

فهرست مطالب



سیر تا پياز

رياضى نهم (دوره اول متوسطه)

۷

آموزش

۲۰۹

سؤالات تشریحی

۳۲۲

پاسخنامه سؤالات تشریحی

۳۹۳

سؤالات تستی

۴۸۷

پاسخنامه سؤالات تستی



www.gajmarket.com

مجموعه کتاب‌های

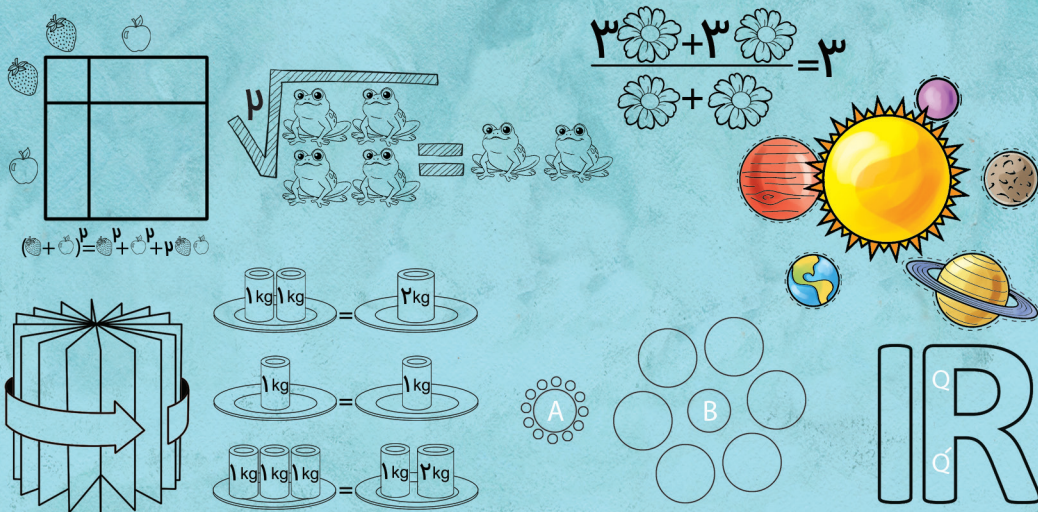
سیرتاپیاز

آموزش

- ۸ فصل اول: مجموعه‌ها
- ۲۶ فصل دوم: عددهای حقیقی
- ۴۷ فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه
- ۷۲ فصل چهارم: توان و ریشه
- ۹۷ فصل پنجم: عبارتهای جبری
- ۱۲۶ فصل ششم: خط و معادله‌های خطی
- ۱۵۷ فصل هفتم: عبارتهای گویا
- ۱۸۱ فصل هشتم: حجم و مساحت

فصل اول

مجموعه‌ها



درس اول: معرفی مجموعه

♦ در ریاضی با آن‌که برخی مفاهیم را درک می‌کنیم و می‌شناسیم، اما **نمی‌توانیم** آن‌ها را به‌طور دقیق تعریف کنیم، به عبارت دیگر آن مفاهیم **تعریف‌ناپذیر** هستند. مثل نقطه و خط.

♦ یکی دیگر از این مفاهیم‌ها، **مجموعه** است. مفهوم مجموعه را اگرچه **نمی‌توانیم** تعریف کنیم، اما می‌توانیم در مورد آن توضیح بدهیم. در ریاضی، مجموعه برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء **مشخص** (دقیقاً مشخص باشد چه اشیائی در مجموعه قرار می‌گیرد) و **متمایز** (اعداد و اشیاء درون مجموعه، نباید تکراری باشند) استفاده می‌شود. مثلاً «شمارنده‌های عدد ۱۲» یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ یک مجموعه را تشکیل می‌دهند. **عبارت‌های مشخص‌کننده مجموعه**

♦ یک عبارت، زمانی یک مجموعه را مشخص می‌کند که کاملاً گویا و شفاف باشد. به این معنی که دقیقاً مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیزهایی در آن مجموعه قرار **ندارند**.

♦ در مثالی که در چند خط بالاتر گفته شد، عبارت «شمارنده‌های عدد ۱۲» کاملاً تعیین می‌کند که چه عددهایی در مجموعه قرار می‌گیرند و شما به راحتی می‌توانید بگویید عددی مثل ۶ در این مجموعه قرار دارد ولی عددی مثل ۸ در این مجموعه قرار **ندارد**. اما عبارتی مثل «مردان قدبلند»، یک عبارت دقیق برای مشخص کردن یک مجموعه **نیست**، زیرا ممکن است از نظر یک فرد، افرادی با قد ۱۹۰ سانتی‌متر به بالا قدبلند حساب شوند اما از نظر فردی دیگر، افرادی با قد بیش‌تر از ۱۸۵ سانتی‌متر، قدبلند به حساب آیند. می‌بینید که در این‌جا افرادی که در مجموعه قرار می‌گیرند، کاملاً مشخص **نیستند**، پس عبارت «مردان قدبلند» مشخص‌کننده یک مجموعه **نیست**.

مثال تعیین کنید که هر عبارت مشخص‌کننده یک مجموعه هست یا خیر؟

(الف) مجموعه خانه‌های گران‌قیمت یک شهر: نیست

(ب) مجموعه اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۰۰: هست

(ج) مجموعه اعداد بسیار کوچک: نیست

(د) مجموعه اعداد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰۰: هست

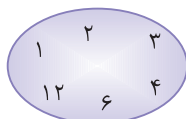
نمایش یک مجموعه

♦ یک مجموعه را می‌توان به سه روش نمایش داد:

(۱) **استفاده از یک منحنی یا خط شکسته بسته**: به این روش **نمودار ون** گفته می‌شود. به‌عنوان مثال مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۲ با استفاده از نمودار ون به‌صورت مقابل است.

(۲) **استفاده از یک جفت آکولاد {}**: به این روش، **نمایش تفصیلی** گفته می‌شود. به‌عنوان مثال نمایش مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۲ به‌صورت تفصیلی، به شکل مقابل است.

(۳) **استفاده از نمادهای ریاضی**: این مورد را کمی جلوتر خواهیم آموخت.



نام‌گذاری یک مجموعه

معمولاً برای نام‌گذاری مجموعه‌ها، از حروف انگلیسی بزرگ استفاده می‌کنیم. مثل A, B, C, D و ...

اعضای یک مجموعه

هر کدام از اعداد، اشیاء یا افرادی را که درون یک مجموعه قرار می‌گیرند **عضوی** از مجموعه می‌گوییم، مثلاً گیلان عضو مجموعه «استان‌های کشور ایران» است. برای نشان دادن عضو بودن از علامت \in و برای نشان دادن عضو نبودن، از علامت \notin استفاده می‌کنیم. برای مثال، اگر A، مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۰ باشد، ۲ و ۵ عضو آن هستند ولی ۱۲ و ۱۸ عضو آن **نیستند**.

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \Rightarrow 2 \in A, 5 \in A, 12 \notin A, 18 \notin A$$

مثال با توجه به مجموعه A، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$A = \{-2^3 - 1, \frac{-\sqrt{81}}{3}, (-2)^4\}$$

الف) $7 \in A$

ب) $-3 \in A$

ج) $16 \notin A$

د) $-9 \in A$

$$A = \{-2^3 - 1, \frac{-\sqrt{81}}{3}, (-2)^4\} = \{-9, -3, 16\}$$

پس قسمت‌های (الف) و (ج) اشتباه هستند، ولی قسمت (ب) و (د) صحیح است.

نکته

۱) در یک مجموعه، جابه‌جا کردن اعضا، مجموعه جدیدی ایجاد **نمی‌کند**. مثلاً مجموعه اعداد اول یک‌رقمی را می‌توان به صورت‌های زیر نشان داد: $\{2, 3, 5, 7\}$ یا $\{5, 7, 3, 2\}$ یا $\{7, 3, 2, 5\}$...
 ۲) در مجموعه، نوشتن عضو تکراری قابل قبول **نیست** و در صورت داشتن عضوهای تکراری، آن‌ها را حذف کرده و مجموعه را بازنویسی می‌کنیم. (عضوها باید متمایز باشند)
 $A = \{2, 3, 5, 3, 5, 7\} = A = \{2, 3, 5, 7\}$

عدد اصلی یک مجموعه

به تعداد عضوهای یک مجموعه، **عدد اصلی یک مجموعه** می‌گویند. (دقت کنید باز هم یادآوری می‌کنیم که ابتدا باید عضوهای تکراری را حذف کنیم.) عدد اصلی یک مجموعه مثل A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اعداد اول یک‌رقمی: $A = \{2, 3, 5, 7\} \xrightarrow{\text{عضو 4}} n(A) = 4$

$$A = \left\{ \frac{-\sqrt{144}}{3}, (-2)^3 + 7, (-3)^2 - 13, -\sqrt{1}, 3^0 \right\}$$

مثال عدد اصلی مجموعه مقابل را به دست آورید.

