} & \frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \frac{15}{44} + \frac{16}{55} + \frac{17}{66} - \left(\frac{11}{11} + \frac{11}{22} + \frac{11}{33} + \frac{11}{44} + \frac{11}{55} + \frac{11}{66} \right) \\ &= \left(\frac{12}{11} - \frac{11}{11} \right) + \left(\frac{13}{22} - \frac{11}{22} \right) + \left(\frac{14}{33} - \frac{11}{33} \right) + \left(\frac{15}{44} - \frac{11}{44} \right) + \left(\frac{16}{55} - \frac{11}{55} \right) + \left(\frac{17}{66} - \frac{11}{66} \right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

۵. گزینه «۴» در هر ساعت $\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18}$ از استخر پر می‌شود، بنابراین کل استخر در $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ ساعت (۲ ساعت و ۱۵ دقیقه) پر می‌شود.

۶. گزینه «۱»

| تعدادی که شرکت ندارند | تعدادی که شرکت دارند |
|-----------------------|----------------------|
| x | $\frac{1}{9}x$ |

$$\Rightarrow \frac{1}{9}x + x = \frac{17}{9}x \Rightarrow 100 < \frac{17}{9}x < 115 \xrightarrow{\text{مضرب ۹}} x = 54$$

بنابراین تعداد دانش‌آموزان برابر با $102 = 54 \left(\frac{17}{9} \right)$ نفر است.



$$24 - (6 + 3 - 7/5) = 22/5$$

۷. گزینه «۴»

$$\frac{a+b}{19a+94b} = \frac{1}{25} \Rightarrow 25a + 25b = 19a + 94b \Rightarrow 6a = 69b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{69}{6} = 11/5$$

۸. گزینه «۱»

$$\frac{x - \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{xy-1}{x}} = \frac{x}{y}$$

۹. گزینه «۲»

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$$

۱۰. گزینه «۳»

$$\frac{1+2+3}{1 \times 2 \times 3} = 1$$

بزرگ‌ترین مقدار وقتی به دست می‌آید که کوچک‌ترین مقادیر را برای a, b, c انتخاب کنیم:

$$3 + \frac{1}{x + \frac{1}{y}} = \frac{53}{17} \Rightarrow \frac{1}{x + \frac{1}{y}} = \frac{2}{17} \Rightarrow x + \frac{1}{y} = \frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 8, y = 2 \Rightarrow x + y = 10$$

۱۱. گزینه «۳»

$$M = \frac{10n}{1+2n} = \frac{10}{\frac{1}{n} + 2}$$

۱۲. گزینه «۲» صورت و مخرج کسر را بر n تقسیم می‌کنیم:

بنابراین با افزایش n ، مقدار M نیز افزایش می‌یابد.

$$\frac{2}{10000} < \frac{1}{1000}$$

۱۳. گزینه «۳»

۱۴. گزینه «۳» به عنوان مثال $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

۱۵. گزینه «۲» بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $-\frac{1}{10}$ تنها یک عدد صحیح (صفر) وجود دارد.

$$x = 2/6 \Rightarrow 10x = 26/6$$

۱۶. گزینه «۲»

$$\frac{x = 2/6}{10x - x = 24} \Rightarrow 9x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} 0/12 = \frac{12}{99} \\ 8/9 = 9 \end{cases} \Rightarrow 0/12 \times 8/9 = \frac{12}{99} \times 9 = \frac{12}{11}$$

۱۷. گزینه «۴»

$$x = 0/71532 \Rightarrow 100000x = 71532/32$$

۱۸. گزینه «۲»

$$x = 0/71532 \Rightarrow \frac{1000x = 715/32}{99000x = 70817} \Rightarrow x = \frac{70817}{99000}$$

$$\frac{24}{7} = 3/4$$

$$\frac{20}{5} = 4/0$$

۱۹. گزینه «۲»

$$\frac{28}{8} = 3/5$$

$$\frac{32}{9} = 3/5$$





$$40/\overline{11} = 40/\overline{1} = 40 + 0/\overline{1} = 40 + \frac{1}{9} = \frac{361}{9} = \left(\frac{19}{3}\right)^2$$

۲۰. گزینه «۲»

۲۱. گزینه «۴» هر عدد نامتناهی غیر متناوب گنگ است.

۲۲. گزینه «۱» $\sqrt{3}$ گویا نیست، زیرا نمی‌توان آن را مساوی $\frac{a}{b}$ (که $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$) قرار داد.

گزینه ۱: $2 + \sqrt{5} = 4/2$

گزینه ۲: $3 + \sqrt{2} = 4/4$

۲۳. گزینه «۱»

گزینه ۳: $6 - \sqrt{2} = 4/6$

گزینه ۴: $7 - \sqrt{5} = 4/8$

$$6 < \sqrt{37} < 7 \xrightarrow{-9} -3 < -9 + \sqrt{37} < -2$$

۲۴. گزینه «۴»

$$\sqrt{2 \times 128} = \sqrt{2 \times 2^7} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16 \in \mathbb{Q}$$

۲۵. گزینه «۲»

۲۶. گزینه «۳» محاسبه را از داخلی‌ترین پرانتز آغاز می‌کنیم:

$$2 \blacksquare 6 = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \blacksquare 12 = \frac{\frac{3}{2} \times 12}{\frac{3}{2} + 12} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \blacksquare 20 = \frac{\frac{4}{3} \times 20}{\frac{4}{3} + 20} = \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} \blacksquare 30 = \frac{\frac{5}{4} \times 30}{\frac{5}{4} + 30} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} \blacksquare 42 = \frac{\frac{6}{5} \times 42}{\frac{6}{5} + 42} = \frac{252}{216} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{7}{6} \blacksquare 56 = \frac{\frac{7}{6} \times 56}{\frac{7}{6} + 56} = \frac{392}{343} = \frac{8}{7}$$

اگر الگوی پاسخ‌ها را مد نظر قرار دهید، نیازی به همه محاسبات نیست.

گزینه ۱: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

۲۷. گزینه «۴»

گزینه ۲: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ra}{rb} < \frac{rc}{rd} \Rightarrow \frac{ra}{rb} < \frac{ra+rc}{rb+rd} < \frac{rc}{rd}$

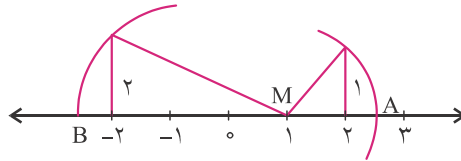
گزینه ۳: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{bc}{bd}$

$$M = 2 + \sqrt{3^2 + 1^2} = 2 + \sqrt{10}$$

۲۸. گزینه «۳»

$$AB = MA + MB = \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{2} + \sqrt{13}$$

۲۹. گزینه «۲»



$$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow OD = 3\sqrt{5}$$

$$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

۳۰. گزینه «۲»

۳۱. گزینه «۱» برای اطمینان از نادرستی گزینه‌های ۲ و ۳ عدد صفر را مثال بزنید. توجه نمایید که «هر عدد صحیح، یک عدد گویا نیز هست» و نه برعکس.

۳۲. گزینه «۱» باید دقت کنید که در یک تقسیم، مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد.

$$3x - 5\sqrt{2} = -2x \Rightarrow 5x = 5\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}'$$

۳۳. گزینه «۴»

۳۴. گزینه «۱» اگر $\beta = 0$ باشد، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}$ ، $\alpha\beta^2$ و $\beta\alpha^2$ برابر با صفر و عددی گویاست.

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

۳۵. گزینه «۲»

۳۶. گزینه «۳» مجموعه‌های A و B بی‌شمار عضو دارند. هم‌چنین $C = \{2\}$ و $D = \{2, 3\}$ ، بنابراین تعداد اعضای C از مجموعه‌های دیگر کم‌تر است.

۳۷. گزینه «۱»

$$|\sqrt{5} - 2| + |3 - 2\sqrt{5}| - |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 2 + (2\sqrt{5} - 3) - (\sqrt{5} - 1) = 2\sqrt{5} - 4$$

۳۸. گزینه «۲»

$$\sqrt{\underbrace{2+|-2|}_{4} + \underbrace{|-2+(-2)|}_{4} - \underbrace{|-1+|-1||}_{0} + 1} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

۳۹. گزینه «۲»

$$|4(-2|5)| \times \frac{3}{4} \parallel -5+4 \parallel + |-5-4| = 40 \times \frac{3}{4} \times 1 + 9 = 69$$

۴۰. گزینه «۳»

$$|a+b| + |-b| - |-ab| = a+b-b - (-ab) = a+ab = a(1+b)$$

۴۱. گزینه «۱»



۴۲. گزینه «۲» با توجه به این که $a > c > b$ ، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & -a|b-c| - b|c-a| + c|a-b| \\ & = -a(c-b) - b(a-c) + c(a-b) \\ & = -ac + ab - ab + bc + ac - bc = 0 \end{aligned}$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{10} \approx -1,4 + 1,7 - 3,1 = -2,8 \Rightarrow -3 < -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{10} < -2 \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\begin{aligned} \text{گزینه ۱: } \sqrt{2} + \sqrt{3} & \approx 1,4 + 1,7 = 3,1 & \text{گزینه ۳: } 1 + \sqrt{2} & = 1 + 1,4 = 2,4 \\ \text{گزینه ۲: } \sqrt{2} + \sqrt{5} & \approx 1,4 + 2,2 = 3,6 & \text{گزینه ۴: } 1 + \sqrt{3} & = 1 + 1,7 = 2,7 \end{aligned} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$\frac{4/97 \times \sqrt{145} \times \sqrt{0,01}}{10/1} = \frac{5 \times 12 \times 0,1}{10} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \text{گزینه «۲»}$$

۴۶. گزینه «۳» $-1 - \sqrt{2}$ عددی گنگ و در نتیجه حقیقی است.

$$|2 - \sqrt{3}| - \sqrt{3}|1 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} = -1 \quad \text{گزینه «۲»}$$

۴۸. گزینه «۳» ابتدا با مثال‌هایی، نادرستی گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را نشان می‌دهیم:

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha + \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-2 - 2\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5}}{4} = 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{گزینه ۱:}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 + 1 = 3 \in \mathbb{Q} \quad \text{گزینه ۲:}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{گزینه ۴:}$$

اما می‌توان نشان داد حاصل $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ به ازای هر α گنگ، عددی گنگ است:

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\alpha-1+2}{\alpha-1} = 1 + \frac{2}{\alpha-1} = 1 + \frac{2}{\text{گنگ}} = 1 + \text{گنگ} = \text{گنگ}$$

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{Q} \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$\left. \begin{aligned} OC &= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \\ OD &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD = OD - OC = 3 - \sqrt{3} \quad \text{گزینه «۲»}$$



پاسخ تمرین‌های فصل ۳
استدلال و اثبات در هندسه



فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

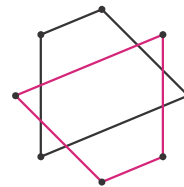
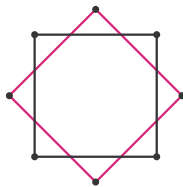
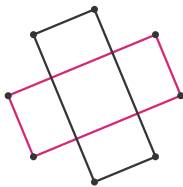
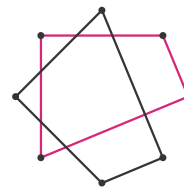
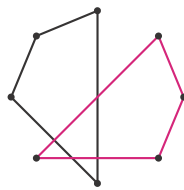
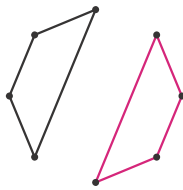
۱. هر سه زاویه برابر هستند، پس اندازه هر کدام 60° است. در نتیجه این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲. خیر، زیرا هر مستطیل نیز دارای چهار زاویه 90° است.

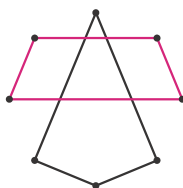
۳. خیر، به عنوان مثال متوازی‌الاضلاع زیر محور تقارن ندارد.



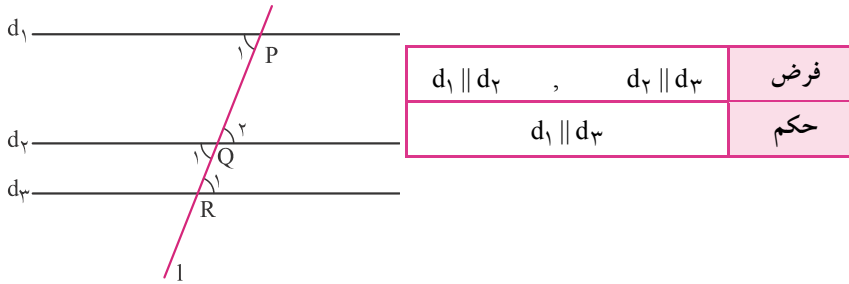
۴. بله. چهارضلعی‌ها در حالات زیر هم‌نهشت می‌شوند:



اما در حالت زیر هم‌نهشت نیستند:



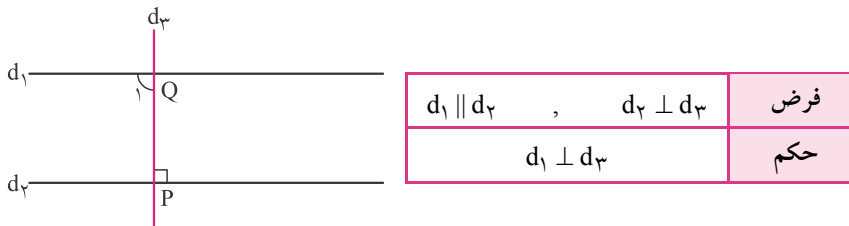
۵. الف)



خط L را طوری رسم می‌کنیم که d_1 ، d_2 و d_3 را به ترتیب در P، Q و R قطع کند.

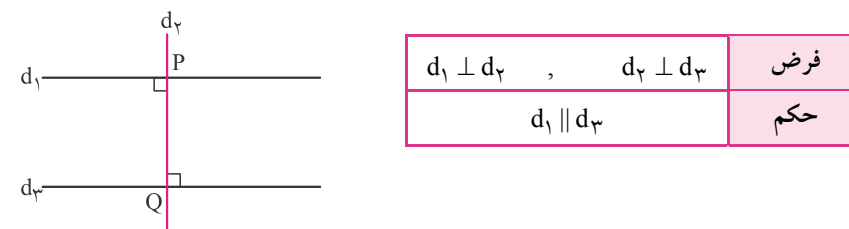
$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{Q}_2 \\ d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \hat{Q}_1 = \hat{R}_1 \\ \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{R}_1 \Rightarrow d_1 \parallel d_3$$

ب)



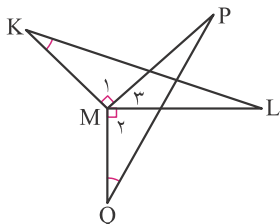
$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \hat{P} = \hat{Q}_1 \\ d_2 \perp d_3 \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{Q}_1 = 90^\circ \Rightarrow d_1 \perp d_3$$

ج)



$$\left. \begin{array}{l} d_1 \perp d_2 \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ \\ d_2 \perp d_3 \Rightarrow \hat{Q} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{P} = \hat{Q} \Rightarrow d_1 \parallel d_3$$

۶.



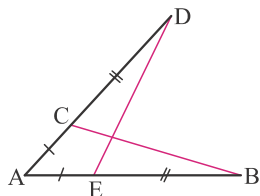
| | |
|-----|--|
| فرض | $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$, $\hat{K} = \hat{Q}$, $MK = MQ$ |
| حکم | $\hat{L} = \hat{P}$ |

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_3 = \hat{M}_2 + \hat{M}_3 \Rightarrow \widehat{KML} = \widehat{PMQ}$$



۷

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KML} = \widehat{PMQ} \\ K = Q \\ MK = MQ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle KML \cong \triangle PMQ \Rightarrow \widehat{L} = \widehat{P}$$

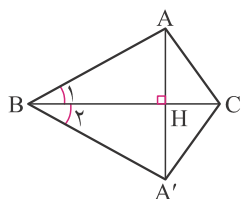


| | |
|-----------------------|-----|
| $AC = AE$, $CD = EB$ | فرض |
| $BC = DE$ | حکم |

$$\left. \begin{array}{l} AC = AE \\ CD = EB \end{array} \right\} \Rightarrow AD = AB$$

$$\left. \begin{array}{l} AE = AC \\ AD = AB \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ADE \cong \triangle ABC \Rightarrow BC = DE$$

۸



| | |
|--------------------------------------|-----|
| $AA' \perp BC$, $AH = A'H$ | فرض |
| $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$ | حکم |

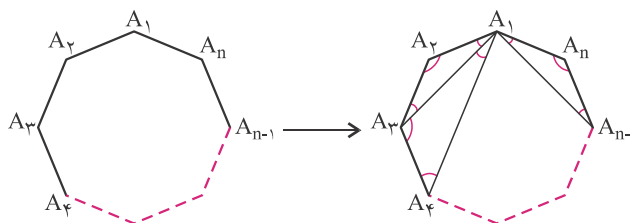
$$\left. \begin{array}{l} BH = BH \\ \widehat{AHB} = \widehat{A'HB} = 90^\circ \\ AH = A'H \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHB \cong \triangle A'HB \Rightarrow AB = A'B , \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ BC = BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle A'BC$$

۹

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = CD^2 + AD^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \Rightarrow AC = \sqrt{50} \\ BC^2 = BE^2 + CE^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow BC = \sqrt{50} \end{array} \right\} \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \triangle ABC \text{ متساوی الساقین}$$

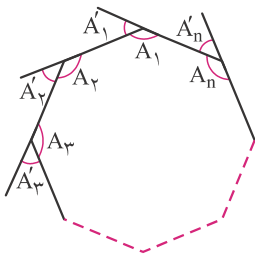
۱۰ الف) در شکل زیر یک n ضلعی با رئوس $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ رسم شده است. قطرهای خارج شده از رأس A_1 را ترسیم می‌کنیم تا $(n-2)$ مثلث ایجاد شود.



$$\left. \begin{array}{l} \Delta \\ A_1 A_2 A_3 \text{ مجموع زوایای} = 180^\circ \\ \Delta \\ A_2 A_3 A_4 \text{ مجموع زوایای} = 180^\circ \\ \vdots \\ \Delta \\ A_1 A_{n-1} A_n \text{ مجموع زوایای} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع کل زوایا} = 180^\circ \times (n-2)$$

تعداد مثلثها = $n-2$

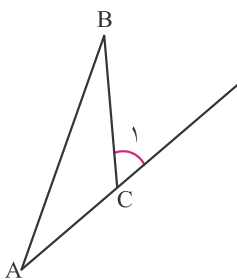
مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.



(ب)

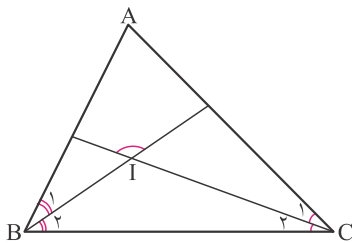
$$\begin{aligned} \text{مجموع زوایای خارجی} &= \widehat{A}'_1 + \widehat{A}'_2 + \widehat{A}'_3 + \dots + \widehat{A}'_n \\ &= (180^\circ - \widehat{A}_1) + (180^\circ - \widehat{A}_2) + (180^\circ - \widehat{A}_3) + \dots + (180^\circ - \widehat{A}_n) \\ &= \underbrace{(180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + \dots + 180^\circ)}_{\text{تا } n} - (\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \dots + \widehat{A}_n) \\ &= 180^\circ \times n - 180^\circ \times (n-2) = 180^\circ (n - n + 2) \\ &= 180^\circ \times 2 = 360^\circ \end{aligned}$$

مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر با 360° است.



| | |
|---------------------------------|-----|
| $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ | فرض |
| Δ متساوی الساقین ABC | حکم |

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \\ \widehat{C}_1 = \widehat{A} + \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \Delta \text{ متساوی الساقین } ABC$$



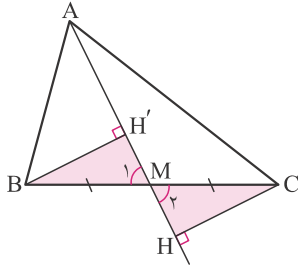
| | |
|---|-----|
| $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ | فرض |
| $\widehat{I} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ | حکم |

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} \\ \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{C}}{2} \\ \widehat{BIC} + \widehat{C}_2 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (I)$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \Rightarrow \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \quad (II)$$

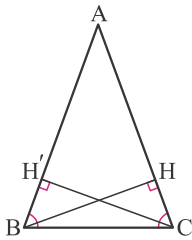
$$(I), (II) \Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{I} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$$

درس سوم: هم نهشتی مثلث‌ها



۱۳. ثابت می‌کنیم دو مثلث BMH' و CMH هم نهشت هستند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{میانہ: } BM = CM \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ : متقابل به رأس} \\ \widehat{H}' = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و.ز.}} \triangle BMH' \cong \triangle CMH \Rightarrow BH' = CH$$

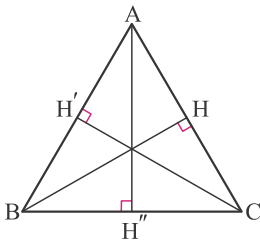


۱۴. الف) راه حل اول:

$$\left. \begin{array}{l} BC = BC \\ BH = CH' \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و.ض.}} \triangle BHC \cong \triangle CH'B \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle ABC \text{ : متساوی الساقین}$$

راه حل دوم: فرض می‌کنیم مساحت مثلث S باشد.

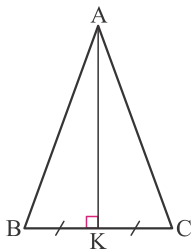
$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{AB \times CH'}{2} \\ S = \frac{AC \times BH}{2} \\ BH = CH' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC \text{ : متساوی الساقین}$$



ب) فرض کنید مساحت مثلث برابر با S باشد.

$$S = \frac{AB \times CH'}{2} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{BC \times AH''}{2} \xrightarrow{BH=CH'=AH''} AC = AB = BC$$

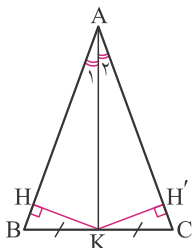
بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع است.



۱۵.

| | |
|-----|--------------------------------------|
| فرض | $\widehat{K} = 90^\circ$, $BK = KC$ |
| حکم | $AB = AC$ |

$$\left. \begin{array}{l} AK = AK \\ BK = KC \\ \widehat{AKB} = \widehat{AKC} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض.}} \triangle AKB \cong \triangle AKC \Rightarrow AB = AC$$



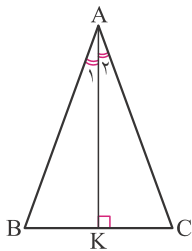
۱۶.

| | |
|-----|---|
| فرض | $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $BK = KC$ |
| حکم | $AB = AC$ |

از نقطه K دو عمود بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم:

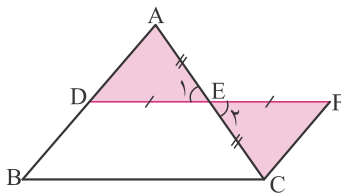
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AK = AK \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وز}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle AHK \cong \triangle AH'K \Rightarrow KH = KH'$$

$$\left. \begin{array}{l} KH = KH' \\ BK = KC \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle BHK \cong \triangle CH'K \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow AB = AC$$

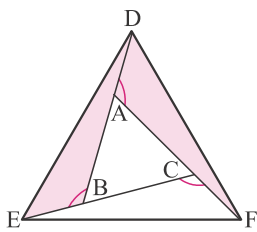


| | |
|--|-----|
| $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{K} = 90^\circ$ | فرض |
| $AB = AC$ | حکم |

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AK = AK \\ \widehat{AKB} = \widehat{AKC} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle AKB \cong \triangle AKC \Rightarrow AB = AC$$



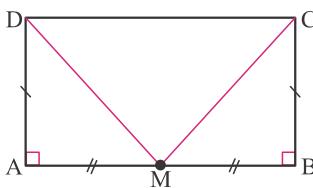
$$\left. \begin{array}{l} DE = EF \\ AE = EC \\ \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle AED \cong \triangle CEF \Rightarrow AD = FC$$



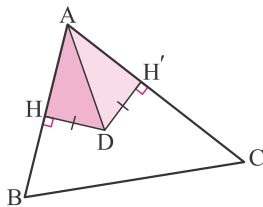
$$\left. \begin{array}{l} AB + AD = AC + CF \Rightarrow BD = AF \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 120^\circ \\ AD = EB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle EBD \cong \triangle DAF \Rightarrow DE = DF$$

به شیوه مشابه، هم‌نهستی مثلث‌های DAF و FCE را اثبات می‌کنیم. در نتیجه:

$$DE = EF = FD$$

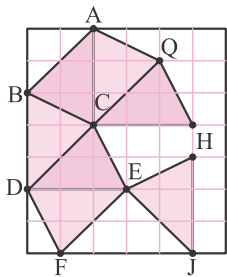


$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AM = MB \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle AMD \cong \triangle MBC$$

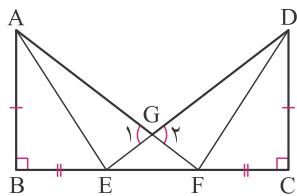


$$\left. \begin{array}{l} AD = AD \\ DH = DH' \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \rightarrow \triangle ADH \cong \triangle ADH' \Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{H'AD}$$





۲۲. تمامی مثلث‌های (رنگی) شکل روبه‌رو با هم هم‌نهشت هستند (بنا بر حالت ض ض ض).
 پس ۶ مثلث دیگر با این شرط وجود دارد.

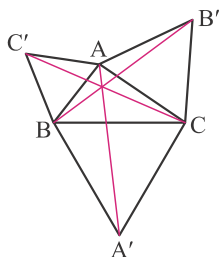


$$\left. \begin{array}{l} BE = CF \Rightarrow BF = CE \\ AB = CD \\ \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ABF \cong \Delta DCE \Rightarrow AF = DE \quad \text{الف) } ۲۳$$

$$\Delta ABF \cong \Delta DCE \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} \xrightarrow{EFG} GE = GF \quad \text{ب)}$$

$$\left. \begin{array}{l} AF = DE \\ GF = GE \end{array} \right\} \Rightarrow GD = GA \quad \text{ج)}$$

$$\left. \begin{array}{l} GD = GA \\ \widehat{G}_1 = \widehat{G}_2 \\ GE = GF \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta AEG \cong \Delta DFG$$



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'} = 60^\circ + \widehat{BAC} \\ \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'} \\ C'A = BA \\ CA = AB' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta C'AC \cong \Delta BAB' \Rightarrow CC' = BB' \quad ۲۴$$

به شیوه مشابه ثابت می‌کنیم $\Delta B'CB \cong \Delta ACA'$ و در نتیجه خواهیم داشت $B'B = AA'$.

۲۵

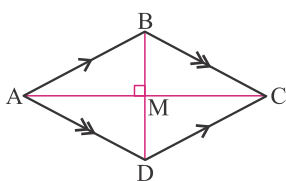
محیط دو مثلث هم‌نهشت با هم برابر است.

$$7 + 8 + 10 = (3x - 2) + (3x + 1) + (2x + 2) \Rightarrow 25 = 8x + 1 \Rightarrow x = 3$$

$$(x - 1) + (2x - 4) + (x + 4) = (x + 3) + (2x - 8) + (2x - 3) \Rightarrow 4x - 1 = 5x - 8 \Rightarrow x = 7 \quad ۲۶$$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

۲۷



| | |
|---|-----|
| $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \perp BD$ | فرض |
| $AB = BC = CD = AD$ | حکم |

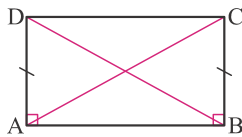
چون چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است، پس قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

$$\left. \begin{array}{l} MD = BM \\ AM = MC \\ \widehat{AMD} = \widehat{CMB} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMD \cong \triangle CMB \Rightarrow AD = BC \text{ (I)}$$

$$\left. \begin{array}{l} BM = MD \\ AM = AM \\ \widehat{AMB} = \widehat{AMD} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMB \cong \triangle AMD \Rightarrow AB = AD \text{ (II)}$$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود که $AB = BC = AD$.

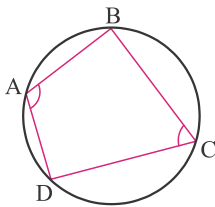
به شیوه مشابه نتیجه می‌شود که $AB = BC = CD = AD$.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ AD = BC \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle BCA$$

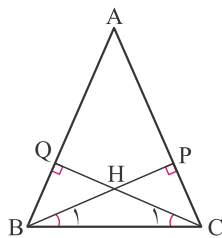
$$\triangle ADB \cong \triangle BCA \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AC = BD \\ \widehat{CAB} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD} \\ AC = BD \\ AD = BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle CAD \cong \triangle DBC \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}$$

۲۸. دو قطر را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۲۹.

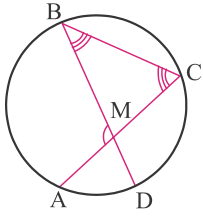


$$\left. \begin{array}{l} HB = HC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \\ \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \\ \widehat{P} = \widehat{Q} \\ BC = BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و ز}} \triangle BQC \cong \triangle CPB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$$

۳۰.

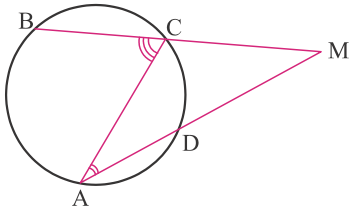
۳۱. هر حالتی را می‌توان با دوران یکی از حالت‌های زیر به دست آورد:





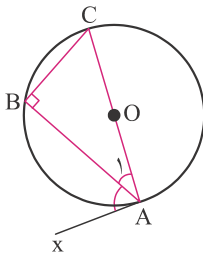
$$\left. \begin{aligned} \widehat{M} &= \widehat{B} + \widehat{C} \\ \widehat{B} &= \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2}$$

۳۲



$$\left. \begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{A} + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{C} - \widehat{A} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{A} &= \frac{\widehat{CD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

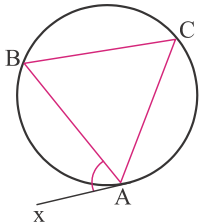
۳۳



$$\left. \begin{aligned} OA \perp Ax &\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \\ \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

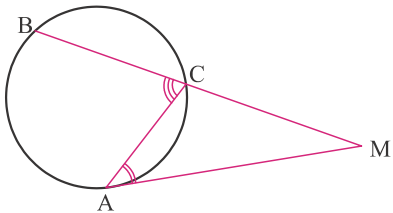
$$\left. \begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{A} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۳۴



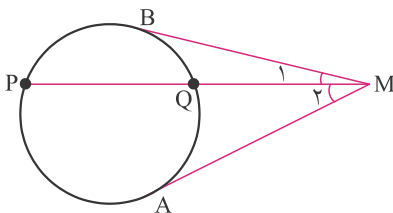
$$\left. \begin{aligned} \widehat{BAx} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{C}$$

۳۵ با توجه به سؤال قبلی داریم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{A} + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{C} - \widehat{A} \\ \widehat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{A} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$

۳۶



$$\left. \begin{aligned} \widehat{M}_1 &= \frac{\widehat{PB}}{2} - \frac{\widehat{BQ}}{2} \\ \widehat{M}_2 &= \frac{\widehat{PA}}{2} - \frac{\widehat{AQ}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2$$

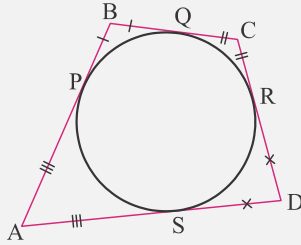
$$= \frac{\widehat{PB} + \widehat{PA}}{2} - \frac{\widehat{BQ} + \widehat{AQ}}{2} = \frac{\widehat{APB}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{APB} - \widehat{AB}}{2}$$

۳۷ با توجه به سؤال قبلی داریم:





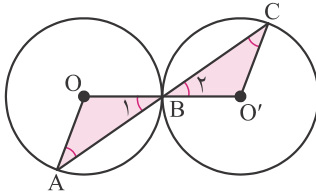
اگر دایره‌ای درون یک چهار ضلعی محاط شود، چهار جفت پاره‌خط برابر تولید می‌شود:



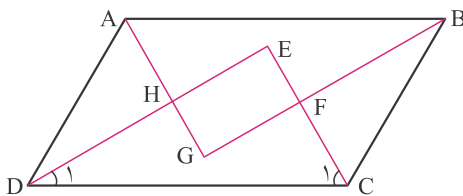
$$\begin{aligned} AP &= AS & BP &= BQ \\ CQ &= CR & DR &= DS \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= AP + BP \\ CD &= CR + DR \\ BC &= BQ + CQ \\ AD &= AS + DS \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

با توجه به نکته بالا می‌توان نوشت:

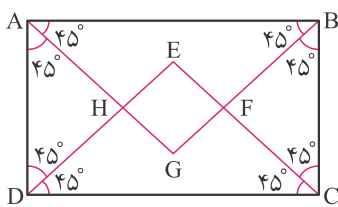


$$\left. \begin{aligned} \widehat{B}_1 &= \widehat{B}_2 \\ \widehat{B}_1 &= \widehat{A} \\ \widehat{B}_2 &= \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{C} \\ AB &= BC \\ \widehat{B}_1 &= \widehat{B}_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta AOB \cong \Delta CO'B \Rightarrow OB = O'B$$



$$\begin{aligned} \widehat{ADC} + \widehat{BCD} &= 180^\circ \\ \widehat{D}_1 + \widehat{C}_1 &= \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \widehat{E} + \widehat{D}_1 + \widehat{C}_1 &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{D}_1 + \widehat{C}_1) \Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ \\ \widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{G} = \widehat{H} &= 90^\circ \text{ به شیوه مشابه ثابت می‌شود که} \end{aligned}$$

۴۱. در پرسش قبلی ثابت کردیم که چهار ضلعی EFGH مستطیل است. اکنون کافی است ثابت کنیم که دو ضلع مجاور با هم برابر هستند.

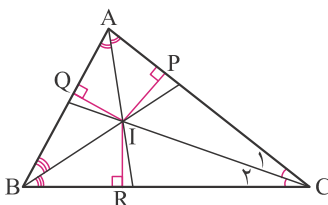


به وضوح دو مثلث AGB و DEC متساوی‌الساقین و با یکدیگر هم‌نهشت هستند، پس $EC = BG$.
از طرفی مثلث FBC نیز متساوی‌الساقین است، پس $FB = FC$.

$$\left. \begin{aligned} EC &= BG \\ FB &= FC \end{aligned} \right\} \Rightarrow EF = GF$$

پس چهار ضلعی EFGH مستطیلی است که دو ضلع مجاورش با هم برابر هستند، در نتیجه مربع است.