ابتدا ظاهر عضوهای A را درست می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{-\sqrt{144}}{3}, (-2)^3 + 7, (-3)^2 - 13, -\sqrt{1}, 3^0 \right\} \Rightarrow A = \{-4, -1, 4, 1\} \Rightarrow A = \{-4, -1, 1\} \Rightarrow n(A) = 3$$

نکته

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آن که بین این اعضا یک نظم وجود داشته باشد، می‌توانیم ابتدا تعدادی از آن‌ها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم (۰۰۰) و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم. مثلاً می‌توانیم اعداد طبیعی دورقمی را به صورت زیر نشان دهیم:

$$A = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$$

مثال عدد اصلی هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) $A = \{-72, -70, -68, \dots, 122\}$

ب) $B = \{2, 4, 8, 16, \dots, 4096\}$

الف) در مجموعه A ، فاصله اعداد مساوی است (۲ تا ۲ است). در این حالت می‌توانیم از رابطه زیر، تعداد اعضا را حساب کنیم:

$$n(A) = \frac{\text{کوچک‌ترین عدد} - \text{بزرگ‌ترین عدد}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{122 - (-72)}{2} + 1 = \frac{194}{2} + 1 = 98 \Rightarrow n(A) = 98$$

ب) با کمی دقت متوجه می‌شویم، مجموعه B توان‌های عدد ۲ هستند. (چون فاصله آن‌ها باهم برابر نیست، پس نمی‌توانیم از رابطه بالا استفاده کنیم.)

$B = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{12}\} \Rightarrow n(B) = 12 \Rightarrow B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096\}$

مثال در مجموعه $A = \{(-50)^2, (-49)^2, (-48)^2, \dots, (+48)^2, (+49)^2, (+50)^2\}$ عدد اصلی مجموعه را محاسبه کنید.

می‌دانیم هرگاه یک عدد منفی درون پرانتز باشد و به توان زوج برسد، حاصل مثبت است. پس می‌توان گفت $(-50)^2 = (+50)^2$ و $(-49)^2 = (+49)^2$ است. با این حساب اعداد منفی این مجموعه، در واقع عضو تکراری هستند و حذف می‌شوند و مجموعه به صورت $\{(+50)^2, (+49)^2, \dots, (+2)^2, (+1)^2, (+0)^2\}$ درمی‌آید. لذا این مجموعه ۵۱ عضو دارد. (صفر هم یکی از اعضا است).

مجموعه تهی

♦ به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی می‌گوییم و آن را با علامت \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم. دقت کنید مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ یا $\{\emptyset\}$ تهی نیستند.

به‌عنوان مثال، مجموعه دایناسورهای باغ وحش مشهد، یک مجموعه تهی است، زیرا هیچ دایناسوری در باغ وحش مشهد وجود ندارد، پس این مجموعه هیچ عضوی نداشته و تهی است.

مثال کدام مجموعه، تهی است؟

الف) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰

ب) مجموعه اعداد منفی که جذر دارند.

ج) مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از صفر

مجموعه الف) دارای عضو است (اعداد ۱ تا ۹۹۹) ولی هیچ عدد منفی جذر ندارد، پس مجموعه ب) و ج) تهی هستند.

تذکر

برخی مجموعه‌ها، بی‌شمار عضو دارند. (یعنی عضوهای آن‌ها تمام نمی‌شوند.) به این مجموعه‌ها، **مجموعه‌های نامتناهی** می‌گوییم و برای نشان دادن آن‌ها، پس از نوشتن تعدادی از اعضا، سه نقطه قرار می‌دهیم.

مثال مجموعه ضرب‌های طبیعی عدد ۵ را بنویسید.

اعضای این مجموعه هیچ‌جا به پایان نمی‌رسند. $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ مجموعه ضرب‌های طبیعی عدد ۵

تذکر

اگر عضوهای یک مجموعه، قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسند (حتی اگر تعداد آن‌ها خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه، **مجموعه متناهی** می‌گوییم. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰۰ با این که تعداد عضوهای زیادی دارد، اما چون شمارش عضوهای آن بالاخره به انتها می‌رسد، به آن، **مجموعه متناهی** می‌گوییم. $\{1, 2, 3, \dots, 999999\}$ مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰۰

مجموعه کتاب‌های

سیر تا پیاز

سوالات تشریحی

- ۲۱۰ ◀ فصل اول: مجموعه‌ها
- ۲۲۵ ◀ فصل دوم: عددهای حقیقی
- ۲۳۶ ◀ فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه
- ۲۵۸ ◀ فصل چهارم: توان و ریشه
- ۲۷۱ ◀ آزمون نوبت اول (شامل فصل‌های ۱ تا ۴)
- ۲۷۴ ◀ فصل پنجم: عبارتهای جبری
- ۲۸۶ ◀ فصل ششم: خط و معادله‌های خطی
- ۲۹۷ ◀ فصل هفتم: عبارتهای گویا
- ۳۰۷ ◀ فصل هشتم: حجم و مساحت
- ۳۱۹ ◀ آزمون نوبت دوم (شامل کل کتاب)

۳۲۲

پاسخنامه تشریحی

فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

الف به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

(۱) کدام یک از موارد زیر یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟ مجموعه‌ها را با اعضاء مشخص کنید و در صورت مجموعه نبودن دلیل آن را بنویسید.
الف) کل حالت‌های ممکن برای پرتاب یک تاس.

ب) سه عدد کوچک بین ۰ و ۱.

ج) عددهای یک‌رقمی فرد.

د) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۰.

ه) چهار آبشار در کشور ایران.

و) اعداد طبیعی ۳ رقی که مجذور کامل بوده و از ۲۰۰ کوچک‌تر باشند.

(۲) باتوجه به شرط متمایز بودن اعضای یک مجموعه، مجموعه‌های زیر را اصلاح کنید.

الف) $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{10}, \frac{12}{12} \right\}$ اصلاح شده $\rightarrow A = \{ \quad \quad \quad \}$

ب) $B = \{ 5^{-1}, 5^{\circ}, 1^{\circ}, 1^{\circ} \}$ اصلاح شده $\rightarrow B = \{ \quad \quad \quad \}$

ج) $C = \left\{ \sqrt{10000}, -3, -25, \frac{-15}{3}, (-5)^2 \right\}$ اصلاح شده $\rightarrow C = \{ \quad \quad \quad \}$

د) $D = \left\{ a, b, 0/6, \frac{b^3}{b^2}, 0/4, \frac{3}{5}, \frac{a^3 b}{ba^2} \right\}$ اصلاح شده $\rightarrow D = \{ \quad \quad \quad \}$

(۳) اعضای هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) مجموعه A: مجموعه اعداد اول بین ۲۰ تا ۴۰.

ب) مجموعه B: مجموعه چهارضلعی‌هایی که متوازی‌الاضلاع هستند.

ج) مجموعه C: مجموعه حرف الفبای فارسی که ۳ نقطه دارند.

د) مجموعه D: مجموعه اعدادی که حسابی باشند اما طبیعی نباشند.

ه) مجموعه E: مجموعه اعداد صحیحی که مجذور آن‌ها از عدد ۶ کوچک‌تر باشد.

و) مجموعه F: مجموعه اعداد مربع کامل دو رقی.

(۴) باتوجه به هریک از موارد زیر، مشخص کنید نام هر مجموعه کدام است؟

A: مجموعه اعداد اول زوج

B: مجموعه مضارب ۲ رقی ۵

C: مجموعه اعداد اول بین ۷۰ و ۹۰

D: مجموعه اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ و کوچک‌تر از ۴-

E: مجموعه جواب‌های معادله $3x - 9 = 3$

(۵) تعداد اعضای هر مجموعه را در مقابل آن بنویسید.