۴۲. نیمسازهای A و B را رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی تلاقی‌شان، بر سه ضلع عمود رسم می‌کنیم.

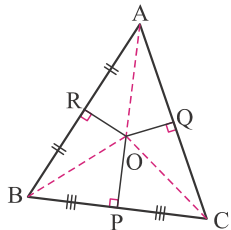


$$\left. \begin{aligned} \text{نیمساز است } AI &\Rightarrow IP = IQ \\ \text{نیمساز است } BI &\Rightarrow IQ = IR \end{aligned} \right\} \Rightarrow IP = IR$$

$$\left. \begin{aligned} IP &= IR \\ IC &= IC \\ \widehat{P} = \widehat{R} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{و ض}} \Delta IPC \cong \Delta IRC \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$$



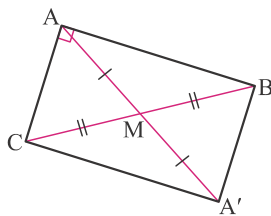
۴۳. عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم، از نقطه‌ی تلاقی‌شان به هر سه رأس وصل می‌کنیم و سپس عمودی بر ضلع AC رسم می‌کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} OR \Rightarrow AO = BO \text{ عمودمنصف است} \\ OP \Rightarrow BO = CO \text{ عمودمنصف است} \end{array} \right\} \Rightarrow CO = AO$$

$$\left. \begin{array}{l} CO = AO \\ OQ = OQ \\ \hat{Q} = \hat{Q} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \Delta AOQ \cong \Delta COQ \Rightarrow CQ = AQ$$

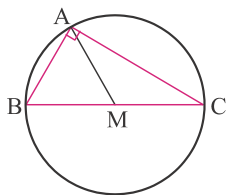
یعنی OQ عمودمنصف AC است.



۴۴. راه حل اول: پاره خط AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' حاصل شود. در چهار ضلعی $ABA'C$ قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، پس $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس این چهار ضلعی مستطیل است و قطرهایش با هم برابر هستند.

پس: $AA' = BC \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$

راه حل دوم: دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم، داریم:

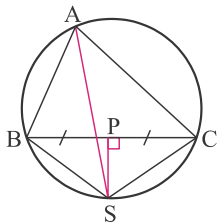


$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow BC \text{ قطر دایره است}$$

$$MB = MC \Rightarrow M \text{ مرکز دایره است}$$

با توجه به این‌که M مرکز دایره است، خواهیم داشت (r شعاع دایره است):

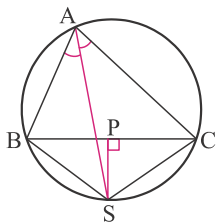
$$\left. \begin{array}{l} BC = 2r \\ AM = r \end{array} \right\} \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$



$$\left. \begin{array}{l} BP = CP \\ \hat{P} = \hat{P} = 90^\circ \\ PS = PS \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta BPS \cong \Delta CPS \Rightarrow BS = CS$$

$$\Rightarrow \widehat{BS} = \widehat{CS} \Rightarrow \widehat{BAS} = \widehat{CAS}$$

۴۵



$$\widehat{BAS} = \widehat{CAS} \Rightarrow \widehat{BS} = \widehat{CS} \Rightarrow BS = CS \Rightarrow \widehat{BS} = \widehat{CS} \Rightarrow \widehat{BAS} = \widehat{CAS}$$

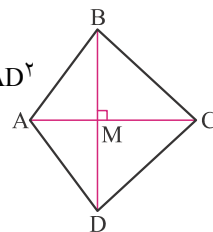
$$\left. \begin{array}{l} BS = CS \\ SP = SP \\ \hat{P} = \hat{P} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \Delta BPS \cong \Delta CPS \Rightarrow BP = CP$$

۴۶

$$\left. \begin{array}{l} AB^{\vee} = MB^{\vee} + MA^{\vee} \\ CD^{\vee} = MC^{\vee} + MD^{\vee} \end{array} \right\} \Rightarrow AB^{\vee} + CD^{\vee} = MA^{\vee} + MB^{\vee} + MC^{\vee} + MD^{\vee}$$

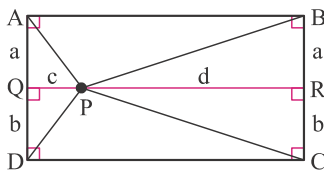
$$\left. \begin{array}{l} BC^{\vee} = MB^{\vee} + MC^{\vee} \\ AD^{\vee} = MA^{\vee} + MD^{\vee} \end{array} \right\} \Rightarrow BC^{\vee} + AD^{\vee} = MA^{\vee} + MB^{\vee} + MC^{\vee} + MD^{\vee}$$

$$\Rightarrow AB^{\vee} + CD^{\vee} = BC^{\vee} + AD^{\vee}$$

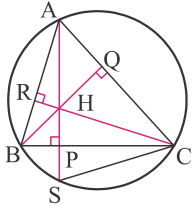


۴۷

۴۴



$$\left. \begin{aligned} AP^2 &= a^2 + c^2 \\ CP^2 &= b^2 + d^2 \\ BP^2 &= a^2 + d^2 \\ DP^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} AP^2 + CP^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ BP^2 + DP^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned} \Rightarrow AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2 \quad .48$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{BCR} + \widehat{ABC} &= 90^\circ \\ \widehat{BAP} + \widehat{ABC} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BCR} = \widehat{BAP} \quad (I) \quad .49$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BAP} = \widehat{BAS} &= \frac{\widehat{BS}}{2} \\ \widehat{BCS} &= \frac{\widehat{BS}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BCS} = \widehat{BAP} \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \widehat{BCR} = \widehat{BCS} \left. \begin{aligned} CP = CP \\ \widehat{P} = \widehat{P} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle HPC \cong \triangle SPC \Rightarrow HP = PS$$

.50 به وضوح M وسط AB است. (چرا؟)

$$\begin{aligned} \text{مساحت ناحیه رنگی} &= \pi r^2 - \pi r'^2 = (r^2 - r'^2)\pi \\ AM^2 + r'^2 &= r^2 \Rightarrow AM^2 = r^2 - r'^2 \Rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = r^2 - r'^2 \\ \Rightarrow (r^2 - r'^2)\pi &= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \pi \end{aligned}$$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

(ب) درست

.51 الف) نادرست

(د) درست

ج) نادرست

.52 چنانچه نسبت تشابه دو شکل m باشد، نسبت محیطشان نیز m است.

پس محیط ABCD، 4 برابر محیط EFGH است.

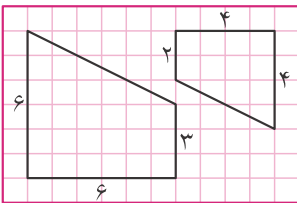
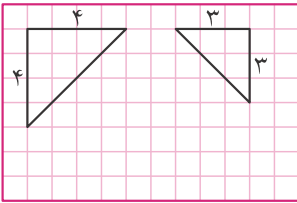
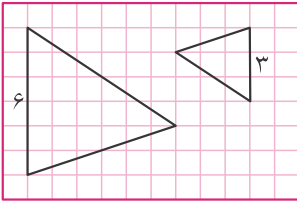
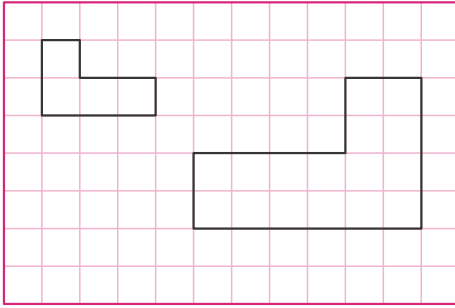
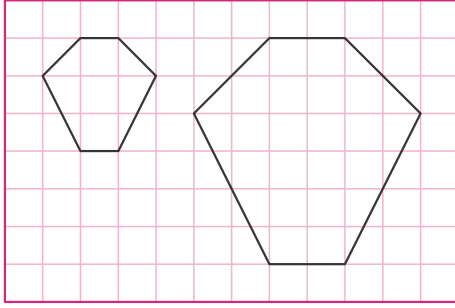
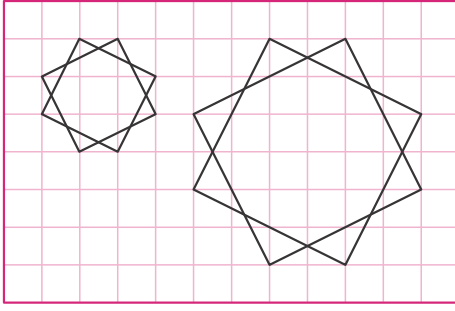
.53 الف) با توجه به نکته‌ی سؤال قبل نسبت محیط دو چند ضلعی برابر با $\frac{2}{5}$ است.

(ب)

چنانچه نسبت تشابه دو شکل m باشد، نسبت مساحت آن‌ها m^2 است.

بنابراین نسبت مساحت دو چند ضلعی برابر با $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ است.

٥٤ الف



ب

ج

٥٥ الف $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

ب $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

ج $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$



$$\frac{15}{10} = \frac{y}{9} = \frac{x}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{9} = \frac{x}{6} \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow y = \frac{2x}{2} \\ \frac{x}{6} = \frac{x}{6} \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

۵۶. الف)

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{6} = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{9}{6} \Rightarrow 12 = 2x \Rightarrow x = 6 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{8} \Rightarrow 24 = 2y \Rightarrow y = 12 \\ \frac{x}{4} = \frac{z}{10} \Rightarrow 30 = 2z \Rightarrow z = 15 \end{cases}$$

ب)

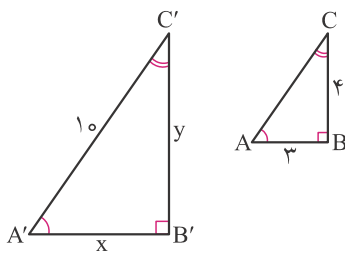
$$\frac{10}{5} = \frac{8}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{x} = 2 \Rightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{3} = 2 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

۵۷.

۵۸. الف) درست است.

ب) نادرست است.

ج) نادرست است.



$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

۵۹.

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6 \\ 2 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

۶۰.

اگر نسبت تشابه دو شکل برابر با m باشد، نسبت اجزای متناظر (نیمساز، ارتفاع، میانه و ...) در دو شکل نیز برابر با m است.

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{BD}{B'D'} \Rightarrow \frac{9}{A'H'} = \frac{12}{8} \Rightarrow 12A'H' = 72 \Rightarrow A'H' = 6$$

$$\frac{4}{6} = \frac{4+6}{6+x} \Rightarrow 4 \times (6+x) = 6 \times (4+6) \Rightarrow 24 + 4x = 60 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$$

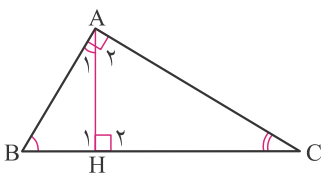
۶۱.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{x+5}{9} = \frac{3x}{18} = \frac{x+10}{12}$$

۶۲.

$$\Rightarrow \frac{x+5}{9} = \frac{3x}{18} \Rightarrow x+5 = \frac{3x}{2} \Rightarrow 2x+10 = 3x \Rightarrow x = 10$$

۶۳. الف)



$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{B} &= 90^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A}_2$$

بنابراین $\widehat{C} = \widehat{A}_1$.



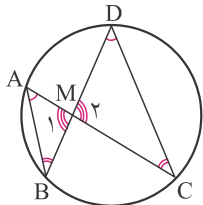
$$\widehat{A}_2, \widehat{B} \leftarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \rightarrow \widehat{C}, \widehat{A}_1$$

↑
ضلع‌های روبه‌روی

← ضلع‌های روبه‌روی $\widehat{H}_2, \widehat{H}_1$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \times HC$$

(ب)



$$\widehat{A} = \widehat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

۶۴. الف)

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

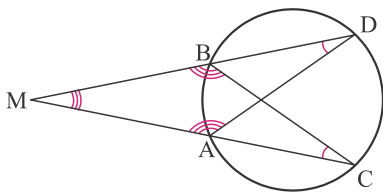
$$\widehat{D}, \widehat{A} \leftarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} \rightarrow \widehat{M}_2, \widehat{M}_1$$

↑
ضلع‌های روبه‌روی

← ضلع‌های روبه‌روی \widehat{C}, \widehat{B}

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow MA \times MC = MB \times MD$$

(ب)



$$\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۶۵. الف)

$$\widehat{A} = \widehat{B} = 180^\circ - \frac{\widehat{CD}}{2}$$

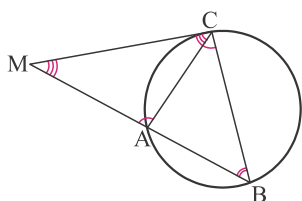
$$\widehat{B}, \widehat{A} \leftarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC} \rightarrow \widehat{M}$$

↑
ضلع‌های روبه‌روی

← ضلع‌های روبه‌روی \widehat{C}, \widehat{D}

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow MA \times MC = MB \times MD$$

(ب)



$$\widehat{B} = \widehat{MCA} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

۶۶. الف)

$$\widehat{A} = \widehat{MCB} = 180^\circ - \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$$\widehat{MCB}, \widehat{A} \leftarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \widehat{M}$$

↑
ضلع‌های روبه‌روی

← ضلع‌های روبه‌روی $\widehat{MCA}, \widehat{B}$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow MC^2 = MA \times MB$$

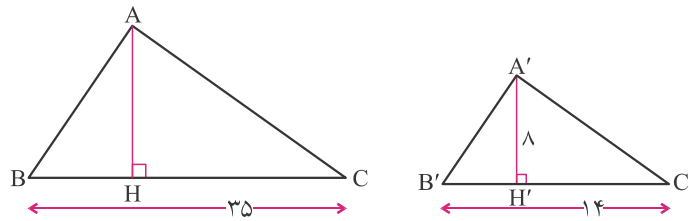
(ب)

۶۷. فرض می‌کنیم نسبت تشابه m باشد:

$$\left. \begin{matrix} AB = 12 \\ BC = 17 \\ AC = 21 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A'B' = 12m \\ B'C' = 17m \\ A'C' = 21m \end{matrix} \right.$$

$$A'B' + B'C' + A'C' = 12m + 17m + 21m = 50m$$

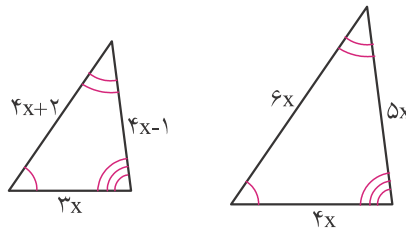
$$50m = 20 \Rightarrow m = \frac{2}{5} \Rightarrow A'B' = 12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$



$$ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'H'}{AH} \Rightarrow \frac{14}{35} = \frac{8}{AH} \Rightarrow 14 \times AH = 8 \times 35 \Rightarrow AH = 20$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{20 \times 35}{2} = 350$$

پس مساحت مثلث بزرگ برابر است با:



$$\frac{4x+2}{6x} = \frac{4x-1}{5x} = \frac{3x}{4x}$$

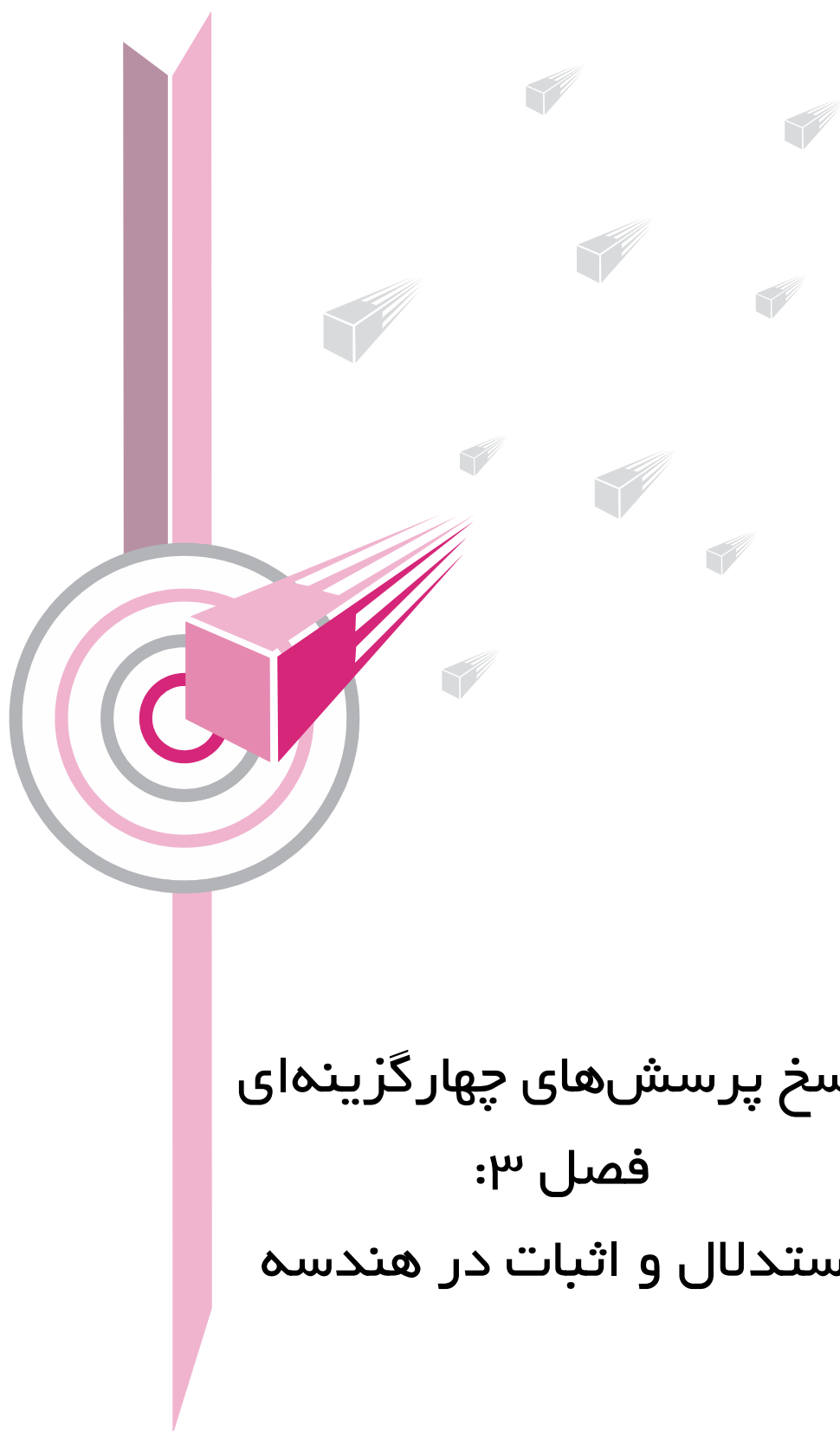
$$\frac{4x-1}{5x} = \frac{3x}{4x} \Rightarrow \frac{4x-1}{5x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \times (4x-1) = 3 \times 5x \Rightarrow 16x-4 = 15x \Rightarrow x = 4$$

۷۰. فرض می‌کنیم نسبت تشابه دو مثلث m باشد، به طوری که طول هر ضلع مثلث PQR مساوی با m برابر طول ضلع متناظرش در مثلث ABC است. در این صورت:

$$\frac{PQ \times QR \times RP}{CA \times AB \times BC} = m^3$$

$$\frac{PQ}{CA} \times \frac{QR}{AB} \times \frac{RP}{BC} = 3 \times 8 \times 9 = m^3 \Rightarrow 216 = m^3 \Rightarrow m = 6$$

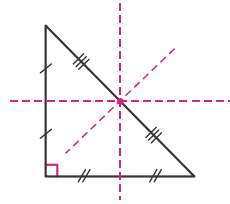
پس می‌توان نوشت:



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۳:
استدلال و اثبات در هندسه



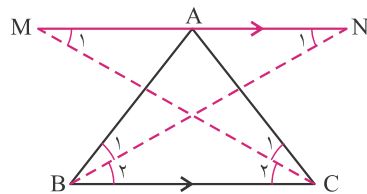
فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه



۱. گزینه «۳» باید این مطلب را به صورت یک نکته به خاطر بسپارید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}$$

۲. گزینه «۳»

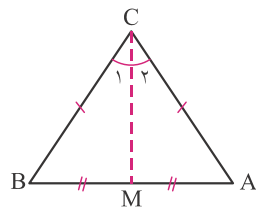


$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel MN \\ BN \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{B}_1$$

$$\hat{N}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \Delta NAB \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow AN = AB$$

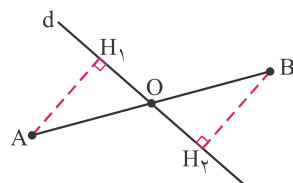
به شیوه مشابه ثابت می‌شود $AM = AC$.

$$MN = AN + AM = AB + AC = 10 + 11 = 21$$



$$\left\{ \begin{array}{l} AM = BM \\ AC = BC \\ \text{مشترک } CM \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta CMB \cong \Delta CMA \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

۴. گزینه «۴»



$$\left. \begin{array}{l} AH_1 < OA \\ BH_2 < OB \end{array} \right\} \Rightarrow AH_1 + BH_2 < OA + OB \Rightarrow AH_1 + BH_2 < AB \Rightarrow AH_1 + BH_2 < 10$$

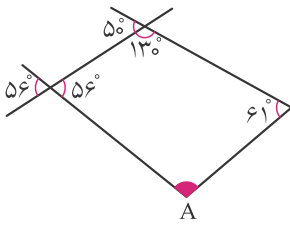
۵. گزینه «۲»

$$n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ = 180^\circ \times (n - (n-2)) = 180^\circ \times (n - n + 2) = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

۶. گزینه «۳»



۷. گزینه «۳» اندازه‌های دیگر را در شکل مشخص می‌کنیم.



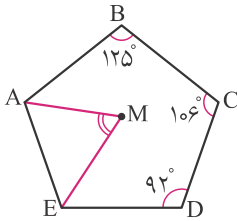
$$61^\circ + 130^\circ + 56^\circ + \hat{A} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 360^\circ - 247^\circ = 113^\circ$$

۸. گزینه «۳»

$$\text{مجموع زوایای داخلی پنج ضلعی} = 180^\circ(n-2) = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{E} = 540^\circ - (106^\circ + 92^\circ + 125^\circ) = 217^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{E}}{2} = 108.5^\circ$$

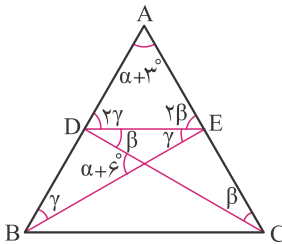
$$\Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - 108.5^\circ = 71.5^\circ$$



۹. گزینه «۲» اگر نقطه‌ای بر روی عمودمنصف یک ضلع قرار داشته باشد از دو سر آن به یک فاصله است، پس محل برخورد سه عمودمنصف مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است.

۱۰. گزینه «۴» عمودمنصف پاره خط MN را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد عمودمنصف و منحنی را می‌شماریم.

۱۱. گزینه «۲» زاویه DCE را β و زاویه EBD را γ در نظر می‌گیریم.



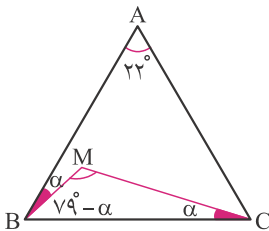
$$\left. \begin{array}{l} \Delta ADE: \alpha + 30^\circ + 2\gamma + 2\beta = 180^\circ \\ \text{زاویه خارجی: } \alpha + 6^\circ = \gamma + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2(\gamma + \beta) + \alpha + 30^\circ}{\alpha + 6^\circ} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 55^\circ$$

۱۲. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{CBD} = \alpha \Rightarrow \widehat{ABC} = 2\alpha \\ \widehat{C} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 3\alpha \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - 3\alpha$$

$$\Delta ABD: \alpha + 180^\circ - 3\alpha + 180^\circ - 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow 360^\circ - 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

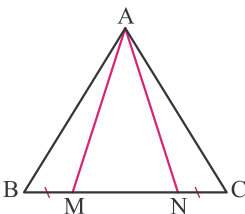


$$\hat{A} = 72^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 79^\circ$$

۱۳. گزینه «۴»

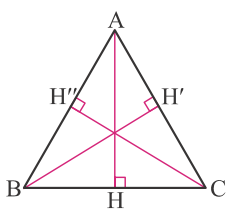
$$\hat{M} + \alpha + 79^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 101^\circ$$

۱۴. گزینه «۳» در واقع این حالت همان حالت یک ضلع و دو زاویه است (ضض ز).



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ BM = NC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ضض}} \Delta AMB \cong \Delta ANC \Rightarrow AM = AN, \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$$

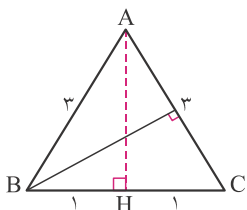
$$BM = NC \Rightarrow BM + MN = CN + MN \Rightarrow BN = MC$$



۱۶. گزینه «۲» مساحت مثلث را به سه طریق محاسبه می‌کنیم:

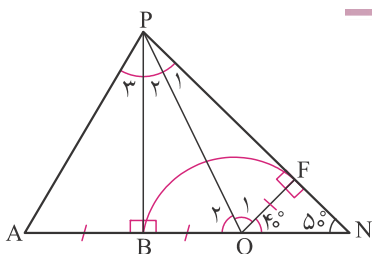
$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC = \frac{1}{2} CH'' \times AB$$

$$\frac{AH=BH'=CH''}{\text{متساوی الاضلاع}} \rightarrow BC = AC = AB \Rightarrow \triangle ABC$$



۱۷. گزینه «۱» طول ارتفاع وارد بر ساق را h در نظر می‌گیریم.

$$AH = \sqrt{r} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times h \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



۱۸. گزینه «۲»

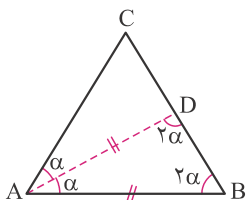
$$\xrightarrow{\text{وض}} \triangle POF \cong \triangle POB \Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \frac{\widehat{BPN}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle APB \cong \triangle OPB \Rightarrow \hat{P}_3 = \hat{P}_2 = 20^\circ \Rightarrow \widehat{APF} = 3 \times 20^\circ = 60^\circ$$

۱۹. گزینه «۳»

۲۰. گزینه «۱» فقط ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، آن را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند.

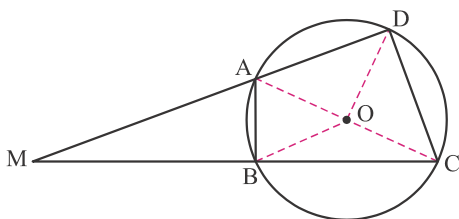
۲۱. گزینه «۳» اجزا را در شکل بر حسب α می‌نویسیم:



$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - 4\alpha = 36^\circ$$

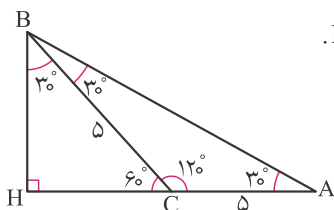
۲۲. گزینه «۳»



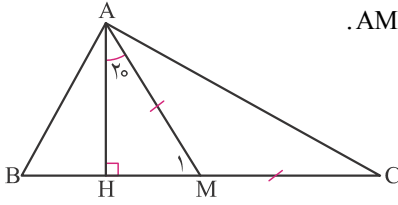
$$\left. \begin{array}{l} CD = R\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ \\ AB = R \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$

۲۳. گزینه «۳» با توجه به زاویه‌های روی شکل می‌توان فهمید ABC متساوی‌الساقین و در نتیجه $BC = 5$.

$$AH = AC + CH \Rightarrow AH = 5 + \frac{5}{4} = 7/4$$

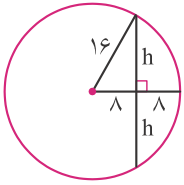


۲۴. گزینه «۲» توجه کنید که میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است، یعنی $AM = MC$.



$$\left. \begin{aligned} \widehat{HAM} = 20^\circ &\Rightarrow \widehat{M_1} = 70^\circ \\ \text{زاویه خارجی: } M_1 &= 2\widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = 35^\circ$$

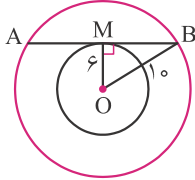
۲۵. گزینه «۲» محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائمه و محل برخورد عمودمنصف‌ها وسط وتر است، بنابراین اندازه مورد نظر همان طول میانه وارد بر وتر است.



۲۶. گزینه «۳»

$$h^2 = 16^2 - 8^2 \Rightarrow h^2 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow h = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

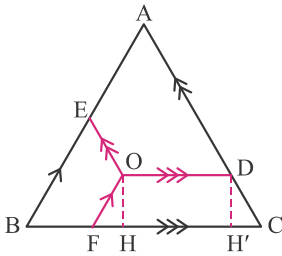
$$\text{طول وتر} = 2h = 16\sqrt{3}$$



۲۷. گزینه «۳»

$$OB^2 = OM^2 + BM^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BM^2 \Rightarrow BM^2 = 64 \Rightarrow BM = 8$$

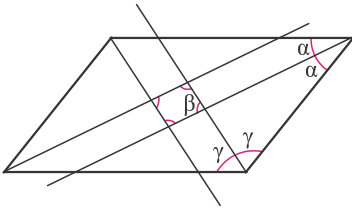
$$AB = 2BM \Rightarrow AB = 2 \times 8 = 16$$



۲۸. گزینه «۱» سه دوزنقه شکل متساوی‌الساقین‌اند (با زاویه‌های 60° ، 60° ، 120° و 120°). پس:

$$\left. \begin{aligned} OE &= BF \\ OD &= HH' \\ FH &= \frac{1}{2}OF \Rightarrow FH + H'C = OF \end{aligned} \right\} \Rightarrow OE + OF + OD = BC$$

۲۹. گزینه «۳»

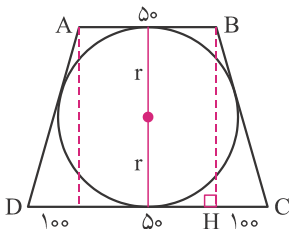


$$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

به همین روش ثابت می‌شود هر چهار زاویه چهار ضلعی ایجاد شده قائمه‌اند، پس یک مستطیل تشکیل شده است.

۳۰. گزینه «۱» در لوزی همواره دو قطر عمود بر هم و اضلاع دوه‌دو موازی است.

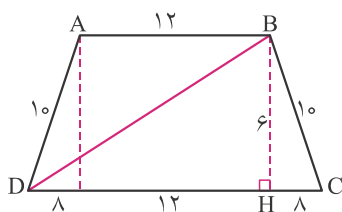
۳۱. گزینه «۳» چون چهارضلعی محیطی است داریم $AB + CD = AD + BC$ و در نتیجه



طول هر ساق برابر است با 15° . اکنون اگر ارتفاع BH را رسم کنیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} CH &= \frac{250 - 50}{2} = 100 \\ BH &= 2r \end{aligned} \right\} BC^2 = BH^2 + CH^2 \rightarrow 150^2 = BH^2 + 100^2$$

$$\Rightarrow BH = 50\sqrt{5} \Rightarrow 2r = 50\sqrt{5}$$

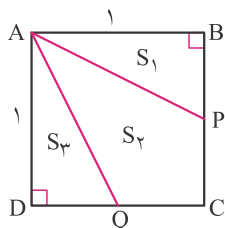


$$\left. \begin{aligned} CH = 8 \\ BC = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow BH^2 + CH^2 = BC^2 \Rightarrow BH^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BH = 6$$

$$BD^2 = HD^2 + BH^2 = 20^2 + 6^2 = 400 + 36$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{436} \Rightarrow BD = 2\sqrt{109}$$

گزینه «۴» ۳۲

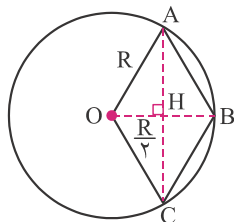


$$S_1 = S_3 \Rightarrow BP = DQ$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 = \frac{1}{2} AB \times BP = \frac{1}{2} BP \\ S_3 = 2 \left(\frac{1}{2} AD \times QC \right) = QC \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2QC = DQ = BP = 2PC \Rightarrow \begin{cases} BP = DQ = \frac{2}{3} \\ QC = PC = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$AQ^2 = DQ^2 + AD^2 \Rightarrow AQ^2 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \Rightarrow AQ = \frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$$

گزینه «۲» ۳۳



$$AH^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}R}{2} \Rightarrow AC = \sqrt{3}R$$

گزینه «۴» ۳۴

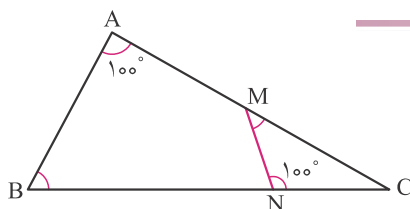
$$0,2 \times 10^4 = 2000m = 2km$$

گزینه «۱» ۳۵

در دو شکل متشابه، زاویه‌ها با هم برابر هستند. پس زاویه دید همان ۵۰° است.

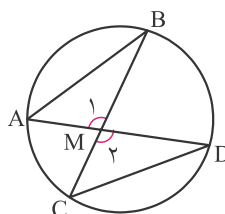
گزینه «۴» ۳۶

گزینه «۳» ۳۷



$$\left. \begin{aligned} \Delta MNC: \widehat{M} + \widehat{C} + 100^\circ = 180^\circ \\ \Delta ABC: \widehat{B} + \widehat{C} + 100^\circ = 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{B}$$

گزینه «۱» ۳۸

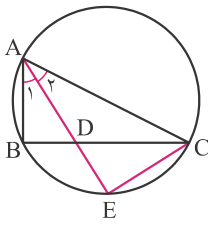


$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{AC}{2} \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ \widehat{C} = \widehat{A} = \frac{BD}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$$

گزینه «۲» ۳۹

$$\frac{26}{13} = \frac{24}{x} = \frac{y}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{x} = 2 \Rightarrow x = 12 \\ \frac{y}{5} = 2 \Rightarrow y = 10 \end{cases} \Rightarrow x + y = 22$$

گزینه «۳» ۴۰



$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 &= \widehat{A}_2 \\ \widehat{B} &= \widehat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}$$

با توجه به زوایای برابر می توان نوشت:

$$\frac{BD}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

$$\frac{AE}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow BC^2 = \frac{1}{2} AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{BC^2} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$$

گزینه «۲» می دانیم $AB = 2AE$ و $EF = BC$ ، بنابراین:

گزینه «۲»

$$\frac{S}{S'} = (\text{نسبت تشابه})^2 = \frac{9}{16}$$

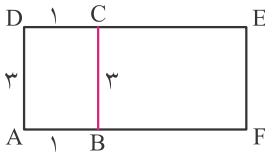
گزینه «۲»

$$\frac{P'}{P} = \frac{6^\circ}{30^\circ} = 2 \Rightarrow \frac{S'}{S} = 4 \Rightarrow \frac{S'}{\frac{1}{2} \times 5 \times 12} = 4 \Rightarrow S' = 120$$

گزینه «۱» توجه نمایید که مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ قائم الزویه است.

$$\frac{S_{\text{کوچک}}}{S_{\text{بزرگ}}} = \frac{S_{\text{کوچک}}}{250} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{\text{کوچک}} = 50 \Rightarrow \frac{(\text{قطر مربع کوچک})^2}{2} = 50 \Rightarrow \text{قطر مربع کوچک} = 10$$

گزینه «۳»



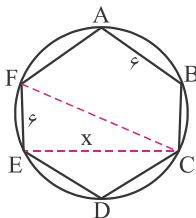
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{CE} \Rightarrow CE = 9$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}} = \frac{3 \times 10}{3 \times 9} = \frac{10}{9}$$

گزینه «۳»

$$\frac{S'}{S} = \frac{4}{9} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9 \\ \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

گزینه «۲» نسبت تشابه را λ در نظر می گیریم.



$$\left. \begin{aligned} FC &= 12 \\ FE &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow FE^2 + EC^2 = FC^2 \Rightarrow 6^2 + x^2 = 12^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 108 \Rightarrow x = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

دقت کنید FEC قائم الزویه است (چرا؟).

گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{A} \\ \widehat{D} &= \widehat{C} \\ \widehat{B} &= \widehat{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE} = 2 \Rightarrow \frac{6}{AE} = 2 \Rightarrow AE = 3$$

گزینه «۲»



پاسخ تمرین‌های فصل ۴
توان و ریشه



فصل ۴: توان و ریشه

درس اول: توان صحیح

$$\left. \begin{aligned} 2^{-10} &= \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \\ 10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10^{-3} > 2^{-10}$$

.۱

الف) $a^3 b^{-5} = \frac{a^3}{b^5}$

ب) $a^{-2} b^{-7} = \frac{1}{a^2 b^7}$

.۲

$$(3^{-2} + 2^{-2})^{-1} = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{36} + \frac{9}{36}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{36}\right)^{-1} = \frac{36}{13}$$

.۳

$$\frac{6^{-2} + 2^{-3}}{3^{-2} + 4^{-2}} = \frac{\frac{1}{6^2} + \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \frac{\frac{1}{36} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{8+36}{8 \times 36}}{\frac{16+9}{16 \times 9}} = \frac{\frac{44}{8 \times 36}}{\frac{25}{16 \times 9}} = \frac{22}{25}$$

.۴

$$(2^{-2} - (\frac{3}{2})^{-2})^{-2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9-16}{36}\right)^{-2} = \left(\frac{-7}{36}\right)^{-2} = \left(-\frac{36}{7}\right)^2 = \frac{1296}{49}$$

.۵

$$(-3^{-2})^{3^2} = (-3^{-2})^9 = -3^{-18}$$

.۶

$$2^{-2^3} \times 2^{(-3)^2} \times 2^9 = 2^{-8} \times 2^9 \times 2^9 = 2^{10}$$

.۷

$$27^{10-2x} = 9^{-3^0} \Rightarrow (3^3)^{10-2x} = (3^2)^{-3^0} \Rightarrow 3^{30-6x} = 3^{-6^0} \Rightarrow 30-6x = -6^0 \Rightarrow 90 = 6x \Rightarrow x = 15$$

.۸

$$(0.1)^2 \times (10^{-1})^{x-1} \times 10^{2x} = 0.001 \Rightarrow (10^{-1})^2 \times (10^{-1})^{x-1} \times (10^{-1})^{-2x} = (10^{-1})^3$$

$$\Rightarrow 2 + (x-1) + (-2x) = 3 \Rightarrow 1-x = 3 \Rightarrow x = -2$$

.۹

$$\left(\frac{3x^5}{2y^3}\right) \times \left(\frac{9x^y}{4y^6}\right)^{-1} = \frac{3x^5}{2y^3} \times \frac{4y^6}{9x^y} = \frac{2y^3}{3x^2}$$

.۱۰



$$\frac{x^{-2}y^{-4}}{y^{-5}x^{-4}} \div \frac{(x^{-2}y^{-1})^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \frac{x^{-2}y^{-4}}{y^{-5}x^{-4}} \times \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^4}{(x^{-2}y^{-1})^3} = \frac{x^{-2}y^{-4}}{y^{-5}x^{-4}} \times \frac{x^4}{y^4(x^{-6}y^{-3})} = x^{12} \quad .11$$

$$49(x+4)^{-2} = 2^{-6} \Rightarrow \frac{7^2}{(x+4)^2} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow \frac{7}{x+4} = \pm \frac{1}{2^3} \Rightarrow \begin{cases} x+4 = 56 \Rightarrow x = 52 \\ x+4 = -56 \Rightarrow x = -60 \end{cases} \quad .12$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2 \times 10^{-50}}{10^{-49}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad .13$$

$$3^{2x+8} = 2^6 \times 3^6 \times \frac{2^{-6}}{3^{-2}} \Rightarrow 3^{2x+8} = 3^8 \Rightarrow 2x+8 = 8 \Rightarrow x = 0 \quad .14$$

$$3^{-b} = 5 \Rightarrow (5^{-a})^{-b} = 5 \Rightarrow 5^{ab} = 5 \Rightarrow ab = 1$$

$$(3ab - 3)^{1395} = (3 - 3)^{1395} = 0 \quad .15$$

درس دوم: نماد علمی

$$\frac{17 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-22}}{34 \times 10^{-42}} = 10 \quad .16$$

$$0.000000375 = 3.75 \times 10^{-7} \quad .17$$

$$0.00047 = 4.7 \times 10^{-4} \Rightarrow \text{توان عدد } 10 \text{ برابر } -4 \text{ است} \quad .18$$

$$0.000456 = 4.56 \times 10^{-4} \Rightarrow n = -4 \quad .19$$

$$\frac{2.5 \times 10^{-5} \times 2.4 \times 10^{-5}}{10^1} = 6 \times 10^{-11} \quad .20$$

$$\frac{1.49 \times 10^8}{3.14 \times 10^5} \approx 0.47 \times 10^3 = 470 \quad .21$$

$$\frac{1.7 \times 10^{-24}}{9.1 \times 10^{-28}} \approx 0.19 \times 10^4 = 1.9 \times 10^3 \quad .22$$

$$0.00000024 = 2.4 \times 10^{-7} \Rightarrow e = 2.4, f = -7 \Rightarrow fe + f = 2.6 \quad .23$$

$$\left. \begin{aligned} 9,89 \times 10^4 \\ 99000 = 9,9 \times 10^4 \\ 1 \times 10^5 = 10 \times 10^4 \\ 0,98 \times 10^5 = 9,8 \times 10^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \times 10^5 > 99000 > 9,89 \times 10^4 > 0,98 \times 10^5$$

. ۲۴

$$73 \times 10^{-5} + 50 \times 10^{-6} = 7,3 \times 10^{-4} + 0,5 \times 10^{-4} = (7,3 + 0,5) \times 10^{-4} = 7,8 \times 10^{-4}$$

. ۲۵

درس سوم: ریشه‌گیری

$$\sqrt{(-0,6)^2(-1,96)(-1)^{-7}} = \sqrt{\left(-\frac{6}{10}\right)^2 \left(-\frac{196}{100}\right)(-1)} = \sqrt{\frac{6^2}{100} \times \frac{14^2}{100} \times (-1)} = \frac{6}{10} \times \frac{14}{10} = \frac{84}{100} = 0,84$$

. ۲۶

الف) $-\sqrt[3]{6 \times (-4)(-9)} = -\sqrt[3]{2 \times 3 \times 2^2 \times 3^2} = -\sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = -2 \times 3 = -6$

. ۲۷

ب) $2\sqrt[3]{64} - \sqrt{16} = 2\sqrt[3]{2^6} - \sqrt{2^4} = 2 \times 2^2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

الف) $2 + \sqrt{-8} = 2 + \sqrt{-2^3} = 2 + (-2) = 0$

. ۲۸

ب) $\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} \times \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 2^2 \times 3 = 12$

ج) $\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-2^6} = -2^2 = -4$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{(1+6)^2}}}}} &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5 \times 7}}}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \times 6}}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \times 5}} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2 \times 4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

. ۲۹

$$(2-\sqrt{3})^3(2+\sqrt{3})^3 = ((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^3 = (4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3)^3 = 1^3 = 1$$

. ۳۰

$$x^2 = (\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^2 = \sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{3^2 \times 3} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

. ۳۱

$$\sqrt[3]{z\sqrt{z}} = v \Rightarrow z\sqrt{z} = v^3 \Rightarrow z^2 \times z = v^6 \Rightarrow z^3 = v^6 \Rightarrow z = v^2 = 49$$

. ۳۲

$$\sqrt[3]{A} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sqrt[3]{A} = \frac{3^2}{5^2} \Rightarrow A = \frac{3^6}{5^6} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

. ۳۳

$$\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2}} = \frac{a}{a+a+a} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

. ۳۴

$$\sqrt[3]{v + \sqrt{22}} \times \sqrt[3]{v - \sqrt{22}} = \sqrt[3]{(v + \sqrt{22})(v - \sqrt{22})} = \sqrt[3]{49 - v\sqrt{22} + v\sqrt{22} - 22} = \sqrt[3]{27} = 3$$

. ۳۵

$$(\sqrt{2}-1)^9(\sqrt{2}+1)^8 = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^8(\sqrt{2}+1)^8 =$$

$$(\sqrt{2}-1)((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))^8 = (\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)^8 = (\sqrt{2}-1) \times 1^8 = \sqrt{2}-1$$

. ۳۶

$$\sqrt[3]{2x} \sqrt{\frac{1}{4x^2}} = \sqrt[3]{2x} \frac{1}{2x} = \sqrt[3]{\frac{1}{2x}} = 1$$

. ۳۷

$$\sqrt{v^{x+1}} = \sqrt[3]{v^x} \Rightarrow (\sqrt{v^{x+1}})^6 = (\sqrt[3]{v^x})^6$$

$$\Rightarrow (v^{x+1})^3 = (v^x)^2 \Rightarrow v^{3x+3} = v^{2x} \Rightarrow 3x+3 = 2x \Rightarrow x = -3$$

. ۳۸

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{xy} = 3 &\Rightarrow xy = 9 \\ \sqrt[3]{xyz} = 6 &\Rightarrow xyz = 216 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{xyz}{xy} = \frac{216}{9} \Rightarrow z = 24$$

. ۳۹

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکالها

$$\sqrt{288} - \sqrt{72} - \sqrt{50} = \sqrt{2^5 \times 3^2} - \sqrt{2^3 \times 3^2} - \sqrt{2 \times 5^2} =$$

$$\sqrt{2 \times 2^4 \times 3^2} - \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2} - \sqrt{2 \times 5^2} = 2^2 \times 3 \times \sqrt{2} - 2 \times 3 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2} =$$

$$12\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

. ۴۰

$$5\sqrt{128} - 3\sqrt{72} + 2\sqrt{200} + 4\sqrt{98} - 4\sqrt{242} =$$

$$5\sqrt{2^7} - 3\sqrt{2^3 \times 3^2} + 2\sqrt{2^3 \times 5^2} + 4\sqrt{2 \times 7^2} - 4\sqrt{2 \times 11^2} =$$

$$5\sqrt{2 \times 2^6} - 3\sqrt{2 \times 2^2 \times 3^2} + 2\sqrt{2 \times 2^2 \times 5^2} + 4\sqrt{2 \times 7^2} - 4\sqrt{2 \times 11^2} =$$

$$5 \times 2^3 \times \sqrt{2} - 3 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} + 2 \times 2 \times 5 \times \sqrt{2} + 4 \times 7 \times \sqrt{2} - 4 \times 11 \times \sqrt{2} =$$

$$40\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 20\sqrt{2} + 28\sqrt{2} - 44\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$$

. ۴۱

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

. ۴۲

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1) - 2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}-2}{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1} = \frac{-4}{2} = -2$$

. ۴۳

$$-\sqrt{40} + 5\sqrt{0.005} = -\sqrt{2^3 \times 5} + 5\sqrt{\frac{5}{10^3}} = -2\sqrt{5} + \frac{5}{10}\sqrt{5} = -\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = -\frac{3}{10}\sqrt{5}$$

. ۴۴

$$\sqrt{54} + \sqrt{-16} + \sqrt{2000} = \sqrt{2 \times 3^3} - \sqrt{2^4} + \sqrt{2^3 \times 10^3} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

. ۴۵

$$\sqrt{128} + \sqrt{432} + 2\sqrt{16} = \sqrt{2^7} + \sqrt{2^4 \times 3^3} + 2\sqrt{2^4} = \sqrt{2 \times 2^6} + \sqrt{2 \times 2^2 \times 3^3} + 2\sqrt{2 \times 2^3} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

. ۴۶

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+2}{3+\sqrt{6}-\sqrt{6}-2} = \sqrt{6}+2$$

$$\frac{y}{\sqrt{y5}-\sqrt{12}} = \frac{y}{\sqrt{3 \times 5^2} - \sqrt{3 \times 2^2}} = \frac{y}{5\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = \frac{y}{3\sqrt{3}} = \frac{y \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{y\sqrt{3}}{9}$$

$$(5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108})(\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \times \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}) =$$

$$(5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4 \times 2^3} - \sqrt[3]{4 \times 3^3})(\sqrt[3]{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})}) =$$

$$(5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{81-9\sqrt{17}+9\sqrt{17}-17}) = 6\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{64} = 6\sqrt[3]{4} \times 4 = 24\sqrt[3]{4}$$

$$\text{الف) } 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{64} - 4\sqrt[3]{5488} =$$

$$2\sqrt[3]{2 \times 3^3} - 2\sqrt[3]{2 \times 2^3} + \sqrt[3]{2 \times 2^6} - 3\sqrt[3]{2 \times 4^3} - 4\sqrt[3]{2 \times 2^3 \times 7^3} =$$

$$6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} - 56\sqrt[3]{2} = -71\sqrt[3]{2}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375} =$$

$$\sqrt[3]{3 \times 3^3} - \sqrt[3]{3 \times 2^6} - \sqrt[3]{3 \times 2^3} + \sqrt[3]{3 \times 5^3} =$$

$$3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

. ٤٧

. ٤٨

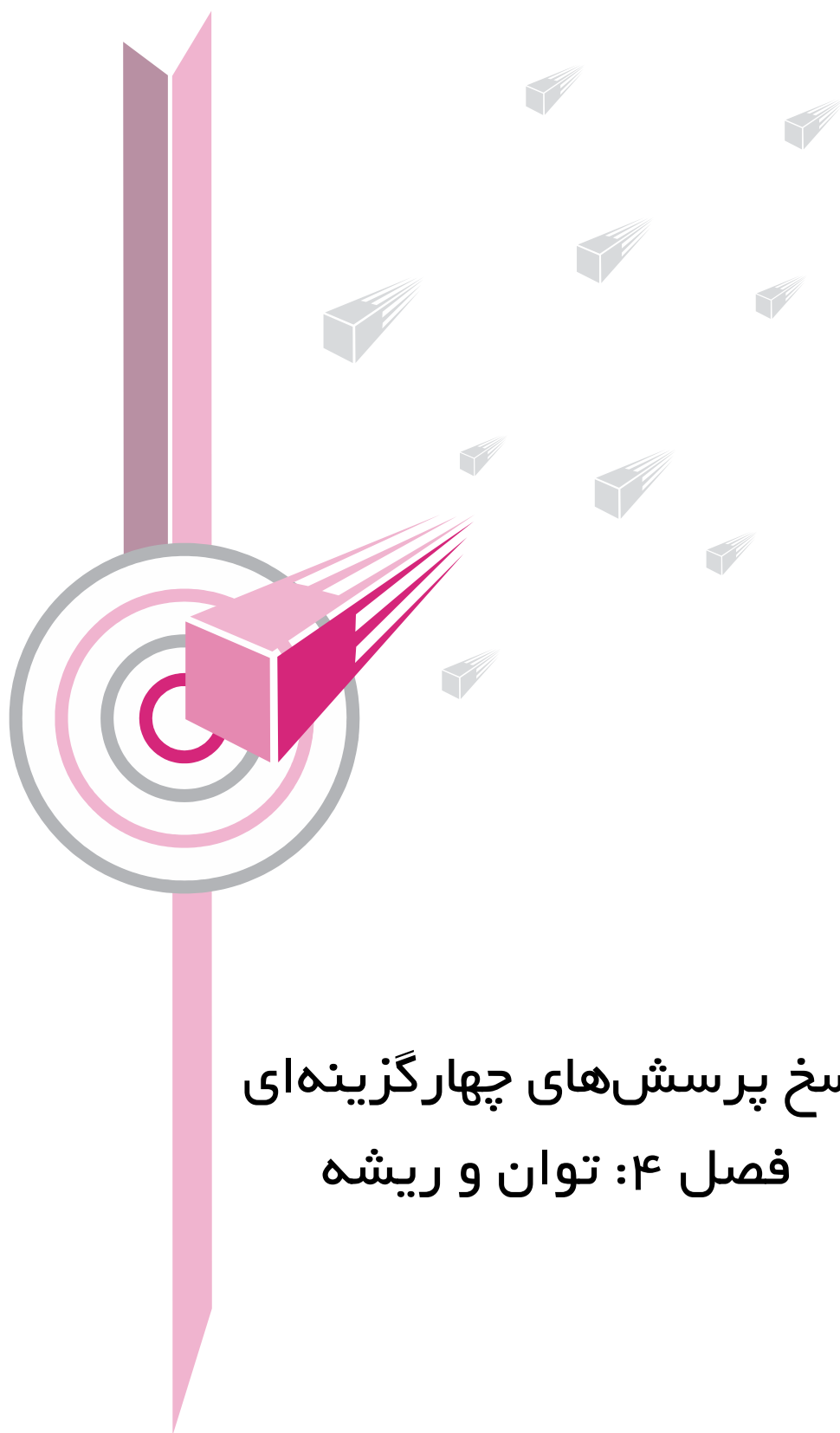
. ٤٩

. ٥٠

شعبان

باصبحنامه ریاضی ٩ ام شعبان





پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۴: توان و ریشه



فصل ۴: توان و ریشه

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{-7}{36}\right)^{-2} = \left(\frac{36}{7}\right)^2 \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{-5}{36}\right)^{-1} = \frac{-36}{5} = -7\frac{1}{5} \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$2^{-2^3} \times 2^{(-3)^2} \times (2^3)^3 = 2^{-8} \times 2^9 \times 2^9 = 2^{10} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$\frac{a^{2b} \times b^{2a}}{2^{-b} \times a^{-b} \times 2^{-a} \times b^{-a}} = \frac{a^{2b} \times b^{2a}}{2^{-a-b}} = a^{2b} \times b^{2a} \Rightarrow 2^{-a-b} = 2^0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-a \end{cases} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$a^b \times b^a = (-b)^b \times b^a = (-1)^b \times b^{a+b} = (-1)^{-a} \times b^0 = (-1)^a$$

$$x = 1 + 2^a \Rightarrow 2^a = x - 1 \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$y = 1 + \frac{1}{2^a} \Rightarrow y = \frac{2^a + 1}{2^a} = \frac{x}{x-1}$$

$$\left(-\frac{1}{a^{-2}}\right)^{-2} = (-a^2)^{-2} = a^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$x = \frac{1}{10^{49}}, \quad y = \frac{2}{10^{50}} = 0.2 \times \frac{1}{10^{49}} \Rightarrow x - y = 0.8 \times 10^{-49} = 8 \times 10^{-50} \quad \text{گزینه «۳»}$$

۸. گزینه «۴» در بین گزینه‌ها فقط $(-3)^5$ عددی منفی است.

$$\frac{32}{625} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \times (15)^4 \times \left(\frac{1}{27}\right)^3 = \frac{2^5}{5^4} \times \frac{3^6}{2^9} \times 3^4 \times 5^4 \times \frac{1}{3^9} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} \quad \text{گزینه «۱»}$$

۱۰. گزینه «۲»

$$\{x | x \in \mathbb{N}, 9^3 < x < 4^7\} = \{x | x \in \mathbb{N}, 3^6 < x < 2^{14}\} = \{x | x \in \mathbb{N}, 27^2 < x < 128^2\} \Rightarrow 100 \text{ عدد مربع کامل وجود دارد}$$

۱۱. گزینه «۴» این مجموعه شامل اعداد $1^7, 2^7, 3^7, \dots$ و n^7 است.

$$\left. \begin{aligned} 5^{21} + 1 &= (5^3)^7 + 1 = 125^7 + 1 \\ 2^{49} - 1 &= (2^7)^7 - 1 = 128^7 - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 125^7 + 1 < 126^7 < 127^7 < 128^7 - 1$$



$$0,00046 = 4/6 \times 10^{-4}$$

۱۲. گزینه «۴»

$$\frac{2/5 \times 10^{-6} \times 2/4 \times 10^{-4}}{10^1} = 6 \times 10^{-11}$$

۱۳. گزینه «۱»

$$1) 0,99 \times 10^{-n+1} = \frac{9/9}{10^n}$$

$$3) 9 \times 10^{-n+1} = \frac{90}{10^n}$$

۱۴. گزینه «۴»

$$2) 0,9 \times 10^{-n-1} = \frac{9/9}{10^n}$$

$$4) 99 \times 10^{-n} = \frac{99}{10^n}$$

$$\left. \begin{aligned} 7,419204 \times 10^{-3} &= a \times 10^b \Rightarrow b = -3 \\ 8,113312000 \times 10^d &= c \times 10^d \Rightarrow d = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + d = 6$$

۱۵. گزینه «۱»

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$$

۱۶. گزینه «۱»

$$A = (-0,6)^2 (-1,96)(-1)^{13} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{-196}{100}\right)(-1) = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{14}{10}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{6}{10} \times \frac{14}{10} = 0,84$$

۱۷. گزینه «۲»

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| + |(2-\sqrt{2})^2| = \sqrt{2} - 1 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 5 - 3\sqrt{2}$$

۱۸. گزینه «۴»

$$\sqrt{-125} - \sqrt{(-5)^2} = -5 - |-5| = -5 - (5) = -10$$

۱۹. گزینه «۳»

$$\sqrt[3]{-40} + 5\sqrt[3]{0,005} = -2\sqrt[3]{5} + \frac{5\sqrt[3]{5}}{10} = \frac{-15\sqrt[3]{5}}{10} = \frac{-3\sqrt[3]{5}}{2}$$

۲۰. گزینه «۴»

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{2000} = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$$

۲۱. گزینه «۳»

۲۲. گزینه «۳» از داخلی‌ترین رادیکال محاسبه را آغاز می‌کنیم.

$$\sqrt{(1+6)^2} = |1+6| = 7 \Rightarrow \sqrt{1+5 \times 7} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \sqrt{1+4 \times 6} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \sqrt{1+3 \times 5} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \sqrt{1+2 \times 4} = 3$$

$$\sqrt[3]{A} = \frac{3}{5} \Rightarrow A = \frac{27}{125} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{25}$$

۲۳. گزینه «۳»

$$N: \sqrt{N} + 1 = \text{عدد صحیح بعدی} \Rightarrow \text{عدد صحیح} = \sqrt{N} \Rightarrow \text{مجذور کامل}$$

۲۴. گزینه «۳»

$$(\sqrt{N} + 1)^2 = \text{مجذور کامل بعدی} = N + 2\sqrt{N} + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \in \mathbb{Z}$$

۲۵. گزینه «۲»





$$\left. \begin{array}{l} xy = 4 \\ xyz = 216 \end{array} \right\} \Rightarrow (xy)z = 216 \Rightarrow 4z = 216 \Rightarrow z = \frac{216}{4} = 54$$

گزینه «۲» ۲۶

$$\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt[3]{aaa}}{\sqrt{aa} + \sqrt{aa} + \sqrt{aa}} = \frac{a}{3|a|} \stackrel{a > 0}{=} \frac{1}{3}$$

گزینه «۳» ۲۷

$$(\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}))^{1376} = (2 - \sqrt{6} - 3 + \sqrt{6})^{1376} = (-1)^{1376} = 1$$

گزینه «۳» ۲۸

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

گزینه «۲» ۲۹

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \times (\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$(2 - \sqrt{3})^9 (2 + \sqrt{3})^9 = (4 - 3)^9 = 1$$

گزینه «۱» ۳۰

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^4 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

گزینه «۲» ۳۱

گزینه «۱» ۳۲ با ضرب و تقسیم در مزدوج گزینه‌ها داریم:

$$\text{گزینه ۱: } \sqrt{2} - \sqrt{1} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{1})}{(\sqrt{2} + \sqrt{1})} = \frac{2-1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}}$$

$$\text{گزینه ۲: } \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3-2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\text{گزینه ۳: } \sqrt{4} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{4} - \sqrt{3}) \times (\sqrt{4} + \sqrt{3})}{(\sqrt{4} + \sqrt{3})} = \frac{4-3}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}}$$

$$\text{گزینه ۴: } \sqrt{5} - \sqrt{4} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{4}) \times (\sqrt{5} + \sqrt{4})}{(\sqrt{5} + \sqrt{4})} = \frac{5-4}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$$

مخرج در گزینه‌ی ۱ از بقیه کوچک‌تر است، پس حاصل گزینه‌ی ۱ از بقیه بزرگ‌تر است.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

گزینه «۴» ۳۳

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$$

گزینه «۱» ۳۴

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5}} - \sqrt{20} = \frac{1(1 - \sqrt{5})}{-4} - 2\sqrt{5} = -2 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -2$$

گزینه «۲» ۳۵

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \times (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1) \times (\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۳۶. گزینه «۳»

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \sqrt{6}-2$$

۳۷. گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} \frac{1(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+1} &= \frac{1(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{1(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = \frac{1(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 2(\sqrt{5}-1)^2 \\ \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} &= \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = (\sqrt{5}-2)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

۳۸. گزینه «۱»

$$\frac{1(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+1} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 2(\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-2)^2 = 2(5-2\sqrt{5}+1) - (5-4\sqrt{5}+4) = 12-4\sqrt{5}-9+4\sqrt{5} = 3$$

$$4^{4^{4^2}} = 2^{1^n} \Rightarrow 4^{4^{16}} = 2^{1^n} \Rightarrow 2^{2^{16}} \times 2^{2^{16}} = 2^{1^n} \Rightarrow 2^{2 \times 2^{32}} = 2^{2^{3n}} \Rightarrow 2^{2^{33}} = 2^{2^{3n}} \Rightarrow n = 11$$

۳۹. گزینه «۴»

۴۰. گزینه «۳» بزرگ‌ترین عدد اول که دارای شرط باشد $m = 13$ است:

$$m^{1^0} < 3^{2^0} \Rightarrow (m^2)^{4^0} < (3^5)^{4^0} \Rightarrow m^2 < 243 \quad (17^2 = 289, 13^2 = 169)$$

$$2^{2x-2} \times 5^{1+x} \Rightarrow 2x-2 = 1+x \Rightarrow x = 3$$

۴۱. گزینه «۳»

$$(\sqrt{2}-1)^0 (\sqrt{2}+1)^1 = (\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{2}-1)^1 (\sqrt{2}+1)^1 =$$

۴۲. گزینه «۳»

$$(\sqrt{2}-1)^2 ((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))^1 = (\sqrt{2}-1)^2 (2-1)^1 = (\sqrt{2}-1)^2 \times 1^1 =$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \sqrt{5} - \frac{6}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{5} - \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

۴۳. گزینه «۳»

$$x = \sqrt[3]{2 \times \sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2$$

۴۴. گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 < x^4 < 1 \\ 1 < y < 2 &\Rightarrow 1 < \sqrt[3]{y} < \sqrt[3]{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^4 < \sqrt[3]{y}$$

۴۵. گزینه «۳»

$$\sqrt[3]{z\sqrt{z}} = 5 \Rightarrow z\sqrt{z} = 5^3 \Rightarrow (\sqrt{z})^3 = 5^3 \Rightarrow \sqrt{z} = 5 \Rightarrow z = 5^2$$

۴۶. گزینه «۲»

$$\frac{198 \times 10^{31}}{167 \times 10^{-25}} = 119 \times 10^{56} = 1,19 \times 10^{58}$$

۴۷. گزینه «۴»

گزینه «۳» ۴۸.

$$\frac{b}{a} = \frac{6/25 \times 10^{-9}}{12/5 \times 10^9} = 0.5 \times 10^{-18} = 5 \times 10^{-19}$$

گزینه «۱» الف) نادرست است، زیرا: ۴۹.

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 < x^{-2}$$

ب) نادرست است، زیرا:

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow 0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

ج) نادرست است، زیرا:

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow x^2 < 1 < y \Rightarrow x^2 < y$$

د) درست است، زیرا:

$$1 < y \Rightarrow 1 < y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} < 1 \Rightarrow y^{-2} < 1$$

گزینه «۳» ۵۰.

$$\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{432} - 2\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^7} + \sqrt[3]{2^4 \times 3^3} - 2\sqrt[3]{2^4} = 2^2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 2^2\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$





پاسخ تمرین‌های فصل ۵
عبارت‌های جبری



فصل ۵: عبارتهای جبری

درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد

۱. دو عبارت $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$ و $x^2\sqrt{3}$ یک جمله‌ای اند.

۲. ضریب x برابر با -2 است.

$$A - \frac{C}{\sqrt{2}} + 4B = 3x^2 + x - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{(6x - 2x^2)}{\sqrt{2}} + 4\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{8}\right) = 3x^2 + x - \frac{1}{\sqrt{3}} - 3x + x^2 + 3x^2 - \frac{3}{2} = 7x^2 - 2x - \frac{11}{6}$$

۳. ضریب x^2 برابر با 3 است.

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 - (x+2)(x-1) &= (2x+1)(2x+1) - (x^2 - x + 2x - 2) \\ &= (4x^2 + 2x + 2x + 1) - (x^2 + x - 2) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - x + 2 = 3x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b) - (x-a)(x-b) &= (x^2 + bx + ax + ab) - (x^2 - bx - ax + ab) \\ &= \cancel{x^2} + (a+b)x + \cancel{ab} - \cancel{x^2} + (a+b)x - \cancel{ab} = 2(a+b)x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= (x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2 \\ \text{مساحت مربع} &= (x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت باقی مانده} = x^2 + x - 2 - (x^2 - 6x + 9)$$

$$\Rightarrow \text{مساحت باقی مانده} = \cancel{x^2} + x - 2 - \cancel{x^2} + 6x - 9 = 7x - 11$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{(2x+4)(x-1)}{2} = \frac{\cancel{2}(x+2)(x-1)}{\cancel{2}} = (x+2)(x-1)$$

$$\text{مساحت مثلث} = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$$

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 1) &= x^4 + \underline{2x^3} + x^2 - \underline{x^3} - \underline{x^2} + \underline{2x^2} + \underline{4x} + 2 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

عبارت ساده شده دارای ۵ جمله است.

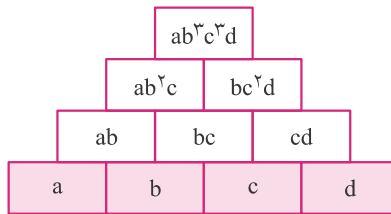
$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 9 - 2(-7) = 23$$



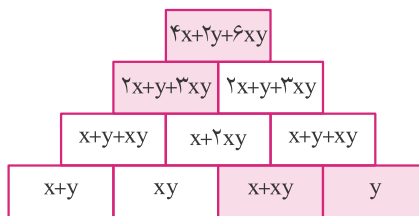
$$m = -4 \Rightarrow x^2 + 8x - 4(-4) = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

. ۹

. ۱۰ جمله خانه (*) نسبت به b از درجه ۳ است.



. ۱۱ عبارت خانه (*), xy است و یک جمله دارد.



الف) اتحاد است $x + x = 2x \rightarrow$

. ۱۲

ب) اتحاد است $(y - \frac{1}{y})^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2(y)(\frac{1}{y}) = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2 \rightarrow$

ج) معادله است $(x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow -2x = 2x \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$

د) اتحاد است $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} = 4ab \rightarrow$

$$x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

. ۱۳

$$\xrightarrow{x=1} (x-2)(x-4) = (-1)(-3) = 3$$

$$n = \frac{4}{3} \Rightarrow 4a^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{1}{9}b^2 = (2a)^2 + 2 \times 2a \times \frac{1}{3}b + (\frac{1}{3}b)^2 = (2a + \frac{b}{3})^2$$

. ۱۴

$$(\frac{1}{2}x)^2 + \boxed{xy} + \boxed{y^2} = (y + \frac{x}{2})^2$$

. ۱۵

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^2 = 4x^2 + 9y^2 - \triangle 12xy$$

. ۱۶

الف) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

ب) $4x^2 + 16x + 16 = (2x + 4)^2$

. ۱۷

ج) $2x^2 + 8\sqrt{2}x + 16 = (\sqrt{2}x + 4)^2$

د) $4x^2 + 4xa + a^2 = (2x + a)^2$

ه) $25a^2x^2 - 10bax + b^2 = (5ax - b)^2$

و) $a^2b^4 + b^4c^2 + 2ab^4c = (ab^2 + b^2c)^2$

$$3x^4 - 4x^3 + 3x + 4 + Q = -3x^5 + x^3 + 2x^2 - 2x$$

. ۱۸

$$\Rightarrow Q = -3x^5 + x^3 + 2x^2 - 2x - (-3x^4 - 4x^3 + 3x + 4)$$

$$\Rightarrow Q = -3x^5 + \underline{x^3} + \underline{2x^2} - \underline{2x} - \underline{3x^4} - \underline{4x^3} - \underline{3x} - \underline{4} = -3x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x - 4$$



$$\frac{x^2 - x + x^2 + x}{2} = 2x^2$$

دو جمله‌ای دو جمله‌ای

۱۹. بله.

$$xyzt \times (2xyz)^3 \times x^2y^2 = xyzt \times 8x^3y^3z^3 \times x^2y^2 = 8x^6y^6z^4t \xrightarrow{\text{درجه}} 6+6+4+1=17$$

۲۰.

$$1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 1 + 1 = 1002001$$

۲۱.

$$999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1 = 998001$$

$$\frac{4x^3y^3}{6} - \frac{4x^2y^n}{(n+2)} + \frac{5x^4y^m}{(4+m)} \xrightarrow{\text{همگن}} n+2=6 \Rightarrow n=4, 4+m=6 \Rightarrow m=2$$

درجه $(n+2)$ درجه $(4+m)$ درجه ۶

۲۲.

$$(2x^4y^7 + 2x^6y^2x^5 + 6x^{11}y^2 + x^4y^7) = 3x^4y^7 + 8x^{11}y^2$$

۲۳.

$$\left. \begin{array}{l} (y^5 - xy^2)^4 \xrightarrow{\text{درجه نسبت به } y} 5 \times 4 = 20 \\ (x^2y^3 - x^6 + 2)^3 \xrightarrow{\text{درجه نسبت به } y} 3 \times 3 = 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{درجه نسبت به } y} 70$$

۲۴.