$\square = \{-5, -6, -7, -8, -9\}$

$\square = \{10, 15, 20, \dots, 95\}$

$\square = \{83, 71, 79, 89, 73\}$

$\square = \{4, (-2)^2, -(-3)^2 + 13\}$

$\square = \left\{ 2, -\left(\frac{-4}{2}\right) \right\}$

M = { تعداد اعضا } \rightarrow { مضارب اول عدد ۱۱ }

N = { تعداد اعضا } \rightarrow { اعداد طبیعی بین ۱ و ۲ }

P = { تعداد اعضا } \rightarrow { مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰ }

Q = { تعداد اعضا } \rightarrow { اعداد فرد بین ۵ تا ۱۶ }

R = { تعداد اعضا } \rightarrow $\left\{ (3-4)^5, \frac{7}{12-5}, \frac{3}{5-6}, (0/125)^{\circ} \right\}$

۶) می‌دانیم تعداد اعضای مجموعه M ، ۴ تا است؛ با توجه به این موضوع کدام اعداد می‌توانند به جای ؟ قرار بگیرند، آن‌ها را مشخص کنید.

$$M = \left\{ \frac{-1}{0/1}, -2 \times -5, 10^2, ? \right\}$$

$$\frac{900}{\sqrt{36}} \quad \frac{\sqrt{1600}}{-4} \quad \sqrt{100} \quad -(-100) \quad \sqrt{25} \quad -\sqrt{100}$$

۷) در هر قسمت با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار ون آن‌ها را رسم کنید.

الف) $A = \{ \text{مقسوم‌علیه‌های عدد } 30 \}$

ب) $L = \{ \text{مضارب } 5 \text{ کم‌تر از } 55 \}$

ج) $S = \{ 6, 19, 21 \}$

۸) در هر قسمت نمودار ون مربوط به مجموعه‌های داده شده را رسم کنید.

الف) $A = \{ a, d, q, h, i \}$

$B = \{ i, w, h, t \}$

ب) $M = \{ -1, 0, 1 \}$

$N = \{ \text{اعداد طبیعی مجذور کامل یک‌رقمی} \}$

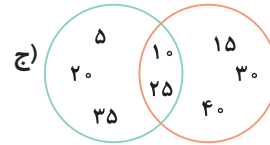
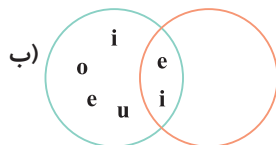
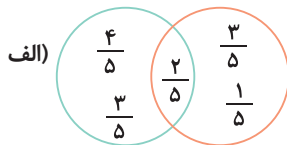
ج) $S = \{ \text{اعداد حسابی کوچک‌تر از } 3 \}$

$T = \{ \text{اعدادی که نه مرکب باشد و نه اول} \}$

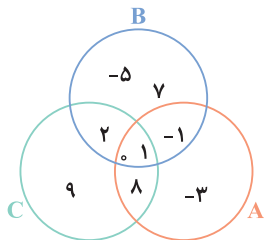
د) $E = \{ \text{اعداد اول یک‌رقمی} \}$

$F = \{ \text{مقسوم‌علیه‌های اول عدد } 160 \}$

۹) تعیین کنید کدام نمودارهای ون صحیح رسم نشده‌اند (با ذکر دلیل)، سپس آن‌ها را اصلاح کنید.



۱۰) با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه‌های A, B, C را به تفکیک بنویسید.



۱۱) کدام یک از مجموعه‌های زیر تک‌عضوی و کدام یک تهی هستند؟

الف) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲

ب) مجموعه اعدادی که طبیعی باشند اما حسابی نباشند.

ج) مجموعه مضارب دورقمی عدد ۱۰۰

د) مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۱

ه) مجموعه اعداد طبیعی بین دو عدد طبیعی زوج متوالی مشخص

و) مجموعه مضارب اول عدد ۵۱

۱۲) یک مجموعه بدون عضو و یک مجموعه تک‌عضوی را مشخص کنید.

۱۳) در هر قسمت دور عبارت درست خط بکشید.

$A = \{ \text{مقسوم‌علیه‌های فرد عدد } 40 \}$

$8 \notin A \quad 1 \in A \quad 5 \notin A$

$B = \{ 1^1, (-1)^2, 1^3, (-1)^4 \}$

$1 \in B \quad 4 \in B \quad -1 \notin B$

$C = \{ \text{مضارب عدد } 5 \text{ که بر } 4 \text{ بخش‌پذیر باشند} \}$

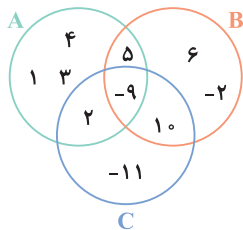
$25 \in C \quad 30 \notin C \quad 140 \in C$

$D = \{ 7, 0/9, b, \pi \}$

$\sqrt{49} \in D \quad 3/14 \in D \quad \frac{18}{20} \notin D$

$S = \{ \text{شمارنده‌های زوج عدد } 33 \}$

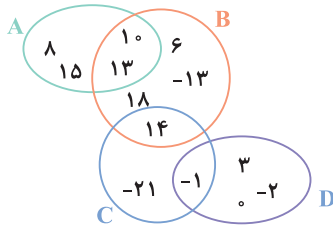
$0 \in S \quad \emptyset \in S \quad 3 \in S$



۱۴) باتوجه به نمودار ون زیر درستی یا نادرستی هر قسمت را مشخص کنید.

- (الف) $5 \in A$
 (ب) $-9 \notin A$
 (ج) $6 \notin C$
 (د) $2, -9 \in A, C$
 (و) $2 \in B, C$
 (ز) $-9 \in A, B, C$
 (ح) $-11 \notin B$

۱۵) جاهای خالی را با \in و \notin پر کنید.

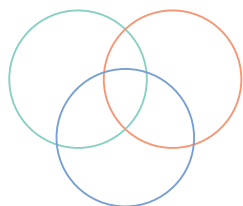


- (الف) $4 \in D$
 (ب) $\frac{\sqrt{81}}{9} \in C$
 (ج) $-13 \in C$
 (د) $(-1)^4 - (-1)^2 \in D$
 (ه) $10 \in A$
 (و) $-2 \in B$
 (ز) $2^4 \in B$
 (ح) $4^3 - 6^5 \in C$

۱۶) باتوجه به شکل مقابل، مجموعه‌ای بنویسید که اعضای آن:

- (الف) هم در A و هم در B عضو باشد.
 (ب) فقط در یکی از مجموعه‌ها قرار داشته باشند.
 (ج) در مجموعه C نباشد.
 (د) در مجموعه B قرار نداشته باشد.
 (ه) در هر ۳ مجموعه عضو باشد.

۱۷) باتوجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار ون را کامل کنید.



- $A = \{-1, 2, 5, -3, 4, -5\}$
 $B = \{-5, -8, -7, 6, -1, 2\}$
 $C = \{9, -2, 1, 8, 5, -3, 3\}$

ب) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

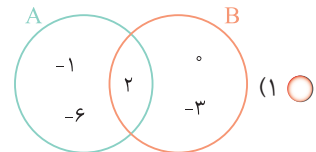
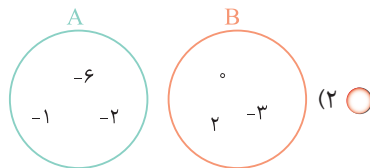
- ۱۸) مجموعه مضارب عدد ۵ با یکان ۲، یک مجموعه تهی است.
- ۱۹) «چهار عدد فرد متوالی» یک مجموعه را مشخص می‌کنند.
- ۲۰) مجموعه «متوازی‌الاضلاع‌هایی که تمام اضلاع و تمام زاویه‌های آن برابر باشند»، یک مجموعه تهی است.
- ۲۱) $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک‌عضوی است.
- ۲۲) مجموعه $\{3, (-2)^3, \frac{4+2}{2}, \sqrt{64}\}$ چهار عضو دارد.
- ۲۳) باتوجه به مجموعه $\{1, 7, 26, 60, 120\}$ می‌دانیم که $17 \in A$ و $25 \notin A$
- ۲۴) همواره $0 \in \emptyset$
- ۲۵) باتوجه به مجموعه $S = \{3, 5, 7, 9, \dots, 99\}$ می‌دانیم که $23 \notin S$ و $32 \notin S$
- ۲۶) تعداد اعضای مجموعه $\left\{x \div y, \frac{x}{y}, x \times \frac{1}{y}\right\}$ با تعداد اعضای مجموعه $\{1^1, 1^2, 1^3, (-1)^4\}$ برابر است.
- ۲۷) شرط معرفی مجموعه‌ها، مشخص بودن اعضای آن‌ها و متمایز بودن آن‌هاست.