برای به دست آوردن درجه یک عبارت توان دار، کافی است درجه عبارت را در توان ضرب کنیم.

برای این که یک تساوی اتحاد باشد، باید ضریب‌های جمله‌های متشابه در دو طرف تساوی یکسان باشند.

$$ax^3 + (x+2)^2 - bx^2 - 2x + c = x^3 + 2x^2 + 4 \Rightarrow ax^3 + x^2 + 4x + 4 - bx^2 - 2x + c = x^3 + 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow ax^3 + (1-b)x^2 + 4 + c = x^3 + 2x^2 + 4 \xrightarrow{\text{تساوی اتحاد است}} a=1, 1-b=2 \Rightarrow b=-1, 4+c=4 \Rightarrow c=0$$

$$a(x+1)^2 + b(x+1) - ax^2 - bx = 8x + 3 \Rightarrow ax^2 + 2ax + a + bx + b - ax^2 - bx = 8x + 3$$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = 8x + 3 \xrightarrow{\text{تساوی اتحاد است}} 2a = 8 \Rightarrow a = 4, a + b = 3 \Rightarrow b = -1$$

۲۶.

$$x^2yz + 4x^4y^nz^2 - 2^6y^2x^2m - x^my^2zk$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow xm = 6 \Rightarrow m = 3 \\ \Rightarrow n = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2yz}{4 \text{ درجه}} + \frac{4x^4y^3z^2}{9 \text{ درجه}} - \frac{2^6y^2x^6}{8 \text{ درجه}} - \frac{x^3y^2zk}{5+k \text{ درجه}}$$

$\Rightarrow 5+k=10 \Rightarrow k=5$

۲۷.

الف) $(3a-5)^2 = 9a^2 - 30a + 25$

۲۸.

ب) $(-5a+2)^2 = 25a^2 - 20a + 4$

ج) $(-3x^2+3)^2 = 9x^4 - 18x^2 + 9$

د) $a^4 - 2a^3b^3 + a^2b^6 = (a^2 - ab^3)^2$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اتحاد مربع سه جمله‌ای

ه) $(3a + 2b - c)^2 = 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 6ac^2 - 4bc^2 + 12ab$

و) $x^4 + 4y^2 + 1 - 4y + 4x^2y - 2x^2 = (x^2 + 2y - 1)^2$

$(x^2 + x + 1)(1 + ax + bx^2) = x^2 + ax^3 + bx^4 + x + ax^2 + bx^3 + 1 + ax + bx^2$. ۲۹
 $= bx^4 + (a + b)x^3 + (1 + a + b)x^2 + (a + 1)x + 1$ ضرب x^3 برابر با ۵ است $\rightarrow a + b = 5$

مجموع چند جمله‌ای‌های هر سطر، هر ستون و هر قطر $= x + 6 + 3x + 2 + 5x - 2 = 9x + 6$. ۳۰

| | | |
|--------|--------|---|
| $6x+1$ | $x+6$ | D |
| A | $3x+2$ | C |
| $4x+5$ | $5x-2$ | B |

$A = 9x + 6 - (6x + 1 + 4x + 5) = 9x + 6 - 10x - 6 = -x$

$B = 9x + 6 - (4x + 5 + 5x - 2) = 9x + 6 - 9x - 3 = 3$

$C = 9x + 6 - (A + 3x + 2) = 9x + 6 - (-x + 3x + 2) = 7x + 4$

$D = 9x + 6 - (B + C) = 9x + 6 - (3 + 7x + 4) = 2x - 1$

$1000000002000000001 = 10^{20} + 2 \times 10^{10} + 1 = (10^{10} + 1)^2 + 2 \times 10^{10} + 1 = (10^{10} + 1 + 1)^2$. ۳۱
 صد تا صد تا

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

$ax(b+1) + 2(b+1) = (b+1)(ax+2)$. ۳۲

$20a^2b + 10ac = 10a(2ab + c)$. ۳۳

$(50/01)^2 - (49/99)^2 = (50/01 - 49/99)(50/01 + 49/99) = 0/02 \times (100) = 2$. ۳۴

$(a^2x + 4y^2)^2 - (4y^2 - a^2x)^2 = (a^2x + 4y^2 - 4y^2 + a^2x)(a^2x + 4y^2 + 4y^2 - a^2x) = (2a^2x)(8y^2) = 16a^2xy^2$. ۳۵

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
 $a + b = 5, ab = 1$ } $\Rightarrow a^2 + b^2 = (5)^2 - 2(1) = 25 - 2 = 23$. ۳۶

ب) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$
 $a^2 + b^2 = 23, ab = 1$ } $\Rightarrow a^4 + b^4 = 23^2 - 2(1) = 527$

الف) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. ۳۷

ب) $x^6 + 3x^2 + 3x^4 + 1 = (x^2 + 1)^3$

ج) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3$

د) $a^3b^3 + b^3c^3 + 3a^2b^2c^3 + 3ab^2c^2 = (ab + bc)^3$

$x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12)$ جمله مشترک $\rightarrow x(x-4)(x+3)$. ۳۸

$$2x^2 + 5x + 2 = x(2x + 5) + 2 = x(2x + 5 + \frac{2}{x}) = x(2x + 5 + \frac{2}{x})$$

$$= x(2x(x + \frac{2}{x}) + (x + \frac{2}{x})) = x((x + \frac{2}{x})(2x + 1)) = x(x + \frac{2}{x})(2x + 1)$$

. ٣٩

شباب

الف) $(x+1)(x+2) = x^2 + (1+2)x + 2 = x^2 + 3x + 2$

. ٤٠

ب) $(x-2)(x+5) = x^2 + (-2+5)x - 10 = x^2 + 3x - 10$

ج) $(3-x)(6-x) = (-x)^2 + (3+6)(-x) + 18 = x^2 - 9x + 18$

د) $(x+y)(x+2y) = x^2 + (y+2y)x + 2y^2 = x^2 + 3xy + 2y^2$

الف) $(2x-1)(2x-5) = (2x)^2 - 6(2x) + 5 = 4x^2 - 12x + 5$

. ٤١

ب) $(2x^2 - y)(3x^2 - y) = (-y)^2 + \frac{5x^2}{2x^2 + 3x^2}(-y) + 6x^4 = y^2 - 5x^2y + 6x^4$

ج) $(x^2 + y + 4)(x^2 + y + 5) = (x^2 + y)^2 + 9(x^2 + y) + 20 = x^4 + y^2 + 2x^2y + 9x^2 + 9y + 20$

د) $(2x^2y - 5)(2x^2y + 11) = (2x^2y)^2 + 6 \times 2x^2y - 55 = 4x^4y^2 + 12x^2y - 55$

الف) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

ب) $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

. ٤٢

ج) $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

د) $x^2 + (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = (x+1)(x+\sqrt{2})$

هـ) $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$

و) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

ز) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

الف) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

ب) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

. ٤٣

ج) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

د) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x + 1)^2$

هـ) $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$

ز) $25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2$

الف) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

. ٤٤

ب) $4x^2 - 9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$

ج) $(x+1)^2 - 1 = (x+1-1)(x+1+1) = x(x+2)$

د) $(a^2 + 4a + 4) - y^2 = (a+2)^2 - y^2 = (a+2+y)(a+2-y)$

هـ) $a^2b^2 - c^2d^2 = (ab-cd)(ab+cd)$

و) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

الف) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

. ٤٥

ب) $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

ج) $(x^2+1)(x^2-1) = x^4 - 1$

د) $(x+y+1)(x+y-1) = (x+y)^2 - 1 = x^2 + 2xy + y^2 - 1$

هـ) $(3xy-z)(3xy+z) = 9x^2y^2 - z^2$



. ۴۶

الف) $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2 = (x-1)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

ب) $x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 4 - 2 = (x-2)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

ج) $x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x-3)^2 - 1 = (x-3-1)(x-3+1) = (x-4)(x-2)$

د) $x^2 - 6x + 7 = x^2 - 6x + 9 - 2 = (x-3)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$

ه) $x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 = (x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

و) $4x^2 + 4x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 - 4 = (2x+1)^2 - 2^2 = (2x+1-2)(2x+1+2) = (2x-1)(2x+3)$

ز) $-9x^2 + 12x - 3 = -(9x^2 - 12x + 3) = -(9x^2 - 12x + 4 - 1)$

$= -((3x-2)^2 - 1) = 1 - (3x-2)^2 = (1-3x+2)(1+3x-2) = (-3x+3)(3x-1) = 3(-x+1)(3x-1)$

$2x(1 \text{ } y + xy) + y(2 \text{ } x + 4 \text{ } xy) = 4xy + 2 \text{ } x^2y + 4xy^2$

. ۴۷

الف) $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

. ۴۸

ب) $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

ج) $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + 27y^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

د) $(a^2-3b)^3 = (a^2)^3 + 3(a^2)^2(-3b) + 3a^2(-3b)^2 + (-3b)^3 = a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3$

الف) $(a+b-c)(a+b+c) = (a+b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

. ۴۹

ب) $(a+b-c)(a-b+c) = (a+b-c)(a-(b-c)) = a^2 - (b-c)^2 = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

ج) $(a-b-c)(a+b+c) = (a-(b+c))(a+b+c) = a^2 - (b+c)^2 = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

$4x^2 + 7x - 2 = 4x^2 + 8x - x - 2 = 4x(x+2) - (x+2) = (x+2)(4x-1)$

. ۵۰

$\frac{x^2+y^2}{4xy} = \frac{(x-y)^2 + 2xy}{4xy} \xrightarrow{xy=5, x-y=6} \frac{6^2+10}{20} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10}$

. ۵۱

$a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$

. ۵۲

$= 2a + 4b + a^2 + 4b^2 + 4ab = 2(a+2b) + (a+2b)^2 = 2 \times 7 + 7^2 = 63$

$x^2 - xy = 3$

$+ y^2 - xy = 13$

. ۵۳

$x^2 + y^2 - 2xy = 16 \Rightarrow (x-y)^2 = 16 \Rightarrow x-y = \pm 4$

الف) $x^2 + 4x + 7 = x^2 + 4x + 4 + 3 = (x+2)^2 + 3$

. ۵۴

$(x+2)^2$ یک عبارت نامنفی است که حداقل مقدار آن صفر است (به ازای $x = -2$)، در نتیجه کمترین مقدار عبارت $x^2 + 4x + 7$ برابر با ۳ است.

ب) $x^2 + 10x + 32 = x^2 + 10x + 25 + 7 = (x+5)^2 + 7$

مانند قسمت الف، کمترین مقدار عبارت $x^2 + 10x + 32$ برابر با ۷ است که به ازای $x = -5$ به دست می آید.





$$\text{ج) } 4x^7 - 4x - 1 = 4x^7 - 4x + 1 - 2 = (2x - 1)^7 - 2$$

کمترین مقدار عبارت $4x^7 - 4x - 1$ برابر با -2 است که به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

$$A = \underbrace{(2-1)(2+1)}_{2^2-1} \underbrace{(2^2+1)}_{2^4-1} \dots (2^{2^4}+1) = 2^{128} - 1 \quad .55$$

$$x^{16} - \underbrace{(x-y)(x+y)}_{x^2-y^2} (x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16}) = x^{16} - (x^{16} - y^{16}) = y^{16} \Rightarrow y^{16} \xrightarrow{y=2^0} 2^0 \quad .56$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \xrightarrow{x+y=9, xy=20} x^3 + y^3 = 9^3 - 3 \times 20 \times 9 = 189 \quad .57$$

$$\left. \begin{aligned} y^3x + xy^3 = 6 &\Rightarrow yx(y+x) = 6 \\ xy = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y+x=2 \Rightarrow (x+y)^3 = 8 \quad .58$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)^5 - 5ab(a+b)^2 \xrightarrow{a+b=1} 1 - 5ab = 5 \Rightarrow ab = -2 \quad .59$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \xrightarrow{a+b=1, ab=-2} a^3 + b^3 = 1 - 3(-2) = 7$$

.60 می‌دانیم $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ پس:

$$\begin{aligned} (3x-2)(9x^2+6x+4) &= (3x-2)((3x)^2+2 \times 3x+2^2) = (3x)^3 - 2^3 = 27x^3 - 8 \\ \Rightarrow (27x^3 - 8) - (3x-2)(9x^2+6x+4) &= 27x^3 - 8 - (27x^3 - 8) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-4)(x^2+Ax+16) &= x^3 + Ax^2 + 16x - 4x^2 - 4Ax - 64 \\ &= x^3 + (A-4)x^2 + (16-4A)x - 64 = x^3 + B^3 \\ A-4=0, 16-4A=0 &\Rightarrow A=4 \\ B^3 = -64 &\Rightarrow B = -4 \end{aligned} \left\} \Rightarrow A-2B = 4 - 2(-4) = 12 \quad .61$$

.62 از روش دسته‌بندی و فاکتورگیری استفاده می‌کنیم.

$$a^5 + (a-1)(b+1) - a = a^5 - a + (a-1)(b+1) = a(a-1) + (a-1)(b+1) = (a-1)(a+b+1)$$

.63 ابتدا فرض می‌کنیم $x^2 = a$ باشد:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = a^2 - 3a - 4 = (a-4)(a+1) \xrightarrow{a=x^2} (x^2-4)(x^2+1) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$$

.64 از اتحاد مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

۵ عامل از عوامل داده شده، در تجزیه $x^5 - x$ دیده می‌شود.

۶۵

الف) $x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 1$

ب) $(x-1)(2x-3) = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)(2x-3) - (x-1)^2 = (x-1)[2x-3-(x-1)] = (x-1)(x-2) = 0$
 $\Rightarrow x = 1$ یا $x = 2$

۶۶

الف) $(x-3)^2 = (x-3)(2x+7) \Rightarrow (x-3)^2 - (x-3)(2x+7) = 0$
 $\Rightarrow (x-3)[x-3-2x-7] = 0 \Rightarrow (x-3)(-x-10) = 0 \Rightarrow x = 3$ یا $x = -10$

ب) $(x-2)^2(x+4) = (x-2)(x+4)(2x+5) \Rightarrow (x-2)^2(x+4) - (x-2)(x+4)(2x+5) = 0$
 $\Rightarrow (x-2)(x+4)(x-2-(2x+5)) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+4)(-x-7) = 0$
 $\Rightarrow x = 2$ یا $x = -4$ یا $x = -7$

ج) $x^4(x^2+16) = 0 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$ توجه کنید که (x^2+16) بزرگتر از صفر است و هرگز صفر نمی‌شود.

د) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -1$ یا $x = -2$ یا $x = -3$

ه) $(2x^2+4)(x^2-9)(3x^2-15) = 0$
 $2x^2+4 > 0 \Rightarrow x^2-9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ یا $3x^2-15 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$

و) $(3x-27)^9(x+2)^0 = 0 \Rightarrow (3x-27)^9 = 0 \Rightarrow 3x-27 = 0 \Rightarrow x = 9$ یا $(x+2)^0 = 0 \Rightarrow x = -2$

۶۷

$27x^5y \textcircled{1} z^2 + \textcircled{36} x \textcircled{3} y \textcircled{6} z^6 = 9x^3yz \textcircled{2} ((\textcircled{3} x \textcircled{2} y \textcircled{0} z \textcircled{0} + 4x \textcircled{0} y^5z \textcircled{4}))$

۶۸. از روش دسته‌بندی و فاکتورگیری استفاده می‌کنیم.
 $T = ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (x+y)(a+b)$

۶۹

فاکتورگیری $24a^2b^3c - 30a^3b^2c^2 = 6a^2b^2c(4b - 5ac)$

ب) فاکتورگیری و اتحاد مزدوج $a^2b^2 - a^2c^2 = a^2(b^2 - c^2) = a^2(b-c)(b+c)$

ج) اتحاد مکعب دو جمله‌ای $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

د) فاکتورگیری و اتحاد مربع دو جمله‌ای $ax^2 - 2ax + a = a(x^2 - 2x + 1) = a(x-1)^2$

ه) فاکتورگیری و اتحاد چاق و لاغر! $xy^3 - 8x = x(y^3 - 8) = x(y^3 - 2^3) = x(y-2)(y^2 + 2y + 4)$

و) اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد مزدوج $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = (x+y)^2 - 1^2 = (x+y-1)(x+y+1)$

ز) اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد مزدوج $a^2 - c^2 + 1 - 2a = a^2 - 2a + 1 - c^2 = (a-1)^2 - c^2 = (a-1-c)(a-1+c)$

ح) اتحاد جمله مشترک $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

ط) اتحاد جمله مشترک $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$

ی) اتحاد جمله مشترک $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

ک) فاکتورگیری و اتحاد جمله مشترک $2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x + 2) = 2(x-1)(x-2)$

۷۰

$x^5y^4 + x^4y^5 = x^4y^4(x+y) = (xy)^4(x+y) \xrightarrow{x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}}$

$\frac{((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^4}{1} \frac{(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})}{4} = 4$

. ۷۱

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow a^{\sqrt{}} - \epsilon ab + b^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow (a-b)^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow a-b = \sqrt{\epsilon ab}$$

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow a^{\sqrt{}} + \epsilon ab + b^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow (a+b)^{\sqrt{}} = \epsilon ab \Rightarrow a+b = \sqrt{\epsilon ab}$$

$$\text{الف) } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{\epsilon ab}}{\sqrt{\epsilon ab}} = \sqrt{\epsilon}$$

$$\text{ب) } \frac{a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}}}{a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}}} = \frac{(a+b)(a^{\sqrt{}} - ab + b^{\sqrt{}})}{(a-b)(a^{\sqrt{}} + ab + b^{\sqrt{}})} = \frac{(a+b)(\epsilon ab - ab)}{(a-b)(\epsilon ab + ab)} = \frac{(a+b)(\epsilon ab)}{(a-b)(\epsilon ab)} = \frac{\sqrt{\epsilon ab} \times \epsilon}{\sqrt{\epsilon ab} \times \epsilon} = \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{\epsilon} = \sqrt{\epsilon}$$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

. ۷۲ . مجموعه جواب، تمام اعداد حقیقی است.

$$x+2 > x \Rightarrow 2 > 0 \text{ (بدیهی)}$$

. ۷۳

$$\frac{2x+3}{2} > \frac{3}{4} + \frac{4x+1}{3} \xrightarrow{\times 12} 6(2x+3) > 3 \times 3 + 4(4x+1)$$

$$\Rightarrow 12x+18 > 9+16x+4 \Rightarrow 18-9-4 > 16x-12x \Rightarrow 4x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{4}$$

. ۷۴

$$x > 4 \Rightarrow \frac{x}{4} > 0, x+2 > 0, x-4 > 0 \Rightarrow \frac{x}{4}(x+2)(x-4) > 0$$

$$x < -4 \Rightarrow \frac{x}{4} < 0, x+2 < 0, x-4 < 0 \Rightarrow \frac{x}{4}(x+2)(x-4) < 0$$

. ۷۵

$$\left. \begin{array}{l} 2x-1 < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$$

. ۷۶

$$\left. \begin{array}{l} 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \\ 2x-1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

. ۷۷

$$a > b > 1 \Rightarrow a > 1$$

$$+ b > 1$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \\ a+b > 1+1 \Rightarrow a+b > 2$$

. ۷۸

$$\left. \begin{array}{l} 2x-3 < 2x+2 < 3x-1 \Rightarrow 2x+2 < 3x-1 \Rightarrow x > 3 \\ 2x+2 > 2x-3 \Rightarrow x < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 < x < 5$$

. ۷۹

$$\frac{2x+2}{3} + 2x-1 > \frac{x+a}{3} \xrightarrow{\times 3} 2x+2+\epsilon x-3 > x+a \Rightarrow vx > a+1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > \frac{a+1}{v} \\ x > -\frac{1}{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+1}{v} = \frac{-1}{v} \Rightarrow a+1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

. ۸۰

$$\frac{4x+1}{3} > \frac{vx-2}{4} \xrightarrow{\times 12} 4(4x+1) > 3(vx-2) \Rightarrow 16x+4 > 2vx-6 \Rightarrow 5x < 10 \Rightarrow x < 2$$

$$\frac{-1}{3} > -2x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2x > \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x > \frac{17}{6} \Rightarrow x > \frac{17}{12}$$

$$\text{مجموعه جواب: } \left. \begin{array}{l} x < 2 \\ x > \frac{17}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow x < \frac{17}{12} < x < 2$$

$$\frac{x-9}{16} + 1-x < \frac{-4-9x}{8} \times 16 \Rightarrow x-9+16-16x < -8-18x \Rightarrow -15x+7 < -8-18x$$

بزرگ‌ترین عدد صحیحی که در نامعادله صدق می‌کند ۶- است $\Rightarrow 3x < -15 \Rightarrow x < -5$

$$x-y > -1 \xrightarrow{\times(-1)} -x+y < 1$$

$$+ \quad x+y < 3$$

$$\hline 2y < 4 \Rightarrow y < 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 < y \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x < 0 \\ y > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow xy < 0 \\ x < 0 < y \Rightarrow y > x \Rightarrow y-x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y-x > xy$$

$$3+4x-1 > 2x+2 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x-1+2x+2 > 3 \Rightarrow 6x+1 > 3 \Rightarrow 6x > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \\ 2x+2+3 > 4x-1 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{|x|} < 0 \\ |x| > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

اگر حاصل جمع چند عبارت نامنفی صفر شود، هر کدام از عبارت‌ها صفر هستند. هر عبارتی به توان زوج، یک عبارت نامنفی است.

$$\text{الف) } \left. \begin{array}{l} (x-3)^2 + (x+y+7)^{18} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+y+7=0 \end{cases} \Rightarrow y+10=0 \Rightarrow y=-10 \end{array} \right\}$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} (xy+2)^{42} + (x-1)^{38} = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy+2=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow y+2=0 \Rightarrow y=-2 \end{array} \right\}$$

$$a^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 + (a+b)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow b=0$$

$$3(x^4 - 16)^2 + 8(2y^3 + x^5 + 22)^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2 \\ 2y^3 + x^5 + 22 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y^3 + 32 + 22 = 0 \Rightarrow 2y^3 = -54 \Rightarrow y^3 = -27 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x+y = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x=-2 \\ 2y^3 + x^5 + 22 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y^3 - 32 + 22 = 0 \Rightarrow 2y^3 = 10 \Rightarrow y^3 = 5 \Rightarrow y = \sqrt[3]{5} \Rightarrow x+y = -2 + \sqrt[3]{5}$$

. ۸۹

شهاب

$$(a^{1^{\circ}} - 1)^{\wedge} + (a^{\vee} + b + 1)^{\vee^{\circ}} = 0 \Rightarrow a^{1^{\circ}} = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a^{\vee} + b + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow (a, b) = (1, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ a^{\vee} + b + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow (a, b) = (-1, 0)$$

. ۹۰

$$a^{\vee} + b^{\vee} = 2(a + b - 1) \Rightarrow \frac{a^{\vee} - 2a + 1}{(a-1)^{\vee}} + \frac{b^{\vee} - 2b + 1}{(b-1)^{\vee}} = 0 \Rightarrow (a-1)^{\vee} + (b-1)^{\vee} = 0 \Rightarrow a = b = 1$$

. ۹۱

$$x + x^{-1} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\vee} = 4 \Rightarrow x^{\vee} + \frac{1}{x^{\vee}} + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x^{\vee} + \frac{1}{x^{\vee}} = 2 \Rightarrow x^{\vee} + x^{-\vee} = 2$$

. ۹۲



$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

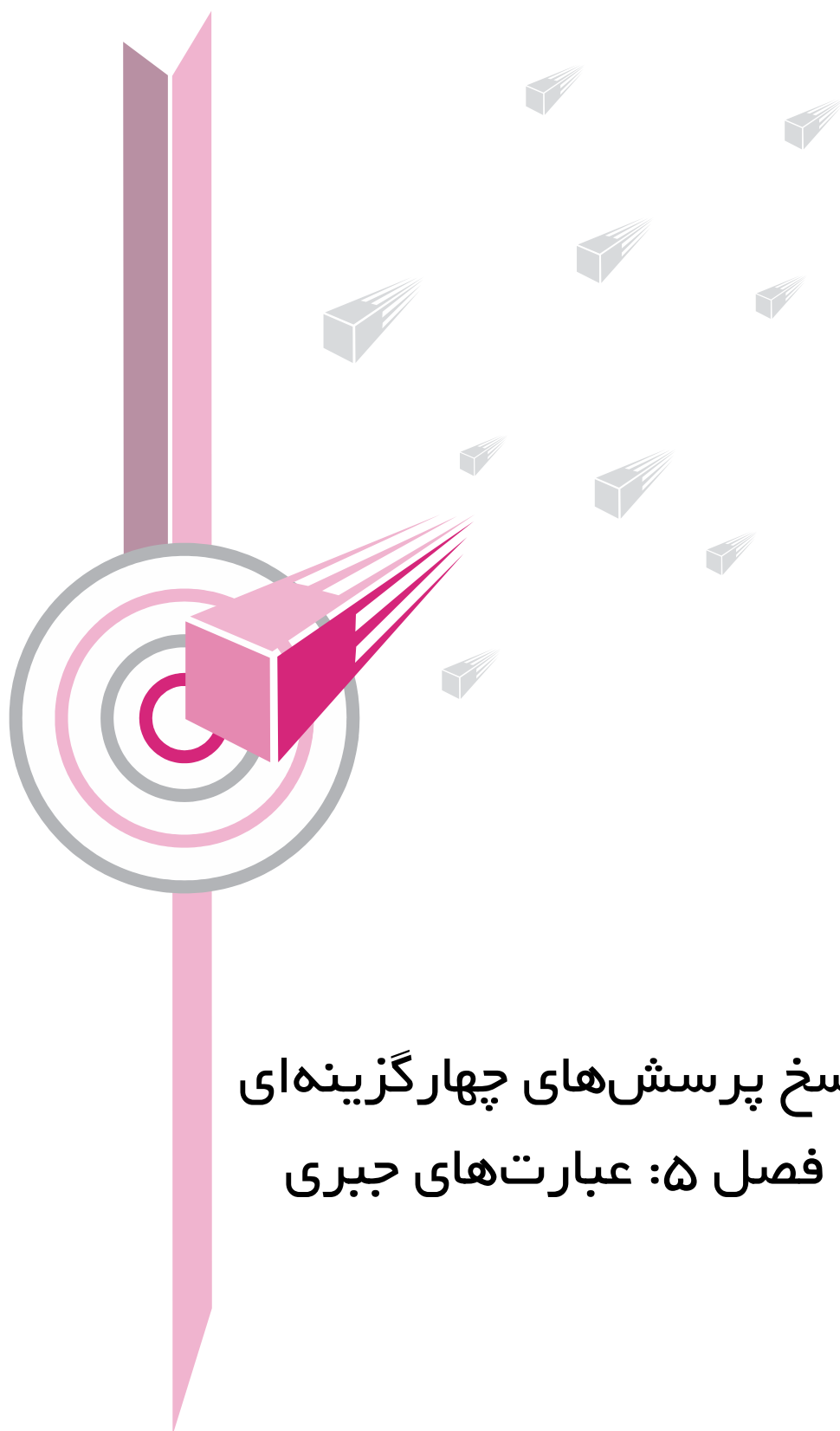
$$a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$$

$$(a-1)^{\vee} \geq 0 \Rightarrow a^{\vee} - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^{\vee} + 1 \geq 2a \xrightarrow{a > 0} \frac{a^{\vee} + 1}{a} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a^{\vee}}{a} + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} + 2 \geq 4$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت $a + 2 + \frac{1}{a}$ به ازای $a > 0$ برابر با ۴ است.





پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۵: عبارتهای جبری



پاسخ
پرسش‌های آگزینه‌ای

فصل ۵: عبارتهای جبری

۱. گزینه «۴» $4xy^2$ و $(2xy)^2$ متشابه نیستند. توان x در این دو جمله متفاوت است. زیرا:

$$(2xy)^2 = 4x^2y^2$$

۲. گزینه «۳» $x^2\sqrt{3}$, $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$

$$x^2\sqrt{3}, \frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

۳. گزینه «۳» جمله محسوب نمی‌شود، زیرا توان c در آن منفی است.

۴. گزینه «۱» اگر عبارت $bx^3 - 3x + 3 + (a+15)x^2y + 4xy^2$ دارای سه جمله باشد، باید ضریب عبارتهای x^2y و x^3 صفر باشند.

$$\left. \begin{aligned} a+15=0 &\Rightarrow a=-15 \\ b=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=-15$$

۵. گزینه «۳» $\frac{1}{3}B(3A-C) = BA - \frac{BC}{3}$

$$\frac{1}{3}B(3A-C) = BA - \frac{BC}{3}$$

درجه عبارت BA برابر با ۹ و درجه عبارت BC برابر با ۱۱ است. در نتیجه درجه عبارت $BA - \frac{BC}{3}$ برابر با ۱۱ خواهد بود.

۶. گزینه «۲» $3C - 2B + 2(A+C) + 3(B-2C) = -C + 2A = -(2b^2 - a^2) + 2(2a^2 - b^2) = -2b^2 + a^2 + 4a^2 - 2b^2 = 5a^2 - 4b^2$

$$3C - 2B + 2(A+C) + 3(B-2C) = -C + 2A = -(2b^2 - a^2) + 2(2a^2 - b^2) = -2b^2 + a^2 + 4a^2 - 2b^2 = 5a^2 - 4b^2$$

۷. گزینه «۴» $\frac{4ab^2}{c^2}$ جمله نیست.

۸. گزینه «۳» $x^5(x + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}) = x^5(\frac{x^2+1}{x})(\frac{x^2+2x+3}{x^2}) = x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$$x^5(x + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}) = x^5(\frac{x^2+1}{x})(\frac{x^2+2x+3}{x^2}) = x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$$

عبارت از درجه ۶ است \Rightarrow
 \downarrow \downarrow \downarrow
 درجه ۲ درجه ۲ درجه ۲

۹. گزینه «۳» $(2x+3)(2x^2-6x+4) = Ax + \dots \Rightarrow A = 2 \times 4 + 3 \times (-6) \Rightarrow A = -10$

$$(2x+3)(2x^2-6x+4) = Ax + \dots \Rightarrow A = 2 \times 4 + 3 \times (-6) \Rightarrow A = -10$$

۱۰. گزینه «۳» عبارت از درجه ۴ است \Rightarrow

$$5xy^2 - 3x^3y + 7xy \Rightarrow$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 درجه ۳ درجه ۴ درجه ۲



۱۱. گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} & \text{درجه } 108 = \text{درجه } (3x^5 + 2x^4y + y^4 + 4)^{27} \text{ نسبت به } y \\ & \text{درجه } 105 = \text{درجه } (4x^2 - 2xy^3 + 3y^2)^{35} \text{ نسبت به } y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{برابر است با } 108$$

۱۲. گزینه «۲»

$$(y - \frac{1}{y})^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2(y)(\frac{1}{y}) = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2$$

۱۳. گزینه «۲»

$$(x-3)^{22} = 0 \Rightarrow x=3, (x^3-1)^{31} = 0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$$

۱۴. گزینه «۴» مساحت ناحیه رنگی برابر است با: $(x+y)^2 - 4xy$.

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{40})^2 = 40, s=6 \Rightarrow xy=6$$

$$(x+y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = 40 - 2 \times 6 = 28$$

۱۵. گزینه «۱» ابتدا تساوی $4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + t = (ax+b)^2$ را در نظر می‌گیریم. از $4x^2$ متوجه می‌شویم که در سمت راست، عبارت $(2x+b)^2$ را داشتیم. پس:

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + t = (2x+b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2 \Rightarrow -6x = 4bx \Rightarrow -6 = 4b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + t = (2x - \frac{3}{2})^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + t = \frac{9}{4} \Rightarrow t = 2$$

پس:

۱۶. گزینه «۱»

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{4y})^2 = 2x + 4y - 2\sqrt{2x \cdot 4y}$$

۱۷. گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} x-y=2 \Rightarrow (x-y)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 4 \\ xy=5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 14 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4xy} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

۱۸. گزینه «۲»

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3$$

۱۹. گزینه «۱»

$$a+2b=3 \Rightarrow (a+2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab = 9$$

$$a(a+2) + 2b(b+1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab = \underbrace{a^2 + 4b^2 + 4ab}_9 + \underbrace{2a + 4b}_6 = 15$$

۲۰. گزینه «۴»

$$x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x-4) = (1+1)(1-2)(1-4) = 6$$

۲۱. گزینه «۳»

$$a = 2k, b = 2k+2, k \in \mathbb{Z}$$

$$c = 3a^2 + b^2 - 3 \Rightarrow c = 3(2k)^2 + (2k+2)^2 - 3 = 12k^2 + 4k^2 + 8k + 4 - 3 = 16k^2 + 8k + 1 \Rightarrow c = (4k+1)^2 \Rightarrow \sqrt{c} = |4k+1|$$

عدد صحیح فرد $|4k+1|$

۲۲. گزینه «۲»

$$x + x^{-1} = 5 \Rightarrow (x + x^{-1})^2 = 25 \Rightarrow x^2 + x^{-2} + 2 = 25 \Rightarrow x^2 + x^{-2} = 23$$





$$a^{\sqrt{-1}} - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a^{\sqrt{-1}} + b + 1 = 0 \\ a = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} a^{\sqrt{-1}} + b + 1 = 0 \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + b = -1$$

$$x^{\sqrt{-3}} - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}), \quad x^{\sqrt{-1}} + x^{\sqrt{-1}} = x^{\sqrt{-1}}(x + 1), \quad ab + ac = a(b + c), \quad 2x - 6 = 2(x - 3)$$

$$ax(b-1) + 2(b-1) = (b-1)(ax+2)$$

$$a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 = \frac{(a^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}a)(a^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}a + 2) + 1}{T} = T^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}T + 1 = (T+1)^{\sqrt{-1}} = (a^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}a + 1)^{\sqrt{-1}}$$

$$k^{\sqrt{-1}} + 1 \cdot k + 3\sqrt{-1} = \frac{(k+5)^{\sqrt{-1}}}{\geq 0} + \sqrt{-1} \geq \sqrt{-1}$$

$$(50/01)^{\sqrt{-1}} - (49/99)^{\sqrt{-1}} = \frac{(50/01 - 49/99)(50/01 + 49/99)}{0/02 \cdot 100} = 2$$

$$(3 - \sqrt{10})^{\sqrt{-10}} (3 + \sqrt{10})^{\sqrt{-10}} = (3 - \sqrt{10})((3 - \sqrt{10})(3 + \sqrt{10}))^{\sqrt{-10}} = (3 - \sqrt{10})(9 - 10)^{\sqrt{-10}} = (3 - \sqrt{10})(-1) = -3 + \sqrt{10}$$

$$(x-y) = 1 \Rightarrow (x+y)(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}}) = x^{16} - y^{16}$$

$$\frac{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}}{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}} \cdot \frac{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}}{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}} \cdot \frac{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}}{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}} \cdot \frac{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}}{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}} \cdot \frac{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}}{x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}}} = x^{16} - y^{16}$$

$$x^{16} - (x+y)(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}})(x^{\sqrt{-1}} + y^{\sqrt{-1}}) = x^{16} - (x^{16} - y^{16}) = y^{16} = 40^{16}$$

$$(x^{\sqrt{-1}} - 6x - 4)^{\sqrt{-1}} - 144 = (x^{\sqrt{-1}} - 6x - 4)^{\sqrt{-1}} - 12^{\sqrt{-1}} = (x^{\sqrt{-1}} - 6x - 4 - 12)(x^{\sqrt{-1}} - 6x - 4 + 12)$$

$$= \frac{(x^{\sqrt{-1}} - 6x - 16)(x^{\sqrt{-1}} - 6x + 8)}{(x-8)(x+2)(x-2)(x-4)}$$

$$x^{\sqrt{-1}}(x-1) - x(2x+3)(x-1) = x(x-1) \frac{(x^{\sqrt{-1}} - 2x - 3)}{(x-3)(x+1)} = x(x-1)(x-3)(x+1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^{\sqrt{-1}} - xy = 5 \\ y^{\sqrt{-1}} - xy = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow x^{\sqrt{-1}} - xy + y^{\sqrt{-1}} - xy = 16 \Rightarrow x^{\sqrt{-1}} - 2xy + y^{\sqrt{-1}} = 16 \Rightarrow (x-y)^{\sqrt{-1}} = 16 \Rightarrow x-y = \pm 4$$

$$x^{\sqrt{-1}} + 2x - y^{\sqrt{-1}} - 2y = x^{\sqrt{-1}} - y^{\sqrt{-1}} + 2x - 2y = (x-y)(x+y) + 2(x-y) = (x-y)(x+y+2)$$

۲۳. گزینه «۲»

۲۴. گزینه «۴»

۲۵. گزینه «۲»

۲۶. گزینه «۳»

۲۷. گزینه «۱»

۲۸. گزینه «۳»

۲۹. گزینه «۲»

۳۱. گزینه «۴»

۳۲. گزینه «۳»

۳۳. گزینه «۳»

۳۴. گزینه «۲»

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)^3} + 1 \xrightarrow{x=999} (1000)^3 + 1 = 10^9 + 1$$

گزینه «۱» ۳۵.

$$114^3 + 120^3 = \frac{(114+120)(114^2 - 114 \times 120 + 120^2)}{234=39 \times 6}$$

گزینه «۲» ۳۶.

$$(x-1)(x^2+x+1) - x^3 + 1 = x^3 - 1 - x^3 + 1 = 0$$

گزینه «۴» ۳۷.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \times \frac{1}{x} \times \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = W^3 - 3W$$

گزینه «۳» ۳۸.

$$c < d \Rightarrow \left. \begin{matrix} -d < -c \\ a < b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a - d < b - c$$

گزینه «۳» ۳۹.

$$x < 0 < y \Rightarrow xy < 0, y - x > 0 \Rightarrow y - x > xy$$

گزینه «۴» ۴۰.

$$2 - \frac{x}{4} \geq 1 \Rightarrow 2 - 1 \geq \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow x \leq 4 \xrightarrow{\text{عدد اول است}} x = 2, 3$$

گزینه «۲» ۴۱.

$$\left. \begin{matrix} 2m - 2 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ -m + 1 < 0 \Rightarrow m > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow m > 1$$

گزینه «۱» در ربع چهارم، x مثبت و y منفی است. ۴۲.

$$\left. \begin{matrix} \frac{x-1}{2} > \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{x}{2} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2x}{10} > \frac{1}{5} \Rightarrow x > \frac{15}{2} \\ \frac{x-1}{2} < \frac{x+1}{5} \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{x}{2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2x}{10} < \frac{2}{5} \Rightarrow x < \frac{10}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{15}{2} < x < \frac{10}{2}$$

گزینه «۳» ۴۳.

$$\left. \begin{matrix} 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow x < 1 \\ 2x - 2 > 3x - 2 \Rightarrow x < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x < 0$$

گزینه «۳» ۴۴.

$$\left. \begin{matrix} 2x + 1 \leq 3x - 1 \Rightarrow x \geq 2 \\ -2x - 3 \leq 2x + 1 \Rightarrow -4 \leq 4x \Rightarrow x \geq -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \geq 2$$

گزینه «۱» ۴۵.

$$\left. \begin{matrix} -2y < 0 \Rightarrow y > 0 \\ \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y - x > 0$$

گزینه «۴» ۴۶.

گزینه «۲» برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ داریم $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

$$\left. \begin{matrix} (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$



$$a > b \xrightarrow{\times a^2} a^3 > a^2 b$$

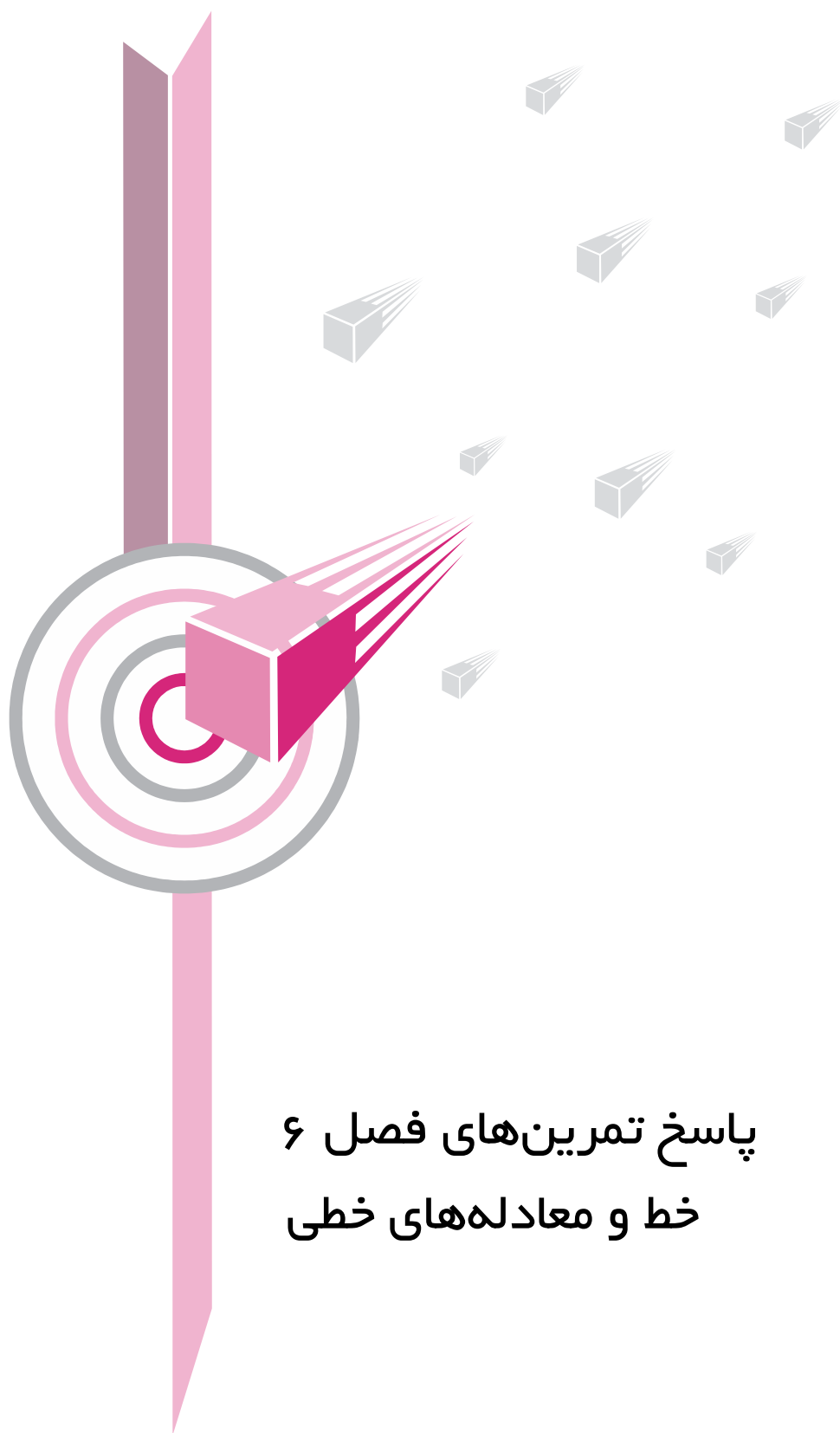
۴۸. گزینه «۴» $a^2 > 0$ است، در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} x - y > -1 \xrightarrow{\times(-1)} -x + y < 1 \\ x + y < 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع دو طرف نامساوی}} 2y < 2 \Rightarrow y < 1$$

۴۹. گزینه «۳»

$$\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3} \Rightarrow x + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{3} > \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{5}{12} > \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{5}{4} > x$$

۵۰. گزینه «۴»



پاسخ تمرین‌های فصل ۶
خط و معادله‌های خطی

فصل ۶: خط و معادله‌های خطی



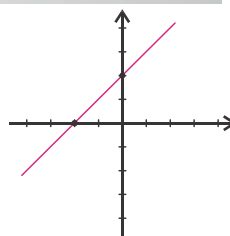
درس اول: معادله خط

$$y = 10x + 100$$

۱. یک رابطه خطی به صورت روبه‌رو وجود دارد:
توجه کنید که این رابطه تا ۲ سالگی برقرار خواهد بود.

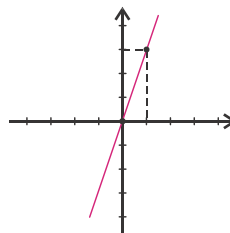
| | | | | |
|--|---|--|--|--|
| x | ۰ | ۱ | ۲ | -۱ |
| y | $3 \times 0 - 2 = -2$ | $3 \times 1 - 2 = 1$ | $3 \times 2 - 2 = 4$ | $3 \times (-1) - 2 = -5$ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ |

| | | |
|--|--|---|
| x | ۰ | -۲ |
| y | ۲ | ۰ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

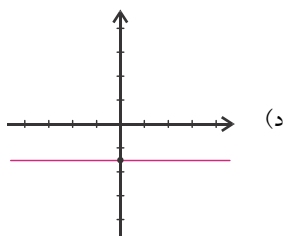


۳. الف)

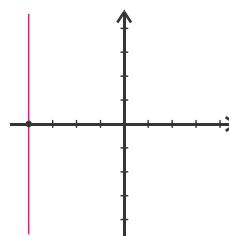
| | | |
|--|--|--|
| x | ۰ | ۱ |
| y | ۰ | ۳ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ |



ب)



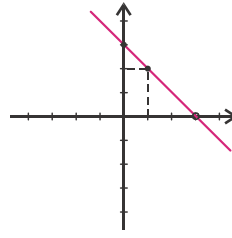
د)



ج)

. ۴

| | | |
|--|--|--|
| x | ۱ | ۰ |
| y | ۲ | ۳ |
| $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ |



$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 4$$

. ۵

. ۶

عرض از مبدأ خطی که از مبدأ می‌گذرد برابر با صفر و معادله آن به صورت $y = ax$ است.

$$y = ax \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = 4a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = x$$

(الف)

$$y = ax \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}} 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{5}{2}x$$

(ب)

. ۷

برای یک خط به معادله $y = ax + b$ داریم:

$$y = ax + b$$

↖ شیب
↗ عرض از مبدأ

(ب) ۵

(الف) $-\frac{4}{3}$

. ۸

$$y = 4x - 3 \xrightarrow{x=5} y = 4 \times 5 - 3 = 20 - 3 = 17 \Rightarrow y = 17 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(الف)

$$y = 3x - 2 \xrightarrow{y=7} 7 = 3x - 2 \Rightarrow 9 = 3x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(ب)

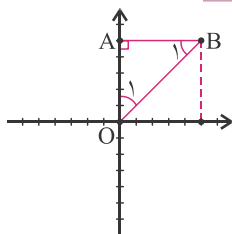
$$y = 2x - 7 \xrightarrow{\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}} m-1 = 2m-7 \Rightarrow m-2m = 1-7 \Rightarrow -m = -6 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$y = 5$$

. ۹

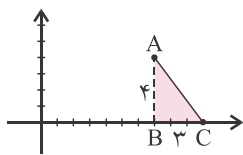
. ۱۰



$$AB = AO \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{O}_1 \\ \widehat{A} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{ABO} = 45^\circ$$

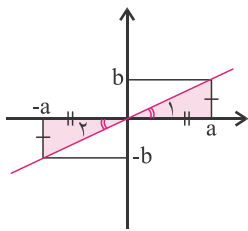
۱۱. راه اول: به کمک «راهبرد رسم شکل» داریم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$



راه دوم: فاصله دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ برابر است با: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\sqrt{(7-10)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



۱۲. الف) از «راهبرد رسم شکل» استفاده می‌کنیم. چون دو مثلث رنگی هم‌نهشت هستند (چرا؟)،

پس $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ و در نتیجه خط گذرنده از آن دو نقطه از مبدأ مختصات می‌گذرد.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a-b}{b-a} = \frac{-(b-a)}{(b-a)} = -1$$

ب) شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

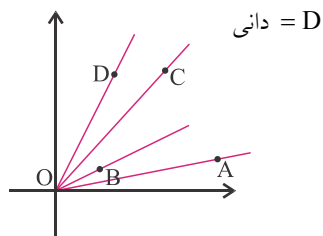
معادله نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است، پس شیب این خط نیز برابر با -1 است. پس چون شیب هر دو خط برابر است، با هم موازی هستند.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ -a \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{-a-b}{-b-a} = \frac{-a-b}{-a-b} = 1$$

ج) شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

معادله نیمساز ناحیه‌های اول و سوم به صورت $y = x$ است، پس شیب این خط نیز برابر با 1 است. پس چون شیب هر دو خط برابر است، با هم موازی هستند.

۱۳



$C =$ کارلوس

$B =$ برنارد

$A =$ آلیسیا

با توجه به شکل، شیب OD از همه بیش‌تر است، پس سرعت دانی از دیگران بیش‌تر

است. زیرا نسبت $\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ در او بیش‌تر است.

درس دوم: شیب و عرض از مبدأ

۱۴

$$y = ax + b \xrightarrow{a = \frac{3}{2}} y = \frac{3}{2}x + b$$

$$y = \frac{3}{2}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}} -2 = \frac{3}{2} \times 3 + b \Rightarrow -2 = \frac{9}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{13}{2}$$

$$\text{معادله خط: } y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{8 - (-3)}{7 - 4} = \frac{8 + 3}{3} = \frac{11}{3}$$

۱۵. الف)

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 8 \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{m - 3}{8 - 11} = \frac{m - 3}{-3} = \frac{1}{3}$$

ب)

$$\Rightarrow -\frac{m - 3}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow -(m - 3) = 1 \Rightarrow -m + 3 = 1 \Rightarrow m = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ m + 1 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{7 - 3}{m + 1 - 4} = \frac{4}{m - 3} = \frac{3}{2}$$

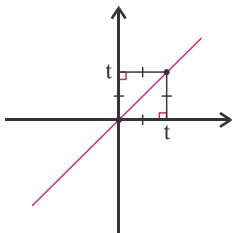
ج)

$$\Rightarrow 2 \times 4 = 3 \times (m - 3) \Rightarrow 8 = 3m - 9 \Rightarrow -3m = -17 \Rightarrow m = \frac{17}{3}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ t \\ 23 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{23 - 7}{t - (-5)} = \frac{16}{t + 5} = \frac{4}{3}$$

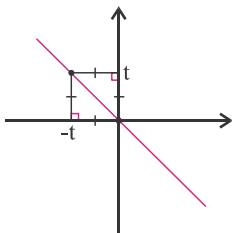
۱۶.

$$\Rightarrow 16 \times 3 = 4 \times (t + 5) \Rightarrow 48 = 4t + 20 \Rightarrow 28 = 4t \Rightarrow t = 7$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{t - 0}{t - 0} = \frac{t}{t} = 1$$

۱۷. الف)



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{t - 0}{-t - 0} = \frac{t}{-t} = -1$$

ب)

$$y = 4x - 5 \xrightarrow{x=0} y = 4 \times 0 - 5 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

۱۸. الف)

$$y = 4x - 5 \xrightarrow{y=0} 0 = 4x - 5 \Rightarrow 5 = 4x \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{4 - 6}{0 - 5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

۱۹. ابتدا شیب را به دست می‌آوریم:

سپس مختصات یکی از دو نقطه را در معادله خط قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{2}{5}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = \frac{2}{5} \times 0 + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + 4$$

$$\left. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2m-3 \\ m \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \frac{m-2}{2m-3-1} = \frac{m-2}{2m-4} = \frac{m-2}{2(m-2)} = \frac{1}{2}$$

. ۲۰

$$\left. \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow a = \frac{7-5}{5-7} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow a = -1$$

. ۲۱

$$y = ax + b \xrightarrow{a=-1} y = -x + b$$

$$y = -x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}} 7 = -5 + b \Rightarrow b = 12 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = -x + 12$$

$$\left. \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ m \\ 2m-1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \frac{2m-1-2}{m-(-5)} = \frac{2m-3}{m+5}$$

. ۲۲

$$\Rightarrow \frac{2m-3}{m+5} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8 \times (2m-3) = 3 \times (m+5) \Rightarrow 16m - 24 = 3m + 15$$

$$\Rightarrow 13m = 39 \Rightarrow m = 3$$

$$y = \frac{13}{4}x - 6$$

. ۲۳

$$y = ax + b \xrightarrow{a=\frac{4}{5}} y = \frac{4}{5}x + b$$

. ۲۴

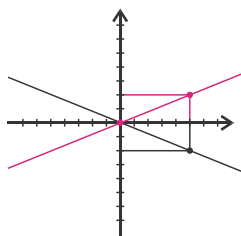
$$y = \frac{4}{5}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}} 11 = \frac{4}{5} \times 5 + b \Rightarrow 11 = 4 + b \Rightarrow b = 7$$

$$\text{معادله خط: } y = \frac{4}{5}x + 7$$

$$y = ax + b \xrightarrow{a=1} y = x + b$$

. ۲۵

$$y = x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}} -7 = 4 + b \Rightarrow b = -11 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = x - 11$$

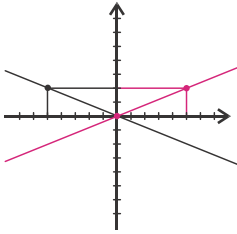


۲۶. الف) ابتدا دو نقطه روی خط $y = \frac{2}{5}x$ و سپس دو نقطه روی قرینه خط می‌یابیم:

$$y = \frac{2}{5}x \xrightarrow{x=0} y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } X} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{2}{5}x \xrightarrow{x=5} y=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \text{معادله خط: } y = -\frac{2}{5}x$$



$$y = \frac{2}{5}x \xrightarrow{x=0} y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{2}{5}x \xrightarrow{x=5} y=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \text{معادله خط: } y = -\frac{2}{5}x$$

$$\text{الف) } \frac{7}{3}$$

$$\text{ب) } -6$$

$$\text{ج) } y = \frac{7}{3}x - 6 \xrightarrow{y=0} 0 = \frac{7}{3}x - 6 \Rightarrow x = \frac{18}{7}$$

$$\left. \begin{bmatrix} m+1 \\ 3 \\ 2 \\ m \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \frac{m-3}{3-(m+1)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{m-3}{1-m} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3 \times (m-3) = -(1-m) \Rightarrow 3m-9 = m-1 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

$$\text{الف) } y = x$$

$$\text{ب) } y = -x$$

$$\text{ج) } y = x - 1$$

$$\text{د) } y = 2x$$

$$\text{ه) } y = 2x + 3$$

$$\left. \begin{bmatrix} m \\ m+1 \\ 2m-2 \\ 3m-3 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \frac{3m-3-(m+1)}{2m-2-m} = \frac{2m-4}{m-2} = \frac{2(m-2)}{m-2} = 2$$

$$\text{الف) } 2x + 3y + 17 = 0 \xrightarrow{x=0} 3y + 17 = 0 \Rightarrow y = \frac{-17}{3}$$

$$\text{ب) } 2x + 3y + 17 = 0 \xrightarrow{y=0} 2x + 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{-17}{2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \times y = 4 \times \left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 4y = -3x - 1 \Rightarrow 4y + 3x + 1 = 0$$

. 27

. 28

. 29

. 30

. 31

. 32. گزینه «ب»

الف) $7x + 16y = 6 \Rightarrow 16y = -7x + 6 \Rightarrow y = -\frac{7}{16}x + \frac{6}{16} \Rightarrow$ شیب $= -\frac{7}{16}$

ب) $2y + 13x - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -13x + 7 \Rightarrow y = -\frac{13}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow$ شیب $= -\frac{13}{2}$

ج) $4y - 8x + 3 = 0 \Rightarrow 4y = 8x - 3 \Rightarrow y = \frac{8}{4}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$ شیب $= \frac{8}{4} = 2$



اگر $a \neq 0$ باشد، شیب خط عمود بر خط $y = ax + b$ برابر با $-\frac{1}{a}$ است.

$$r = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow r = \frac{-1}{a+1} \Rightarrow r \times (a+1) = -1 \Rightarrow ra + r = -1 \Rightarrow ra = -1 - r \Rightarrow a = -\frac{1+r}{r}$$

d: $y = -\frac{3}{2}x - 5$
 d': $y = ax + b$ } $\Rightarrow a = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

d': $y = \frac{2}{3}x + b$ $\xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$ $r = \frac{2}{3} \times 4 + b \Rightarrow r = \frac{8}{3} + b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

d': $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

۳۶. الف) ابتدا شیب خط گذرنده از $\begin{bmatrix} 2m \\ m+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2m \\ m+1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m+1 - (-m)}{2m - (-1)} = \frac{2m+1}{2m+1} = 1$$

اکنون معادله خط را $y = ax + b$ فرض می‌کنیم:

$y = ax + b \xrightarrow{a=1} y = x + b$

$y = x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$ $v = 3 + b \Rightarrow b = 1$

معادله خط: $y = x + 1$

ب) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} m+3 \\ 4m+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 3m+1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 3 \\ 3m+1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m+3 \\ 4m+1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4m+1 - (3m+1)}{m+3-3} = \frac{m}{m} = 1$$

اکنون معادله خط را $y = ax + b$ فرض می‌کنیم:

$y = ax + b \xrightarrow{a=1} y = x + b \xrightarrow{b=v}$ معادله خط: $y = x + v$

ج) ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2m \\ 3m-1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2m \\ 2m-1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \frac{2m-1-2}{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2} = \frac{2(m-1)}{2(m-1)} = \frac{2}{2}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{a = \frac{2}{2}} y = \frac{2}{2}x + b$$

$$y = \frac{2}{2}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}} 2 = \frac{2}{2} \times 2 + b \Rightarrow b = -1$$

$$\text{خط معادله: } y = \frac{2}{2}x - 1$$

$$\left. \begin{cases} x = t - 1 \Rightarrow x + 1 = t \\ y = 2t \Rightarrow \frac{y}{2} = t \end{cases} \right\} \Rightarrow \frac{y}{2} = x + 1 \Rightarrow y = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 2 \quad \text{الف . 37}$$

$$\left. \begin{cases} x = 2t - 3 \Rightarrow x + 3 = 2t \Rightarrow \frac{x+3}{2} = t \\ y = 5t + 1 \Rightarrow y - 1 = 5t \Rightarrow \frac{y-1}{5} = t \end{cases} \right\} \Rightarrow \frac{y-1}{5} = \frac{x+3}{2} \Rightarrow y - 1 = \frac{5x}{2} + \frac{15}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{17}{2} \quad \text{ب}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \xrightarrow{x=0} \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4 \quad \text{(عرض از مبدأ)}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \xrightarrow{y=0} \frac{x}{4} = 1 \Rightarrow x = 4 \quad \text{(طول از مبدأ)}$$

. 38

اگر عرض از مبدأ خطی $p \neq 0$ و طول از مبدأ آن $q \neq 0$ باشد، معادله را می‌توان این گونه نوشت:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$t + 4 = -\frac{1}{3-2t} \Rightarrow t + 4 = -(3-2t) \Rightarrow t + 4 = 2t - 3 \Rightarrow t = 7 \quad \text{. 39}$$

$$(m-2)x - (m-1)y - 1 = 0$$

الف) باید ضریب y برابر با صفر باشد:

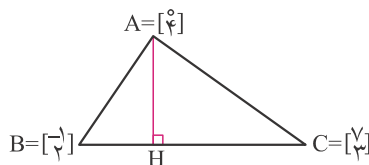
$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$$(2m-5)x - 2y = x - my + 1 \Rightarrow (2m-5)x - x - 2y + my = 1$$

ب) باید ضریب x برابر با صفر باشد:

$$\Rightarrow (2m-6)x + (-2+m)y = 1 \Rightarrow 2m-6=0 \Rightarrow m=3$$

. 41



ابتدا شیب خط گذرنده از B و C را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{matrix} B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{3-2}{5-(-1)} = \frac{1}{6}$$

$$AH \perp BC \Rightarrow a = -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = -\lambda$$

معادله خط گذرنده از A و H را $y = ax + b$ فرض می‌کنیم:

$$y = -\lambda x + b \xrightarrow{A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = -\lambda \times 0 + b \Rightarrow b = 4$$

$$AH: y = -\lambda x + 4$$

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$$

۴۲. الف)

$$y = 3x - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Rightarrow -x + 7 = \frac{3}{2}x - 8 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 15 \Rightarrow x = 6$$

ب)

$$y = -x + 7 = -6 + 7 = 1$$

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

۴۳. الف)

$$y + x = 5 \Rightarrow x = 5 - y = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ y - 4x = 13 \end{cases} \Rightarrow y + 2x - y + 4x = 7 - 13 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$$

ب)

$$y + 2x = 7 \Rightarrow y - 2 = 7 \Rightarrow y = 9$$

۴۴. اگر تعداد گاوها را با x و تعداد مرغها را با y نشان دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 80 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases} \Rightarrow 4x + 4y - 4x - 2y = 80 - 48 \Rightarrow 2y = 32 \Rightarrow y = 16$$

$$x + y = 20 \Rightarrow x + 16 = 20 \Rightarrow x = 4$$

۴۵. اگر طول مستطیل را با x و عرض آن را با y نشان دهیم، داریم:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 82 \\ x - 7 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 41 \\ x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow x + y + x - y = 41 + 7 \Rightarrow 2x = 48 \Rightarrow x = 24$$

$$x - 7 = y \Rightarrow y = 24 - 7 = 17$$

$$\begin{cases} 2y + 3x = 12 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3x = 12 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$$

۴۶.

$$2x - y = 1 \Rightarrow 4 - y = 1 \Rightarrow y = 3$$

پس این دو خط در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ متقاطع‌اند.

$$\begin{cases} 3y = 2x + 17 \\ 2y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x = 17 \\ 4y + 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow 7y = 21 \Rightarrow y = 3$$

۴۷.

$$2y + x = 2 \Rightarrow 6 + x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

فاصله نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ از $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$\begin{cases} x + 5 + y + 5 = 30 \\ (x-1) = 2(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x - 1 = 2y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3y = 21 \Rightarrow y = 7$$

$$x + y = 20 \Rightarrow x + 7 = 20 \Rightarrow x = 13$$

۴۹. اگر طول مستطیل اولیه x و عرض آن y باشد، داریم:

$$\begin{cases} 2(x + \frac{y}{2}) = 50 \\ 2(\frac{x}{2} + y) = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20$$

$$2x + y = 50 \Rightarrow 40 + y = 50 \Rightarrow y = 10$$

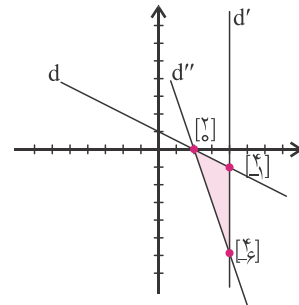
$$2(x + y) = 2(20 + 10) = 60 = \text{محیط مستطیل اولیه}$$

۵۰. با پیدا کردن محل تقاطع سه خط، سه رأس مثلث را به دست می آوریم:

$$d, d': \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 + 2y = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d', d'': \begin{cases} x = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow 12 + y = 6 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$d, d'': \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

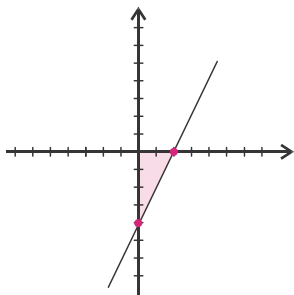
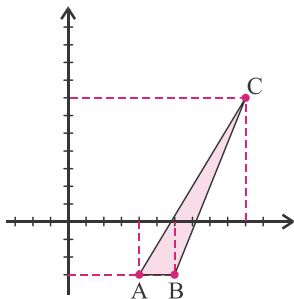


در این مثلث اگر قاعده را پاره خط بین نقاط $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، طول آن ۵ است و ارتفاع وارد بر آن، یعنی فاصله نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

از خط d' ، برابر ۲ است. پس مساحت این مثلث برابر است با $\frac{2 \times 5}{2} = 5$.

۵۱. طول پاره خط AB برابر ۲ و طول ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۰ است. پس مساحت مثلث

$$ABC \text{ برابر با } \frac{2 \times 10}{2} = 10 \text{ است.}$$

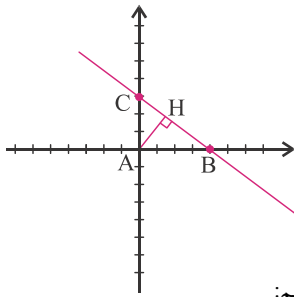


۵۲. کافی است تا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $y = 2x - 4$ را به دست آوریم:

$$y = 2x - 4 \xrightarrow{x=0} y = -4$$

$$y = 2x - 4 \xrightarrow{y=0} x = 2$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$



۵۳. ابتدا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط d را به دست می آوریم:

$$3x + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{x=0} y = 3$$

$$3x + 4y - 12 = 0 \xrightarrow{y=0} x = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

با توجه به این که مساحت مثلث ABC را می توانیم به صورت $\frac{AB \times AC}{2}$ و $\frac{AH \times BC}{2}$ بنویسیم، داریم:

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow \frac{4 \times 3}{2} = \frac{AH \times 5}{2} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

پس فاصله مبدأ مختصات از خط d برابر با $\frac{12}{5}$ است.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{7+11}{2} \\ \frac{-1+5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۵۴. نقطه وسط P و Q را M می نامیم. داریم:

اگر شیب خط گذرنده از P و Q را مساوی با a در نظر بگیریم، داریم:

$$a = \frac{5 - (-1)}{11 - 7} = \frac{6}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس شیب خط عمود بر PQ برابر با $-\frac{2}{3}$ است. حال کافی است معادله خطی با شیب $-\frac{2}{3}$ را به دست آوریم که از نقطه $\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$ می گذرد:

$$y = a'x + b' : 2 = -\frac{2}{3} \times 9 + b' \Rightarrow 2 = -6 + b' \Rightarrow b' = 8 \Rightarrow \text{معادله خط : } y = -\frac{2}{3}x + 8$$

۵۵. خط $y = ax + b$ از نقاط A و C می گذرد. داریم:

$$\begin{cases} 6 = a \times 1 + b \\ 5 = a \times 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = a + b \\ 5 = b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{معادله قطر } AC : y = x + 5$$

خط $y = a'x + b'$ از نقاط B و D می گذرد. داریم:

$$\begin{cases} 5 = a' \times 3 + b' \\ 1 = a' \times 2 + b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3a' + b' \\ 1 = 2a' + b' \end{cases} \Rightarrow a' = 4 \Rightarrow b' = -7 \Rightarrow \text{معادله قطر } BD : y = 4x - 7$$

حال می توان مختصات نقطه برخورد AC و BD را به دست آورد:

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 4x - 7 \end{cases} \Rightarrow x + 5 = 4x - 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 9$$

پس مختصات نقطه برخورد دو قطر $\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ است.

۵۶.

اگر شیب خطی a باشد، شیب قرینه آن نسبت به محور x ها و y ها برابر $-a$ است.

$$y = 2x - 2 \xrightarrow{x=0} y = -2$$

الف) نقطه برخورد این دو خط روی محور y هاست، یعنی طول این نقطه صفر است:

از طرفی چون شیب خط اصلی 2 است، شیب خط قرینه -2 خواهد بود. پس باید معادله خطی با شیب -2 را بنویسیم که از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد.

$$y = -2x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}} -2 = -2 \times 0 + b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow \text{معادله خط : } y = -2x - 2$$

(ب) نقطه برخورد این دو خط روی محور x هاست، یعنی عرض این نقطه صفر است:

$$y = -3x - 6 \xrightarrow{y=0} x = -2$$

از طرفی چون شیب خط اصلی -3 است، شیب خط قرینه 3 خواهد بود. پس باید معادله خطی با شیب 3 را بنویسیم که از نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = 3x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}} 0 = 3(-2) + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = 3x + 6$$

به طور کلی معادله قرینه خط $y = ax + b$ نسبت به محور y ها برابر $y = -ax + b$ و نسبت به محور x ها برابر $y = -ax - b$ است.