ج جاهای خالی را با کلمه‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.

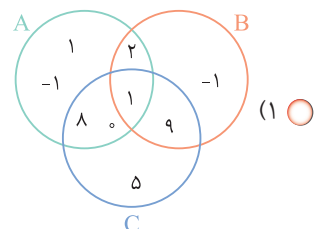
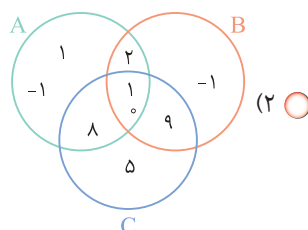
- ۲۸) تعداد اعضای مجموعه $\{(-1)^2, \frac{\sqrt{16}}{4}, -2, (-2)^\circ, 4^1\}$ برابر با است.
- ۲۹) مجموعه $\{2, 9, 1, 9, 9, \dots, 9, 6, 3\}$ دارای عضو می‌باشد.
- ۳۰) مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه می‌نامیم و آن را با نماد یا مشخص می‌کنیم.
- ۳۱) از مجموعه برای بیان و نمایش اشیاء یا اعدادی و استفاده می‌شود.
- ۳۲) مجموعه اعدادی که هم فرد باشند و هم زوج یک مجموعه است.

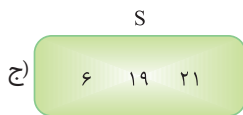
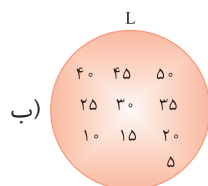
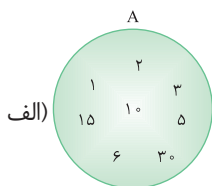
د گزینه درست را انتخاب کنید.

- ۳۳) کدام عبارت کلامی داده شده، بیان‌گر یک مجموعه تهی می‌باشد؟
- (۱) عددهای صحیح بین -۱ و +۱
- (۲) عددهای طبیعی بین -۱ و +۱
- ۳۴) جواب‌های معادله $2x + 4 = 2$ یک مجموعه را
 (۱) مشخص می‌کند.
 (۲) مشخص نمی‌کند.
- ۳۵) اگر بدانیم که $3, 5 \in \{x, y, 7, 9\}$ ، کدام گزینه درست است؟
- (۱) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$
- (۲) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$
- ۳۶) کدام مجموعه داده شده، تک‌عضوی نیست؟
- (۱) اعدادی که نه اول باشد و نه مرکب
- (۲) اعداد اول زوج دورقمی
- ۳۷) اگر بدانیم مجموعه $\{1/11, \sqrt{101}, -5^2, ?\}$ یک مجموعه دو‌عضوی است کدام عبارت می‌تواند به جای ؟ قرار گیرد؟
- (۱) $-\frac{500}{2}$
- (۲) $-\sqrt{625}$
- ۳۸) کدام نمودار ون برای مجموعه‌های $A = \{-6, -1, -2\}$ و $B = \{0, 2, -3\}$ صحیح رسم شده است؟



- ۳۹) در کدام نمودار ون $0 \in B$ می‌باشد؟





(۷)

فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

الف

(۱) الف) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) مجموعه نیست، زیرا اعضای آن کاملاً معین نیستند.

ج) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

د) مجموعه نیست، زیرا اعضای آن کاملاً معین نیستند.

ه) مجموعه نیست، زیرا اعضای آن کاملاً معین نیستند.

و) $\{121, 144, 169, 196\}$

(۲)

الف) $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right\}$ ب) $B = \{5^\circ, 5^{-1}\} = \left\{ 1, \frac{1}{5} \right\}$

ج) $C = \{-25, -3, -5, 25\}$ د) $D = \left\{ a, b, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right\}$

(۳)

الف) $A = \{23, 29, 31, 37\}$

ب) $B = \{\text{مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی، متوازی‌الاضلاع}\}$

ج) $C = \{\text{ش، چ، ژ، ث، پ}\}$

د) $D = \{0\}$

ه) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

و) $F = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

(۴)

$D = \{-5, -6, -7, -8, -9\}$

$B = \{10, 15, 20, \dots, 95\}$

$C = \{83, 71, 79, 89, 73\}$

$E = \{4, (-2)^2, -(-3)^2 + 13\}$

$A = \left\{ 2, -\left(\frac{-4}{2}\right) \right\}$

(۵)

$M = \{11\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 1$

$N = \{\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 0$

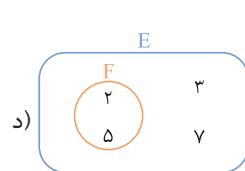
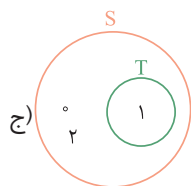
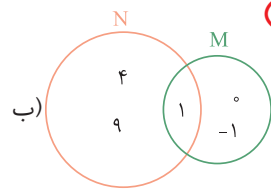
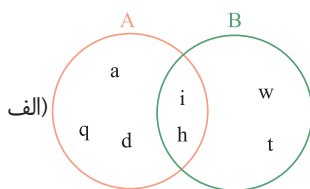
$P = \{1, 2, 5, 10\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 4$

$Q = \{7, 9, 11, 13, 15\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 5$

$R = \{-1, 1, -3\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 3$

(۶)

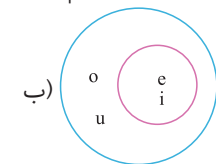
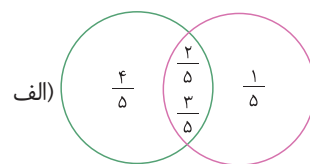
$? = \left\{ \frac{900}{\sqrt{36}} \text{ یا } \sqrt{25} \right\}$



(۸)

(۹)

الف و «ب» صحیح رسم نشده‌اند. زیرا اعضای مشترک تنها یک بار در هر نمودار و آن هم در قسمت مشترک نمودارها باید ظاهر شود.



(۱۰)

$A = \{-3, -1, 0, 1, 8\}$

$B = \{-5, -1, 0, 1, 2, 7\}$

$C = \{0, 1, 2, 8, 9\}$

(۱۱) الف) تک‌عضوی ب) تهی

ج) تهی د) تک‌عضوی

ه) تک‌عضوی و) تک‌عضوی

(۱۲) الف) مجموعه عددهای طبیعی که با مجذورشان برابرند.

ب) مجموعه اعداد نه اول و نه مرکب

(۱۳) برای مجموعه $A = \{1, 5\}$ عبارت‌های $1 \in A$ و $8 \notin A$ درست هستند.

برای مجموعه $B = \{1\}$ عبارت‌های $1 \in B$ و $-1 \in B$ درست هستند.

برای مجموعه $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ عبارت‌های $140 \in C$ و $30 \notin C$ درست هستند.

برای مجموعه $D = \{7, 9, b, x\}$ عبارت $\sqrt{49} \in D$ درست است.

برای مجموعه $S = \{\}$ هیچ‌یک از عبارت‌ها صحیح نیستند.



$$\left\{ \frac{15}{3}, \frac{-14}{3} \right\} \longleftrightarrow \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\{12, 17, 18\} \longleftrightarrow \{2^f + 2 \cdot 18^1 - 2^0, 3^2 + 3\}$$

(الف) $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ (۲)

(ب) $\begin{cases} x=15 \\ y=5 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} x-4=-3 \\ y=1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x-4=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

(د) $x = \frac{a^r b^r c}{a} \Rightarrow x = ab^r c$

(ه) $x=1$

$A = \{-1, -2, -3, -4\}$ (۳)

$B = \{-1, -2, -3, -4\} \Rightarrow A = B$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

$D = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow C = D$

$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = -2 \Rightarrow x = -5 \\ \frac{x+1}{2} = 5 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$ (۴)

$A = \{21, 24, 27\}$ (۵)

(الف) $\not\subseteq$ (ب) \subseteq (ج) $\not\subseteq$

(د) \subseteq (ه) \subseteq

$A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$ $B = \{-3, -2, -1\}$ (۶)

(الف) $\not\subseteq$ (ب) $\not\subseteq$ (ج) \subseteq

(د) \subseteq (ه) \subseteq

$\{ \} \{x\} \{y\} \{z\} \{w\} \{x, y\} \{x, z\} \{x, w\}$ (۷)

$\{y, z\} \{y, w\} \{z, w\} \{x, y, z\} \{x, y, w\} \{x, z, w\}$

$\{y, z, w\} \{x, y, z, w\}$

(الف) $\{Z \subseteq Q\}$ (ب) $\begin{cases} E \subseteq N \\ E \subseteq Q \end{cases}$ (۸)

(ج) $\{W \subseteq Z\}$ (د) $\{Q \subseteq Q\}$

(۹) برابر است.

نکته پس از آن که زیرمجموعه‌ها را نوشتیم درمی‌یابیم که تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-k$ عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر می‌باشد.

(۱۴) الف) $5 \in A$ (ب) $-9 \notin A$ (ج) $6 \notin C$
 د) $2, -9 \in A, C$ (ه) $10 \in A, C$ (و) $2 \in B, C$
 ز) $-9 \in A, B, C$ (ح) $-11 \notin B$

(۱۵) الف) $4 \notin D$ (ب) $\frac{\sqrt{81}}{9} = 1 \notin C$

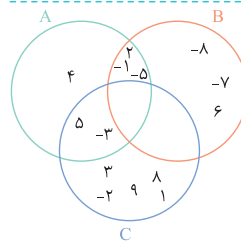
ج) $-13 \notin C$ (د) $(-1)^f - (-1)^2 \in D$

ه) $10 \in A$ (و) $-2 \notin B$

ز) $2^f \notin B$ (ح) $4^3 - 6^5 \notin C$

(۱۶) الف) $\{9, 2\}$ (ب) $\{8, 7, 6, 5\}$ (ج) $\{8, 9, 6, 5\}$

(د) $\{7, 6, 5\}$ (ه) $\{2\}$



(۱۷)

ب

(۱۸) درست (۲۱) درست (۲۴) نادرست (۲۷) درست

(۱۹) نادرست (۲۲) نادرست (۲۵) نادرست

(۲۰) نادرست (۲۳) نادرست (۲۶) درست

ج

(۳۱) مشخص - متمایز

(۳۲) چهار

(۳۲) نهی

(۳۹) $\frac{102-3}{3} + 1 = 34$

(۳۰) تهی - $\{ \}$

د

(۳۳) گزینه ۲ (۳۵) گزینه ۲ (۳۷) گزینه ۲ (۳۹) گزینه ۲

(۳۴) گزینه ۱ (۳۶) گزینه ۲ (۳۸) گزینه ۲

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

الف

(۱) $\{2, 5\} \longleftrightarrow \{80\}$ (شمارنده‌های اول عدد ۸۰)

$\{ \} \longleftrightarrow \{ \}$ (اعداد اول دورقمی زوج)

$\{16, 17, 18\} \leftrightarrow \{ \}$ (اعداد بین ۱۵ و ۱۹ که طبیعی‌اند)

(۱۰)

- $\{-2, -1\}, \{-2, 0\}, \{-2, 1\}, \{-2, 2\},$
- $\{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{-1, 2\}, \{0, 1\},$
- $\{0, 2\}, \{1, 2\}, \{-2, -1, 0\}, \{-2, -1, 1\},$
- $\{-2, -1, 2\}, \{-2, 0, 1\}, \{-2, 0, 2\}, \{-2, 1, 2\},$
- $\{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 2\}, \{-1, 1, 2\}, \{0, 1, 2\},$
- $\{-2, -1, 0, 1\}, \{-2, -1, 0, 2\}, \{-2, -1, 1, 2\}, \{-2, 0, 1, 2\},$
- $\{-1, 0, 1, 2\}, \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ب) $B = \{1\}$

$\{\}, \{1\}$

بنابراین زیرمجموعه‌های B عبارت‌اند از:

الف) $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ نوید

(۱۹)

ب) $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ آرمین

ج) $C = \{2, 3, 4, \dots\}$ محمد

آن فرد محمد بوده است.

$S = \{\}$

(۲۰)

$M = \{-9, -2, -1, 0, 7, 26\}$

$G = \{0, -1, -2\}$

$S \subseteq G \subseteq M$

الف) $A = \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$

(۲۱)

ب) $B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 2\}$

ج) $C = \{\pm x^2 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 7\}$

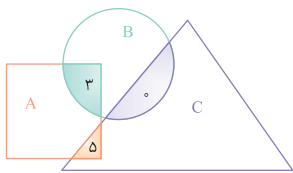
د) $E = \{1 \cdot x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{-3, 0, 3\}$

(۲۲)

$C = \{0, 5, 35\}$



$3 + 5 + 0 = 8$

الف) $A = \{30, 60, 90, 150, 180, 300, 450, 900\}$

(۲۳)

$$ab = 30 \Rightarrow \begin{cases} a=1 & b=30 \\ a=2 & b=15 \\ a=3 & b=10 \\ a=5 & b=6 \\ a=6 & b=5 \\ a=10 & b=3 \\ a=15 & b=2 \\ a=30 & b=1 \end{cases}$$

ب) $B = \{49, 72, 75, 64, 45, 24, 7\}$

$$a + b = 8 \Rightarrow \begin{cases} a=1 & b=7 \\ a=2 & b=6 \\ a=3 & b=5 \\ a=4 & b=4 \\ a=5 & b=3 \\ a=6 & b=2 \\ a=7 & b=1 \end{cases}$$

| مجموعه | تمام زیرمجموعه‌ها | تعداد اعضای مجموعه | تعداد زیرمجموعه‌ها |
|---------------|--|--------------------|--------------------|
| $\{\}$ | $\{\}$ | ۰ | ۱ |
| $\{a\}$ | $\{\}, \{a\}$ | ۱ | ۲ |
| $\{a, b\}$ | $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ | ۲ | ۴ |
| $\{a, b, c\}$ | $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ | ۳ | ۸ |

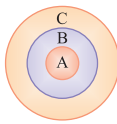
الف) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

ب) $2^5 = 32$ ج) $2^n = 128 \Rightarrow n = 7$

(۱۱) $B \subseteq A$ درست، $C \not\subseteq B$ نادرست، $C \subseteq A$ درست، $A \not\subseteq B$ درست.

(۱۲) الف) ۴ عضو دارد.

ب) یک زیرمجموعه چهارعضوی و صفر زیرمجموعه پنج‌عضوی دارد.



(۱۳) الف) $A \subseteq C$

ب) $A = B$

الف) $M = \{-6, 0, 6, 12, 18\}$

(۱۴)

ب) $S = \{4, -5, 31, 76\}$

ج) $T = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

الف) $A = \{3, 8, 15, 24, \dots\}$

(۱۵)

ب) $H = \{10, 5, 17, 37\}$

ج) $K = \left\{ \frac{7}{8}, \frac{11}{8}, \frac{15}{8}, \frac{19}{8} \right\}$

د) $P = \left\{ \frac{3}{5}, 0, -1 \right\}$

$M = \{4, 10, 28\}$

(۱۶)

$$mn = 24 \begin{cases} m=1 & n=24 \\ m=2 & n=12 \\ m=3 & n=8 \\ m=4 & n=6 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m=6 & n=4 \\ m=8 & n=3 \\ m=12 & n=2 \\ m=24 & n=1 \end{cases}$$

$M = \{-23, -8, 1, 10, 32, 61, 142, 575\}$

$N = \left\{ \frac{9}{1}, \frac{8}{2}, \frac{7}{3}, \frac{6}{4}, \frac{5}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{7}, \frac{2}{8}, \frac{1}{9} \right\}$

الف) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(۱۸)

بنابراین زیرمجموعه‌های A عبارت‌اند از:

$\{\}, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\},$

مجموعه کتاب‌های

سیر تا پیاز

سوالات تستی

- ۳۹۴ ◀ فصل اول: مجموعه‌ها
- ۴۰۶ ◀ فصل دوم: عددهای حقیقی
- ۴۱۵ ◀ فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه
- ۴۳۳ ◀ فصل چهارم: توان و ریشه
- ۴۴۳ ◀ فصل پنجم: عبارتهای جبری
- ۴۵۳ ◀ فصل ششم: خط و معادله‌های خطی
- ۴۶۴ ◀ فصل هفتم: عبارتهای گویا
- ۴۷۴ ◀ فصل هشتم: حجم و مساحت
- ۴۸۴ ◀ آزمون استعدادهای درخشان