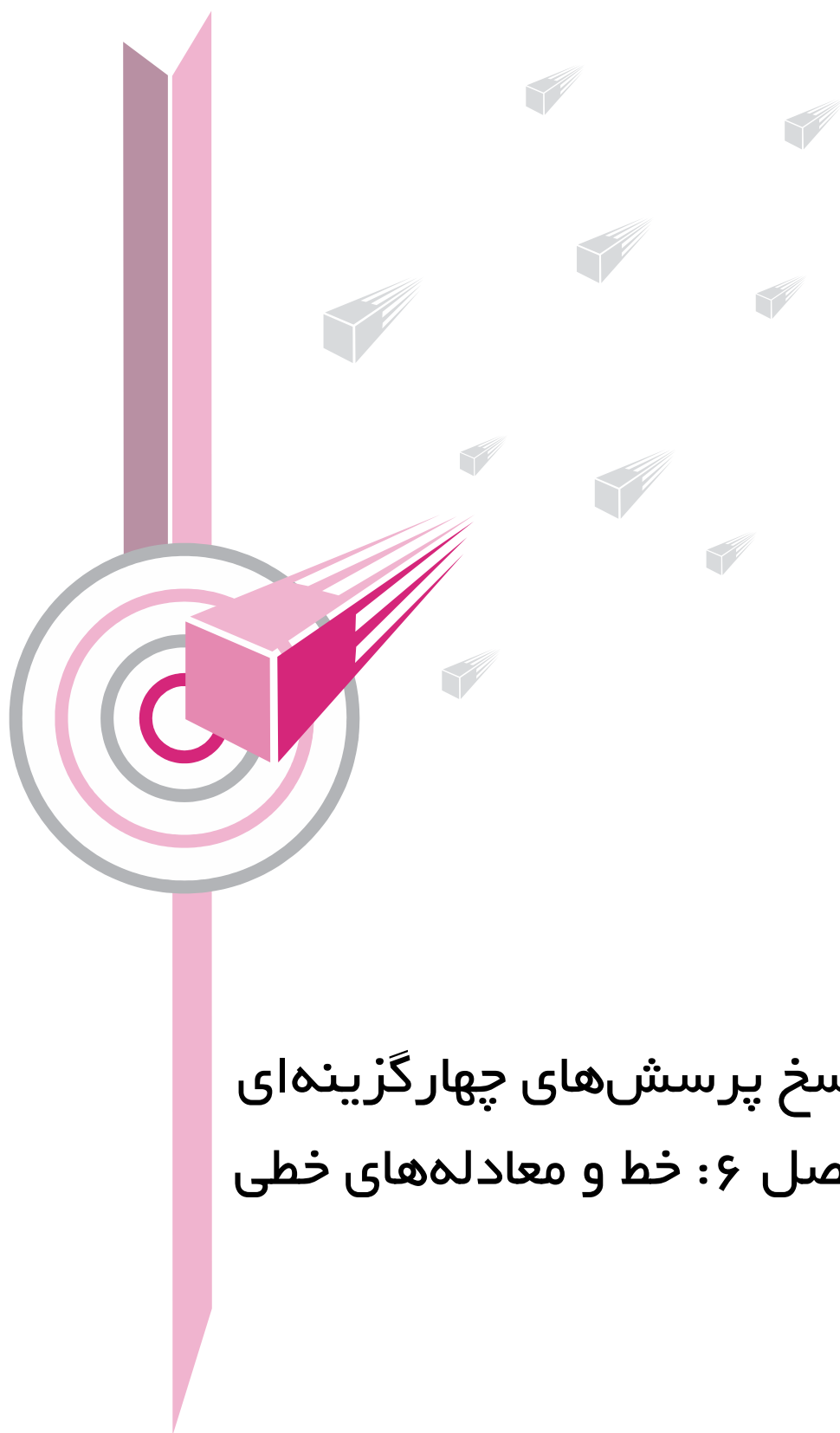
$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y + 3 - x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی: } \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . 57$$

$$mx + y - 5 = 0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}} -4m + 1 - 5 = 0 \Rightarrow -4m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\begin{cases} y - 4x = 3 \\ 6y = 3kx + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 4x - 3 = 0 \\ 6y - 3kx - 1 = 0 \end{cases} \quad . 58$$

$$\frac{1}{6} = \frac{-4}{-3k} \Rightarrow 3k = 24 \Rightarrow k = 8$$

توجه کنید چون $\frac{1}{6} \neq \frac{-3}{-1}$ است، پس به ازای $k = 8$ دو خط موازی اند و نمی‌توانند منطبق باشند.



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۶: خط و معادله‌های خطی



فصل ۶: خط و معادله‌های خطی

$$x + y = a \Rightarrow y = -x + a$$

۱. گزینه «۴»

با توجه به این که شیب (-1) و عرض از مبدأ $(a < 0)$ هر دو منفی هستند، گزینه ۴ صحیح است.

۲. گزینه «۱» با توجه به این که y های دو نقطه‌ی B و C یکی هستند، می‌توان نتیجه گرفت BC موازی محور طول‌ها و در نتیجه ارتفاع وارد بر BC موازی محور عرض‌ها است با توجه به این که ارتفاع وارد بر BC از نقطه A عبور می‌کند، معادله آن به صورت $x = 2$ است.

۳. گزینه «۴» خط $y = \frac{4}{5}$ موازی محور x ها و خط $x = -3$ موازی محور y ها است، در نتیجه با زاویه‌ی 90° همدیگر را قطع می‌کنند.

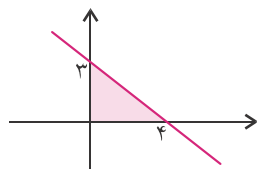
$$\frac{8 - (-4)}{0 - x} = \frac{0 - (-4)}{-4 - x} \Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{-4}{4 + x} \Rightarrow -48 - 12x = -4x \Rightarrow 8x = -48 \Rightarrow x = -6$$

۴. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} (5, a), (3, -1) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{a - (-1)}{5 - 3} = \frac{a + 1}{2} \\ (3, -1), (1, 2) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{1 - 3} = \frac{-3}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{روی یک خط}} \frac{a + 1}{2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow a = -4$$

۵. گزینه «۴»

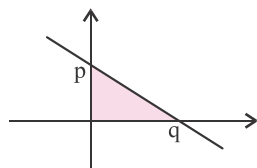
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

۶. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = p \\ y = 0 \Rightarrow x = q \end{array} \right\} \xrightarrow{p, q > 0}$$



$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{pq}{2}$$

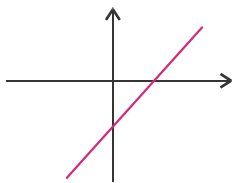
۷. گزینه «۳»

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{a}{b} \xrightarrow{ab > 0} \text{شیب خط} < 0$$

۸. گزینه «۲»

$$ax + by + c = 0 \text{ و } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \xrightarrow{bc < 0} \text{عرض از مبدأ} > 0$$

۹. گزینه «۲» خط به صورت روبه‌رو است و از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



۱۰. گزینه «۱» معادله خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

عرض از مبدأ برابر ۳- است. $\Rightarrow y = 2x - 3$ $\Rightarrow y + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y - (-1) = a(x - 1)$ و $a = \frac{5 - (-1)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$ شیب

۱۱. گزینه «۲» شیب خط گذرنده از A و B را با a نشان می‌دهیم. خط مذکور از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ نیز عبور می‌کند. در نتیجه شیب خط گذرنده از

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و A نیز باید با a برابر باشد.

$$a = \frac{m - 3}{3 - m} = -1 \Rightarrow \frac{1 - m}{-3} = -1 \Rightarrow 1 - m = 3 \Rightarrow m = -2$$

۱۲. گزینه «۴» خط d با خط $3y + 4x = 6$ موازی است، در نتیجه شیب خط d برابر است با $-\frac{4}{3}$.

خط d از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. $\Rightarrow y = -2$ $\xrightarrow{x=3} y = 4 - 2x$

معادله خط: $y - (-2) = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y + 2 = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2$

۱۳. گزینه «۲» شیب خط برابر است با $\frac{1}{4}$ و خط از نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

معادله خط: $y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y + 2 = \frac{x}{4} - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{4} - 4$

نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ در معادله این خط صدق می‌کند.

$$y = x + 2 = 2x + 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

۱۴. گزینه «۳» ابتدا نقطه تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y - 1 = -(x + 1) \Rightarrow y = -x$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ نقطه تلاقی دو خط است. از طرفی شیب خط مورد نظر برابر با ۱- است.

$$y + 2x = 0 \Rightarrow \text{شیب} = -2 \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{1}{2}$$

۱۵. گزینه «۴»

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 4 \xrightarrow{y=0} x = 8$$

$$(2a + 1)x + (3a + 1)y + a = 0 \Rightarrow 2ax + x + 3ay + y + a = 0$$

۱۶. گزینه «۴»

$$\Rightarrow a(2x + 3y + 1) + x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y * \\ 2x + 3y + 1 = 0 \xrightarrow{*} y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \xrightarrow{*} x = 1 \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



$$2y + 4x = 6 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow \text{شیب خط} = -2$$

۱۷. گزینه «۴»

شیب هر دو خط برابر است. در نتیجه با هم موازی هستند و زاویه بین آنها صفر است.

$$A \text{ و } B \text{ : معادله خط گذرنده از } y - 12 = -2(x - (-1)) \Rightarrow y - 12 = -2x - 2 \Rightarrow y = -2x + 10$$

۱۸. گزینه «۱»

$$A \text{ و } C \text{ : معادله خط گذرنده از } y - 12 = -(x - (-1)) \Rightarrow y - 12 = -x - 1 \Rightarrow y = -x + 11$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 10 \xrightarrow{y=0} x = 5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = -x + 11 \xrightarrow{y=0} x = 11 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{12 \times BC}{2} = \frac{12 \times 6}{2} = 36$$

۱۹. گزینه «۴» با توجه به این که محل برخورد دو خط روی محور x ها قرار دارد، عرض نقطه محل برخورد، صفر است.

$$y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2^*$$

$$y = 0 \Rightarrow my = 0 \Rightarrow x + n = 0 \xrightarrow{*} -2 + n = 0 \Rightarrow n = 2$$

۲۰. گزینه «۴» نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ در هر دو معادله صدق می کند.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = v \xrightarrow{(1,2)} a + 2b = v \\ ax + y = b \xrightarrow{(1,2)} a + 2 = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{دو طرف تساوی را} \\ \text{از هم کم می کنیم} \end{array} \Rightarrow 2b - 2 = v - b \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 4$$

۲۱. گزینه «۴» ابتدا محل تلاقی دو خط $x + y + 3 = 0$ و $x + 2y + 2 = 0$ را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \text{محل تلاقی دو خط، نقطه } \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

این نقطه باید در خط دیگر صدق کند، چون هر سه، از یک نقطه عبور می کنند.

$$mx + y - 1 = 0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}} -4m + 1 - 1 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$3x - 2y = v \xrightarrow{x = -2y + 5} 3(-2y + 5) - 2y = v \Rightarrow -6y + 15 - 2y = v$$

۲۲. گزینه «۲»

$$\Rightarrow -8y = -8 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{محل تلاقی دو خط است. } \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ax - 2ay - x + y = 3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} 3a - 2a - 3 + 1 = 3 \Rightarrow a = 5$$

۲۳. گزینه «۳» خط $x + y = 0$ همان $y = -x$ است. اگر نقطه $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ نسبت به $y = -x$ قرینه شود به نقطه $\begin{bmatrix} -n \\ -m \end{bmatrix}$ تبدیل می شود.

قرینه $\begin{bmatrix} a+1 \\ a-1 \end{bmatrix}$ نسبت به $y = -x$ برابر با $\begin{bmatrix} -a+1 \\ -a-1 \end{bmatrix}$ است.

$$\begin{cases} -a+1 \\ -a-1 \end{cases} = \begin{cases} 2-b \\ 2+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+1=2-b \\ -a-1=2+b \end{cases}$$

$$2 = -2b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

قرینه نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ نسبت به مبدأ برابر است با $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

۲۴. گزینه «۳» $\frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow m(m-1) = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2$ یا $m = -1$

به ازای $m = -1$ و $m = 2$ خواهیم داشت $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{3}$ ، پس هر دو جواب قابل قبول است.

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{5}{4}$$

۲۵. گزینه «۴» با توجه به روابط روبه‌رو، دستگاه جواب ندارد.

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۲۶. گزینه «۱»

توجه نمایید که به ازای $a = -1$ دستگاه جواب ندارد و به ازای $a = +1$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲۷. گزینه «۱» تعداد افرادی که به حزب هویج رأی داده‌اند را x و تعداد افرادی که به احزاب دیگری رأی داده‌اند را y در نظر می‌گیریم.

$$\frac{x + \frac{y}{10}}{x + y} = \frac{46}{100} \Rightarrow 100x + 10y = 46x + 46y \Rightarrow 54x = 36y \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{2}{3}y + y} = \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{5}{3}y} = \frac{2}{5} = 40\%$$

۲۸. گزینه «۳» طول دم ماهی را a و طول بدن ماهی را b در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} a = 10 + \frac{b}{4} \\ b = 10 + a \end{cases}$$

$$a + b = 20 + a + \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{b}{4} = 20 \Rightarrow b = 40 \Rightarrow \text{طول ماهی} = 80$$

۲۹. گزینه «۲» مساحت قسمت سفید شکل جدید را x در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{cases} x+1 = \frac{2}{3}S \\ S = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow x+1 = \frac{2}{3}(2x+1) \Rightarrow x+1 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = 3$$

$$(x-1)(y+2) = xy \Rightarrow xy + 2x - y - 2 = xy \Rightarrow 2x - y = 2$$

۳۰. گزینه «۱»

$$(x+1)(y-3) = xy \Rightarrow xy - 3x + y - 3 = xy \Rightarrow -3x + y = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ -3x + y = 3 \end{cases}$$

$$-x = 5 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow y = -12 \Rightarrow xy = 60$$

۳۱. گزینه «۱»

$$\begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ y^2 + xy = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 16 \Rightarrow (x+y)^2 = 16 \xrightarrow{x, y > 0} x+y = 4$$

۳۲. گزینه «۴»

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$$

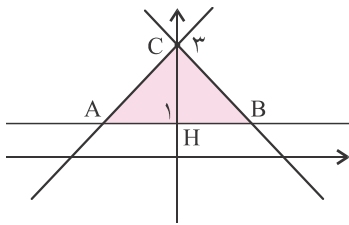
$$\begin{cases} 2x+2y+2z=12 \Rightarrow x+y+z=6 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow z=1 \Rightarrow y=2, x=3 \Rightarrow x+2y+3z=3+4+3=10$$

۳۳. گزینه «۴»

$$\begin{cases} (1) x^2yz=4 \\ (2) xy^2z=6 \\ (3) xyz^2=36 \end{cases} \xrightarrow{\text{در همدیگر ضرب شوند}} x^4y^4z^4 = 36^2 \xrightarrow{x, y, z > 0} xyz = 6 \xrightarrow{(1), (2), (3)} x = \frac{2}{3}, y = \frac{3}{2}, z = 6$$

۳۴. گزینه «۳»

$$\begin{cases} \text{شیب } AB = \frac{1 - (-5)}{m - (-1)} = \frac{1+5}{m+1} = \frac{6}{m+1} \\ \text{شیب } AC = \frac{-3 - (-5)}{m - 2 - (-1)} = \frac{-3+5}{m-2+1} = \frac{2}{m-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{در یک امتداد هستند.}} \frac{6}{m+1} = \frac{2}{m-1} \Rightarrow 6m-6 = 2m+2 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$



۳۵. گزینه «۳» $x+y=3$ یا همان $y=-x+3$ خطی است موازی نیمساز ربع دوم و چهارم که محور y ها را در $y=3$ قطع می‌کند. $-x+y=3$ یا همان $y=x+3$ خطی است موازی نیمساز ربع اول و سوم که محور y ها را در $y=3$ قطع می‌کند.

$$\begin{cases} y=1 \xrightarrow{y=x+3} x=-2 \\ y=1 \xrightarrow{y=-x+3} x=2 \end{cases} \Rightarrow AB=4 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{CH \times AB}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

۳۶. گزینه «۱» میانگین طول مختصات نقاط داده شده، برابر با طول محل برخورد میانه‌ها و همچنین میانگین عرض مختصات نقاط داده شده، برابر با عرض محل برخورد میانه‌ها است. نقطه برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم.

$$\begin{cases} \frac{3a-1+4}{3} = a+1 \\ \frac{0+6-3a}{3} = -a+2 \end{cases} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} a+1 \\ -a+2 \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه G در معادله خط $y=-x+3$ صدق می‌کند.

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$$

$$3x-3=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \xrightarrow{x-my=-1} 1-m=-1 \Rightarrow m=2$$

۳۷. گزینه «۴»

۳۸. گزینه «۳» همان نیمساز ربع دوم و چهارم است. قرینه $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم، $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ است.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + m \xrightarrow{x=3} y = 9 + m \\ y = 2x - 1 \xrightarrow{x=3} y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + m = 5 \Rightarrow m = -4$$

۳۹. گزینه «۲»

۴۰. گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2y = 3 \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{a}{2} \\ 3x - 2y = 4 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو خط عمود بر هم}} -\frac{a}{2} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$(x+y)(x+2) - x^2 - xy = 4 \Rightarrow \cancel{x^2} + 2x + \cancel{xy} + 2y - \cancel{x^2} - \cancel{xy} = 4 \Rightarrow 2x + 2y = 4$$

$$\Rightarrow x + y = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۴۱. گزینه «۴»

۴۲. گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} y - 4x = 3 \Rightarrow y = 4x + 3 \\ 7y = 3kx + 1 \Rightarrow y = \frac{3k}{7}x + \frac{1}{7} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو خط موازی هستند}} 4 = \frac{3k}{7} \Rightarrow k = \frac{28}{3}$$

۴۳. گزینه «۱»

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = 2 \Rightarrow x + y = \sqrt{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{موازی نیمساز ربع دوم و چهارم:} \\ \text{موازی محور } y \text{ ها: } x = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{زاویه بین دو خط } 45^\circ \text{ است.}$$

۴۴. گزینه «۱» برای این که قرینه خط $x + 2y = 1$ را نسبت به نیمساز ربع اول به دست آوریم کافی است جای x و y را عوض کنیم.

$$y + 2x = 1$$

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ \frac{3x}{2} + 3y = -2 \end{cases}$$

۴۵. گزینه «۱»

$$3x - 3y + \frac{3x}{2} + 3y = 12 - 2 \Rightarrow \frac{9x}{2} = 10 \Rightarrow x = \frac{20}{9} \Rightarrow y = -\frac{16}{9} \Rightarrow x + y = \frac{4}{9}$$

۴۶. گزینه «۳» معادله خط گذرنده از دو نقطه را می نویسیم.

$$y - 5 = \frac{5 - (-3)}{1 - (-2)}(x - 1) \Rightarrow \text{شیب خط گذرنده از دو نقطه}$$

$$\Rightarrow y - 5 = \frac{8x}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{8x}{3} + \frac{7}{3} \Rightarrow 3y - 8x = 7$$



۴۷. گزینه «۲» وقتی می‌گوییم عرض از مبدأ ۳- است، می‌توان گفت اگر خط را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم، b برابر با ۳- است. البته بهتر است بگوییم خط از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

$$-\frac{3}{4} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$3x - 2y - 3x - \frac{9}{4}y = 5 - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-17y}{4} = \frac{17}{4} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{خط از نقطه } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ عبور می‌کند.}$$

بنابراین معادله خطی را می‌نویسیم که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند:

$$\frac{-3 - (-1)}{0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow \text{معادله خط: } y + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 3$$

۴۸. گزینه «۱»

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = -2 \end{cases}$$

$$2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}y = 5 + 4 \Rightarrow -3\sqrt{3}y = 9 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 + 3 = 11$$

۴۹. گزینه «۱»

$$\begin{cases} 2(\frac{1}{2}x + y) = 5 \\ \frac{x+1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 2 = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4x - 2y = 5 \\ 5x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

۵۰. گزینه «۴» روش اول:

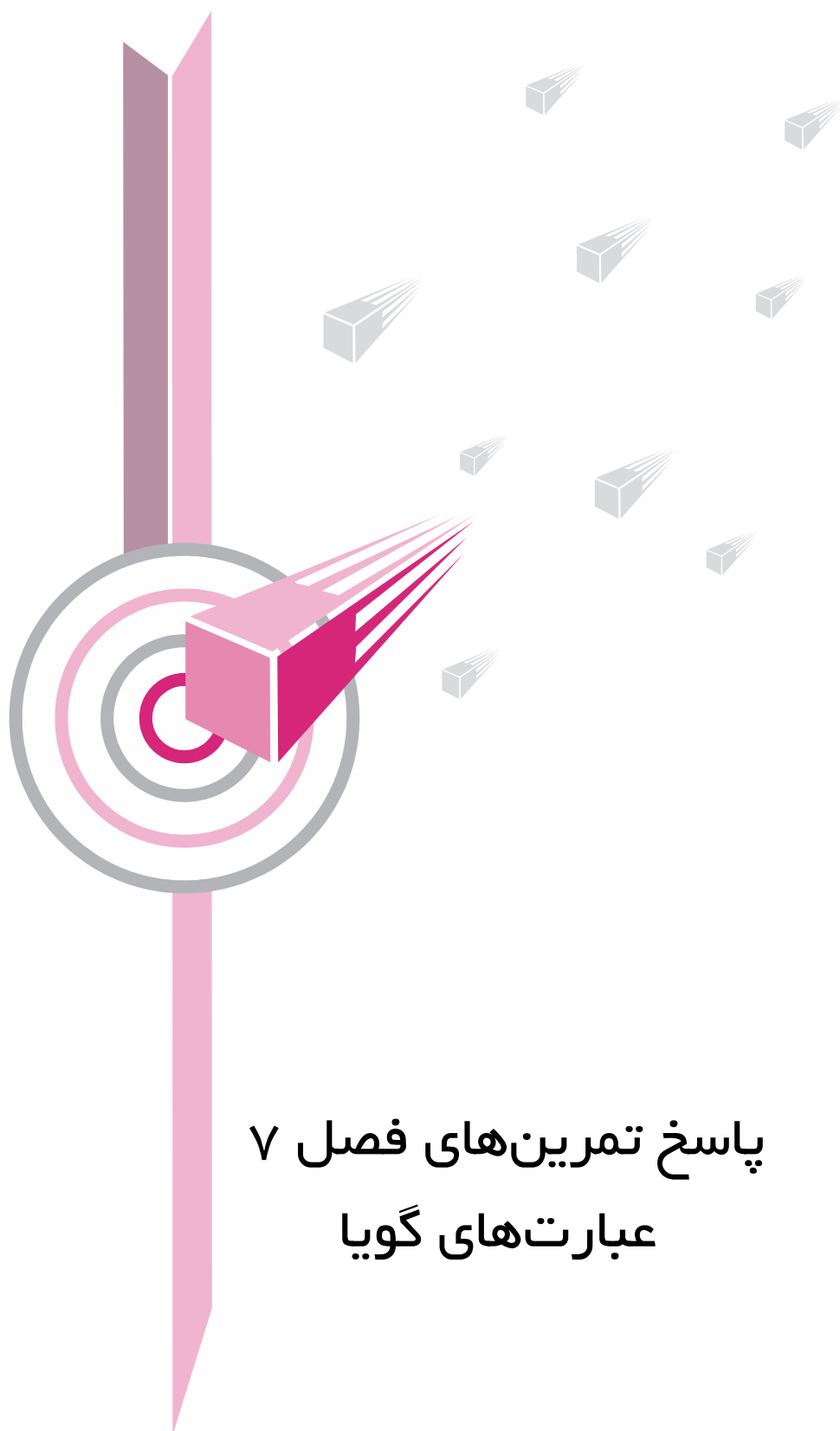
$$\text{AB نقطه وسط: } \begin{cases} x = \frac{5+3}{2} = 4 \\ y = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

عمودمنصف از نقطه وسط AB عبور می‌کند و بر AB عمود است.

$$\text{AB شیب} = \frac{5-3}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = 1 \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } y - 4 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x$$

روش دوم: هر نقطه‌ای مانند $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) قرینه شود، به نقطه $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود و از طرفی محور

تقارن دو نقطه $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ همان $y = x$ است.



پاسخ تمرین‌های فصل ۷
عبارت‌های گویا



فصل ۷ : عبارتهای گویا

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

$$\frac{2(x-3)^2}{x^2+10x+5} \xrightarrow{x=-1} \frac{2(-1-3)^2}{(-1)^2+10(-1)+5} = \frac{32}{1-10+5} = \frac{32}{-4} = -8$$

.۱

$$\frac{3x+3}{x^2+4} = 0 \Rightarrow 3x+3=0 \Rightarrow x=-1$$

.۲

۳. عبارتهای گویا به ازای مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند تعریف نشده‌اند.

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1$$

(الف)

(ب) به ازای هیچ مقدار x عبارت x^2+1 برابر صفر نمی‌شود.

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

(ج)

.۴

هر عبارت جبری که بتوان آن را به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای نوشت عبارت گویا است.

(الف) $m+n$ و m^2+n^2 چند جمله‌ای هستند، در نتیجه $\frac{m+n}{m^2+n^2}$ گویا است.

$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{m+n+p} = \frac{\frac{m+n}{mn}}{m+n+p} = \frac{m+n}{mn(m+n+p)}$$

(ب) گویا است، زیرا می‌توان آن را به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای نوشت.

(ج) $\sqrt{2}x$ و $\sqrt{2}$ چند جمله‌ای هستند، پس عبارت گویا است.

(د) x^2+1 و x^3 چند جمله‌ای هستند، پس عبارت گویا است.

(ه) مخرج برابر با صفر و کسر تعریف نشده است، پس عبارت گویا نیست.

(و) $|x|+1$ هیچ‌کدام چند جمله‌ای نیستند و نمی‌توان عبارت را با ساده کردن به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای نوشت، پس عبارت گویا نیست.
(ز) گویا نیست.

(ح) صورت و مخرج چند جمله‌ای نیستند ولی می‌توان با ساده کردن کسر، عبارت را به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای نوشت، پس عبارت گویا است.

$$\frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{1}$$

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$\frac{4x^2 - x - 3}{\frac{1}{x+1} - 1} = \frac{4x^2 - x - 3}{\frac{1-x-1}{x+1}} = \frac{(4x^2 - x - 3)(x+1)}{-x} \rightarrow x \neq 0$$

به ازای $x = 0$ و $x = -1$ ، عبارت تعریف نشده است.

. ۵

درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا

$$y \neq 0 \rightarrow \frac{\wedge y^2}{y^3} = \frac{\wedge}{y}$$

(الف . ۶)

$$y^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq \pm 1 \rightarrow \frac{(y-1)^2}{y^2 - 1} = \frac{(y-1)^2}{(y-1)(y+1)} = \frac{y-1}{y+1}$$

(ب)

$$x^2 - y^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm y \rightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

(ج)

$$\left. \begin{array}{l} x + y \neq 0 \Rightarrow x \neq -y \\ x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2x^2 - 2y^2}{2(x+y)(x-y)} = \frac{2(x^2 - y^2)}{2(x^2 - y^2)} = \frac{2}{2}$$

. ۷

عبارت پس از ساده شدن برابر $\frac{2}{2}$ می شود. در نتیجه فرق نمی کند x و y چه مقداری داشته باشند. فقط x و y باید مقادیر مجاز را داشته باشند. یعنی برابر یا قرینه نباشند.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = b \\ \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4a}{5} = c \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3a}{\frac{4a}{5}} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{15}{4}$$

. ۸

$$T = \frac{4a^2bc + 3ab^2c^2}{4a + 3bc} = \frac{abc(4a + 3bc)}{4a + 3bc} = abc$$

. ۹

$$T = \frac{27x^{63} + 24x^5}{9x^{58} + 8} = \frac{3x^5(9x^{58} + 8)}{9x^{58} + 8} = 3x^5 \xrightarrow{x=-2} 3(-2)^5 = -96$$

. ۱۰

$$x \neq 0, 1 \rightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{-x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

. ۱۱

$$\left. \begin{array}{l} x+3 + \frac{4}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)+4}{x-2} = \frac{x^2+x-6+4}{x-2} = \frac{x^2+x-2}{x-2} \\ 2 + \frac{2}{x-2} = \frac{2(x-2)+2}{x-2} = \frac{2x-4+2}{x-2} = \frac{2x-2}{x-2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

. ۱۲

$$\frac{x+3 + \frac{4}{x-2}}{2 + \frac{2}{x-2}} = \frac{\frac{x^2+x-2}{x-2}}{\frac{2x-2}{x-2}} = \frac{x^2+x-2}{2(x-1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2}$$

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{x^2+x-12}{x^2-16} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

. ۱۳

$$\frac{a^2b^2c^2 - a^2b^2c}{a^2b^2c^2 - a^2b^2c} = \frac{a^2b^2c(a^2b^2c^2 - 1)}{a^2b^2c^2(a^2b^2c^2 - 1)} = \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

. ۱۴

$$1 - \frac{1}{1+\frac{x}{1-x}} = 1 - \frac{1}{\frac{1-x+x}{1-x}} = 1 - \frac{1}{1-x} = 1 - (1-x) = x$$

. ۱۵

$$\frac{4x-8}{2x-4} - \frac{x+7}{3x+21} = \frac{2(x-2)}{2(x-2)} - \frac{x+7}{3(x+7)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

. ۱۶

$$\frac{a-8}{a^2-a-6} + \frac{a-2}{a-3} = \frac{a-8}{(a-3)(a+2)} + \frac{a-2}{a-3} = \frac{(a-8) + (a-2)(a+2)}{(a-3)(a+2)}$$

$$= \frac{a^2-4+a-8}{(a-3)(a+2)} = \frac{a^2+a-12}{(a-3)(a+2)} = \frac{(a+4)(a-3)}{(a-3)(a+2)} = \frac{a+4}{a+2}$$

. ۱۷

$$\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{x^2-1-x}{x^2+x} = \frac{2x-1}{x^2+x} \Rightarrow x^2-x-1=2x-1$$

. ۱۸

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=3$$

جواب $x=0$ مخرج را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست و $x=3$ تنها جواب معادله است.

$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{ma+na}{mn}} = \frac{\frac{m+n}{mn}}{\frac{(m+n)a}{mn}} = \frac{\cancel{(m+n)} \cancel{mn}}{\cancel{mn} \cancel{(m+n)} a} = \frac{1}{a}$$

. ۱۹

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \Rightarrow \frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{ax-2a+bx-b}{x^2-3x+2}$$

. ۲۰

$$\Rightarrow 3x-2 = (a+b)x - 2a - b \xrightarrow{\text{اتحاد است}} a+b=3, -2a-b=-2 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b=3 \Rightarrow a=3-b \\ 2a+b=2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 6-2b+b=2 \Rightarrow b=4 \Rightarrow a=-1$$

هرگاه یک تساوی اتحاد باشد و در دو طرف تساوی دو چند جمله‌ای داشته باشیم، ضریب‌های جمله‌های

متشابه در دو طرف تساوی باید با هم برابر باشند.

$$x+y+z=0 \Rightarrow y+z=-x, x+z=-y, x+y=-z \Rightarrow A = \frac{(-x)^{1392}}{x^{1392}} + \frac{2y^{1393}}{(-y)^{1393}} - \frac{(-z)^{1394}}{z^{1394}} = 1 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{-4}{3}$$

. ۲۱

$$\frac{zx}{x+z} = 6 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}} = 6$$

. ۲۲



$$\frac{yz}{y+z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{xy}{x+y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$$

اگر دو طرف هر سه تساوی را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

درس سوم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 5 \quad | \quad x+1 \\ - 2x^2 - 2x \quad \quad 2x+1 \\ \hline x-5 \\ - x-1 \\ \hline -6 \end{array} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 7 \quad | \quad x+1 \\ - x^2 - x \quad \quad x+2 \\ \hline 2x+7 \quad \quad \quad \text{(ب)} \\ - 2x-2 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \quad | \quad x-1 \\ - x^2 + x \quad \quad x+1 \\ \hline x+1 \quad \quad \quad \text{(الف) ۲۳} \\ - x+1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 - 1 \quad | \quad a^2 - 1 \\ - a^3 + a \quad \quad a \\ \hline a-1 \end{array}$$

۲۴. باقی مانده برابر است با $a-1$.

۲۵. روش اول:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^2 + 5 \quad | \quad x-3 \\ - x^4 + 3x^3 \quad \quad x^3 + 3x^2 + 8x + 24 \\ \hline 3x^3 - x^2 + 5 \\ - 3x^3 + 9x^2 \\ \hline 8x^2 + 5 \\ - 8x^2 + 24x \\ \hline 24x + 5 \\ - 24x + 72 \\ \hline 77 \end{array}$$

برای به دست آوردن مجموع ضریب‌های یک چند جمله‌ای، کافی است به جای متغیرها عدد ۱ قرار دهیم.

$$x^3 + 3x^2 + 8x + 24 \xrightarrow{x=1} 1 + 3 + 8 + 24 = 36 \quad \text{(خارج قسمت)}$$

روش دوم:

برای به دست آوردن باقی مانده یک چند جمله‌ای بر $x-a$ ، کافی است به جای متغیر x ، مقدار a را در چند جمله‌ای قرار دهیم.



$$x^4 - x^2 + 5 \xrightarrow{x=3} 3^4 - 3^2 + 5 = 77$$

ابتدا باقی مانده $x^4 - x^2 + 5$ بر $x - 3$ را به دست می آوریم.
سپس اتحاد تقسیم را می نویسیم.

$$x^4 - x^2 + 5 = (x - 3)(\text{خارج قسمت}) + 77$$

به جای متغیر x در دو طرف تساوی عدد ۱ قرار می دهیم.

$$1^4 - 1^2 + 5 = (1 - 3)(\text{مجموع ضریب های خارج قسمت}) + 77 \Rightarrow 5 = -2(\text{مجموع ضریب های خارج قسمت}) + 77$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ضریب های خارج قسمت} = 36$$

۲۶. روش اول:

$$2x^2 + 3x + 7 \quad | \quad x - 3$$

$$\underline{-2x^2 + 6x} \quad 2x + 9$$

$$9x + 7$$

$$\underline{-9x + 27}$$

$$34$$

$$\xrightarrow{x=1} 11 \quad 2x + 9 \quad (\text{خارج قسمت})$$

$$2x^2 + 3x + 7 \xrightarrow{x=3} 34 \quad (\text{باقی مانده})$$

روش دوم:

$$2x^2 + 3x + 7 = (x - 3)(\text{خارج قسمت}) + 34 \xrightarrow{x=1} 12 = -2(x = 1 \text{ ازای } x = 1) + 34 \Rightarrow x = 1 \text{ ازای } x = 1$$

$$\frac{va^2 - 14ab + vb^2}{a^2 - b^2} = \frac{v(a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 - b^2} = \frac{v(a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{v(a - b)}{a + b}$$

۲۷.

$$\frac{v(a - b)}{a + b} \quad a = 66, b = 62 \rightarrow \frac{v \times 4}{128} = \frac{v}{32}$$

$$A = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{ab}{a^4 - b^4}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right) \left(\frac{ab}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}\right) = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

۲۸.

$$A \xrightarrow{a=-1, b=\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} - 6^2} = \frac{1}{13}$$

۲۹.

$$x^4 - x^3 \quad | \quad x^2 + 2$$

$$\underline{-x^4 - 2x^2} \quad x^2 - x - 2$$

$$-x^3 - 2x^2$$

$$\underline{x^3 + 2x}$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$\underline{+2x^2 + 4}$$

$$2x + 4$$

۳۰.



هنگامی یک چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای $x - a$ بخش پذیر است که چند جمله‌ای به ازای $x = a$ ، برابر صفر باشد.

$$x^4 - 3x^3 + mx + 46 \xrightarrow{x=2} 16 - 24 + 2m + 46 = 0 \Rightarrow 38 + 2m = 0 \Rightarrow m = -19$$

۳۱.

$$\begin{array}{r} x^0 - 1 \quad | \quad x - 1 \\ - x^0 + x^9 \\ \hline x^9 - 1 \\ - x^9 + x^8 \\ \hline x^8 - 1 \\ - x^8 + x^7 \\ \hline x^7 - 1 \\ \vdots \\ \hline \circ \end{array}$$

(ب)

(۳۲. الف)

$$\begin{array}{r} -2x^5 + 10x^2 + 1 \quad | \quad x^2 - 2 \\ + 2x^5 - 4x^3 \\ \hline -4x^3 + 10x^2 + 1 \\ 4x^3 - 8x \\ \hline 10x^2 - 8x + 1 \\ - 10x^2 + 20 \\ \hline -8x + 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x - 2 \\ - x^4 + 2x^3 \\ \hline x^2 + 1 \\ - x^2 + 2x \\ \hline 2x + 1 \\ - 2x + 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

(د)

(ج)

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x + 3 \quad | \quad x - 1 \\ - x^4 + x^3 \\ \hline x^3 - 4x + 3 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 4x + 3 \\ - x^2 + x \\ \hline -3x + 3 \\ 3x - 3 \\ \hline \circ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^2 + 1 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ - x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline -x^3 + 1 \\ x^3 + x^2 + x \\ \hline x^2 + x + 1 \\ - x^2 - x - 1 \\ \hline \circ \end{array}$$



۳۳. الف)

(ب)

$$\begin{array}{r} x^5 + x^3 + x + 1 \quad | \quad x^2 + 1 \\ - x^5 - x^3 \quad \quad \quad x^3 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x^5 - 3x^2 - 4x + 5 \quad | \quad x - 2 \\ - 7x^5 + 14x^4 \quad \quad \quad 7x^4 + 14x^3 + 28x^2 + 53x + 102 \\ \hline 14x^4 - 3x^2 - 4x + 5 \\ - 14x^4 + 28x^3 \quad \quad \quad 28x^3 - 3x^2 - 4x + 5 \\ \hline 28x^3 - 3x^2 - 4x + 5 \\ - 28x^3 + 56x^2 \quad \quad \quad 56x^2 - 4x + 5 \\ \hline 56x^2 - 4x + 5 \\ - 56x^2 + 112x \quad \quad \quad 112x + 5 \\ \hline 112x + 5 \\ - 112x + 224 \quad \quad \quad 224 \end{array}$$

ج)

$$\begin{array}{r} x^5 + x + 1 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ - x^5 - x^4 - x^3 \quad \quad \quad x^3 - x^2 + 1 \\ \hline -x^4 - x^3 + x + 1 \\ + x^4 + x^3 + x^2 \quad \quad \quad x^2 + x + 1 \\ \hline x^2 + x + 1 \\ - x^2 - x - 1 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

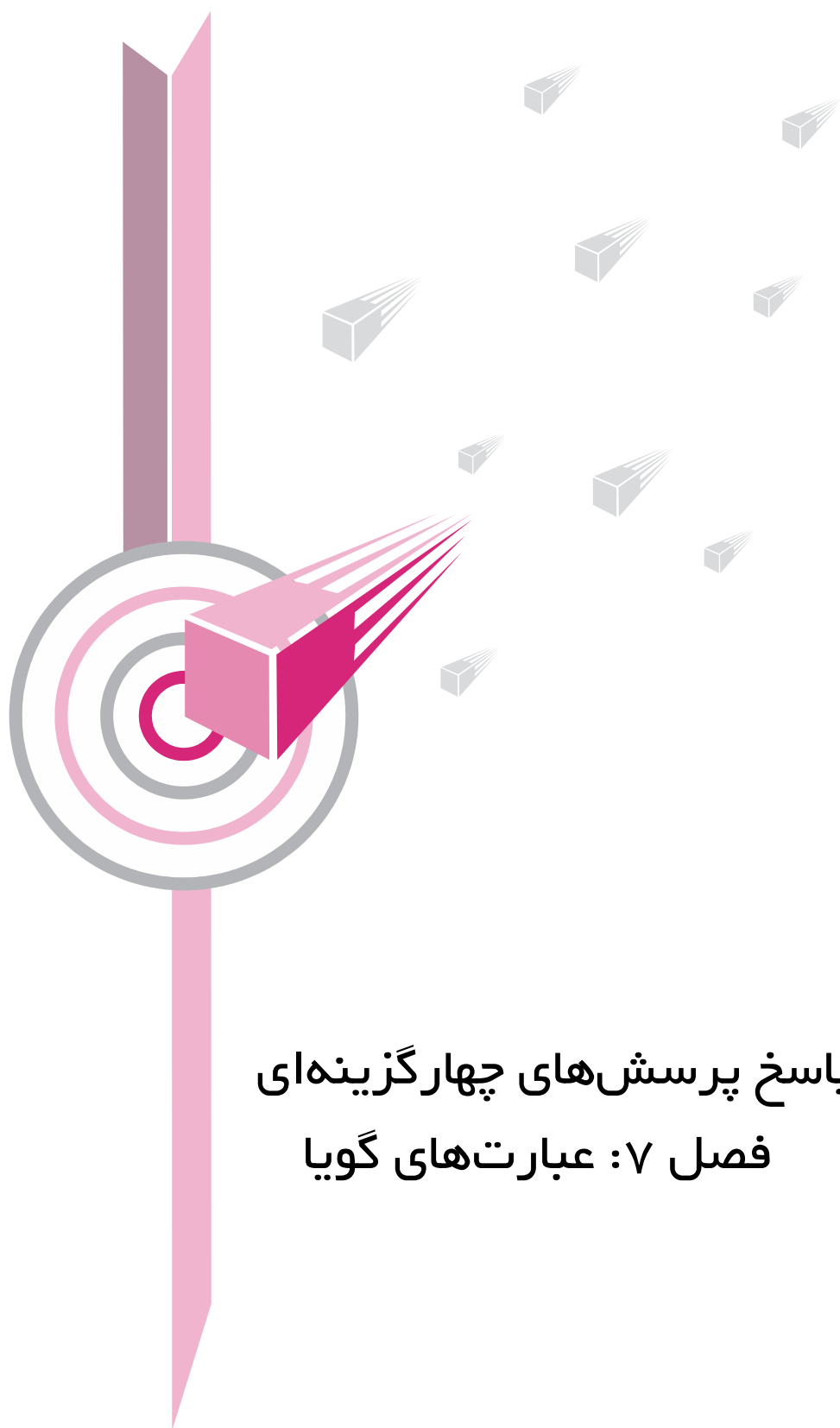
۳۴. اتحاد تقسیم را می نویسیم:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 11x^3 + 10x^2 - 1 &= (x^2 + 3x + 1) \times (\text{مقسوم علیه}) - 5x - 2 \\ \Rightarrow (x^2 + 3x + 1) \times (\text{مقسوم علیه}) &= 3x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \\ \Rightarrow (\text{مقسوم علیه}) &= (3x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 5x + 1) \div (x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

مقسوم علیه مورد نظر همان خارج قسمت تقسیم زیر است:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \quad | \quad x^2 + 3x + 1 \\ - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 \quad \quad \quad 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 \\ - 2x^3 - 6x^2 - 2x \quad \quad \quad x^2 + 3x + 1 \\ \hline x^2 + 3x + 1 \\ - x^2 - 3x - 1 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

بنابراین مقسوم علیه تقسیم عبارت است از $3x^2 + 2x + 1$.



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۷: عبارتهای گویا



فصل ۷: عبارتهای گویا

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x+1} - 1 \neq 0 &\Rightarrow \frac{1}{x+1} \neq 1 \Rightarrow 1 \neq x+1 \Rightarrow x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 &\Rightarrow x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \neq 0, -1$$

۱. گزینه «۲» مخرج یک کسر نباید صفر باشد.

۲. گزینه «۲» کسر داده شده به ازای $x = -1$ تعریف نشده است، به عبارتی مخرج به ازای $x = -1$ صفر می‌شود.

$$\xrightarrow{x=-1} a \times (-1)^2 - b \times (-1) + 5 = 0 \Rightarrow a + b + 5 = 0 \Rightarrow a + b = -5$$

۳. گزینه «۱» یک عبارت گویا زمانی صفر است که صورت آن برابر با صفر و البته مخرج آن غیر صفر باشد. $3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$$m = \frac{xy+1}{x-y} \Rightarrow mx - my = xy + 1 \Rightarrow mx - xy = my + 1 \Rightarrow x(m-y) = my + 1 \Rightarrow x = \frac{my+1}{m-y}$$

۴. گزینه «۲»

$$A = \frac{x^2-4}{2x+4} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{2x+4}{x^2-4} \Rightarrow \frac{1}{A} + 1 = \frac{2x+4}{x^2-4} + \frac{x^2-4}{x^2-4} = \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}$$

۵. گزینه «۳»

$$\frac{2(x-3)^2}{x^2-10x+5} \xrightarrow{x=-1} \frac{2 \times (-4)^2}{(-1)^2 - 10 \times (-1) + 5} = \frac{2 \times 16}{16} = 2$$

۶. گزینه «۴»

$$\frac{3x^{14}}{2x^{13}} - \frac{2y^{16}}{3y^{17}} - \frac{x}{y} = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3} \times \frac{1}{y} - \frac{x}{y} \xrightarrow{\substack{x=-1 \\ y=-2}} \frac{3}{2} \times (-1) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{-2} - \frac{-1}{-2}$$

$$= \frac{-3}{2} + \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{-9+2-3}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

۷. گزینه «۳»

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{ab}{a^4 - b^4}\right) = \frac{a^3 + b^3}{ab} \times \frac{ab}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \xrightarrow{\substack{a=-1 \\ b=\frac{1}{2}}} \frac{1}{(-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۸. گزینه «۲»

$$a * b = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + ab + b^3} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^3 + ab + b^3} = a - b \Rightarrow 2007 * 1386 = 2007 - 1386 = 621$$

۹. گزینه «۴»



$$xyz = 32 \Rightarrow xz = \frac{32}{y} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{128+y}{4 \times \frac{32}{y} + 1} = \frac{128+y}{\frac{128+y}{y}} = \frac{y(128+y)}{128+y} = y$$

۱۰. گزینه «۳»

$$\frac{3x-6}{2x-4} - \frac{x+7}{3x+21} = \frac{3(x-2)}{2(x-2)} - \frac{x+7}{3(x+7)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

۱۱. گزینه «۱»

$$\begin{aligned} (x - \frac{x+6}{x-4})(\frac{x^2+9}{x+1} - 5) &= (\frac{x(x-4) - (x+6)}{x-4}) \times (\frac{x^2+9 - (5x+5)}{x+1}) \\ &= \frac{(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 4)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(x-6)(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-4)} = x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

۱۲. گزینه «۴»

$$\frac{a^3 - 2a^2 - 1}{a + \frac{1-2a^2}{a}} = \frac{a^3 - 2a^2 + 1}{a^2 + 1 - 2a^2} = \frac{a^3 - 2a^2 + 1}{1 - a^2} = 1 - a^2$$

۱۳. گزینه «۲»

$$\frac{ax^2 - ax}{4x} \times \frac{3x+6}{x^2+x-2} = 6 \Rightarrow \frac{ax(x-1)}{4x} \times \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 6 \Rightarrow \frac{3}{4}a = 6 \Rightarrow 3a = 24 \Rightarrow a = 8$$

۱۴. گزینه «۱»

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \Rightarrow \frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

۱۵. گزینه «۴»

مخرج ها برابر $\rightarrow 3x - 2 = a(x - 2) + b(x - 1)$

$$\Rightarrow 3x - 2 = ax + bx - 2a - b \Rightarrow 3x - 2 = x(a + b) - 2a - b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -2a - b = -2 \end{cases}$$

$$\underline{-a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 4}$$

$$\frac{x-y}{2y-2x} - \frac{x-2}{x} + \frac{1}{3} = \frac{x-y}{2(y-x)} - \frac{x-2}{x} + \frac{1}{3}$$

۱۶. گزینه «۲»

$$= \frac{-1}{2} + \frac{2-x}{x} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{7}{6}$$

$$\frac{m^{-1} + n^{-1}}{\frac{ma+na}{mn}} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{ma+na}{mn}} = \frac{\frac{m+n}{mn}}{\frac{a(m+n)}{mn}} = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

۱۷. گزینه «۳»

$$\frac{x}{2y} + \frac{y}{x} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 2y^2}{2xy} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{2}y)^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}y$$

۱۸. گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{2}y+y}{\sqrt{2}y-y} = \frac{y(\sqrt{2}+1)}{y(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$a^3 + b^3 = 2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 1 + 1 \Rightarrow a^3 - 1 = 1 - b^3$$

۱۹. گزینه «۴»

$$\Rightarrow (a-1)(a^2+a+1) = (1-b)(1+b+b^2) \Rightarrow \frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = \frac{1-b}{a-1}$$



$$K = \frac{a^r - b^r}{ab} - \frac{ab - b^r}{ab - a^r} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab} - \frac{b(a-b)}{a(b-a)}$$

۲۰. گزینه «۳»

$$\Rightarrow K = \frac{(a-b)(a+b)}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{(a-b)(a+b) + b^r}{ab} = \frac{a^r - b^r + b^r}{ab} = \frac{a^r}{ab} = \frac{a}{b}$$

$$xyz = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1+xy}{1+z} = \frac{1+xy}{1+\frac{1}{xy}} = \frac{1+xy}{\frac{1+xy}{xy}} = xy$$

۲۱. گزینه «۲»

$$\frac{\lambda x^r y^r - 1 \cdot x^r y^r}{-2x^r y^r} = \frac{2x^r y^r (rxy - 5y)}{-2x^r y^r} = -rxy + 5y$$

۲۲. گزینه «۳»

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{(x-3)(x-7)}{(x-7)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

۲۳. گزینه «۳»

۲۴. گزینه «۱» روش اول:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 5x \quad | \quad x + 3 \\ -x^3 - 3x^2 \\ \hline -6x^2 + 5x \\ + 6x^2 + 18x \\ \hline 23x \\ -23x - 69 \\ \hline -69 \end{array}$$

باقی مانده تقسیم $\rightarrow -69$

روش دوم: به جای x عددی قرار می‌دهیم که $x + 3$ را صفر کند ($x = -3$).

$$x = -3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 5x = (-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) = -69$$

۲۵. گزینه «۲»

$$\begin{array}{r} -2x^3 + x^2 - 5x + 7 \quad | \quad x + 1 \\ + 2x^3 + 2x^2 \\ \hline 3x^2 - 5x + 7 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -8x + 7 \\ + 8x + 8 \\ \hline 15 \end{array}$$

خارج قسمت تقسیم $\rightarrow -2x^2 + 3x - 8$

۲۶. گزینه «۲» عبارت $3x^2 + 5x + m$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، بنابراین به ازای $x = -2$ برابر با صفر می‌شود.

$$3x^2 + 5x + m \xrightarrow{x=-2} 3 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) + m = 0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

۲۷. گزینه «۳»

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 + x \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-2x^3 - 4x^2} \quad \quad \quad 2x^2 - x + 3 \\
 -x^2 + x \\
 \underline{+ x^2 + 2x} \\
 3x \\
 \underline{-3x - 6} \\
 -6
 \end{array}$$

$x = -2 \rightarrow 2(-2)^2 - (-2) + 3 = 13$

۲۸. گزینه «۳»

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + b &= (x - 3)(x + a) + (-3) \Rightarrow x^2 - 4x + b + 3 = (x - 3)(x + a) \\
 \Rightarrow x^2 - 4x + b + 3 &= x^2 + x(a - 3) - 3a \\
 a - 3 &= -4 \Rightarrow a = -1 \\
 -3a &= b + 3 \xrightarrow{a = -1} 3 = b + 3 \Rightarrow b = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} a - 3 = -4 \\ -3a = b + 3 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow a + b = -1 + 0 = -1$$

۲۹. گزینه «۴» روش اول:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^2 + 5 \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{-x^4 + 3x^3} \quad \quad \quad x^3 + 3x^2 + 8x + 24 \\
 3x^3 - x^2 + 5 \\
 \underline{-3x^3 + 9x^2} \\
 8x^2 + 5 \\
 \underline{-8x^2 + 24x} \\
 24x + 5 \\
 \underline{-24x + 72} \\
 77
 \end{array}$$

۳۶ = مجموع ضریب‌ها $\rightarrow x^3 + 3x^2 + 8x + 24$

روش دوم: ابتدا با قرار دادن $x = 3$ در مقسوم، باقی مانده را به دست می‌آوریم:

$$x = 3 \rightarrow x^4 - x^2 + 5 = 3^4 - 3^2 + 5 = 77 \Rightarrow x^4 - x^2 + 5 = (x - 3)(\text{خارج قسمت}) + 77$$

برای به دست آوردن مجموع ضریب‌ها، کافی است به جای x عدد ۱ قرار دهیم:

$$x = 1 \rightarrow 1^4 - 1^2 + 5 = 77 + (\text{مجموع ضریب‌های خارج قسمت})(1 - 3) \Rightarrow 36 = \text{مجموع ضریب‌ها}$$

۳۰. گزینه «۴» در چند جمله‌ای $x^{17} - 4x^{15} - x^3 + 4$ به جای متغیر x اعدادی را قرار می‌دهیم که گزینه‌ها را صفر کند. هر کدام که چند

$$x = 1 \rightarrow x^{17} - 4x^{15} - x^3 + 4 = 1^{17} - 4 \times (1)^{15} - 1^3 + 4 = 0$$

جمله‌ای را صفر کرد چند جمله‌ای بر آن بخش پذیر است.

چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش پذیر است.

۳۱. گزینه «۲» روش اول:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad | \quad 2x - 1 \\
 \underline{-2x^3 + x^2} \quad \quad \quad x^2 - x + 2 \\
 -2x^2 + 5x \\
 \underline{+ 2x^2 - x} \\
 4x \\
 \underline{-4x + 2} \\
 2 \rightarrow \text{باقی مانده}
 \end{array}$$

روش دوم: کافی است به جای x ، مقدار $\frac{1}{4}$ قرار دهیم که حاصل برابر ۲ می‌شود:

$$x(2x^2 - 3x + 5) \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{1}{4} \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 5 \right) = 2$$

$$x^2 - 10x + 9 \xrightarrow{x=1} 1 - 10 + 9 = 0$$

۳۲. گزینه «۲»

$$x^2 - 10x + 9 \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 - 10 \times (-2) + 9 = 33$$

$$x^2(2x^2 - xy - y^2) + xy(x - y)(x + 2y)$$

۳۳. گزینه «۳»

$$= x^2(x - y)(2x + y) + xy(x - y)(x + 2y)$$

$$= x(x - y)[x(2x + y) + y(x + 2y)] = x(x - y)[2x^2 + 2xy + 2y^2] = 2x(x - y)[x^2 + xy + y^2]$$

۳۴. گزینه «۴» $mx^6 + nx^3$ بر $x^3 + 1$ بخش پذیر است. در نتیجه به ازای $x^3 = -1$ ، حاصل $mx^6 + nx^3$ صفر می‌شود.

$$x^3 = -1 \rightarrow mx^6 + nx^3 = m - n = 0 \Rightarrow m = n$$

برای به دست آوردن باقی مانده $x^2 + mx + 3n$ بر $x^3 + 1$ کافی است $x = -3$ را جای گذاری کنیم:

$$x = -3 \rightarrow x^2 + mx + 3n = 9 - 3m - 3n = 9 - 3(m - n) = 9 - 3 \times 0 = 9$$

۳۵. گزینه «۲»

$$\begin{array}{r} x^{17} - x^5 + 1 \quad | \quad x^5 + 1 \\ -x^{17} - x^{12} \quad | \quad x^{12} - x^7 + x^2 - 1 \\ -x^{12} - x^5 + 1 \quad | \quad x^5 + 1 \\ +x^{12} + x^7 \quad | \quad x^7 - x^5 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad | \quad -x^5 - x^2 \quad | \quad -x^5 - x^2 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad | \quad -x^5 - x^2 + 1 \quad | \quad +x^5 + 1 \\ \quad \quad \quad \quad | \quad -x^2 + 2 \end{array}$$

$$\frac{x+4}{2-2x} \xrightarrow{x=1} \frac{x+4}{2-2} = \frac{x+4}{0} \text{ و تعریف نشده: } \frac{x+4}{2-2x} \xrightarrow{x=2} \frac{2+4}{2-2 \times 2} = \frac{6}{-2} = -3$$

۳۶. گزینه «۱»

$$\frac{x((x+1)^2(x-1)^2)}{(x+1)(x-1)} = x^2 \left(1 + \frac{x+1}{x-1} \right)$$

۳۷. گزینه «۲»

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{x(x+1-x+1)(x+1+x-1)}{(x+1)(x-1)} = x^2 \left(\frac{x-1+x+1}{x-1} \right) \Rightarrow \frac{2x \times 2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2(2x)}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow 2x^2(x-1) = 2x^2(x+1)(x-1) \Rightarrow 2x^2(x-1) \underbrace{[x(x+1)-2]}_{(x+2)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(x-1)(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = -2$$

توجه کنید که $x = 1$ قابل قبول نیست، زیرا مخارج عبارت‌ها را صفر می‌کند و تعریف شده نیست.

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{x+1} - (3x+5) = \frac{(x+1)(x^2 - x + 5)}{(x+1)} - 3x - 5 = x^2 - x + 5 - 3x - 5 = x^2 - 4x$$

۳۸. گزینه «۱»

۳۹. گزینه «۴»

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 - 4x \quad | \quad x^2 + x \\ -2x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 4x \\ +4x^2 + 4x \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ضلع دیگری} \rightarrow \\ \Rightarrow \text{محیط مستطیل} = 2(x^2 + x + 2x - 4) = 2(x^2 + 3x - 4) = 2x^2 + 6x - 8 \end{array}$$

$$3x^4 + (5-3a)x^3 - 5ax^2 - x + 3a$$

۴۰. گزینه «۲»

$$\xrightarrow{x=a} 3a^4 + (5-3a)a^3 - 5a \times a^2 - a + 3a = 3a^4 + 5a^3 - 3a^4 - 5a^2 - a + 3a = 5a^3 - 5a^2 + 2a = 2a$$

$$(x^2 - 2)(6x + 1) = 6x^3 + x^2 - 12x - 2$$

۴۱. گزینه «۲»

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 12x - 2 \quad | \quad 3x + 2 \\ -6x^3 - 4x^2 \\ \hline -3x^2 - 12x - 2 \\ +3x^2 + 2x \\ \hline -10x - 2 \\ + 10x + \frac{20}{3} \\ \hline \frac{14}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 = \text{ضریب جمله درجه ۱} \rightarrow \\ 2x^2 - x - \frac{10}{3} \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

۴۲. گزینه «۳»

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+5)(x-4)} = \frac{x+4}{x+5} \xrightarrow{\text{معکوس}} (x+5)(x+4)^{-1}$$

۴۳. گزینه «۴»

۴۴. گزینه «۳» $x^2 + 1$ همیشه مثبت است، پس مخرج کسر $\frac{x-2}{x^2+1}$ هرگز صفر نخواهد شد.

$$\frac{y+4}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{y+4}{x^2+\sqrt{2}}$$

۴۵. گزینه «۳» این عبارت به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای نوشته می‌شود.

۴۶. گزینه «۲» عبارت $x^6 + ax^4 + bx^3 + 1$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ صفر است.

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \rightarrow 1+a+b+1=0 \\ x=-1 \rightarrow 1+a-b+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow a=-2, b=0 \Rightarrow a+b=-2$$

۴۷. گزینه «۳» روش اول:

$$\begin{array}{r} 24x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \quad | \quad 2x + 1 \\ -24x^3 - 12x^2 \\ \hline -16x^2 + 6x - 1 \\ +16x^2 + 8x \\ \hline 14x - 1 \\ -14x - 7 \\ \hline -8 \end{array}$$

$$12x^2 - 8x + 7 \xrightarrow{x=1} 12 - 8 + 7 = 11$$

روش دوم: ابتدا باقی مانده را به دست می آوریم:

$$24x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = (2x + 1)(\text{خارج قسمت}) - 8 \xrightarrow{x=1} 25 = 3 \times (x = 1 \text{ ازای}) - 8 \Rightarrow$$

$$11 = (\text{خارج قسمت به ازای } x = 1)$$

۴۸. گزینه «۲» با استفاده از اتحاد (باقی مانده + خارج قسمت \times مقسوم علیه = مقسوم) و با توجه به این که درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کم تر است، درجه خارج قسمت برابر با ۵ است.

۴۹. گزینه «۳» روش اول:

$$\begin{array}{r} ax^2 + 2x \quad | \quad x + 1 \\ -ax^2 - ax \\ \hline (2-a)x \\ -(2-a)x + a - 2 \\ \hline a - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 4x - a \quad | \quad x + 1 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline 4x - a \\ -4x - 4 \\ \hline -a - 4 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{باقی مانده ها برابر هستند}} a - 2 = -a - 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

روش دوم:

$$x = -1 \rightarrow ax^2 + 2x = a - 2 \text{ و } x^3 + x^2 + 4x - a = -4 - a \xrightarrow{\text{برابری باقی مانده ها}} a - 2 = -a - 4 \Rightarrow a = -1$$

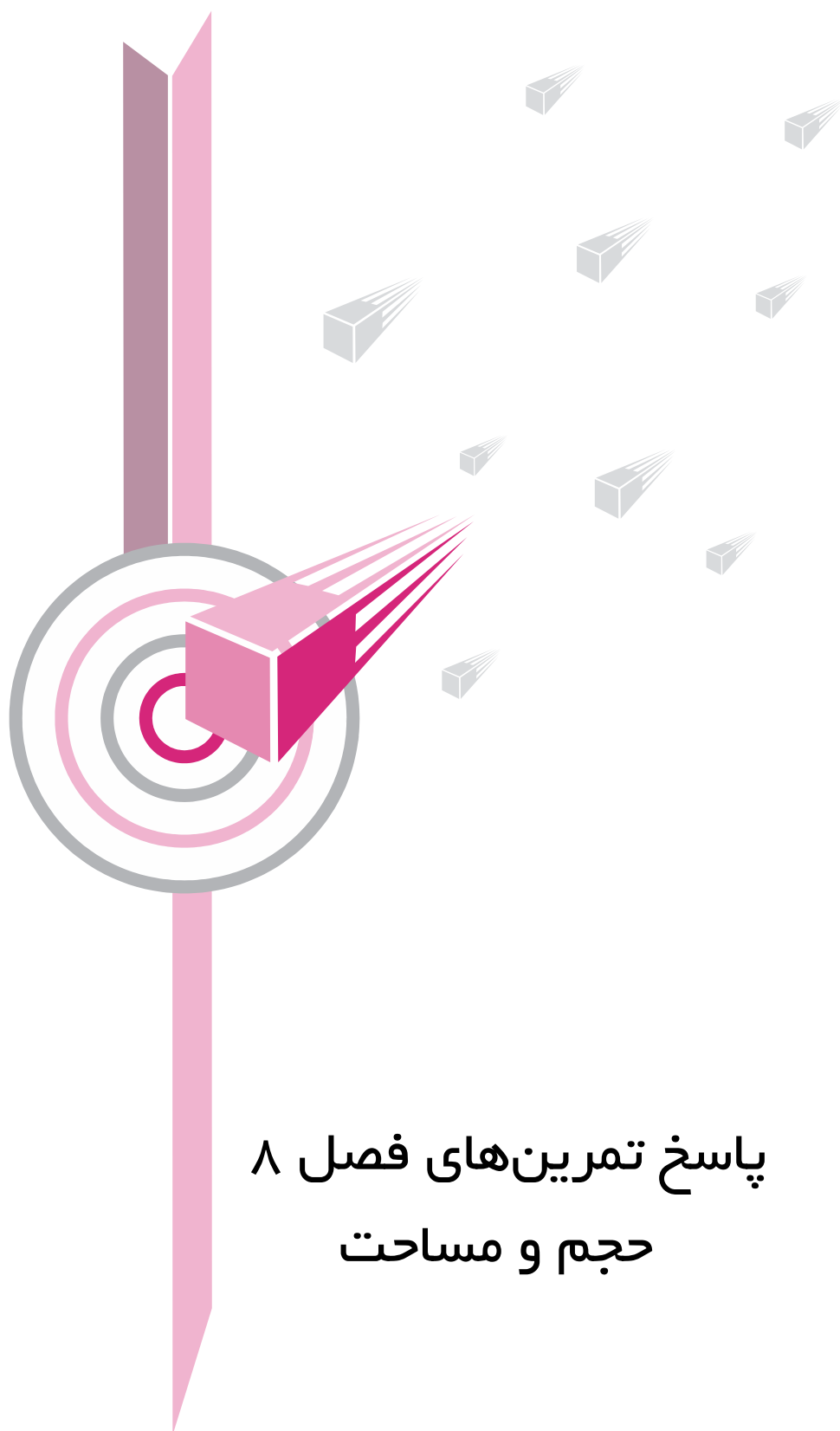
۵۰. گزینه «۲» روش اول:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 2x - 7 \quad | \quad x + 2 \\ -2x^3 - 4x^2 \\ \hline x^2 - 2x - 7 \\ -x^2 - 2x \\ \hline -4x - 7 \\ +4x + 8 \\ \hline 1 \end{array}$$

باید مقدار -1 را اضافه کنیم $\rightarrow 1$ روش دوم: باقی مانده عبارت بر $x + 2$ را به دست می آوریم:

$$x = -2 \rightarrow 2x^3 + 5x^2 - 2x - 7 = -16 + 20 + 4 - 7 = 1$$

باید عددی اضافه کنیم که باقی مانده صفر شود، یعنی -1 .



پاسخ تمرین‌های فصل ۸
حجم و مساحت



فصل ۸: حجم و مساحت

درس اول: حجم و مساحت کره

$$\text{الف) } \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{256}{3}\pi \quad \text{ب) } 4\pi r^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi \quad . ۱$$

$$\text{الف) } \frac{\frac{4}{3}\pi 20^3}{\frac{4}{3}\pi 10^3} = \frac{20^3}{10^3} = \left(\frac{20}{10}\right)^3 = 2^3 = 8 \quad \text{ب) } \frac{4\pi 20^2}{4\pi 10^2} = \frac{20^2}{10^2} = \left(\frac{20}{10}\right)^2 = 2^2 = 4 \quad . ۲$$

$$\text{الف) } \frac{\frac{4}{3}\pi (VR)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{V^3 \times r^3}{r^3} = V^3 = 343 \quad \text{ب) } \frac{4\pi (VR)^2}{4\pi r^2} = \frac{V^2 \times r^2}{r^2} = V^2 = 49 \quad . ۳$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{r^3}{3} = r^2 \Rightarrow \frac{r}{3} = 1 \Rightarrow r = 3 \quad . ۴$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \quad . ۵$$

$$4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \quad . ۶$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi \quad . ۷ \text{ حجم حاصل کره‌ای به شعاع ۶ است:}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi 6^3}{2} = 144\pi \quad . ۸ \text{ حجم حاصل نیم کره‌ای به شعاع ۶ است:}$$

$$\text{حجم} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{\pi 27}{2} = \frac{9}{2}\pi \quad . ۹ \text{ شعاع این کره برابر } \frac{3}{2} \text{ است.}$$

$$\text{مساحت} = 4\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$$

$$. ۱۰ \text{ شعاع استوانه برابر شعاع کره و ارتفاع استوانه دو برابر شعاع کره است.} \quad \text{حجم استوانه} = r^2 \pi h = 4^2 \pi 8 = 128\pi$$



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r = 6$$

. ۱۱

$$\text{مساحت} = 4\pi r^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi 6^3}{2} = 144\pi$$

. ۱۲ ابتدا حجم آب را حساب می‌کنیم:

$$12^2\pi h = 144\pi \Rightarrow 144\pi h = 144\pi \Rightarrow h = 1$$

سپس حساب می‌کنیم که ارتفاع استوانه‌ای به شعاع ۱۲ و حجم 144π چقدر است:

$$\text{حجم کره اولیه} = \frac{4}{3}\pi 25^3 = \frac{4}{3}\pi(25)^3 = \frac{217}{3}\pi$$

. ۱۳

$$\text{حجم هر کره کوچک} = \frac{\frac{217}{3}\pi}{64} = \frac{\frac{217}{3}\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{211}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{211}{3}\pi \Rightarrow r^3 = 29 \Rightarrow r = 2^3 = 8$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(100r)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{100^3 r^3}{r^3} = 10^6$$

. ۱۴

$$\frac{4\pi(\frac{5}{3}r)^2}{4\pi r^2} = \frac{(\frac{5}{3})^2 r^2}{r^2} = \frac{25}{9}$$

. ۱۵

درس دوم: حجم هرم و مخروط

$$\frac{7 \times 6}{3} = 14$$

. ۱۶

$$\frac{9 \times h}{3} = 18 \Rightarrow h = 6$$

. ۱۷

$$\frac{x^2 \times 3}{3} = 16 \Rightarrow x = 4$$

. ۱۸

الف) $\frac{4 \times 4 \times 6}{3} = 32$

. ۱۹

ب) $\frac{8 \times 3 \times 2}{3} = 16$

ج) $\frac{11 \times 3}{3} = 11$

$$\frac{12 \times h}{3} = 12 \Rightarrow h = 3$$

$$\frac{3^2 \pi \times v}{3} = 21\pi$$

$$\frac{4^2 \pi \times h}{3} = 12\pi \Rightarrow \frac{4\pi h}{3} = 3\pi \Rightarrow h = \frac{9}{4}$$

$$\frac{r^2 \pi \times 5}{3} = 15\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$\frac{x^2 \pi \times x}{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2} = \frac{r^2 \pi \times h}{3} \Rightarrow 2\pi \times 27 = 4\pi h \Rightarrow h = \frac{27}{2}$$

$$\frac{\frac{4}{3} \pi \times 1^3}{2} = \frac{r^2 \pi \times 18}{3} \Rightarrow 2\pi = 18r^2 \pi \Rightarrow r^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{3} S \times \frac{2}{4} h}{\frac{Sh}{3}} = \frac{2}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{8}$$

$$\text{حجم مخروط} + \text{حجم استوانه} = \text{حجم مداد} = 2^2 \pi \times 7 + \frac{2^2 \pi \times 3}{3} = 28\pi + 4\pi = 32\pi$$

$$\frac{r^2 \pi \times \frac{1}{2} h}{r^2 \pi \times h} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{r^2 \pi \times 9r}{3} = 24\pi \Rightarrow r^3 \pi = 8\pi \Rightarrow r = 2$$

$$\frac{(r')^2 \pi \times h}{3} = \frac{r^2 \pi \times h'}{3} \Rightarrow \frac{4r'^2 \pi h}{3} = \frac{16r^2 \pi h'}{3} \Rightarrow \frac{h}{h'} = 2$$

$$\frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{(r')^2 \pi \times \frac{r}{3}} = \frac{4\pi r^3}{4r^2 \pi \times \frac{r}{3}} = 3$$

۲۰.