۴۸۷

پاسخنامه تشریحی

فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

۱. مجموعه $W = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}\}$ چند عضوی است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲
۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

(۱) مجموعه اعداد گویای بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$
 (۲) مجموعه اعدادی که نه اول اند و نه مرکب
 (۳) مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از ۱
 (۴) مجموعه اعداد طبیعی بین ۳۵ و ۶۷ که بر ۳۴ بخش پذیرند.
۳. کدام مجموعه، اعضای بیش تری دارد؟

(۱) $\{۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \dots, ۲۰^۲\}$
 (۲) $\{(-۱۱)^۲, (-۱۰)^۲, (-۹)^۲, \dots, (+۱۰)^۲\}$
 (۳) $\{۱^۱, ۱^۲, ۱^۳, ۱^۴, \dots, ۱^{۱۰۰۰}\}$
 (۴) $\{۲^۴, ۴^۶, ۶^۸, ۸^۱۰, \dots, ۳۸^۴۰\}$
۴. کدام یک از اعداد زیر عضو مجموعه $A = \{۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \dots, ۴۰۱\}$ نیست؟

(۱) ۱۸۹ (۲) ۲۵۷ (۳) ۲۹۹ (۴) ۳۴۹
۵. اختلاف تعداد عضوهای مجموعه $A = \{\{a\}, \{a, a\}, \{a, a, a\}, \dots, \{a, a, a, \dots, a\}\}$ و مجموعه $B = \{\{۱\}, \{۱, ۳, ۳, ۳\}, \{۱, ۳, ۳, ۳, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵\}, ۱, ۳, ۵\}$ چند تا است؟

(۱) ۹۴ (۲) ۵ (۳) ۹۷ (۴) هیچ کدام
۶. هر یک از مجموعه‌های A و B به ترتیب چند عضو دارد؟

(۱) ۲۷ و ۳۶ (۲) ۳۵ و ۲۷ (۳) ۳۵ و ۲۶ (۴) ۳۶ و ۲۶
۷. مجموعه حروف کلمه «ساسانیا» یک مجموعه چند حرفی است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۷
۸. کدام گزینه عضو مجموعه $A = \{۱, ۲, ۹, ۲۸, ۶۵, \dots, ۱۰۰۱\}$ است؟

(۱) ۷۳۰ (۲) ۲۵۶ (۳) ۴۲۹ (۴) ۶۲۴
۹. مجموعه اعداد صحیح بین $\sqrt{۵۰}$ و $۷ - \sqrt{۷}$ و $۵۰ - \sqrt{۷}$ چند عضو دارد؟

(۱) صفر (۲) ۴۷ (۳) ۱ (۴) ۴۸
۱۰. مجموع مقادیرهایی که به جای x می‌توان قرار داد تا مجموعه $A = \{-۷, ۲, ۱۱, \frac{x-۴}{۵}\}$ سه عضوی باشد، چقدر است؟

(۱) ۱۰۴ (۲) صفر (۳) ۳۸ (۴) ۴۲
۱۱. اگر $۰ < a < ۱$ ، بزرگ‌ترین عضو $\{a, a^۲, a^۳, \dots, a^{۱۰۰}\}$ کدام است؟

(۱) a (۲) $a^{۱۰۰}$ (۳) $a^{۵۰}$ (۴) $a^{۱۱}$

(المپیاد ریاضی)

(مسابقات علمی)

(نمونه دولتی ۹۷-۹۶)

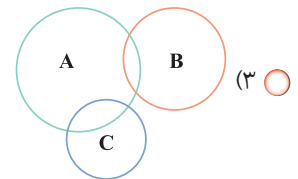
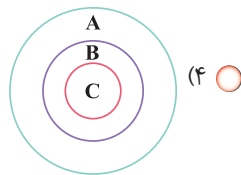
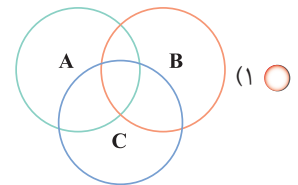
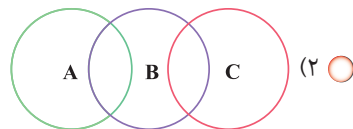
۱۲

کدامیک از گزینه‌های زیر یک مجموعه را مشخص نمی‌کند؟

- (۱) مقسوم علیه‌های یک عدد اول زوج
- (۲) ۳ عدد فرد متوالی که مجموع آنها بر ۲ بخش پذیر است.
- (۳) افرادی که در روز گذشته به سینما رفته‌اند.
- (۴) اعداد صحیح خیلی کوچک

۱۳

اگر $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b, c\}$ و $C = \{c\}$ ، کدام یک از شکل‌های زیر نمودار ون A و B و C را نشان می‌دهد؟



۱۴

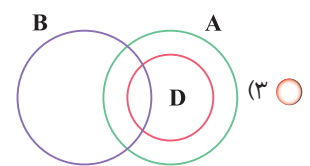
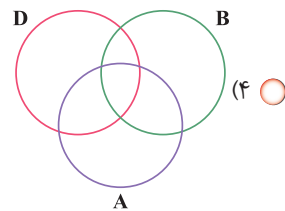
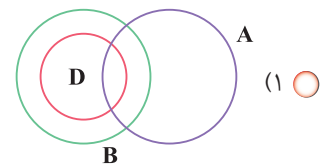
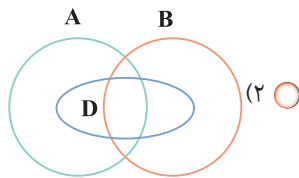
کدام شکل توصیف درستی از مجموعه‌های زیر است؟

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

$C = \{\}$

$D = \{3, 4, 7\}$



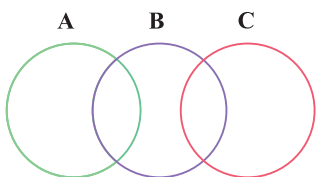
۳۹۵

فصل اول: مجموعه‌ها

۱۵

اگر بخواهیم با اعداد ۲۰ و ۳ و ۵ و ۱۱ و ۱۳ سه مجموعه به صورتی تشکیل دهیم که نمودار ون آنها به صورت مقابل باشد، این کار به چند صورت امکان پذیر است؟ (هیچ کدام از قسمت‌های نمودار، تهی نیستند.)

(آزمون ورودی دبیرستان مهاباد)



- (۲) ۲۴
- (۴) بی شمار

- (۱) ۱۲۰
- (۳) ۱۰

۱۶

مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ نسبت به جمع بسته نیست یعنی می‌توانیم دو عضو آن را با هم جمع کنیم و حاصل عضوی از A نباشد ($1 + 3 = 4$ و ۴ عضو A نیست) کدام مجموعه نسبت به ضرب بسته نیست؟

- (۲) \mathbb{W}
- (۴) شمارنده‌های عدد ۱۴۴

- (۱) \mathbb{N}
- (۳) مجموعه توان‌های طبیعی عدد ۲

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

۱۷

اگر $A \neq B$ باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) هر عضو A ، عضو B است.
 (۲) تعداد اعضای یکی از دو مجموعه، از دیگری بیشتر است.
 (۳) عضوی از یکی از این دو مجموعه، در دیگری نیست.
 (۴) هر عضو B ، عضو A است.

۱۸

کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) مجموعه \mathbb{Q} (اعداد گویا) و مجموعه اعداد که از تقسیم یک عدد طبیعی بر یک عدد صحیح به دست می‌آید، با هم برابرند.
 (۲) اگر سارا و نیما خواهر و برادر باشند، مجموعه خواهر و برادرهای این دو نفر، برابرند.
 (۳) مجموعه حروف کلمه (امینی) و مجموعه حروف کلمه (نیما) برابرند.
 (۴) مجموعه دخترخاله‌های دو پسر خاله، با هم برابرند.

۱۹

اگر $A = \{1, 2, 0\}$ ، آنگاه چند تا از عبارتهای روبه‌رو صحیح هستند؟

$\emptyset \subseteq A, \{1\} \in A, \{2\} \in A, 3 \notin A, A \in A, A \subseteq A$

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۰

مجموعه A ، کدام گزینه است؟

$A = \{-x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < \frac{5}{4}\}$

- (۱) $\{-1, -2\}$ (۲) $\{0, 1, 2, 3\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{0, -1, -2\}$

۲۱

چند مجموعه به جای A می‌توان نوشت به صورتی که رابطه زیر برقرار باشد؟

$\{2, 5, 7\} \subseteq A \subseteq \{2, 5, 6, 7, 9\}$

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۲

مجموعه $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل ۸ و ۷ باشند ولی شامل ۵ نباشند؟

(آزمون راولپی تیزهوشان)

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۶۴ (۴) ۱۶

۲۳

اگر $A = \{-x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{-x^3 \mid x \in A\}$ ، کدام گزینه عضوهای مجموعه B را نشان می‌دهد؟

(تیزهوشان)

- (۱) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (۲) $\{-3, 1, 0\}$ (۳) $\{-1, 0, 2, 7\}$ (۴) $\{1, 0, 1, 0, 1, 8\}$

۲۴

باتوجه به مجموعه‌های زیر، تعیین کنید حاصل $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ کدام است؟

(آزمون پیشرفت تحصیلی تیزهوشان ۹۵ - ۹۴)

$A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 100\}$ $B = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}, -100 < k \leq 100\}$

- (۱) $\frac{100}{201}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{20}{201}$ (۴) $\frac{5}{101}$

۲۵

چند زیرمجموعه ۳ عضوی از اعداد طبیعی وجود دارند که حاصل ضرب اعضای آن‌ها در هم برابر ۴۵ شود؟

(آزمون استعدادهای درفشان)

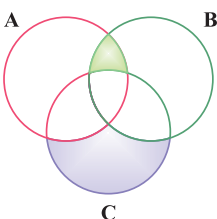
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۶

مجموعه‌های $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$ و $B = \{x + 12 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 21\}$ و $C = \{15, 16, 17, \dots, 35\}$ را در نظر بگیرید. باتوجه به شکل ناحیه‌های رنگی کلاً چند عضو دارند؟

(نمونه دولتی یزد ۹۶ - ۹۵)

- (۱) ۷ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۴



فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

۱

می‌دانیم $\emptyset = \{ \}$ می‌باشد. پس داریم:

۴ ۳ ۲ ۱

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \Rightarrow$$

تعداد اعضا، ۴ تا می‌باشد.

۲

۴ ۳ ۲ ۱

در گزینه (۱) بی‌شمار عدد گویا بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$ وجود دارد. در گزینه (۲) مجموعه‌ای عددی که نه اول و نه مرکب هستند، دارای یک عضو «عدد» است. در گزینه (۳) نیز عدد صفر، عددی حسابی و کوچک‌تر از یک است. پس این مجموعه نیز یک عضو دارد. اما در گزینه (۴)، هیچ عددی بین ۳۵ و ۶۷ وجود ندارد که بر ۳۴ بخش پذیر باشد. اولین عدد بعد از ۳۴، عدد $2 \times 34 = 68$ می‌باشد که بر ۳۴ بخش پذیر است. پس این مجموعه تهی است.

۳

۴ ۳ ۲ ۱

نکته

تعداد اعضا در یک سری منظم (یعنی یک سری از اعداد که دارای فاصله برابر از هم می‌باشند) مساوی است با:

$$+1 = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}}$$

تعداد اعضای مجموعه گزینه (۱) از ۱ تا ۲۰ یعنی ۲۰ تا می‌باشد. در مجموعه گزینه (۲) چون اعداد منفی داخل پرانتز به توان دو رسیده‌اند با اعضای که مثبت هستند و به توان دو رسیده‌اند، یکسان می‌باشند، پس اعضای مجموعه گزینه (۲) از 0^2 تا 11^2 است یعنی ۱۲ عضو دارد. در گزینه (۳) تمام اعضا برابر یک می‌باشند، پس این مجموعه فقط یک عضو دارد. در گزینه (۴)، تعداد اعضای مجموعه داده شده به تعداد پایه‌ها یعنی اعداد $2, 4, 6, \dots, 38$ می‌باشد.

مقدار این اعداد که سری منظم هستند، برابر است با:

$$+1 = \frac{38 - 2}{2} + 1 = 19$$

پس تعداد اعضای مجموعه گزینه (۱) از همه بیشتر است.

۴

۴ ۳ ۲ ۱

نکته

در یک سری از اعداد که فاصله اعداد از هم مساوی باشند. (سری منظم)، اگر بخواهیم بدانیم که آیا عددی عضو آن سری از اعداد

می‌باشد یا نه، باید آن عدد را منهای عدد اول کرده و تقسیم بر فاصله نماییم. اگر عدد حاصل، عددی صحیح شد، آن عدد عضو آن سری از اعداد می‌باشد. گزینه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم. فاصله بین اعداد برابر ۴+ و عدد اول نیز برابر ۱۷ می‌باشد.

$$\text{گزینه (۱): } 189 \Rightarrow \frac{189 - 17}{4} = \frac{172}{4} = 43 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه (۲): } 257 \Rightarrow \frac{257 - 17}{4} = \frac{240}{4} = 60 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه (۳): } 299 \Rightarrow \frac{299 - 17}{4} = \frac{282}{4} = \frac{141}{2} \quad \times$$

$$\text{گزینه (۴): } 349 \Rightarrow \frac{349 - 17}{4} = \frac{332}{4} = 83 \quad \checkmark$$

پس عدد گزینه (۳) یعنی ۲۹۹ عضو این مجموعه نمی‌باشد.

۵

۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم تکرار عضو در تعداد اعضای مجموعه‌ها بی‌تأثیر است. در مجموعه A، تمام اعضای مجموعه با $\{a\}$ برابر هستند؛ پس مجموعه A، فقط یک عضو دارد. اما در مجموعه B داریم:

$$B = \left\{ \{1\}, \{1, 3, 3, 3\}, \{1, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}, \{1, 3, 5\} \right\}$$

$$= \left\{ \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 5\} \right\}$$

این مجموعه دارای ۶ عضو می‌باشد، پس تفاوت بین اعضای دو مجموعه برابر است با:

$$6 - 1 = 5$$

۶

۴ ۳ ۲ ۱

$$\text{تعداد اعضای مجموعه A} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{15 - (-19)}{1} + 1$$

$$= 15 + 19 + 1 = 35$$

$$\text{تعداد اعضای مجموعه B} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{78 - 0}{3} + 1 = 26$$

۷

۴ ۳ ۲ ۱

حروف تکراری را یکبار حساب می‌کنیم. مجموعه حروف این کلمه عبارتند از: $\{س, ا, ن, ی\}$ ، پس این مجموعه ۴ عضو دارد.

۸

۴ ۳ ۲ ۱

$$A = \{1, 2, 9, 28, 65, \dots, 1001\}$$

$$0^2 + 1, 1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1, \dots, 1001^2 + 1$$

عدد 73^2 طبق الگوی بالا برابر است با: $73^2 + 1 = 93^2$. بنابراین عدد 73^2 عضو این مجموعه می‌باشد.

۹

۴ ۳ ۲ ۱

$$7 - \sqrt{50} = 7 - \text{(هفت و خورده‌ای)} \Rightarrow -1 < 7 - \sqrt{50} < 0$$

$$50 - \sqrt{7} = 50 - \text{(دو و خورده‌ای)} \Rightarrow 47 < 50 - \sqrt{7} < 48$$

پس اعداد صحیح بین این دو عدد، عبارتند از: $0, 1, 2, \dots, 47$
که تعداد آن‌ها برابر ۴۸ عضو می‌باشد.

۱۰

۴ ۳ ۲ ۱

باید $\frac{x-4}{5}$ را با هریک از اعضای دیگر مساوی قرار دهیم و مقادیر مختلف برای x را بیابیم.

$$\frac{x-4}{5} = -7 \Rightarrow x-4 = -35 \Rightarrow x = -31$$

$$\frac{x-4}{5} = 2 \Rightarrow x-4 = 10 \Rightarrow x = 14$$

$$\frac{x-4}{5} = 11 \Rightarrow x-4 = 55 \Rightarrow x = 59$$

$$x = (-31) + 14 + 59 = 42$$

۱۱

۴ ۳ ۲ ۱

نکته

اگر $-1 < a < 0$ باشد و توان‌های a اعدادی فرد باشند، با افزایش توان‌های a ، حاصل بزرگ‌تر می‌شود. یعنی: $a^1 < a^3 < a^5 < \dots$. ولی دقت شود، تمام این اعداد منفی هستند.