شهاب

(الف) ۲۱.

(ب)

(ج)

۲۲.

(الف) ۲۳.

(ب)

۲۴.

۲۵.

۲۶.

۲۷.

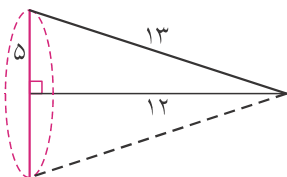
(الف) ۲۸.

(ب)

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\frac{r^2 \pi \times r}{3}$$

۲۹. ارتفاع مخروط با شعاع نیم کره برابر است:



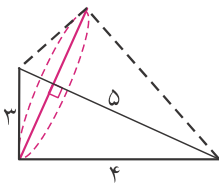
۳۰. الف) مثلثی با این ابعاد قائم الزاویه است. حجم حاصل از این دوران مخروطی به ارتفاع ۱۲ و شعاع قاعده‌ی ۵ است.

$$\frac{5^2 \pi \times 12}{3} = 100\pi$$

ب) مثلثی با این ابعاد قائم الزاویه است. حجم حاصل از دو مخروط تشکیل شده که مجموع ارتفاع‌های آن‌ها برابر ۵ است و شعاع قاعده آن‌ها برابر است با:

$$3 \times 4 = 5 \times r \Rightarrow r = \frac{12}{5}$$

$$\frac{(\frac{12}{5})^2 \pi \times h}{3} + \frac{(\frac{12}{5})^2 \pi \times h'}{3} = \frac{48}{25} \pi (h + h') = \frac{48}{25} \pi \times 5 = \frac{48}{5} \pi$$



۳۱. قسمت برش خورده، هرمی با قاعده مثلث قائم الزاویه است که اضلاع قائمه قاعده آن ۶-۴-۱۰ و ۵-۳-۸ و ارتفاع آن ۸-۴-۱۲ است،

پس حجم آن $\frac{5 \times 6 \times 8}{3} = 80$ است. از طرفی حجم کل پنبه برابر ۹۶۰ است، بنابراین حجم پنبه باقی مانده برابر است با:

$$960 - 80 = 880$$

۳۲. حجم حاصل، از دو مخروط تشکیل شده که شعاع قاعده هر دو آن‌ها برابر با ۸ و مجموع ارتفاع‌های آن‌ها ۱۲ است.

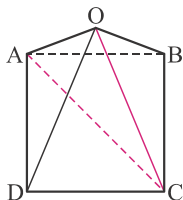
$$\frac{8^2 \pi h}{3} + \frac{8^2 \pi h'}{3} = \frac{64 \pi}{3} (h + h') = \frac{64 \pi}{3} \times 12 = 256 \pi$$

۳۳. حجم حاصل، تفاضل حجم دو مخروط است که شعاع قاعده آن‌ها ۸ و تفاضل ارتفاع‌های آن‌ها ۱۲ است.

$$\frac{8^2 \pi h}{3} - \frac{8^2 \pi h'}{3} = \frac{64 \pi}{3} (h - h') = \frac{64 \pi}{3} \times 12 = 256 \pi$$

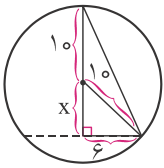
درس سوم: سطح و حجم

۳۴. طول ضلع قاعده را برابر a در نظر می‌گیریم. چون وجه‌ها متساوی‌الاضلاع هستند، پس طول یال‌های دیگر نیز برابر a است.



$$\widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = \sqrt{2}a \\ AO = a \\ OC = a \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 = AO^2 + OC^2 \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ$$



$$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{6^2 \pi \times 18}{3} = 216\pi$$

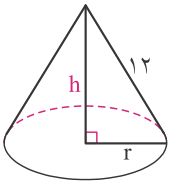
۳۵

۳۶. محیط قاعده مخروط به دست آمده برابر طول کمان AB است:

$$2r\pi = \frac{2 \times 12 \times \pi \times 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 2r\pi = 4\pi \Rightarrow r = 2$$

$$h^2 + 2^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 140 \Rightarrow h = \sqrt{140}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{2^2 \pi \times \sqrt{140}}{3} = \frac{8\sqrt{35}\pi}{3}$$

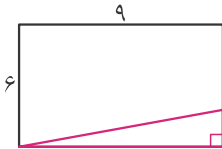


۳۷. با توجه به این که $3^2 + 4^2 = 5^2$ ، می توان فهمید مثلث اولیه قائم الزاویه است. حجم جسم حاصل $\frac{1}{4} \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ حجم مخروطی به شعاع

$$\frac{1}{4} \times \frac{3^2 \pi \times 4}{3} = 3\pi$$

قاعده ۳ و ارتفاع ۴ است:

۳۸. می توانیم مثلث ABH را جدا کنیم و به پایین متوازی الاضلاع وصل کنیم تا یک مستطیل به وجود آید. از دوران این مستطیل یک استوانه به دست می آید.



$$\text{حجم استوانه} = 9^2 \pi \times 6 = 486\pi$$

۳۹. حجم حاصل، از استوانه‌ای به شعاع ۷ و ارتفاع ۷ و مخروطی به شعاع ۷ و ارتفاع ۳ تشکیل شده است:

$$7^2 \pi \times 7 + \frac{7^2 \pi \times 3}{3} = 98\pi + 49\pi = 147\pi$$

۴۰. حجم حاصل، از استوانه‌ای به شعاع ۷ و ارتفاع ۷ و دو مخروط به شعاع ۷ و مجموع ارتفاع‌های ۹ تشکیل شده است:

$$7^2 \pi \times 7 + \frac{7^2 \pi \times h}{3} + \frac{7^2 \pi \times h'}{3} = 7^2 \pi \times 7 + \frac{7^2 \pi}{3} (h + h') =$$

$$7^2 \pi \times 7 + \frac{7^2 \pi}{3} \times 9 = 98\pi + 147\pi = 245\pi$$

۴۱. این حجم مخروط ناقصی است به طوری که مخروطی به شعاع ۶ و ارتفاع ۵ از مخروطی به شعاع ۱۲ و ارتفاع ۱۰ برداشته شده است.

$$\frac{12^2 \pi \times 10}{3} - \frac{6^2 \pi \times 5}{3} = \frac{1440\pi - 180\pi}{3} = \frac{1260\pi}{3} = 420\pi$$

$$\sqrt{3}x = 2 \times 6 \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

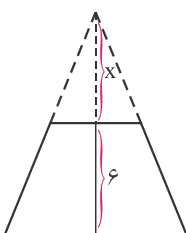
۴۲. قطر مکعب برابر قطر کره است. اگر طول یال مکعب x باشد داریم:

۴۳. چون شعاع قاعده بالایی $\frac{1}{3}$ شعاع قاعده پایینی است، پس مساحت آن $\frac{1}{9}$ مساحت

قاعده پایینی، یعنی ۱ است. از طرفی داریم:

$$\frac{x+6}{x} = 3 \Rightarrow x+6 = 3x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{9 \times 9}{3} - \frac{1 \times 3}{3} = 27 - 1 = 26$$



۴۴. حجم پوست هندوانه، اختلاف حجم دو نیم کره به شعاع‌های ۱۵ و ۱۴ سانتی‌متر است:

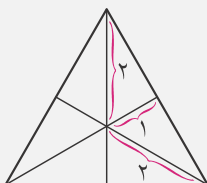
$$\frac{4}{3}\pi 15^3 - \frac{4}{3}\pi 14^3 = \frac{4}{3}\pi(15^3 - 14^3) = \frac{4}{3}\pi(3375 - 2744) = \frac{4}{3}\pi \times 631 = \frac{2524}{3}\pi$$

۴۵



محل تلاقی ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) را به

نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



فرض کنید طول هر یال این هرم x باشد. داریم:

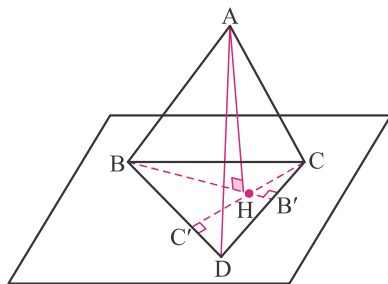
$$BB'^2 + B'C^2 = BC^2 \Rightarrow BB'^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

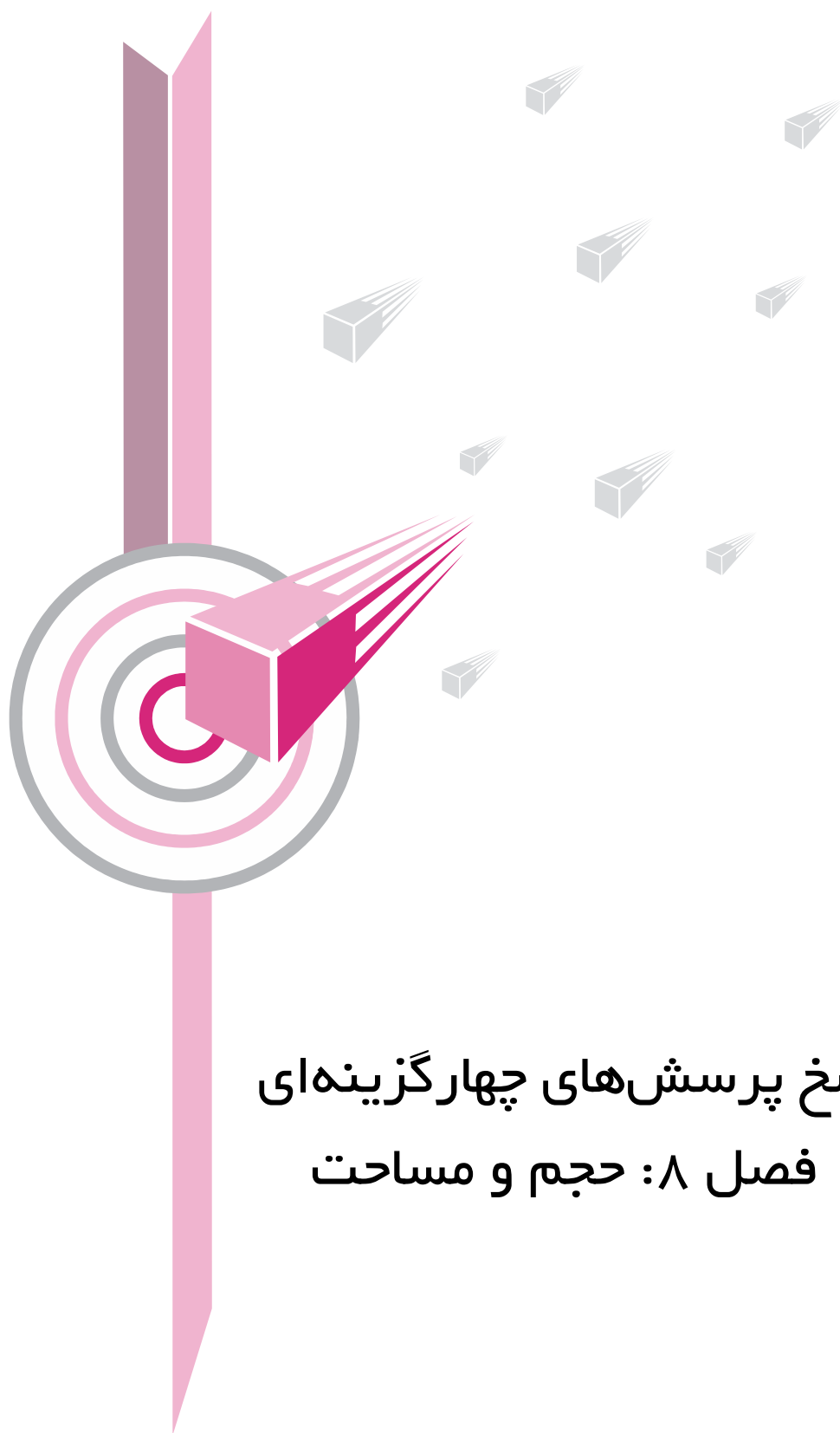
$$BH = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}x^2 + 4$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{حجم هرم} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \times x \times x = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{2} = 3\sqrt{3}$$





پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
فصل ۸: حجم و مساحت



فصل ۸: حجم و مساحت

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi \quad \text{و} \quad 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 6^2 = 144\pi \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi \Rightarrow \frac{4}{3}r^3 = 288 \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r = 6 \Rightarrow \text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 144\pi \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع کره اول} = \frac{R}{2} \\ \text{شعاع کره دوم} = R \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{حجم اولی}}{\text{حجم دومی}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{8}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{3}r^3 = r^2 \xrightarrow{r \neq 0} \frac{1}{3}r = 1 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow 2r = 6 \quad \text{گزینه «۲»}$$

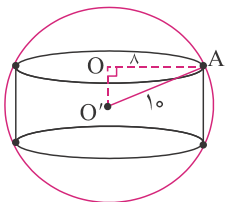
$$S_p = S_1 + S_2 \Rightarrow S_p = 4\pi \times 6^2 + 4\pi \times 8^2 = 400\pi \Rightarrow 400\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r = 10 \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\frac{S^6}{V^4} = \frac{(4\pi r^2)^6}{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^4} = \frac{4^6 \times \pi^6 \times r^{12}}{\frac{4^4}{3^4} \times \pi^4 \times r^{12}} = \pi^2 \times 4^2 \times 3^4 = 1296\pi^2 \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$\text{مساحت کره} = 4S = 4\pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 = S \Rightarrow r^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$R = \text{شعاع قطره آب} \quad \text{و} \quad r = \text{شعاع کره بزرگ} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$V_{\text{کره بزرگ}} = 64 \times V_{\text{قطره}} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 64 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^3 = 64r^3 \Rightarrow \frac{R^3}{r^3} = 64 \Rightarrow \frac{R}{r} = 4$$



$$\text{گزینه «۴» ارتفاع استوانه را } h \text{ در نظر می‌گیریم.}$$

$$\Delta AOO': \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow \frac{h}{2} = 6 \Rightarrow h = 12$$

$$V_{\text{استوانه}} = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \pi \times 8^2 \times 12 = 768\pi$$

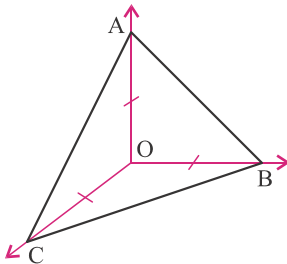
$$\text{گزینه «۲» با بریدن هر گوشه، سه ضلع جدید به وجود می‌آید. با توجه به این که هرم در ابتدا ۶ ضلع داشت، پس در مجموع } 12 + 6 = 18 \text{ ضلع دارد.}$$



۱۱. گزینه «۳»

$$a \quad \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع } a = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = \text{مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع } a$$

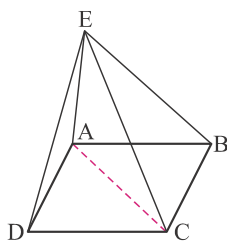
$$4 \quad \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times 12 \times 24\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \Rightarrow \text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } 4 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 24\sqrt{3}$$



۱۲. گزینه «۱» حجم هرم را از دو روش محاسبه می‌کنیم.

$$OA = OB = OC = 1, \quad AB = AC = BC = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حجم هرم} &= \frac{1}{3} h \times S_{ABC} = \frac{1}{3} OA \times S_{OBC} \\ S_{OBC} &= \frac{1}{2}, \quad S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} h \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



۱۳. گزینه «۳» اندازه هر یک از یال‌ها را a در نظر می‌گیریم.

$$AC = \sqrt{2}a \Rightarrow AC^2 = 2a^2 \quad \text{عکس فیثاغورس} \rightarrow \widehat{AEC} = 90^\circ$$

$$AE^2 + EC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = AC^2$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 = x, \quad r_1 = R, \quad V_1 &= \frac{1}{3} h_1 \pi r_1^2 \\ h_2 = \frac{x}{2}, \quad r_2 = 2R, \quad V_2 &= \frac{1}{3} h_2 \pi r_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} x \pi R^2}{\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2}\right) \pi (2R)^2} = \frac{1}{2}$$

۱۴. گزینه «۱»

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times (2r) = 2\pi r^3 \Rightarrow \frac{4}{3} r^3 = 2\pi \Rightarrow r^3 = 2\pi \times \frac{3}{4} \Rightarrow r^3 = 2\pi \Rightarrow r = 3$$

۱۵. گزینه «۲»

$$\frac{h_1}{h_2} = x \Rightarrow h_1 = x h_2, \quad V_1 = 2V_2, \quad R_1 = \frac{1}{3} R_2 \Rightarrow \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} R_2\right)^2 \times x h_2 = 2 \left(\frac{1}{3} \pi R_2^2 \times h_2\right)$$

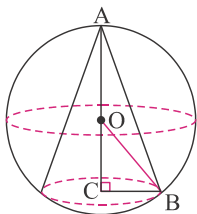
۱۶. گزینه «۴»

$$\Rightarrow \frac{1}{9} R_2^2 \times (x h_2) = 2 h_2 \Rightarrow \frac{1}{9} x h_2 = 2 h_2 \Rightarrow x = 27$$

$$8 \quad \text{حجم استوانه به شعاع قاعده } 8 = \pi \times 8^2 \times h$$

۱۷. گزینه «۴»

$$\text{حجم آب داخل مخروط} = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 12 = 576\pi \Rightarrow 576\pi = \pi \times 8^2 \times h \Rightarrow h = 9$$



$$\triangle OBC : OC^2 + CB^2 = OB^2, \quad OB = 10, \quad BC = 6$$

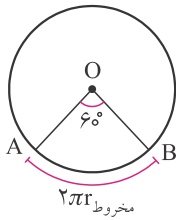
۱۸. گزینه «۱»

$$\Rightarrow 100 = 36 + OC^2 \Rightarrow OC = 8 \Rightarrow AC = 18$$

$$\Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi \times R^2 \times AC = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 18 = 216\pi$$

$$\frac{V_{\text{قیف}}}{V_{\text{لیوان}}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{h}{2} \times \pi R^2}{h \times \pi \times R^2} = \frac{1}{6}$$

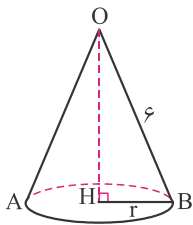
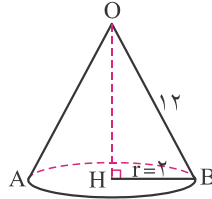
گزینه «۴» ارتفاع لیوان را h در نظر می‌گیریم. ارتفاع مخروط $\frac{h}{2}$ است.



$$\frac{\widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2\pi r_{\text{مخروط}}}{2\pi r_{\text{دایره}}} = \frac{1}{6} = \frac{r_{\text{مخروط}}}{12} \Rightarrow r_{\text{مخروط}} = 2 \quad \text{گزینه «۴» ۱۹}$$

$$\Delta OHB: OH^2 + HB^2 = OB^2 \Rightarrow OH^2 + 4 = 144 \Rightarrow OH = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times 2^2 \times \pi \times 2\sqrt{35} = \frac{8\sqrt{35}}{3} \pi$$



$$\frac{2\pi r}{12\pi} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r = \frac{3}{4}$$

۲۰. گزینه «۲» شعاع قاعده مخروط را r در نظر می‌گیریم.

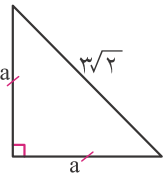
$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 6^2 = OH^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{567}}{4} = \frac{3\sqrt{63}}{4} \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{9\pi\sqrt{63}}{64}$$

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times 20^2 \times 15 = 3000\pi$$

۲۱. گزینه «۳» یک نیم‌استوانه به شعاع قاعده ۲۰ و ارتفاع ۱۵ به وجود می‌آید.

۲۲. گزینه «۲» حجم حاصل از دو مخروط هم‌قاعده به شعاع قاعده $2\sqrt{3}$ و ارتفاع ۲ تشکیل شده است.

$$16\pi = \text{حجم شکل} \Rightarrow \text{حجم شکل} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times 12 \times 2 = 16\pi$$



$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

۲۳. گزینه «۱»

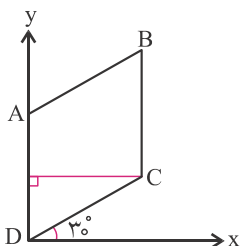
$$\text{یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳} \rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 3 = 9\pi$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

۲۴. گزینه «۳» حجم حاصل از دوران مثلث ABC، یک مخروط به ارتفاع ۸ و شعاع قاعده ۴ است.

$$2 \times \frac{1}{3} \pi (4)^2 \times 8 = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = 4$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} - \text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3} \times 6 \times 4^2 \times \pi - \frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times \pi = 16\pi \quad \text{گزینه «۲» ۲۵}$$



۲۶. گزینه «۲» شکل ایجاد شده، یک استوانه است که از یک طرف آن، یک مخروط کم شده

و به طرف دیگر آن اضافه شده است. ارتفاع این استوانه برابر ۲ و شعاع قاعده آن برابر با

$$\text{ارتفاع لوزی است. ارتفاع لوزی برابر است با } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi \times 2 \times (\sqrt{3})^2 = 6\pi$$

۲۷. گزینه «۲» شکل حاصل از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است.

$$V_{\text{شکل}} = V_{\text{مخروط}} + V_{\text{استوانه}} = \pi \times 4^2 \times 8 + \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 \xrightarrow{\pi=3} V_{\text{شکل}} = 512$$

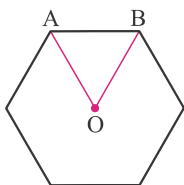
۲۸. گزینه «۴» حجم حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع، یک نیم کره است.

۲۹. گزینه «۳» اگر محیط قاعده دو برابر شود، در واقع شعاع قاعده دو برابر شده است.

$$V_1 = \pi R^2 h, V_2 = \pi (2R)^2 (2h) \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{8\pi R^2 h}{\pi R^2 h} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 8$$

۳۰. گزینه «۱» مساحت جانبی یک استوانه برابر است با محیط قاعده ضرب در ارتفاع استوانه.

$$S_1 = (2\pi R)h, S_2 = (2\pi \times 5R) \times (1.5h) \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{15\pi R h}{2\pi R h} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = 7.5$$



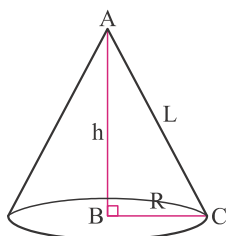
$$S_{ABO} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 400 = 100\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times 100\sqrt{3} = 600\sqrt{3}$$

۳۱. گزینه «۲»
 ارتفاع = ارتفاع شش ضلعی \times حجم منشور = $600\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 3600$

۳۲. گزینه «۲»

مولد مخروط \times (شعاع قاعده) $= \pi \times$ مساحت جانبی مخروط

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{جانبی مخروط}} &= \pi RL \\ \pi R^2 &= 27\pi \Rightarrow R^2 = 27 \Rightarrow R = 3\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = 24\sqrt{3}\pi$$



$$\pi RL = 27\pi \Rightarrow L = 3R$$

۳۳. گزینه «۱»

$$L^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow (3R)^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = 8R^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}R \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{h}{L} = \frac{2\sqrt{2}R}{3R} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{جانبی مخروط}} &= \pi RL \\ \pi R^2 &= 64\pi \Rightarrow R^2 = 64 \Rightarrow R = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = 216\pi$$

۳۴. گزینه «۴»

۳۵. گزینه «۴» اگر شعاع قاعده مخروط بزرگ r باشد، شعاع قاعده مخروط کوچک $\frac{r}{4}$ است.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{r^2}{4} \times \frac{h}{4} \times \pi}{\frac{1}{3} \times r^2 \times h \times \pi} = \frac{1}{8}$$



$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times \frac{5}{2} = \frac{10}{3} \pi$$

۳۶. گزینه «۳»

$$\text{زمانی که طول می کشد تا مخزن بالا خالی شود} = \frac{V}{0.01} = \frac{\frac{10\pi}{3}}{\frac{1}{100}} = \frac{1000}{3} \pi$$

۳۷. گزینه «۳» برای آبکاری مجسمه، سطح آن مهم است.

$$\frac{\text{سطح مجسمه ۲}}{\text{سطح مجسمه ۱}} = (\text{نسبت تشابه})^2 = (2)^2 = 4 \Rightarrow \text{هزینه آبکاری مجسمه ۲} = 4 \times 1925 = 7700$$

$$\text{فاصله نقطه تا مرکز دایره} = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} \quad \text{۳۸. گزینه «۱»}$$

$$\text{شعاع دایره} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \text{حجم شکل} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{500}{3} \pi$$

۳۹. گزینه «۱» روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مساحت مثلث SBC} = 6 \Rightarrow \text{SB} \times \text{SC} = 12 \\ \text{مساحت مثلث SAB} = 3 \Rightarrow \text{SA} \times \text{SB} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SB}^2 \times \frac{\text{SA} \times \text{SC}}{8} = 12 \Rightarrow \text{SB}^2 = 9 \Rightarrow \text{SB} = 3 \Rightarrow \text{SC} = 4, \text{SA} = 2$$

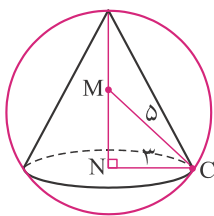
$$V_{\text{SABC}} = \frac{1}{3} \times \text{SA} \times \text{ارتفاع} \times \text{مساحت مثلث SBC} = \frac{1}{3} \times 2 \times 6 = 4$$

روش دوم: حجم هرم برابر است با $\frac{1}{6}$ حجم یک مکعب مستطیل با ابعاد ۲، ۳ و ۴.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times 4 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} h = 2r \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = r^2 \pi \times 2r \times \frac{1}{3} = \frac{2\pi r^3}{3} \\ \text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow r^3 = R^3 \Rightarrow r = R \quad \text{۴۰. گزینه «۴»}$$

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم کره}} \Rightarrow V_{\text{رنگی}} = 6^2 \times \pi \times 6 - \frac{2}{3} \times 6^3 \times \pi = 216\pi - \frac{2}{3} \times 216\pi \Rightarrow V_{\text{رنگی}} = 72\pi \quad \text{۴۱. گزینه «۳»}$$



۴۲. گزینه «۴» مرکز کره را M و مرکز قاعده مخروط را N در نظر می گیریم.

$$MN^2 + NC^2 = MC^2 \Rightarrow MN^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow MN = 4$$

$$\text{ارتفاع مخروط} = MN + NC = 4 + 3 = 7 \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times 3^2 \times \pi \times 7 = 21\pi$$

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم کره}} \Rightarrow V_{\text{رنگی}} = 4 \times \pi \times 4^2 - \frac{2}{3} \pi \times 4^3 \Rightarrow V_{\text{رنگی}} = \frac{64\pi}{3} \quad \text{۴۳. گزینه «۳»}$$

۴۴. گزینه «۲» شعاع هر توپ را r در نظر می گیریم. با توجه به قطر دهانه، شعاع برابر ۳ می شود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ارتفاع استوانه} = 10 \times r = 30 \\ \text{شعاع قاعده استوانه} = r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = \pi \times 3^2 \times 30 = 270\pi$$

$$\text{حجم توپ‌ها} = 5 \times \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 180\pi$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{حجم استوانه} = \text{فضای بین توپ‌ها} - \text{حجم توپ‌ها} &= 270\pi - 180\pi = 90\pi \\ \text{حجم هر توپ} &= \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 36\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{فضای بین توپ‌ها}}{\text{حجم هر توپ}} = \frac{90\pi}{36\pi} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{3} R^2 \pi h \Rightarrow 4R = h \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$\text{مساحت روی مخزن} = \pi r^2 \quad \text{گزینه «۳» مساحت روی مخزن دو برابر مساحت کف است، زیرا:}$$

$$\text{مساحت روی مخزن} = \frac{4}{3} \pi r^2 = 2\pi r^2$$

بنابراین برای رنگ کردن روی مخزن به $5 \times 2 = 10$ کیلوگرم رنگ نیاز داریم.

$$\left. \begin{aligned} V_{CAOB} &= \frac{OC \times S_{AOB}}{3} \\ OC = 4, S_{AOB} &= \frac{4 \times 3}{2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{CAOB} = \frac{4 \times 6}{3} = 8 \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\frac{r}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow r = 3 \quad \text{گزینه «۲» شعاع دایره سطح آب، قبل از انداختن سنگ را r می‌نامیم.}$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{آب و سنگ}} &= \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 \\ V_{\text{آب}} &= \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\text{سنگ}} = \frac{128\pi}{3} - 18\pi = \frac{74\pi}{3}$$

$$\text{گزینه «۲» شعاع قاعده مخروط، ارتفاع مخروط و شعاع کره را به ترتیب R، h و r می‌نامیم:}$$

$$\left. \begin{aligned} R = 2r, h = \frac{r}{3} \Rightarrow V_{\text{مخروط}} &= \frac{1}{3} \pi (2r)^2 \times \left(\frac{r}{3}\right) = \frac{4\pi}{9} r^3 \\ V_{\text{کره}} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = 3$$

معرفی کتاب‌های مبتکران

فرااننده گرامی

مبتکران علاوه بر این کتاب، کتاب‌های مفید دیگری را هم برای گروه سنی شما منتشر کرده است که می‌توانید با مراجعه به سایت www.mobtakeran.com با آن‌ها آشنا شوید. برخی از این کتاب‌ها به شرح زیر می‌باشد.

کتاب‌های نهم (پایه سوم دوره اول متوسطه)

| نام کتاب | مؤلف / مترجم |
|---|-------------------------------------|
| ریاضی ۹م شهاب | بیات - خمایی ابدی - خراسانی |
| پاسخ‌نامه ریاضی ۹م شهاب | بیات - خمایی ابدی - خراسانی |
| ریاضی نهم (قابل استفاده‌ی دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان) | انصاری - قادر |
| ریاضیات جامع نهم | حسین انصاری |
| پاسخ ریاضیات جامع نهم | حسین انصاری |
| آموزش و آزمون ریاضی نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | عزیززاده - محمد/مریم برجی اصفهانی |
| پاسخ آموزش و آزمون ریاضی نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | عزیززاده - محمد/مریم برجی اصفهانی |
| مسابقات ریاضی نهم (مرشد) | وحید اسدی کیا |
| پاسخ مسابقات ریاضی نهم (مرشد) | وحید اسدی کیا |
| کتاب کار ریاضی نهم یوز | محسن ساعدی |
| بانک سؤالات مسابقات بین‌المللی ریاضی IMC دوره اول متوسطه ۹/۸/۷ | بیات - خجسته - خمایی ابدی - خراسانی |
| آموزش و آزمون علوم نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | حمید اسدی کیا |
| مسابقات علوم نهم (مرشد) | مجید علی محمدی |
| علوم پایه سوم (قابل استفاده‌ی دانش‌آموزان تیزهوش و دبیران) | مصطفی قنبری |
| کتاب کار علوم نهم یوز | علی محمدی - یحیی‌زاده |
| فارسی نهم (قابل استفاده مراکز استعدادهای درخشان و مدارس برتر) | حمید طالب‌تبار |
| آموزش و آزمون فارسی نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | زهرا سلطانی‌مطلق |
| آموزش و آزمون مطالعات اجتماعی نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | حامد یاری |
| آموزش و آزمون زبان انگلیسی برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) و cd | علیرضا سعیدی |
| زبان انگلیسی نهم به همراه cd و dvd | شهاب اناری |
| آموزش و آزمون عربی نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش (رشادت) | مهدی وحدانی |
| کتاب کار و تمرین عربی نهم برای دانش‌آموزان عادی و تیزهوش | نیره شکرچیان |
| فیزیک دوره اول متوسطه ۷م / ۸م / ۹م | غلامعلی محمودزاده |
| مسابقات عربی و قرآن و پیام‌های آسمان نهم مرشد | بنفشه فاضلی |
| مسابقات ریاضی دوره اول متوسطه ۷م / ۸م / ۹م | بیات - خمایی ابدی - خراسانی |
| مسابقات فارسی نهم (مرشد) | زهرا سلطانی‌مطلق |

نظرسنجی درباره‌ی کتاب‌های آموزشی مبتکران

دانش‌آموز گرامی / فریدار ممدته کتاب

لطفاً با ارائه‌ی نظرات خود درباره‌ی این کتاب، انتشارات مبتکران و مؤلفان کتاب را در ارتقای کیفی محصولات خود یاری فرمایید. هر ماه به تعدادی از عزیزانی که درباره‌ی کتاب‌های مبتکران اعلام نظر می‌کنند، به عنوان قدردانی به قید قرعه جوایزی (ربع سکه) تقدیم می‌شود. شما می‌توانید برای ارائه‌ی نقطه نظرات خود درباره‌ی کتاب‌های مبتکران به یکی از روش‌های زیر عمل کنید:

۱- نظرسنجی با SMS

پاسخ‌های خود را به ۳ پرسش اساسی زیر درباره‌ی این کتاب به شماره ۱۰۰۰۶۱۰۹۴۰۰۰۰۰ پیامک کنید.

الف) کتاب را از نظر کیفیت علمی و توانایی پاسخگویی به نیازهایتان چگونه ارزیابی می‌کنید؟

(۱) خیلی خوب (۲) خوب (۳) متوسط (۴) ضعیف

ب) کتاب را از نظر کیفیت حروفچینی، زیبایی ظاهری و کم بودن غلط‌های تایپی در آن چگونه ارزیابی می‌کنید؟

(۱) خیلی خوب (۲) خوب (۳) متوسط (۴) ضعیف

ج) کتاب را از نظر قیمت آن، چگونه ارزیابی می‌کنید؟

(۱) گران (۲) مناسب (۳) ارزان

پس از انتخاب گزینه‌های مورد نظر خود، پاسخ را به صورت یک عدد ۷ رقمی به شماره ۱۰۰۰۶۱۰۹۴۰۰۰۰۰ پیامک کنید به ترتیبی که ۴ رقم سمت چپ آن عدد، کد کتاب باشد (که برای این کتاب ۲۵۱۹ است) و ۳ رقم سمت راست آن، جواب‌های شما به پرسش‌های مطرح شده. برای مثال اگر شما برای پرسش‌های «الف، ب و ج» به ترتیب گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را انتخاب کرده باشید باید عدد ۲۵۱۹۱۲۳ را پیامک کنید.

۲- نظرسنجی اینترنتی

لطفاً با مراجعه به سایت مبتکران www.mobtakeran.com و تکمیل فرم مربوط، نظر خود را درباره‌ی این کتاب اعلام فرمایید.

کد کتاب: ۲۵۱۹

نام کتاب: پاسخ‌نامه ریاضی ۹ ام شهاب

برای آگاهی از اسامی برندگان به سایت مبتکران مراجعه کنید.

با تشکر