اگر $-1 < a < 0$ باشد و توان‌های a اعدادی زوج باشند، با افزایش توان‌های a ، حاصل کوچک‌تر می‌شود. یعنی: $a^2 > a^4 > a^6 > \dots$. تمام این اعداد مثبت هستند.

طبق نکته بالا، باید توان a ، عددی زوج و کمتر باشد. بنابراین a^5 از همه بزرگ‌تر است.

۱۲

۴ ۳ ۲ ۱

گزینه (۱) مجموعه $\{2\}$ می‌باشد. گزینه (۲) مجموعه تهی می‌باشد؛ چرا که مجموع سه عدد فرد، عددی فرد می‌شود که بر ۲ بخش‌پذیر نیست. در گزینه (۳) افرادی که روز گذشته به سینما رفته‌اند، معلوم و تعریف شده و قابل شمارش هستند. اما در گزینه (۴) تعریف دقیق و درستی از اعداد صحیح خیلی کوچک بیان نشده است و این عبارت مجموعه نیست.

۱۳

۴ ۳ ۲ ۱

باتوجه به اعضای هر سه مجموعه، داریم: $C \subseteq B \subseteq A$. پس شکل گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۱۴

۴ ۳ ۲ ۱

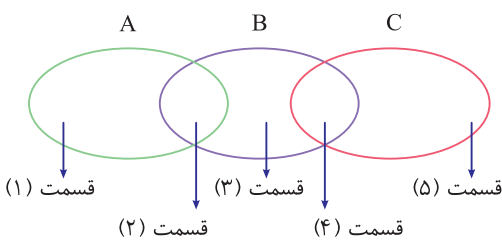
اعضای مجموعه D همگی عضوی از مجموعه B هستند. پس $D \subseteq B$ می‌باشد. در بین گزینه‌ها، فقط در گزینه (۱) D زیرمجموعه B است. همچنین $B \cap A$ دارای اعضای مشترک و D با A نیز دارای اعضای مشترک می‌باشند، که این مورد نیز در شکل گزینه (۱) نشان داده شده است.

۱۵

۴ ۳ ۲ ۱

نمودار داده شده از ۵ قسمت تشکیل شده است که طبق گفته مسئله این قسمت‌ها حتماً حداقل یک عضو دارند. همچنین چون تعداد اعداد داده شده، ۵ تا است، پس هر قسمت از نمودار فقط یک عضو دارد. چون اعضای هر قسمت نیز نباید تکراری باشند، سؤال مانند این است که با ۵ رقم چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار می‌توان ساخت. برای پاسخ داریم:

$$\text{حالت } 1 \times \text{حالت } 2 \times \text{حالت } 3 \times \text{حالت } 4 \times \text{حالت } 5 = 120$$



۱۶

۴ ۳ ۲ ۱

= شمارنده‌های عدد ۱۴۴

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144\}$$

مجموعه خیلی از موارد مانند ضرب دو عدد ۷۲ و ۱۴۴ را شامل نمی‌شود.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

۱۷

۴ ۳ ۲ ۱

اگر $A \neq B$ نباشد یعنی A زیرمجموعه B نیست و یا B زیرمجموعه A نیست و یا هیچ‌کدام زیر مجموعه آن یکی نمی‌باشد. پس حتماً عضوی از یکی از این دو مجموعه، در دیگری نیست.

۱۸

۴ ۳ ۲ ۱

در گزینه (۱) تعریف مجموعه اعداد گویا (Q) یعنی تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد صحیح غیرصفر دیگر، اما مجموعه دیگر که تعریف آن، تقسیم یک عدد طبیعی بر یک عدد صحیح می‌باشد، یعنی این که اگر

در این سؤال اعداد ۷ و ۸ باید در زیر مجموعه وجود داشته باشند و عدد ۵ نباید در زیر مجموعه باشد، پس هر سه عضو را کنار می‌گذاریم. بنابراین چون $n(A) = 6$ می‌باشد، پس تعداد زیرمجموعه‌های A با این شرایط برابر است با:

۴ ۳ ۲ ۱

$$\begin{aligned} -2 \leq x < 3, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x^2 + 1 &\xrightarrow{x=-2} -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \\ &\xrightarrow{x=-1} -(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ &\xrightarrow{x=0} -(0)^2 + 1 = 1 \\ &\xrightarrow{x=1} -(1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ &\xrightarrow{x=2} -(2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \{-3, 0, 1\}$

در ادامه اعضای مجموعه B را با توجه به مجموعه A مشخص می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -x^3 &\xrightarrow{x=-3} -(-3)^3 = -(-27) = 27 \\ &\xrightarrow{x=0} -(0)^3 = 0 \\ &\xrightarrow{x=1} -(1)^3 = -1 \end{aligned} \Rightarrow B = \{-1, 0, 27\}$$

۴ ۳ ۲ ۱

$$\begin{aligned} 3k+2 &\xrightarrow{k=1} 3 \times 1 + 2 = 5 \\ &\xrightarrow{k=2} 3 \times 2 + 2 = 8 \\ &\xrightarrow{k=3} 3 \times 3 + 2 = 11 \\ &\vdots \\ &\xrightarrow{k=100} 3 \times 100 + 2 = 302 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \{5, 8, 11, \dots, 302\}$

باتوجه به این که مجموعه B مضارب صحیح ۵ می‌باشد و در سؤال تعداد اعضای $A \cap B$ را می‌خواهد، پس باید مضارب ۵ مجموعه A را بیابیم.

$$A = \underbrace{\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, \dots, 302\}}_{+15}$$

\Rightarrow اعضای مجموعه A که مضرب ۵ هستند.

تعداد = $\frac{290-5}{15} + 1 = 19 + 1 = 20$

$n(A \cap B) = 20$

پس

همچنین تعداد اعضای مجموعه B از $k = -99$ تا $k = 1000$ می‌باشد.

پس تعداد اعضای B برابر است با:

$n(B) = \frac{1000 - (-99)}{1} + 1 = 199 + 1 = 200$

$\Rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$

مخرج کسر صفر نیز باشد، قابل قبول است. پس این دو مجموعه برابر نیستند. در گزینه (۲) مجموعه خواهرهای نیما برابر است با {سارا} و مجموعه برادرهای سارا برابر است با {نیما} که با هم برابر نیستند. در گزینه (۳) باتوجه به این که در کلمه آمینی، حرف «ی» دو بار تکرار شده، یکی از آن‌ها را حذف می‌کنیم. بنابراین مجموعه کلمه «امینی» و کلمه «نیما»، هر دو برابرند با: {ن، ی، م، ا} و با هم برابرند. در گزینه (۴) فرض کنید علی و احمد دو پسرخاله باشند، حال به نمودار زیر توجه کنید:



بنابراین مجموعه دخترخاله‌های علی برابر است با {فاطمه، زهرا} ولی مجموعه دخترخاله‌های احمد برابر است با {سعیده، مریم}. پس با هم برابر نیستند.

۴ ۳ ۲ ۱

عبارت‌های زیر صحیح هستند: $\emptyset \subseteq A, 3 \notin A, A \subseteq A$

۴ ۳ ۲ ۱

$$0 \leq x < \frac{5}{2}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow -x=0 \\ x=1 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow A = \{0, -1, -2\} \\ x=2 \Rightarrow -x=-2 \end{cases}$$

۴ ۳ ۲ ۱

نکته اگر $C \subseteq A \subseteq B$ باشد، تعداد مجموعه‌هایی که می‌توان به جای A نوشت برابر است با $2^{n(B \cup C)} - 2^{n(B \cap C)}$ که در آن $n(B \cup C)$ برابر است با تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه B و C و $n(B \cap C)$ برابر است با تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه B و C .

$C = \{2, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 7, 9\}$

$\Rightarrow \begin{cases} C \cup B = \{2, 5, 6, 7, 9\} \Rightarrow n(C \cup B) = 5 \\ C \cap B = \{2, 5, 7\} \Rightarrow n(C \cap B) = 3 \end{cases}$

\Rightarrow تعداد مجموعه‌های $A = 2^5 - 2^3 = 2^2 = 4$ تا

۴ ۳ ۲ ۱

نکته در این گونه سؤالات که می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه A را بیابیم که n عضو خاص از A را باید داشته باشند و m عضو خاص از A را نداشته باشند، حاصل برابر است با: $2^{n(A) - (m+n)}$ که در آن $n(A)$ تعداد اعضای مجموعه A می‌باشد.